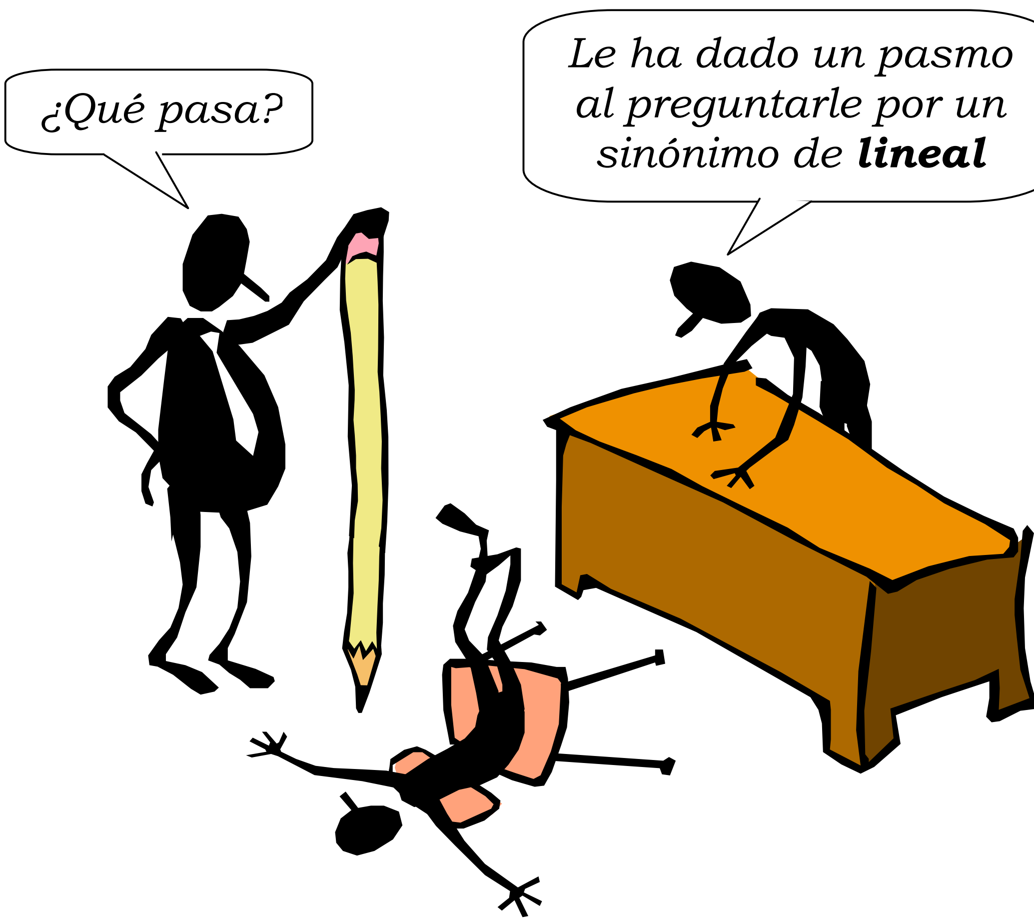
Introducción



El artículo neutro "lo"

El artículo neutro "lo" se ha inventado porque es necesario según qué cosa queramos decir; ***por ejemplo,*** no es lo mismo decir "caótico" que "lo caótico". La supresión inadecuada del artículo "lo" puede generar notable confusión, porque no es lo mismo decir ***estudio caótico*** que decir ***estudio de lo caótico***.

Así las cosas, para que lo sustancial se asimile adecuadamente desde el principio, sería bueno que los profesores de Matemáticas dejáramos de hablar de ***Álgebra Lineal*** y habláramos de ***Álgebra de lo Lineal***, pues de inmediato los alumnos nos preguntarían por ***lo lineal*** y se sorprenderían de que "lo lineal" sea tan importante como para dedicarle decenas de horas de estudio.

Ojo con la palabra "lineal"

En el lenguaje coloquial la palabra "lineal" se usa a veces como sinónimo de "constante": cuando se dice que los salarios de una empresa han sufrido una subida "lineal" de "k" euros, quiere decirse que todos aumentan su salario la misma cantidad "k"; o sea, para todo el mundo sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = k + (\text{Salario Viejo})$$

No obstante, si buscas la palabra "lineal" en el diccionario de la Real Academia, verás que dice:

Lineal: (adjetivo) perteneciente a la ***línea***

El diccionario dedica a la palabra "línea" casi una página, pero entre el móntón de cosas que se dicen sobre "línea" no hay nada que permita usar la palabra "lineal" como sinónimo de "constante".

ESCÚLPELO EN EL CEREBRO

En Matemáticas, "lineal" es sinónimo de "proporcional"

Por ejemplo, una subida ***lineal*** del 25 % en el salario significa que si ganas 120 te suben 30 (pues el 25 % de 120 es 30) y pasas a ganar 150, y si ganas 300 te suben 75 (pues el 25 % de 300 es 75) y pasas a ganar 375; es decir, sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = (\text{Salario Viejo}) \times (1 + \frac{25}{100}) = 1'25 \times (\text{Salario Viejo})$$

Atent@: imagina que fueras tú el que a final de mes se encarga de pagar a la gente de una empresa que tiene "n" trabajadores cuyos *salarios base* respectivos son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siendo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ los respectivos *complementos salariales*. Para gestionar la ***información*** que contienen los "n" números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y los "n" números $y_1, y_2, \ldots, y_n$, seguro que se te ocurriría ponerlos ***ordenadamente*** en sendas ***cajas*** "A" y "B":

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ..... & x_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de salarios base}$$
$$B = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & ..... & y_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de complementos salariales}$$

Aunque no tuvieras ni idea de Álgebra de lo Lineal, seguro que te inventarias la ***operación*** consistente en ***sumar cajas***, pues eso te permitiría obtener una tercera caja "P" que te diría lo que debes pagar a cada trabajador a final de mes:

$$P = A + B = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ..... & x_n \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & ..... & y_n \end{bmatrix}}_{B} =$$
$$= \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & ..... & x_n+y_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de salarios totales}$$

En este contexto, si en la negociación del convenio colectivo se pactan respectivas subidas ***lineales*** del 25 % y el 18 % en los *salarios base* y en los *complementos salariales*, deberás cambiar las ***cajas*** que almacenan la información relativa a esos asuntos: la nueva ***caja*** de *salarios base* será

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & ..... & 1'25.x_n \end{bmatrix}$$

y la nueva ***caja*** de *complementos salariales* será

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1'18.y_1 & 1'18.y_2 & ..... & 1'18.y_n \end{bmatrix}$$

Además, incluso sin saber nada de Álgebra de lo Lineal, seguro que te inventarías la ***operación*** consistente en ***multiplicar una caja por un número***, pues dirías que la caja A_1 se obtiene multiplicando la caja "A" por el número 1'25, y la caja B_2 se obtiene multiplicando la caja "B" por el número 1'18 ..... y sin ningún pudor escribirías:

$$A_1 = 1'25 \bullet A \;\; ; \;\; B_1 = 1'18 \bullet B$$

Así las cosas, llegado fin de mes, podrías obtener la nueva caja P_1 de salarios totales:

$$P_1 = A_1 + B_1 =$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & ..... & 1'25.x_n \end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1'18.y_1 & 1'18.y_2 & ..... & 1'18.y_n \end{bmatrix}}_{B_1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1'25.x_1+1'18.y_1 & 1'25.x_2+1'18.y_2 & ..... & 1'25.x_n+1'18.y_n \end{bmatrix} =$$
$$= 1'25 \bullet A + 1'18 \bullet B$$

El Álgebra, para expresar de modo rápido y eficiente que la ***información*** contenida en la caja P_1 es suma de las respectivas ***informaciones*** obtenidas al multiplicar la caja "A" por un número (el 1'25) y la caja "B" por otro número (el 1'18), dirá que P_1 es ***combinación lineal*** de "A" y "B".

Como escribir $P_1 = A_1 + B_1$ es lo mismo que escribir $P_1 = 1 \bullet A_1 + 1 \bullet B_1$, también diremos que P_1 es combinación lineal de A_1 y A_2, pues la ***información*** contenida en P_1 es suma de las respectivas ***informaciones*** obtenidas al multiplicar la caja A_1 por un número (el 1) y la caja B_1 por otro número (el 1).

Del mismo modo, para expresar que $P = A + B = 1 \bullet A + 1 \bullet B$ diremos que "P" es combinación lineal de "A" y "B".

¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal?

Estudiamos Álgebra de lo Lineal porque la vida está llena de ***fenómenos lineales*** que tienen que ver con todas las ramas de la Ciencia y del quehacer humano, nadie puede sustraerse de "lo" lineal o proporcional.

Por ejemplo, si vas de compras a un hipermercado eres protagonista de un ***fenómeno lineal***, pues si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ son los precios unitarios (sin impuestos) de los "n" bienes (tomates, pan, etc.) que compras, y $K_1, K_2, \dots, K_n$ son las correspondientes cantidades compradas de cada uno de ellos, el valor "V" de tu compra es

$$V = \gamma_1.K_1 + \gamma_2.K_2 + \dots + \gamma_n.K_n$$

que es suma de un número $\gamma_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\gamma_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\gamma_n.K_n$ proporcional a K_n.

Del mismo modo, si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son los respectivos beneficios unitarios que obtiene el hipermercado por cada unidad que compras, el beneficio total "B" obtenido gracias a tu compra es

$$B = \delta_1.K_1 + \delta_2.K_2 + \dots + \delta_n.K_n$$

que es suma de un número $\delta_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\delta_2.K_2$ proporcional a K_2.... y de un número $\delta_n.K_n$ proporcional a K_n.

La cantidad "C" que al hipermercado le cuesta tu compra es

$$\begin{aligned} C &= (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + (\gamma_2 - \delta_2).K_2 + \dots + (\gamma_n - \delta_n).K_n = \\ &= \varepsilon_1.K_1 + \varepsilon_2.K_2 + \dots + \varepsilon_n.K_n \end{aligned}$$

$\boxed{\text{por comodidad, hacemos } \gamma_1 - \delta_1 = \varepsilon_1, \gamma_2 - \delta_2 = \varepsilon_2, \dots, \gamma_n - \delta_n = \varepsilon_n}$

que es suma de un número $\varepsilon_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\varepsilon_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\varepsilon_n.K_n$ proporcional a K_n.

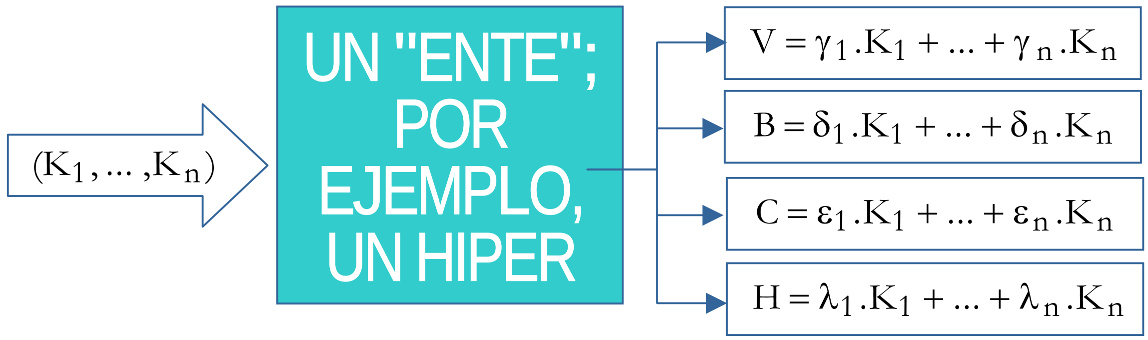
La Hacienda Pública no se queda atrás, pues si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ son los respectivos tipos de IVA (expresados en "tanto por uno") que soportan los productos que compras, la cantidad "H" que ingresa Hacienda gracias a tu compra es

$$\begin{aligned} H &= \theta_1.\gamma_1.K_1 + \theta_2.\gamma_2.K_2 + \dots + \theta_n.\gamma_n.K_n = \\ &= \lambda_1.K_1 + \lambda_2.K_2 + \dots + \lambda_n.K_n \end{aligned}$$

por comodidad, hacemos $\theta_1.\gamma_1 = \lambda_1, \theta_2.\gamma_2 = \lambda_2, ... , \theta_n.\gamma_n = \lambda_n$

que es suma de un número $\lambda_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\lambda_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\lambda_n.K_n$ proporcional a K_n.

ESQUEMA DE UN "FENÓMENO LINEAL"



A una "entrada" $(K_1, ... ,K_n)$ el "ente" responde con una "salida" $(V;B;C;H)$ "lineal"

Como en el hipermercado no se chupan el dedo, con el fin de gestionar más eficientemente su negocio. meten en una ***caja con diversas filas*** toda la información relativa a cantidades compradas, precios unitarios, beneficios unitarios y tipos de IVA, etc.

	Artículo	Cantidad comprada	Precio unitario	Beneficio unitario	....	Tipo de IVA
1	Malocotones	K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
2	Servesita	K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:	:::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
N	Perejil	K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Así, las cosas, aunque no se tenga ni idea de Álgebra de lo Lineal, todo el mundo alcanza a entender que:

- El valor "V" de la compra se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la segunda, y sumando después los productos realizados:

$$V = \gamma_1.K_1 + ... + \gamma_n.K_n$$

- El beneficio "B" que obtiene el hipermercado se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la tercera, y sumando después los productos realizados:

$$B = \delta_1.K_1 + ... + \delta_n.K_n$$

- El ingreso "H" de Hacienda se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por sus correspondientes de las columnas segunda y última, y sumando después los productos realizados:

$$H = \theta_1 . \gamma_1 . K_1 + \ldots + \theta_n . \gamma_n . K_n$$

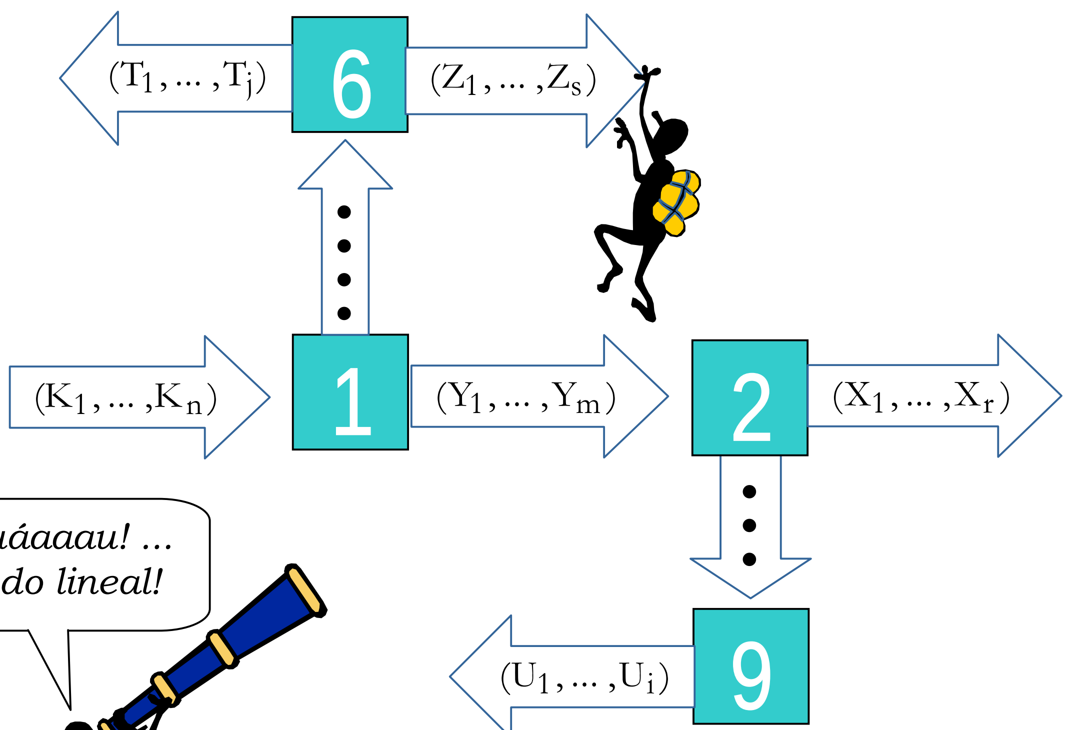
- Multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la columna obtenida al restar la tercera columna de la segunda, y después sumamos los productos realizados, obtenemos la cantidad "C" que al hipermercado le cuesta tu compra:

$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + \ldots + (\gamma_n - \delta_n).K_n$$

Como vemos, a partir de una ***caja o tabla*** con números ordenados en filas y columnas puede obtenerse ***información*** muy interesante para según qué cosas.

K_1	γ_1	δ_1	………	θ_1
K_2	γ_2	δ_2	………	θ_2
:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
K_n	γ_n	δ_n	………	θ_n

Además, la realidad es tan compleja que hay en ella cadenas o redes de ***fenómenos lineales*** relacionados unos con otros.



Al-jabr w'al-muqabalah es el nombre del escrito árabe que dio origen a la palabra "álgebra"

Ordenación de los temas

Estudiaremos Álgebra Lineal en el siguiente orden:

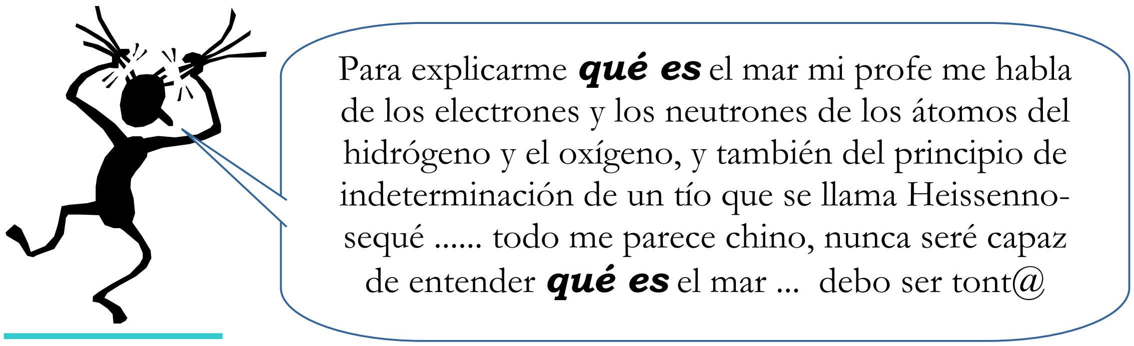
Tema 1: Cálculo Matricial
Tema 2: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Tema 3: Espacios Vectoriales
Tema 4: Subespacios Vectoriales
Tema 5: Aplicaciones Lineales
Tema 6: Espacio Afín Tridimensional

Al seguir este orden ***cimentaremos el Álgebra Lineal en los conceptos de "fila" y de "columna"*** que asimilamos en la infancia temprana, y apoyándonos en ellos nos resultará muy fácil entender el ***concepto de matriz*** *(caja llena de números ordenados en filas y columnas)* y ***aprender a trabajar con matrices*** *(suma de matrices, multiplicación de una matriz por un número, multiplicación de matrices, cálculo del determinante de una matriz cuadrada, cálculo del rango de una matriz).* Cuando sepas trabajar con matrices sólo necesitarás una tarde para ***aprender a resolver sistemas de ecuaciones lineales***, asunto que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices .... y el que es artista con los sistemas de ecuaciones lineales se parte de risa cuando ha de lidiar con los ***espacios vectoriales*** y con el resto del Álgebra Lineal, pues la lidia se reduce a poco más que resolver sistemas ecuaciones lineales.

Cuando un profesor de Álgebra Lineal tiene poca experiencia o le importa un pito si sus alumnos le entienden o no, suele explicar la película en el orden ortodoxo en que a él se la explicaron, que es el seguido por casi todos los libros; a saber:

Tema 1: Espacios Vectoriales
Tema 2: Subespacios Vectoriales
Tema 3: Cálculo Matricial
Tema 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales
Tema 5: Aplicaciones Lineales
Tema 6: Espacio Afín Tridimensional

Al seguir este orden ***el Álgebra Lineal se cimenta en el concepto de espacio vectorial,*** concepto al que se llega tras una singladura en la que intervienen un conjunto "Pepe" en el que se han definido dos leyes de composición "interna" y un conjunto "Juan" en el que ha definido una ley de composición "interna" y una ley de composición "externa", de modo que las leyes de composición satisfagan una batería de 17 propiedades .... ***y eso resulta muy espeso y abstracto para la mayoría de los principiantes, que acaban viendo montañas donde sólo hay granos de arena.***



¿Qué temas son más importantes?

A efectos del examen de Selectividad, lo más importante es el Cálculo Matricial, los Sistemas de Ecuaciones Lineales y sobre todo el Espacio Afín Tridimensional; los otros temas tienen menor relevancia. Pero si quieres empezar tu Carrera en condiciones óptimas, debes entender muy bien los asuntos de los temas 3, 4 y 5, porque son los ladrillos con que ***lo lineal*** se instalará en tu cerebro, y te serán muy útiles para enfrentarte al Álgebra Lineal que te espera en el primer año de Carrera.

Para que te hagas una idea, la siguiente tabla es muy representativa de cómo se distribuyen los problemas de Álgebra propuestos en los distintos distritos universitarios en una convocatoria genérica de Selectividad de Junio o Septiembre.

Cálculo Matricial	Sistemas Lineales	Espacios Vectoriales	Subespacios Vectoriales	Aplicaciones Lineales	Espacio Afín
13	19	3	1	2	40

Como ves, la tabla indica que la importancia que da el Ministerio de Educación español a los temas 3, 4 y 5 es próxima a cero; pero realmente es cero patatero, porque el examen está "trucado", está "diseñado" de modo que SIEMPRE es posible sacar un 10 sin saber absolutamente nada de dichos temas:

En el examen te presentarán varios "bloques" con problemas de Álgebra para que elijas uno y lo resuelvas; lo más frecuente es que en ningún bloque haya ejercicios de los temas 3, 4 y 5, y SIEMPRE hay un bloque "maternal" que no contiene nada relacionado ellos. Por tanto, SIEMPRE es posible sacar un 10 estudiando sólo los temas 1, 2 y 6 ..... ¡viva la república!, ¡vaya chollazo!, ¡aunque no sepas nada de la mitad del programa de Álgebra Lineal puedes sacar un sobresaliente!

Este examen tramposo origina escandalosos porcentajes de aprobados, y los estudiantes de "Ciencias" del último curso de Bachiller se van felices de vacaciones de verano ...... pero es pan para hoy y hambre para mañana, pues al año siguiente esos mismos estudiantes cosecharán escandalosos porcentajes de suspensos en su primer año de Carrera, y ello debido sobre todo a la deficiente "formación matemática" que recibieron en la Enseñanza Secundaria.

Independientemente de cualquier otra consideración, el Álgebra Lineal es una estupenda gimnasia mental para desarrollar tu capacidad de abstracción y dotarte de un cerebro razonablemente disciplinado, riguroso y cartesiano ….. que es lo que necesitas para tener éxito en una Carrera de Ciencias

Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	teta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega