# Tema 1

# Cálculo Matricial

## *Ley de composición interna*

Se llama ***ley de composición interna*** definida sobre un conjunto "K" a toda ley o criterio "$\oplus$" que a cada ***par ordenado*** de elementos de "K" le asocia un único elemento de "K" (un par $(\alpha;\beta)$ es *ordenado* si $(\alpha;\beta) \neq (\beta;\alpha)$ siempre que $\alpha \neq \beta$).

Siendo $\alpha,\beta \in K$, escribiremos $\alpha \oplus \beta = \gamma$ para indicar que el criterio o ley "$\oplus$" asocia el elemento $\gamma \in K$ al par ordenado $(\alpha;\beta)$. ***Por ejemplo:*** si "K" es el conjunto {1, 2, 3, .....} de los números naturales y en él definimos la ley de composición interna "$\oplus$" como $\alpha \oplus \beta = 2.\alpha + 5.\beta$, entonces:

$$3 \oplus 7 = 2.3 + 5.7 = 41 \;\; ; \;\; 7 \oplus 3 = 2.7 + 5.3 = 29$$

***Observa:*** la ley anterior es de composición interna en el conjunto de los números naturales, pues si $\alpha$ y $\beta$ son números naturales entonces $\alpha \oplus \beta = 2.\alpha + 5.\beta$ siempre es un número natural. No es de composición interna en el conjunto de los naturales la ley "$\otimes$" tal que $\alpha \otimes \beta = \alpha/\beta$, pues siendo naturales $\alpha$ y $\beta$ no siempre sucede que $\alpha \otimes \beta = \alpha/\beta$ es natural; por ejemplo, $3 \otimes 7 = 3/7$, que no es un número natural.

## *Definición de "cuerpo"*

Si "K" es un conjunto en el que se han definido dos leyes de composición interna "$\oplus$" (llamada ***suma***) y "$\otimes$" (llamada ***producto***), se dice que "$\oplus$" y "$\otimes$" confieren al conjunto "K" la ***estructura de cuerpo*** (para abreviar también se dice que la terna $(K;\oplus;\otimes)$ es un "cuerpo") si se verifica que:

1) La ley "$\oplus$" es *conmutativa:* $\forall \alpha,\beta \in K$ sucede que $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$

2) La ley "$\oplus$" es *asociativa*: $\forall \alpha,\beta,\gamma \in K$ sucede que $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$

3) La ley "$\oplus$" admite *elemento neutro*, es decir, en el conjunto "K" hay un elemento $\delta$ tal que $\forall \alpha \in K$ sucede que $\alpha \oplus \delta = \delta \oplus \alpha = \alpha$.

4) Cada elemento del conjunto "K" tiene *simétrico* respecto de la ley "$\oplus$":

$$\forall \alpha \in K, \exists \lambda \in K \text{ tal que } \alpha \oplus \lambda = \lambda \oplus \alpha = \delta$$

5) La ley "$\otimes$" es *distributiva* respecto de la ley "$\oplus$":

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in K \text{ sucede que } \begin{cases} \alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma) \\ (\beta \oplus \gamma) \otimes \alpha = (\beta \otimes \alpha) \oplus (\gamma \otimes \alpha) \end{cases}$$

6) La ley "$\otimes$" es *asociativa*:

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in K \text{ sucede que } (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$$

7) La ley "$\otimes$" admite *elemento neutro* en el conjunto $K^* = K - \{0\}$; es decir:

$$\exists\, \omega \in K^* \text{ tal que } \forall \alpha \in K^* \text{ sucede que } \alpha \otimes \omega = \omega \otimes \alpha = \alpha$$

8) Cada elemento del conjunto $K^*$ tiene *simétrico* respecto de la ley "$\otimes$":

$$\forall \alpha \in K^*, \exists \varepsilon \in K^* \text{ tal que } \alpha \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \alpha = \omega$$

- Se dice que el cuerpo $(K;\oplus;\otimes)$ es ***conmutativo o abeliano*** si la ley "$\otimes$" es *conmutativa*; es decir, si $\forall \alpha, \beta \in K$ sucede que $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$.

# *El "cuerpo" más famoso*

Como sabes, ***el conjunto $\Re$ de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales*** (son los que tienen un número finito de cifras decimales o son periódicos) ***y del conjunto de los números irracionales*** (tienen un número infinito de cifras decimales y no son periódicos, como sucede con los números que se denotan $\sqrt{2}$ y $\pi$).

***El cuerpo conmutativo más famoso es ($\Re$;+;.), o sea, es el que resulta al considerar que las leyes "suma" y "producto" definidas en $\Re$ son respectivamente la suma "+" y el producto "." de números reales que todos conocemos desde nuestra más tierna infancia.*** En efecto, como sabemos:

1) *La suma es "conmutativa":* $\forall \alpha, \beta \in \Re$ sucede que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

2) *La suma es "asociativa":*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Re \text{ sucede que } (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

3) *La suma admite "elemento neutro", que es el número real que llamamos "cero" y denotamos "0":*

$$\forall \alpha \in \Re \text{ sucede que } \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

4) *Cada número real tiene "simétrico" respecto de la suma:*

$$\forall \alpha \in \Re, \exists \lambda \in \Re \text{ tal que } \alpha + \lambda = \lambda + \alpha = 0$$

5) *El producto es distributivo respecto de la suma:*

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Re \text{ sucede que } \begin{cases} \alpha.(\beta + \gamma) = (\alpha.\beta) + (\alpha.\gamma) \\ (\beta + \gamma).\alpha = (\beta.\alpha) + (\gamma.\alpha) \end{cases}$$

6) *El producto es "asociativo":* $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Re$ sucede que $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$

7) *El producto admite "elemento neutro" en el conjunto $\Re - \{0\}$ que forman los números reales distintos de cero; dicho elemento neutro es el número "uno":* $\forall \alpha \in \Re - \{0\}$ sucede que $\alpha.1 = 1.\alpha = \alpha$

8) *Cada elemento del conjunto* $\Re - \{0\}$ *tiene simétrico respecto del producto:* $\forall \alpha \in \Re - \{0\}, \exists \varepsilon \in \Re - \{0\}$ tal que $\alpha . \varepsilon = \varepsilon . \alpha = 1$.

9) *El producto es "conmutativo":* $\forall \alpha, \beta \in \Re$ es $\alpha . \beta = \beta . \alpha$

***A los elementos de un cuerpo conmutativo se les llama "escalares".*** Como $(\Re ;+; .)$ es un cuerpo conmutativo, por comodidad, *es habitual decir que un número real es un escalar.*

***Como en su momento los conjuntos que se denotan*** $\Re^2, \Re^3, \Re^4, .... , \Re^n, ....$ ***tendrán protagonismo estelar, a continuación hablamos un poco de ellos.***

- El conjunto $\Re^2$ es el ***producto cartesiano*** de $\Re$ por sí mismo 2 veces:

$$\Re^2 = \Re \times \Re = \{(x_1 ; x_2) \,/\, x_i \in \Re ,\ \forall i = 1,2\}$$

 o sea, cada elemento del conjunto $\Re^2$ es un par ordenado de números reales.

- El conjunto $\Re^3$ es el ***producto cartesiano*** de $\Re$ por sí mismo 3 veces:

$$\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re = \{(x_1 ; x_2 ; x_3) \,/\, x_i \in \Re ,\ \forall i = 1,2,3\}$$

 o sea, cada elemento del conjunto $\Re^3$ es una terna ordenada de números reales.

- El conjunto $\Re^n$ es el ***producto cartesiano*** de $\Re$ por sí mismo "n" veces:

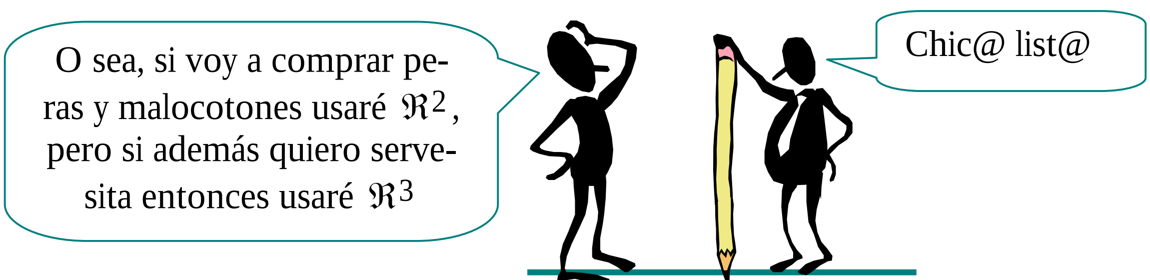
$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \Re \times \ldots \times \Re}_{\text{"n" veces}} = \{(x_1 ; x_2 ; .... ; x_n) \,/\, x_i \in \Re ,\ \forall i = 1,2, .... ,n\}$$

 De cada elemento $(x_1 ; x_2 ; .... ; x_n) \in \Re^n$ se dice que es una ***n-upla***.

- Hay quien gusta de la verticalidad y escribe apilados los "n" números reales que forman cada elemento del conjunto $\Re^n$; o sea, escribe:

$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \Re \times \ldots \times \Re}_{\text{"n" veces}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \,/\, x_i \in \Re ,\ \forall i = 1,2, .... ,n \right\}$$

 pero nosotros no lo haremos, porque ocupa mucho espacio y es poco práctico.



## 1.2. MATRICES

- *Llamamos* ***matriz de orden m×n*** *a toda disposición rectangular de* $m\times n$ *números reales ordenados en "m" filas y "n" columnas.* El conjunto que forman todas las matrices de orden $m\times n$ se denota $M_{m\times n}$.

- *Las matrices suelen nombrarse con letras mayúsculas;* así, siendo

$$B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}\ ;\ C=\begin{pmatrix}5 & 4 & 8\\ 7 & 6 & 3\\ 0 & 9 & 7\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}$$

la matriz "B" es de orden $2\times 3$ (¡ojo!, de orden $2\times 3$, no de orden 6), y "C" es de orden $3\times 3$ (¡ojo!, de orden $3\times 3$, no de orden 9).

- *Para identificar los elementos que forman una matriz "A" usamos subíndices:* al hablar del elemento $a_{ij}$ de "A" hablamos del elemento de "A" que está en la i-ésima fila de "A" y en la j-ésima columna de "A". Para referirnos genéricamente a los elementos de una matriz "A" escribimos $A=\{a_{ij}\}$.

***Por ejemplo,*** siendo $A=\{a_{ij}\}=\begin{pmatrix}4 & 7 & 8\\ 9 & 5 & 6\\ 1 & 3 & 2\\ 10 & 0 & \pi\end{pmatrix}\in M_{4\times 3}$, es:

$$a_{11}=4\ ;\ a_{12}=7\ ;\ a_{13}=8\ ;\ a_{21}=9\ ;\ a_{22}=5\ ;\ a_{23}=6$$

$$a_{31}=1\ ;\ a_{32}=3\ ;\ a_{33}=2\ ;\ a_{41}=10\ ;\ a_{42}=0\ ;\ a_{43}=\pi$$

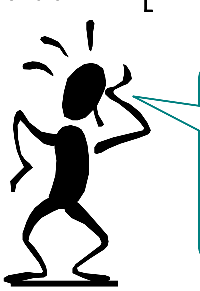
- *Se dice que una matriz es* ***cuadrada de orden "n"*** *si tiene "n" filas y "n" columnas. En tal caso, los elementos que tienen los dos subíndices iguales forman la* ***diagonal principal*** *de la matriz.* ***Por ejemplo,*** la siguiente matriz es cuadrada de orden 3:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 5 & 0 & 6\\ 8 & 8 & 7\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}$$

Su diagonal principal la forman los elementos $a_{11}=3$, $a_{22}=0$ y $a_{33}=7$.

- *Si "A" es una matriz cuadrada, su* ***traza*** *es la suma de los elementos de su diagonal principal; se denota Tr(A).* ***Por ejemplo,*** para la anterior matriz "A", es $Tr(A)=3+0+7=10$.

- *Si una matriz es de orden 1×n se dice que es una* ***matriz fila****;* tal es el caso de $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 8\end{bmatrix}\in M_{1\times 3}$ y $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 6 & 4\end{bmatrix}\in M_{1\times 4}$.



¡Anda coño!, el conjunto $M_{1\times n}$ que forman las matrices de 1 fila y "n" columnas es el mismo que hace un momento hemos llamado $\Re^n$

- *Si una matriz es de orden m×1 se dice que es una* ***matriz columna***; tal es el caso de las siguientes:

$$C=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}\in M_{3\times 1}\ ;\ D=\begin{pmatrix}7\\6\\5\\0\end{pmatrix}\in M_{4\times 1}$$

## 1.3. LAS MATRICES ALMACENAN "INFORMACIÓN"

Es bueno que tengas la percepción de que las historias que estudiaremos sobre las matrices sirven para algo más que dar de comer a profesores de Matemáticas y torturar a estudiantes de "Ciencias". Utilizando brocha gorda y no pincel, diremos que ***las matrices se han "inventado" porque son capaces de almacenar "información" de manera ordenada*** .... y es sabido que la información y el orden son fundamentales para la buena marcha de todo.

### *La siguiente historieta ilustra la idea*

El Tío Pencho tiene una empresa de comercialización de ferritos hipovaligerables y para controlar mejor el negocio ha decidido que se anoten los ingresos y los gastos trimestrales. A tal fin se usan matrices "fila" de orden $1\times 2$, pues cada matriz de este tipo está formada por 2 números reales. Pencho establece el criterio según el cual el primer número expresa los ingresos y el segundo expresa los gastos, ambos en millones.

Así las cosas, al final de cada trimestre Pencho pide a su gerente la misma información, siempre la misma pregunta: ¿cómo han ido las cosas este trimestre? El gerente consulta sus datos y por toda respuesta entrega a su jefe la matriz de orden $1\times 2$ que expresa los ingresos y los gastos del trimestre en cuestión. Así, cuando ayer recibió la matriz $\begin{bmatrix}7 & 4\end{bmatrix}$ correspondiente al último trimestre, Pencho supo los ingresos fueron de 7 millones y los gastos 4 millones.

Naturalmente, como haría cualquiera en su caso, cada año Pencho "agrupa" los resultados trimestrales y "construye" una matriz de 4 filas y 2 columnas que expresa lo sucedido en los cuatro trimestres del año en lo que se refiere a los ingresos y gastos de su empresa. ***Por ejemplo,*** si la matriz correspondiente al último año es

$$A=\begin{pmatrix}8 & 5\\7 & 3\\5 & 6\\8 & 4\end{pmatrix}\in M_{4\times 2}$$

entonces, el que $a_{32}=6$ indica que los gastos del tercer trimestre fueron de 6 millones, y el que $a_{41}=8$ indica que los ingresos de cuarto trimestre fueron de 8 millones.

Como ves, ***las matrices sirven para almacenar "información".***

## 1.4. MATRICES EQUIDIMENSIONALES

*Diremos que dos matrices son **equidimensionales** si tienen el mismo orden,* es decir, si las dos tienen el mismo número de filas y las dos tienen el mismo número de columnas. ***Por ejemplo***, si:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}\ ;\ C=\begin{pmatrix}7 & 6 & 5\\ 4 & 9 & 9\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}$$

entonces "A" y "B" son equidimensionales; no así "A" y "C" o "B" y "C".

## 1.5. MATRIZ OPUESTA

*La matriz **opuesta** de la matriz "A" se denota –A, y es la matriz obtenida al cambiar el signo de los elementos que "A".*

***Por ejemplo,*** siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}$, su matriz opuesta es:

$$-A=\begin{pmatrix}-3 & -5 & -6\\ -7 & -8 & -9\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}$$

## 1.6. MATRIZ NULA

*Se llama **nula** a toda matriz cuyos elementos sean nulos; se denota "0" tenga el orden que tenga:*

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0\in M_{2\times 2}\ ;\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0\in M_{2\times 3}$$

## 1.7. IGUALDAD DE MATRICES

Las matrices equidimensionales $A=\{a_{ij}\}$ y $B=\{b_{ij}\}$ son iguales si $a_{ij}=b_{ij}$.

## 1.8. SUMA DE MATRICES

Si $A=\{a_{ij}\}$ y $B=\{b_{ij}\}$ son matrices de orden m × n, su ***suma*** se denota A+B, y es la matriz de orden m × n que definimos como $A+B=\{a_{ij}+b_{ij}\}$.

***Por ejemplo:***

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 9\\ 1 & 8 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 5 & 6\\ 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+7 & 3+5 & 1+6\\ 5+1 & 4+2 & 9-4\\ 1+0 & 8+0 & 0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 6 & 6 & 5\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 2+2 & 1+6\\ 5+1 & 4+2 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 7\\ 6 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

• Si "A" y "B" son cuadradas de igual orden, es $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$.

**PROPIEDADES**

La suma de matrices definida en el conjunto $M_{m\times n}$ tiene idénticas propiedades que la suma de números reales:

1) Es *conmutativa*: $A+B=B+A$
2) Es *asociativa:* $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) *Admite elemento neutro:* $A+0=0+A=A$
4) *Cada matriz tiene simétrica respecto de la suma:*

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

## 1.9. PRODUCTO DE ESCALAR POR MATRIZ

*El* ***producto*** *del escalar* "$\alpha$" (recuerda: un "escalar" es un elemento de un cuerpo conmutativo) *por la matriz "A" se denota α • A, y es la matriz obtenida al multiplicar por "α" todos los elementos de "A".*

***Por ejemplo:***

$$6\bullet\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\5 & 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.2 & 6.3 & 6.4\\6.5 & 6.7 & 6.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 18 & 24\\30 & 42 & 48\end{pmatrix}$$

$$3\bullet\begin{bmatrix}9 & 5 & 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.9 & 3.5 & 3.7 & 3.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27 & 15 & 21 & 9\end{bmatrix}$$

**PROPIEDADES**

1) Siendo "$\alpha$" un escalar y "A" y "B" matrices equidimensionales, es:

$$\alpha\bullet(A+B)=\alpha\bullet A+\alpha\bullet B$$

2) Siendo "$\alpha$" y "$\beta$" escalares y "A" una matriz, es: $(\alpha+\beta)\bullet A=\alpha\bullet A+\beta\bullet A$
3) Siendo "$\alpha$" y "$\beta$" escalares y "A" una matriz, es $\alpha\bullet(\beta\bullet A)=(\alpha.\beta)\bullet A$
4) Siendo "$\alpha$" un escalar y "A" una matriz cuadrada, es: $Tr(\alpha\bullet A)=\alpha.Tr(A)$

### La "proporcionalidad" entre matrices

***Al definir la operación "producto de un escalar por una matriz" estamos introduciendo la noción de "proporcionalidad" entre matrices***, pues si la matriz $C=\{c_{ij}\}$ se obtiene al multiplicar la matriz $A=\{a_{ij}\}$ por el escalar "$\alpha$" (o sea, $C=\alpha\bullet A$), cabe decir que la matriz "C" es "proporcional" a la matriz "A", pues cada elemento de "C" se obtiene multiplicando por "$\alpha$" su correspondiente elemento de "A" (recuerda que $c_{ij}=\alpha.a_{ij}$).

También cabe decir que la matriz "A" es "proporcional" a la matriz "C", pues cada elemento de "A" se obtiene multiplicando por "$1/\alpha$" su correspondiente elemento de "C":

$$c_{ij}=\alpha.a_{ij}\Rightarrow a_{ij}=\frac{1}{\alpha}.c_{ij}\Rightarrow A=\frac{1}{\alpha}\bullet C$$

## Combinación lineal de matrices

Al jugar a la vez con las operaciones llamadas "suma de matrices" y "producto de un escalar por una matriz" resulta lo siguiente: siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ escalares (números reales) y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ matrices equidimensionales, si la matriz "W" es tal que $W = \alpha_1 \bullet A_1 + \alpha_2 \bullet A_2 + \ldots + \alpha_n \bullet A_n$ entonces "W" es suma de una matriz $\alpha_1 \bullet A_1$ proporcional a $A_1$, y de una matriz $\alpha_2 \bullet A_2$ proporcional a $A_2$ .... y de una matriz $\alpha_n \bullet A_n$ proporcional a $A_n$; por ello podemos decir que la matriz "W" es suma de matrices proporcionales a $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

En el lenguaje del Álgebra de "lo Lineal", para decir de modo rápido que la matriz "W" es suma de matrices proporcionales a $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se dice que "W" es ***combinación lineal*** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$; también se podría decir que "W" es "combinación proporcional" de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Lo mismo sucede cuando vas al supermercado: si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son los precios unitarios de los "n" bienes (tomates, cerveza, etc.) que compras y $K_1, K_2, \ldots, K_n$ son las correspondientes cantidades compradas de cada uno de ellos, entonces la cantidad "T" que deberás pagar es:

$$T = \gamma_1 . K_1 + \gamma_2 . K_2 + \ldots + \gamma_n . K_n$$

O sea, "T" es suma de un número $\gamma_1 . K_1$ proporcional a $K_1$, y de un número $\gamma_2 . K_2$ proporcional a $K_2$ .... y de un número $\gamma_n . K_n$ proporcional a $K_n$; por ello podemos decir que la cantidad "T" que deberás pagar es suma de números proporcionales a las cantidades compradas $K_1, K_2, \ldots, K_n$.

El problema de averiguar si una matriz dada "W" es o no combinación lineal de las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (también dadas) no lo podremos abordar hasta que no seamos unos artistas resolviendo ***sistemas de ecuaciones lineales***, lo que sucederá en el Tema 2.

## 1.10. PRODUCTO DE MATRICES

Siendo $A = \{a_{ij}\}$ una matriz de orden $m \times n$ y $B = \{b_{ij}\}$ una matriz de orden $n \times p$, el ***producto de la matriz "A" por la matriz "B"*** se denota $A \bullet B$, y es la matriz $C = \{c_{ij}\}$ de orden $m \times p$ tal que $c_{ij}$ es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de "A" por su correspondiente de la j-ésima columna de "B"; es decir:

$$c_{ij} = a_{i1} . b_{1j} + a_{i2} . b_{2j} + \ldots + a_{in} . b_{nj}$$

Carece de sentido hablar del producto $A \bullet B$ si el número de columnas de la primera matriz "A" no coincide con el número de filas de la segunda matriz "B". ***Por ejemplo,*** si "A" es una matriz de orden $2 \times 3$ y "B" es de orden $3 \times 7$, el producto $A \bullet B$ tiene sentido matemático, ya que el número columnas de la primera matriz ("A") coincide con el número de filas de la segunda ("B"), y dicho producto $A \bullet B$ es una matriz de orden $2 \times 7$. Sin embargo, el producto $B \bullet A$ carece de sentido matemático, pues el número de columnas de la primera matriz "B" no coincide con el número de filas de la segunda "A".

***Ejemplos de productos de matrices:***

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5+2.7 & 1.6+2.8 \\ 3.5+4.7 & 3.6+4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 36 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0+2.8+3.4 & 1.2+2.6+3.7 & 1.5+2.3+3.1 \\ 4.0+5.8+6.4 & 4.2+5.6+6.7 & 4.5+5.3+6.1 \\ 7.0+8.8+9.4 & 7.2+8.6+9.7 & 7.5+8.3+9.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+5.8 & 2.4+5.9 & 2.6+5.2 \\ 7.1+3.8 & 7.4+3.9 & 7.6+3.2 \\ 5.1+0.8 & 5.4+0.9 & 5.6+0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 53 & 22 \\ 31 & 55 & 48 \\ 5 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2+5.7+6.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \text{carece de sentido} \; ; \; \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{carece de sentido}$$

**PROPIEDADES**

1) Asociativa: $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$

2) Distributiva respecto de la suma: $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$

3) Ya hemos dicho que puede suceder que el producto $A \bullet B$ tenga sentido matemático y no lo tenga el $B \bullet A$; por tanto, resulta evidente que, en general, el producto de matrices no es conmutativo.

   ***Observa:*** aunque $A \bullet B$ y $B \bullet A$ tengan sentido matemático (lo que sucede sólo si "A" es de orden $m \times n$ y "B" es de orden $n \times m$, en cuyo caso $A \bullet B$ es de orden $m \times m$ y $B \bullet A$ es de orden $n \times n$) no tienen porqué ser del mismo orden. Y aunque $A \bullet B$ y $B \bullet A$ sean del mismo orden (lo que sucede sólo si $m = n$; o sea, sólo si "A" y "B" son matrices cuadradas del mismo orden), en general no sucede que $A \bullet B = B \bullet A$.

   No obstante, puede suceder que $A \bullet B = B \bullet A$; en tal caso se dice que las ***matrices "A" y "B" conmutan.***

   ***Por ejemplo:***

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Si los productos $A \bullet B$ y $B \bullet A$ tienen sentido, es $Tr(A \bullet B) = Tr(B \bullet A)$.

## 1.11. TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

*Si en una matriz "A" permutamos filas por columnas conservando el orden de ellas, resulta otra matriz que se llama* ***traspuesta*** *de "A"* (se denota $A^t$). ***Por ejemplo,*** siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}$$

sus respectivas matrices traspuestas son:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 7 & 3 & 9 \\ 8 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3} \ ; \ B^t = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2} \ ; \ C^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}$$

**PROPIEDADES**

1) La traspuesta de la traspuesta de una matriz "A" es ella misma: $(A^t)^t = A$.

2) La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas; o sea:

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

3) Si $\alpha \in \Re$, entonces $(\alpha \bullet A)^t = \alpha \bullet A^t$.

4) La traspuesta de un producto de matrices es el producto de sus traspuestas, pero en orden contrario. ***Por ejemplo:*** $(A \bullet B \bullet C \bullet D)^t = D^t \bullet C^t \bullet B^t \bullet A^t$.

## 1.12. MATRIZ SIMETRICA

Se dice que una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}$ es ***simétrica*** *si coincide con su matriz traspuesta*, lo que sucede sólo si $a_{ij} = a_{ji}$; o sea, "A" es simétrica sólo si los elementos situados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales.

***Por ejemplo,*** son simétricas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 9 & \pi \\ 5 & 6 & \pi & 3 \end{pmatrix} \ ; \ C = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para toda matriz "A" sucede que la matriz $H = A \bullet A^t$ es simétrica; en efecto:

$$H^t = (A \bullet A^t)^t \underset{\uparrow}{=} (A^t)^t \bullet A^t = A \bullet A^t = H$$

$$\boxed{\text{traspuesta de un producto} = \text{producto de las traspuestas en orden contrario}}$$

- Si la matriz "A" es cuadrada entonces la matriz $M = A + A^t$ es simétrica; en efecto:

$$M^t = (A + A^t)^t \underset{\uparrow}{=} A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = M$$

$$\boxed{\text{traspuesta de una suma} = \text{suma de las traspuestas}}$$

## 1.13. MATRIZ ANTISIMÉTRICA

Se dice que una matriz cuadrada $A = \{a_{ij}\}$ es ***antisimétrica*** *si coincide con su matriz traspuesta cambiada de signo*, lo que sucede sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$; o sea, "A" es antisimétrica si los elementos simétricos respecto de la diagonal principal de la matriz son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario.

***Observa:*** los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos: si $a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2.a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$.

***Por ejemplo,*** son antisimétricas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 5 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & 0 & \pi \\ -5 & 6 & -\pi & 0 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

- Toda matriz cuadrada "A" puede descomponerse en suma de una matriz simétrica "S" y de una matriz antisimétrica "H". En efecto, si $A = S + H$, entonces

$$A^t = (S + H)^t = S^t + H^t = S - H$$

$$\boxed{\text{por ser simétrica "S" es } S^t = S; \text{ y por ser antisimétrica "H" es } H^t = -H}$$

Al sumar miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, resulta:

$$S = (A + A^t)/2 = \{(a_{ij} + a_{ji})/2\}$$

Al restar miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, resulta:

$$H = (A - A^t)/2 = \{(a_{ij} - a_{ji})/2\}$$

***Por ejemplo,*** si $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, entonces:

$$S = (A + A^t)/2 = \{(a_{ij} + a_{ji})/2\} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$H = (A - A^t)/2 = \{(a_{ij} - a_{ji})/2\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y es
$$S + H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = A$$

## 1.14. OTRAS MATRICES CUADRADAS

- ***MATRIZ UNIDAD****: matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y los restantes elementos de la matriz son nulos; se denota "I".*

***Por ejemplo,*** la matriz unidad de orden 3 es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ***MATRIZ ESCALAR:*** *matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales, siendo nulos los restantes elementos de la matriz.* ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- ***MATRIZ DIAGONAL:*** *matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos no situados en la diagonal principal.* ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ***MATRIZ TRIANGULAR:*** *matriz cuadrada en la que todos los elementos a un lado de la diagonal principal son nulos.*

  ***Por ejemplo,*** son triangulares las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De "A" se dice que es *triangular inferior* ( son nulos los elementos situados debajo de la diagonal principal), y de "B" se dice que es *triangular superior* (son nulos los elementos situados encima de la diagonal principal).

- ***MATRIZ IDEMPOTENTE****: matriz cuadrada cuyo cuadrado es ella misma.* ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- ***MATRIZ INVOLUTIVA****: matriz cuadrada cuyo cuadrado es la matriz unidad.* ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  Demostremos que si "A" es idempotente $(A \bullet A = A)$ entonces $2 \bullet A - I$ es involutiva; para ello debemos demostrar que $(2 \bullet A - I) \bullet (2 \bullet A - I) = I$:

$$(2 \bullet A - I) \bullet (2 \bullet A - I) = 4 \bullet A \bullet A - 4 \bullet A + I \underset{\uparrow}{=} 4 \bullet A - 4 \bullet A + I = I$$

$$\boxed{\text{como "A" es idempotente, entonces } A \bullet A = A}$$

  Demostremos que si "A" es involutiva $(A \bullet A = I)$ entonces $(A + I)/2$ es idempotente; para ello demostramos que $((A + I)/2) \bullet ((A + I)/2) = (A + I)/2$:

$$((A + I)/2)) \bullet ((A + I)/2) = (A \bullet A + 2 \bullet A + I)/4 =$$
$$\underset{\uparrow}{=} (2 \bullet A + 2 \bullet I)/4 = (A + I)/2$$

$$\boxed{\text{como "A" es involutiva, entonces } A \bullet A = I}$$

## 1.15. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Se llaman ***transformaciones elementales*** a las siguientes:

1) Trasposición de una matriz.
*2)* Cambio entre sí de dos filas o columnas de una matriz.
3) Multiplicación de todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz un mismo número $k \neq 0$.
4) Adición a los elementos de una fila (columna) de una matriz de los elementos correspondientes de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número.

## 1.16. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

A cada matriz cuadrada "A", por el simple hecho de ser cuadrada, le asociamos un número que llamamos ***determinante*** de "A" y denotamos $|A|$.

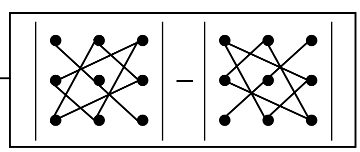
**CÁLCULO DE DETERMINANTES**

- Si $A = [a_{11}]$, es $|A| = a_{11}$. ***Por ejemplo,*** si $A = [6]$ es $|A| = 6$
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, es $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2.(-5) - (-3).4 = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = (-4).7 - 2.(-5) = -18$$

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, es:



$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{32}.a_{21} - \\ -(a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{21}.a_{12}.a_{33})$$

***Por ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - 7.5.3 - 6.8.1 - 4.2.9 = 0$$

***Para calcular determinantes de matrices de orden mayor que 3 debemos definir antes los conceptos de "menor complementario" y de "cofactor" de un elemento de una matriz cuadrada***

## 1.17. MENOR COMPLEMENTARIO. COFACTOR

*Siendo $A=\{a_{ij}\}$ una matriz cuadrada de orden "n", el* ***menor complementario*** *del elemento $a_{ij}$ es el determinante de la matriz cuadrada de orden "n–1" obtenida al suprimir en "A" la i-ésima fila y la j-ésima columna; se denota $\alpha_{ij}$.* ***Por ejemplo,*** siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & 4 & 5\\ 0 & 6 & 8\end{pmatrix}$$

el menor complementario $\alpha_{32}$ del elemento $a_{32}=6$ es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la tercera fila y la segunda columna de "A"; o sea:

$$\alpha_{32}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 8 & 5\end{vmatrix}=1.5-3.8=-19$$

*El* ***cofactor*** *o* ***adjunto*** *del elemento $a_{ij}$ es $(-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$, y se denota $A_{ij}$;* así, en nuestro ejemplo, es $A_{32}=(-1)^{3+2}.\alpha_{32}=(-1).(-19)=19$.

***Observa:*** el valor de $(-1)^{i+j}$ es 1 ó $-1$ según que el número "i+j" sea par o impar; por tanto, la secuencia de los signos de los adjuntos respecto de los menores complementarios es:

$$\begin{pmatrix}+ & - & + & - & + & . & .\\ - & + & - & + & - & . & .\\ + & - & + & - & + & . & .\\ - & + & - & + & - & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\end{pmatrix}$$

## 1.18. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA

***El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de una cualquiera de las líneas de la matriz por su cofactor o adjunto.*** *Por comodidad, la línea elegida para hacer el desarrollo será la que contenga mayor número de ceros.* ***Por ejemplo,*** siendo

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ 1 & 4 & 0\\ 6 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

si para calcular el determinante de "A" efectuamos el desarrollo por los elementos de la tercera columna, es:

$$|A|=a_{13}.A_{13}+a_{23}.A_{23}+a_{33}.A_{33}=$$
$$=7.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix}1 & 4\\ 6 & 5\end{vmatrix}+0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{vmatrix}+8.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-53$$

***Por ejemplo,*** siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{4 \quad 2 \quad 0 \quad 1} \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

si para calcular su determinante efectuamos el desarrollo por los elementos de la segunda fila, es:

$$|A| = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} + a_{24}.A_{24} =$$

$$= 4.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+4}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -29$$

***Observa:*** *el determinante de una matriz "triangular" es el producto de los elementos de su diagonal principal, y lo mismo sucede si la matriz es "diagonal".* ***Por ejemplo:***

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.7.6$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.7.6$$

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

## 1.19. MATRIZ REGULAR. MATRIZ SINGULAR

*Se llama* ***regular*** *a toda matriz cuadrada cuyo determinante no sea nulo; si el determinante es nulo la matriz se llama* ***singular.***.

## 1.20. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

El uso de las siguientes propiedades te facilitará el cálculo de determinantes.

1) El número de términos en el desarrollo del determinante de una matriz de orden "n" es n!.

2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta; así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} \pi & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

3) Si todos los elementos de una línea son cero, el determinante es cero; así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la segunda columna está formada por ceros}$$

4) Al cambiar el orden de dos líneas paralelas el determinante cambia de signo; así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Cambiamos la primera fila por la segunda

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Cambiamos la primera columna por la segunda

5) Si dos líneas paralelas son iguales o proporcionales, el determinante es cero; así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues las filas primera y tercera son iguales}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la segunda columna es el triple de la primera}$$

6) Si todos los elementos de una línea se multiplican (dividen) por un mismo número, el determinante correspondiente queda multiplicado (dividido) por ese número; así:

$$\text{como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \text{ entonces } \begin{vmatrix} 9.2 & 9.3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.5$$

$$\text{como } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 23, \text{ entonces } \begin{vmatrix} 3 & 4/7 \\ 1 & 9/7 \end{vmatrix} = 23/7$$

***De cajón:*** si la matriz "A" es cuadrada de orden "n" y "k" es un número real, entonces $|k \bullet A| = k^n . |A|$, pues para multiplicar "A" por "k" debemos multiplicar por "k" las "n" líneas de "A".

7) Un determinante no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos o restamos otras líneas paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera; así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A la 1ª fila le sumamos el doble de la 2ª más el triple de la 3ª

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A la 3ª columna le restamos el doble de la 1ª

8) Un determinante es cero si una de sus líneas puede obtenerse como suma de otras líneas paralelas a ella, multiplicadas cada una de éstas por un número; así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$ pues la tercera columna es suma de las dos primeras

9) Si todos los elementos de una línea de $|A|$ están formados por dos sumandos, $|A|$ puede descomponerse en suma de otros dos determinantes idénticos a $|A|$ excepto en dicha línea, que en el primero (segundo) de los "nuevos" determinantes está formada por los primeros (segundos) sumandos. Así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+7 & 3 \\ 4 & 5+9 & 6 \\ 7 & 8+4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

***Para calcular determinantes "gordos" conviene "manipular" sus líneas de modo que aparezcan muchos ceros.***

• ***Por ejemplo:***

Para que en la primera fila "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
• A la segunda columna le restamos el triple de la primera
• A la tercera columna le restamos el cuádruple de la primera
• A la cuarta columna le restamos el doble de la primera

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera fila

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera columna

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
• A la tercera fila le restamos la segunda
• A la segunda fila le restamos el doble de la primera

• ***Por ejemplo:***

Para que en la segunda fila "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
• A la primera columna le restamos el doble de la segunda
• A la cuarta columna le restamos el triple de la segunda

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la segunda fila

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera columna

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a las filas segunda y tercera les restamos la primera

• ***Por ejemplo:***

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & b & b \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

A la primera fila le sumamos las restantes filas

$$= \begin{vmatrix} a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b & a-\lambda+3.b \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a-\lambda+3.b).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a-\lambda & b & b \\ b & b & a-\lambda & b \\ b & b & b & a-\lambda \end{vmatrix} =$$

Sacamos factor común "$a-\lambda+3.b$" en la primera fila

Para que aparezcan ceros en la primera fila, a las columnas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera columna

$$= (a-\lambda+3.b).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-\lambda-b & 0 & 0 \\ b & b & a-\lambda-b & 0 \\ b & b & b & a-\lambda-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a-\lambda+3.b).(a-\lambda-b)^3$$

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal

- ***Por ejemplo: (determinante de Vandermonde)***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} =$$

Restamos a cada fila la anterior multiplicada por "a"

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ 0 & b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix} =$$

En la primera columna sacamos factor común "b – a", en la segunda sacamos factor común "c – a", y en la tercera sacamos factor común "d – a"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d. \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

Estamos ante otro determinante de Vandermonde, pero ahora la matriz es $3 \times 3$ en lugar de $4 \times 4$. Repetimos el proceso: a cada fila le restamos la anterior multiplicada por "b"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$= (b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

En la primera columna sacamos factor común "c – b" y en la segunda sacamos factor común "d – b"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).(d-c)$$