

Tema 1

Cálculo Matricial

1.01 El cuerpo más famoso	12
1.02 Matrices	15
1.03 Las matrices almacenan información	16
1.04 Matrices equidimensionales	17
1.05 Matriz opuesta	17
1.06 Matriz nula	17
1.07 Igualdad de matrices	17
1.08 Suma de matrices	17
1.09 Producto de un escalar por una matriz	18
1.10 Producto de matrices	19
1.11 Traspuesta de una matriz	21
1.12 Matriz simétrica	21
1.13 Matriz antisimétrica	22
1.14 Otros tipos de matrices cuadradas	22
1.15 Transformaciones elementales	24
1.16 Determinante de una matriz cuadrada	24
1.17 Menor complementario, cofactor o adjunto	25
1.18 Desarrollo por los elementos de una línea	25
1.19 Matriz regular, matriz singular	26
1.20 Propiedades de los determinantes	26
1.21 Determinante de un producto de matrices	31
1.22 Submatrices y menores de una matriz	31
1.23 Rango de una matriz	32
1.24 Cálculo del rango de una matriz	33
1.25 Adjunta de una matriz cuadrada	59
1.26 Inversa de una matriz cuadrada	60
1.27 Matriz ortogonal	64
1.28 Matrices congruentes	65
1.29 Matrices semejantes	65

1.21. DETERMINANTE DE UN PRODUCTO DE MATRICES

Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

1.22. SUBMATRICES Y MENORES DE UNA MATRIZ

Si en una matriz "A" seleccionamos los elementos que a la vez están en "r" cualquiera de sus filas y en "s" cualquiera de sus columnas, obtenemos una matriz de orden $r \times s$ de la que se dice que es una **submatriz** de "A". **Por ejemplo**, si en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 0 & 9 & \pi \end{pmatrix}$$

seleccionamos los elementos que a la vez están en la segunda o tercera fila y en la segunda o tercera o cuarta columnas, resulta la submatriz "P"; y si en "A" seleccionamos los elementos que a la vez están en la primera o segunda o cuarta fila y en la segunda o tercera o quinta columna, obtenemos la submatriz "M":

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

*Se llama **menor de orden "k"** de una matriz "A" al determinante de cualquier submatriz cuadrada de "A" que esté formada por "k" filas y "k" columnas.*

Obvio: cada elemento de "A" es un menor de orden 1

- **Por ejemplo**, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "A":

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12; \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

El determinante de "A" es el único menor de orden 3 que tiene "A", siendo obvio que "A" carece de menores de orden superior a 3, pues sólo tiene 3 filas.

- **Por ejemplo**, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "B":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -6 ; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 22 ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 3 de "B":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 12 ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -26 ; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -144$$

Obvio: "B" carece de menores de orden superior a 3, pues sólo tiene 3 filas.

• **Por ejemplo**, siendo

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "C":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 ; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 3 de "C":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 4 de "C":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Obvio: "C" carece de menores de orden superior a 4, pues sólo tiene 4 filas.

1.23. RANGO DE UNA MATRIZ

El "rango" de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden; se denota $rg(A)$. Por tanto, al afirmar que $rg(A) = k$ se afirma que en "A" hay al menos un menor no nulo de orden "k" y son nulos todos los menores de orden superior a "k" (si los hay).

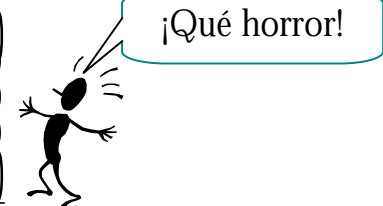
Por ejemplo, al decir que $rg(A) = 3$ se afirma que en "A" hay al menos un menor no nulo de orden 3 y son nulos todos los menores de orden superior a 3 (si los hay).

Obvio: es $rg(A) = 0$ sólo si "A" es la matriz nula; si "A" no es la matriz nula entonces $rg(A) \geq 1$; si "A" es de orden $m \times n$ entonces $rg(A) \leq \min\{m, n\}$.

PROPIEDADES DEL RANGO

- 1) El rango de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta.
- 2) El rango de una matriz no varía si cambiamos el orden de filas o columnas.
- 3) El rango de una matriz no varía si multiplicamos una línea por un número distinto de cero.
- 4) El rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos otras paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.
- 5) El rango de una matriz no varía sí suprimimos una línea de ceros.
- 6) Si una línea es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, podemos eliminar dicha línea sin que se altere el rango de la matriz.

Estas propiedades son muy útiles. **Por ejemplo**, al calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 9 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$



Siendo "A" de orden 5×7 , es $\text{rg}(A) \leq \min\{5, 7\} = 5$ y al observar "A" con detenimiento, vemos que:

- Las columnas primera, tercera y sexta son iguales; por eso podemos eliminar dos de ellas sin que se altere el rango de "A". Eliminamos la tercera y la sexta.
- La cuarta columna está formada por ceros; por eso podemos eliminar dicha columna sin que se altere el rango de "A".
- La quinta columna es el triple de la segunda; por eso podemos eliminar una de ellas sin que se altere el rango de "A". Eliminamos la quinta.
- La séptima columna es suma de la primera y la segunda; por eso podemos eliminar la séptima columna sin que se altere el rango de "A".

En definitiva, resulta ser:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

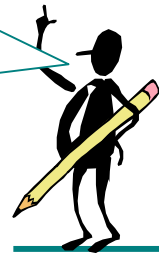
pues el menor de orden 2 indicado es no nulo



1.24. CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ

Podemos calcular el rango de una matriz "A" calculando "ordenadamente" menores de la matriz "A" (ejercicios 1.24.1 a 1.24.6) o realizando transformaciones elementales con los elementos de "A" (ejercicios 1.24.7 y 1.24.8).

El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por ello, ***para sufrir poco con el Álgebra es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices***



FONEMATO 1.24.1

Calcúlese el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

LA SOLUCION DE FULANO

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 5×6 , el máximo rango que puede tener es 5.

En "A" seleccionamos, si existe, un menor no nulo de orden 2; por ejemplo, elegimos el menor H_1 correspondiente a la "esquina" superior izquierda de "A":

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Al haber encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2 podemos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 2$, y nos importa un pito margarito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3 podremos asegurar que $\text{rg}(A) \geq 3$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3 podremos afirmar que $\text{rg}(A) = 2$.

Pasemos a calcular menores de orden 3; para ello orlamos el menor no nulo H_1 con la primera fila siguiente de "A" y cada una de las restantes columnas de "A"; o sea, a la matriz cuadrada cuyo determinante es H_1 le añadimos la primera fila siguiente de "A" y sucesivamente cada una de las restantes columnas de "A", así obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A" significa que podemos eliminar dicha tercera fila sin que se altere el rango de "A"; o sea, las matrices A y A_1 tienen el mismo rango:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 & 0 & -1 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observa: como A_1 sólo tiene 4 filas el máximo rango que puede tener A_1 (y por tanto "A") es 4; así, sin calcular ninguno de los menores de orden 5 que hay en "A" podemos garantizar que todos son nulos.

Seguimos con la búsqueda de un menor no nulo de orden 3; para ello repetimos el proceso, pero ahora trabajamos con la matriz A_1 : en A_1 orlamos el menor no nulo H_1 con la primera fila siguiente de A_1 y cada una de las restantes columnas de A_1 , y da la casualidad de que el menor de orden 3 que se obtiene al orlar H_1 con la tercera fila y la tercera columna de A_1 es no nulo:

$$H_2 = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como hemos encontrado un menor no nulo de orden 3 podemos afirmar que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) \geq 3$, y nos importa un pito afinadito si en A_1 hay o no otros menores no nulos de orden 3; lo que ahora nos preocupa es saber si en A_1 hay algún menor no nulo de orden 4, pues como sabemos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) \geq 3$ y que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) \leq 4$, si encontramos algún menor no nulo de orden 4 podremos afirmar que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) = 4$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 4 podremos afirmar que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) = 3$.

Pasemos a calcular menores de orden 4 en la matriz A_1 ; para ello orlamos el menor no nulo H_2 con la primera fila siguiente de A_1 y cada una de las restantes columnas de A_1 , así obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & -1 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 4 obtenidos al orlar el menor no nulo H_2 con la cuarta fila de A_1 y cada una de las restantes columnas de A_1 significa que podemos eliminar dicha cuarta fila sin que se altere el rango de A_1 ; o sea, las matrices A_1 y A_2 tienen el mismo rango:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & 0 & -1 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como A_2 es de orden 3×6 , el rango máximo que puede tener es 3, y como el menor de orden 3 indicado es no nulo, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_2) = 3$

LA SOLUCION DE MENGANO

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 5×6 , el máximo rango que puede tener es 5.

En la matriz "A" seleccionamos, si existe, un menor no nulo de orden 2; por ejemplo, elegimos el menor H_3 que se indica a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$$

Observa que Mengano es masoca, pues en vez de elegir el precioso menor no nulo de orden 2 que hay en la "esquina" superior izquierda de "A", elige otro menor no nulo de orden 2

Al haber encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2 podemos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 2$, y nos importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3 podremos asegurar que $\text{rg}(A) \geq 3$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3 podremos afirmar que $\text{rg}(A) = 2$. Pasemos a calcular menores de orden 3; para ello orlamos el menor no nulo H_3 con la primera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A", así obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 5 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar el menor no nulo H_3 con la primera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A" significa que podemos eliminar dicha primera fila sin que se altere el rango de "A"; o sea, las matrices A y A_3 tienen el mismo rango.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observa: como A_3 sólo tiene 4 filas, el máximo rango que puede tener A_3 (y por tanto "A") es 4; así, sin calcular ninguno de los menores de orden 5 que hay en "A" podemos garantizar que todos son nulos. Seguimos con la búsqueda de un menor no nulo de orden 3; para ello repetimos el proceso, pero trabajando con la matriz A_3 : en A_3 orlamos el menor no nulo H_3 con la primera fila siguiente de A_3 y cada una de las restantes columnas de A_3 , y da la casualidad de que el menor de orden 3 que se obtiene al orlar H_3 con la tercera fila y la primera columna de A_3 es no nulo:

$$H_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como hemos encontrado un menor no nulo de orden 3 podemos afirmar que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_3) \geq 3$, e importa un pito si en A_3 hay o no otros menores no nulos de orden 3; lo que ahora importa es saber si en A_3 hay algún menor no nulo de orden 4, pues como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_3) \geq 3$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_3) \leq 4$, si encontramos algún menor no nulo de orden 4 entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_3) = 4$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 4 entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_3) = 3$.

Pasemos a calcular menores de orden 4 en la matriz A_3 ; para ello orlamos el menor no nulo H_4 con la primera fila siguiente de A_3 y cada una de las restantes columnas de A_3 , así obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 4 obtenidos al orlar el menor no nulo H_4 con la cuarta fila de A_3 y cada una de las restantes columnas de A_3 significa que podemos eliminar dicha cuarta fila sin que se altere el rango de A_3 ; o sea, las matrices A_3 y A_4 tienen el mismo rango:

$$A_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Como A_4 es de orden 3×6 , el rango máximo que puede tener es 3, y como el menor de orden 3 indicado es no nulo, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_3) = \text{rg}(A_4) = 3$.

LA SOLUCION DE ZUTANO

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 5×6 , el máximo rango que puede tener es 5.

En la matriz "A", Zutano selecciona, si existe, un menor no nulo de orden 2; por ejemplo, elige el menor H_5 que se indica a continuación:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow H_5 = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Zutano es masoca, pues en vez de elegir el precioso menor no nulo de orden 2 que hay en la "esquina" superior izquierda de "A", elige otro menor no nulo de orden 2

Al haber encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2 podemos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 2$, y nos importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3 podremos asegurar que $\text{rg}(A) \geq 3$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3 podremos afirmar que $\text{rg}(A) = 2$. Pasemos a calcular menores de orden 3; para ello orlamos el menor no nulo H_5 con la primera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A", y da la casualidad de que el menor de orden 3 que se obtiene al orlar H_5 con la primera fila y la primera columna de "A" es no nulo:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & \boxed{8} & 1 & -2 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{0} & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H_6 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como hemos encontrado un menor no nulo de orden 3 podemos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 3$, y nos importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 3; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de orden 4, pues como sabemos que $\text{rg}(A) \geq 3$ y que $\text{rg}(A) \leq 5$, si encontramos algún menor no nulo de orden 4 podremos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 4$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 4 diremos que $\text{rg}(A) = 3$. *Para facilitar el cálculo de menores de orden 4, efectuamos operaciones "elementales" que no alteran el rango de "A":* la segunda fila de "A" la ponemos en último lugar y lo mismo hacemos con la segunda columna de "A"; así obtenemos la matriz A_5 :

$$A_5 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ \boxed{3} & 8 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ \boxed{0} & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que en la "esquina" superior izquierda tiene el menor no nulo H_6 (de orden 3).

Pasemos a calcular menores de orden 4 en la matriz A_5 ; para ello orlamos el menor no nulo H_6 con la primera fila siguiente de A_5 y cada una de las restantes columnas de A_5 , así obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ \boxed{3} & 8 & 1 & -2 \\ \boxed{0} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 3 \\ \boxed{3} & 8 & 1 & 7 \\ \boxed{0} & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ \boxed{3} & 8 & 1 & 5 \\ \boxed{0} & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 4 obtenidos al orlar el menor no nulo H_6 con la cuarta fila de A_5 y cada una de las restantes columnas de A_5 significa que podemos eliminar dicha cuarta fila sin que se altere el rango de A_5 ; o sea, las matrices A_5 y A_6 tienen el mismo rango:

$$A_6 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa: como A_6 sólo tiene 4 filas el máximo rango que puede tener A_6 (y por tanto "A") es 4; así, sin calcular ninguno de los menores de orden 5 que hay en "A" podemos garantizar que todos son nulos.

Sigamos buscando un menor no nulo de orden 4; para ello, en la matriz A_6 , orlamos el menor no nulo H_6 con la primera fila siguiente de A_6 y cada una de las restantes columnas de A_6 , así obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 4 obtenidos al orlar el menor no nulo H_6 con la cuarta fila de A_6 y cada una de las restantes columnas de A_6 significa que podemos eliminar dicha cuarta fila sin que se altere el rango de A_6 ; o sea, las matrices A_6 y A_7 tienen el mismo rango:

$$A_7 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A_7 es de orden 3×6 , el rango máximo que puede tener es 3, y como el menor de orden 3 es no nulo, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_5) = \text{rg}(A_6) = \text{rg}(A_7) = 3$.

LA SOLUCION DE MARCIANO

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 5×6 , el máximo rango que puede tener es 5.

Marciano observa un instante la matriz "A" y como es especialista en seleccionar menores no nulos de orden 3, en apenas una fracción de segundo localiza uno de estos menores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & \boxed{5} & 8 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow H_7 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Como hemos encontrado un menor no nulo de orden 3 podemos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 3$, y nos importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 3; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de

orden 4, pues como sabemos que $\text{rg}(A) \geq 3$ y que $\text{rg}(A) \leq 5$, si encontramos algún menor no nulo de orden 4 podremos afirmar que $\text{rg}(A) \geq 4$, y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 4 diremos que $\text{rg}(A) = 3$.

Para no volvernos locos y facilitar el cálculo de menores de orden 4, efectuamos operaciones "elementales" que no alteran el rango de "A": la primera y segunda filas de "A" las ponemos en los últimos lugares, y lo mismo hacemos con la primera columna de "A" (esto no sería necesario hacerlo si hubiéramos elegido el precioso menor no nulo de orden 3 que hay en la "esquina" superior izquierda de "A"); así obtenemos la matriz A_8 :

$$A_8 = \begin{array}{|cccccc|} \hline 5 & 8 & 1 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

que en la "esquina" superior izquierda tiene el menor no nulo H_7 (de orden 3). Pasemos a calcular menores de orden 4 en la matriz A_8 ; para ello orlamos el menor no nulo H_7 con la primera fila siguiente de A_8 y cada una de las restantes columnas de A_8 , así obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 4 obtenidos al orlar el menor no nulo H_7 con la cuarta fila de A_8 y cada una de las restantes columnas de A_8 significa que podemos eliminar dicha cuarta fila sin que se altere el rango de A_8 ; o sea, las matrices A_8 y A_9 tienen el mismo rango:

$$A_9 = \begin{array}{|cccccc|} \hline 5 & 8 & 1 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Observa: como A_9 sólo tiene 4 filas el máximo rango que puede tener A_9 (y por tanto "A") es 4; así, sin calcular ninguno de los menores de orden 5 que hay en "A" podemos garantizar que todos son nulos. Sigamos con la búsqueda de un menor no nulo de orden 4; para ello, en la matriz A_9 , orlamos el menor no nulo H_7 con la primera fila siguiente de A_9 y cada una de las restantes columnas de A_9 , así obtenemos los siguientes menores de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

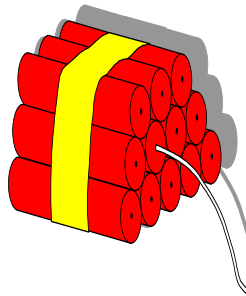
El que sean nulos todos los menores de orden 4 obtenidos al orlar el menor no nulo H_7 con la cuarta fila de A_9 y cada una de las restantes columnas de A_9 significa que podemos eliminar dicha cuarta fila sin que se altere el rango de A_9 ; o sea, las matrices A_9 y A_{10} tienen el mismo rango:

$$A_{10} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Como A_{10} es de orden 3×6 , el rango máximo que puede tener es 3, y como el menor de orden 3 indicado es no nulo, es $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_8) = \text{rg}(A_9) = \text{rg}(A_{10}) = 3$.

NOTA

Además de las soluciones de Fulano, Mengano, Zutano y Marciano, también podríamos dar las de Atilano, Emerenciano, Armenturio y algunos más como Wamba y D. Rodrigo; y si no hay error en los cálculos, todos llegan al resultado $\text{rg}(A) = 3$, lo que significa que en la matriz "A" hay al menos un menor no nulo de orden 3 y son nulos todos los menores de orden superior a 3.



Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango destrozará el ejercicio que estés haciendo, todo estará mal.

FONEMATO 1.24.2

Calcúlese el rango de las siguientes matrices:

$$1) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2) B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad 3) C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4) D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \quad 5) E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

1) Como "A" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, y como el menor de orden 2 que se indica a continuación es no nulo, entonces $\text{rg}(A) \geq 2$:

$$A = \left| \begin{array}{cc|c} \boxed{1 \quad 2} & & 1 \\ \boxed{1 \quad -1} & & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right| \Rightarrow H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila y la tercera columna de "A" resulta el determinante de "A", que es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2} & & 1 \\ \boxed{1 \quad -1} & & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Así, podemos eliminar la tercera fila de "A" sin que se altere su rango; o sea:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \left| \begin{array}{cc|c} \boxed{1 \quad 2} & & 1 \\ \boxed{1 \quad -1} & & -2 \end{array} \right| = 2$$

- 2) Como "B" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, y como el menor de orden 2 que se indica a continuación es no nulo, entonces $\text{rg}(B) \geq 2$:

$$B = \left| \begin{array}{cc|c} \boxed{1 \quad 2} & & 1 \\ \boxed{1 \quad 2} & & -2 \\ \boxed{1 \quad 0} & & -1 \end{array} \right| \Rightarrow H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) \geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_2 con la primera fila y la tercera columna de "B" resulta el determinante de "B"; y como:

$$|B| = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2} & & 1 \\ \boxed{1 \quad 2} & & -2 \\ \boxed{1 \quad 0} & & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

entonces $\text{rg}(B) = 3$, pues en "B" hay un menor no nulo de orden 3.

- 3) Como "C" es de orden 3×4 , el máximo rango que puede tener es 3, y como el menor de orden 2 que se indica a continuación es no nulo, entonces $\text{rg}(C) \geq 2$:

$$C = \left| \begin{array}{cc|cc} \boxed{2 \quad 3} & & 4 & 5 \\ \boxed{3 \quad 4} & & 5 & 6 \\ \boxed{1 \quad 1} & & 1 & 1 \end{array} \right| \Rightarrow H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C) \geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_3 con la tercera fila de "C" y cada una de las restantes columnas de "C" resultan los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 3} & & 4 \\ \boxed{3 \quad 4} & & 5 \\ \boxed{1 \quad 1} & & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 3} & & 5 \\ \boxed{3 \quad 4} & & 6 \\ \boxed{1 \quad 1} & & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar H_3 con la tercera fila de "C" y cada una de las restantes columnas de "C" significa que podemos eliminar dicha tercera fila sin que se altere el rango de "C"; o sea:

$$\text{rg}(C) = \text{rg} \left| \begin{array}{cc|cc} \boxed{2 \quad 3} & & 4 & 5 \\ \boxed{3 \quad 4} & & 5 & 6 \end{array} \right| = 2$$

- 4) Como "D" es de orden 4×4 , el máximo rango que puede tener es 4, y como el menor de orden 2 que se indica a continuación es no nulo, entonces $\text{rg}(D) \geq 2$:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D) \geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_4 con la segunda fila y la tercera columna de "D" obtenemos un menor no nulo de orden 3, lo que garantiza que $\text{rg}(D) \geq 3$:

$$H_5 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D) \geq 3$$

Al orlar el menor no nulo H_5 con la primera fila y la cuarta columna de "D" obtenemos $|D|$, que resulta ser no nulo, por lo que $\text{rg}(D) = 4$:

$$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

a las filas primera y segunda les sumamos la tercera

$$= (-1)^{1+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

desarrollamos por los elementos de la primera fila

- 1) Como "E" es de orden 4×4 , el máximo rango que puede tener es 4, y como el menor de orden 2 que se indica a continuación es no nulo, entonces $\text{rg}(E) \geq 2$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow H_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E) \geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_6 con la tercera fila y la tercera columna de "E" obtenemos un menor no nulo de orden 3, lo que garantiza que $\text{rg}(E) \geq 3$

$$H_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E) \geq 3$$

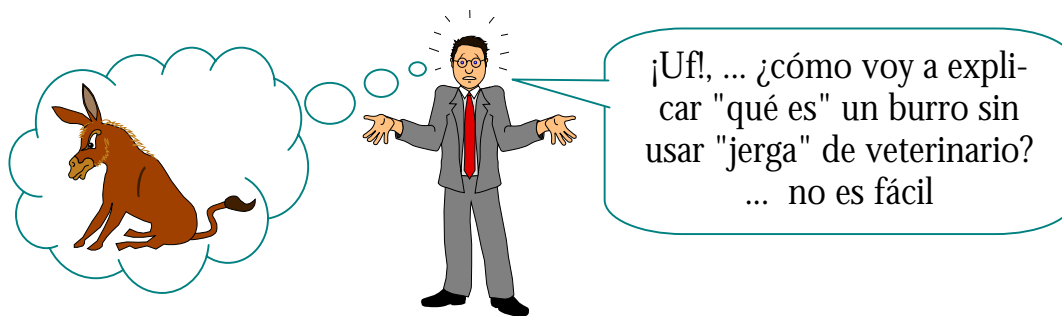
Al orlar el menor no nulo H_7 con la cuarta fila y la cuarta columna de "E" obtenemos el determinante de "E", que resulta ser nulo:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

por tanto, podemos eliminar la cuarta fila de "E" sin que se altere el rango de la matriz; así, es $\text{rg}(E) = 3$.



Todo el mundo es capaz de explicar **qué es** una casa sin usar la "jerga" de los albañiles; sin embargo, las neuronas de muchos estudiantes de Facultades de Ciencias o de Escuelas de Ingenieros se congelan al preguntarles por lo que dirían a su anciana abuelita si tuvieran que explicarle **qué es** una ecuación, advirtiéndoles que en su respuesta no deben usar la "jerga" matemática, pues de lo contrario la abuelita no entenderá un pimiento.



El congelamiento neuronal en cuestión es síntoma de notable candidez matemática, pues evidencia que a pesar de llevar muchos años trabajando con ecuaciones, estos estudiantes no han aprehendido lo "esencial" del asunto de las ecuaciones; y ya se sabe, cuando la "esencia" de algo no se comprende es imposible comprender los "detalles" (¿quién podría comprender **qué es** una ventana sin comprender previamente **qué es** una casa o habitáculo?).

Una ecuación es la expresión matemática de una "condición" de igualdad

Hay "condiciones" que son inexpresables en términos matemáticos; como la que "condición" que impone la ratoncita al ratoncito cuando éste le pregunta:

¿Te quieres casar conmigo?

y ella contesta:

Me casaré contigo si te embelesa el aroma de los narcisos en las noches de plenilunio

Pero a veces la historia es menos poética y la "condición" puede expresarse en términos matemáticos, como cuando la ratoncita contesta:

Me casaré contigo si al sumar seis al cuadrado de tu peso resulta el quintuplo del mismo

En este caso, rápidamente, el ratoncito "pone nombre" a su peso (por ejemplo, lo llama "x"), y al "traducir" a lenguaje matemático la "condición" que impone su amada obtiene una ecuación:

$$6 + x^2 = 5.x$$

Si por comodidad nos apetece que el número cero aparezca en el segundo miembro de la ecuación, entonces escribimos $x^2 - 5.x + 6 = 0$; además, también por comodidad, si denotamos $f(x)$ al "pedrusco" $x^2 - 5.x + 6$ que queda en el primer miembro de la ecuación, la podemos escribir como $f(x) = 0$.

*Cuando te encuentres con una ecuación tu trabajo consistirá en "resolverla"; o sea, en hallar, si existen, los valores de "x" que la satisfacen; de dichos valores de "x" se dice que son las **soluciones o raíces** de la ecuación. Por ejemplo,* el número 4 no es solución de la ecuación $x^2 - 5.x + 6 = 0$, pues $4^2 - 5.4 + 6 = 2 \neq 0$. El número 7 tampoco es solución, pues $7^2 - 5.7 + 6 = 13 \neq 0$. Sin embargo el número 2 sí es solución, pues $2^2 - 5.2 + 6 = 0$.

Observa: la condición impuesta por la ratita se refiere a una única característica de los ratones (el peso), pero podría referirse a varias; así sucedería si dijera:

Me casaré contigo si el producto de tu peso por tu altura coincide con tu edad

En tal caso, denotando "x" el peso, "y" la altura y "z" la edad, al traducir a lenguaje matemático la nueva "condición" obtenemos otra ecuación:

$$x.y = z$$

Naturalmente, si nos apetece que el número cero aparezca en el segundo miembro de la ecuación, escribimos $x.y - z = 0$; además, denotando $f(x;y;z)$ al "pedrusco" $x.y - z$ que queda en el primer miembro de la ecuación, la podemos escribir como $f(x;y;z) = 0$.

**LA REGLA
DE
RUFFINI
VERY
IMPORTANT**

Muchísimas veces te verás ante el problema de resolver una ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x)$ un polinomio; o sea, deberás determinar los valores de "x" que cumplen la condición $f(x) = 0$ (de dichos valores de "x" se dice que son las **soluciones o raíces** de la ecuación $f(x) = 0$).

- 1) Si el polinomio es de grado 1 (o sea, $f(x) = a \cdot x + b$, donde "a" y "b" son constantes, y $a \neq 0$), la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución, y su cálculo es asunto fácil:

$$a \cdot x + b = 0 \Rightarrow a \cdot x = -b \Rightarrow x = -b/a$$

- 2) Si el polinomio es de grado 2, (o sea, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, donde "a", "b" y "c" son constantes, y $a \neq 0$), la ecuación $f(x) = 0$ tiene 2 soluciones, y las calcularemos usando la "formulita" hiperfamosa que todos conocemos:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Por ejemplo:

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

- *Debes estar atent@ al caso en que el coeficiente de "x" (o sea, "b") sea un número par* (por ejemplo, $b = 2 \cdot k$), pues en tal caso podrás usar otra "formulita" más cómoda:

$$a \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-(2 \cdot k) \pm \sqrt{(2 \cdot k)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - a \cdot c}}{a}$$

Por ejemplo:

$$1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 1 \cdot 5}}{1} = -3 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

El coeficiente de "x" es par \Rightarrow "formulita" cómoda ($2 \cdot k = 6 \Rightarrow k = 3$)

Por ejemplo:

$$1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 13}}{1} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{(-1) \cdot 9} =$$

El coeficiente de "x" es par \Rightarrow "formulita" cómoda ($2 \cdot k = -4 \Rightarrow k = -2$)

$$= 2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm 3 \cdot i$$

$\sqrt{-1}$ no es "real", se llama "unidad imaginaria" y se denota "i"

- También debes estar *atent@ al caso en que el "término independiente" de la ecuación sea el número cero* (o sea, $c = 0$), pues en tal caso no necesitaremos usar ninguna formulita, y nos podremos apostar la vida a que una de las soluciones de la ecuación es $x = 0$. En efecto:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (a \cdot x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a \cdot x + b = 0 \Rightarrow x = -b/a \end{cases}$$

Para que el producto de dos números sea 0 basta que alguno sea 0

3) En general, si $f(x)$ es un polinomio de grado "n" y $n \geq 3$, el problema de determinar las "n" soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ es un grandísimo petardo, pues no hay ninguna "formulita" que nos permita calcularlas. No obstante, *en todos los casos que encontremos* (normalmente será $n = 3$ ó $n = 4$), *el polinomio $f(x)$ estará "preparado" para que las soluciones sean números enteros* (1, -1, 2, -2, ...), y Ruffini nos permitirá determinarlas.

FONEMATO 1.24.3 (TODAS LAS RAÍCES ENTERAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 2 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 8 \cdot x$

SOLUCIÓN

Debemos determinar los valores de "x" que satisfacen la ecuación (condición) $f(x) = 0$. Como $f(x)$ es un polinomio de grado 5, la ecuación $f(x) = 0$ tiene 5 soluciones (alguna de ellas puede estar "repetida").

¡Qué suerte!, como el término independiente de la ecuación dada es 0, podemos garantizar que $x = 0$ es una de las soluciones:

$$2 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 8 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (2 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora nuestro trabajo consiste en resolver la ecuación $2 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 8 = 0$, y de nuevo tenemos la suerte de cara, pues **como la suma** ($2 - 10 + 8$) **de los coeficientes de la ecuación es 0, podemos apostar tranquilamente la vida a que $x = 1$ es una de sus soluciones**; es decir, podemos garantizar que el polinomio de grado cuatro $g(x) = 2 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 8$ es divisible por $x - 1$. La Regla de Ruffini nos permite calcular los coeficientes del polinomio $h(x)$ que se obtiene como cociente de dicha división:

		coeficientes de $g(x)$				
		↓				
$x = 1$		2	0	-10	0	8
		2	2	-8	-8	
		2	2	-8	-8	0
		↑				
		Coeficientes de $h(x) = g(x)/(x - 1)$				
						Resto
						↑

Así, es $h(x) = g(x)/(x - 1) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8$; o sea:

$$g(x) = (x - 1) \cdot h(x) = (x - 1) \cdot (2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8)$$

En consecuencia:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $h(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 = 0$; y como la

suma $2 + 2 - 8 - 8$ de los coeficientes de ésta no es 0, podemos apostar la vida a que $x = 1$ no es una de sus soluciones. No obstante, **si la ecuación tiene raíces enteras deben ser divisores del término independiente** -8 , que son los números $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y -8 .

Así, debemos armarnos de paciencia e ir probando con todos (excepto el 1, pues ya sabemos que no es solución de $h(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 = 0$) rezando para que haya suerte y alguno de ellos es solución. Es $h(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 8 = 0$, lo que garantiza que $x = 2$ es solución de $h(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 = 0$ y que el polinomio (de grado 3) $h(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8$ es divisible por $x - 2$; la Regla de Ruffini nos permitirá calcular los coeficientes del polinomio $t(x)$ que se obtiene como cociente de dicha división:

		coeficientes de $h(x)$			
		↓			
$x = 2$		2	2	-8	-8
			4	12	8
		2	6	4	0
		↑			
		Coeficientes de $t(x) = h(x)/(x - 2)$			
		↑			
		Resto			

Por tanto:

$$t(x) = h(x)/(x - 2) = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4$$

o sea:

$$h(x) = (x - 2) \cdot t(x) = (x - 2) \cdot (2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4)$$

En consecuencia:

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x - 2) \cdot (2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 = 0 \end{cases}$$

y las soluciones de la ecuación $2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 2 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

En definitiva, siendo $f(x) = 2 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 8 \cdot x$, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son:

$$x = 0 ; x = 1 ; x = 2 ; x = -1 ; x = -2$$

El que así sean las cosas nos permite escribir la **descomposición factorial** del polinomio:

$$f(x) = 2 \cdot x^5 - 10 \cdot x^3 + 8 \cdot x = 2 \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

El "2" es el coeficiente del término de mayor grado de $f(x)$

NOTA

Si un polinomio $f(x)$ es tal que $f(x) = (x - a)^k \cdot p(x)$, siendo el polinomio $p(x)$ tal que $p(a) \neq 0$, se dice que $x = a$ es una **raíz múltiple de orden "k"** de la ecuación $f(x) = 0$. **Por ejemplo:**

$$f(x) = x^6 - 4 \cdot x^4 = 0 \Rightarrow x^4 \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (cuádruple)} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Por tanto, las 6 raíces de la ecuación $f(x) = x^6 - 4 \cdot x^4 = 0$ son:

$$x = 0 \text{ (cuádruple)} ; x = 2 ; x = -2$$

FONEMATO 1.24.4 (TODAS LAS RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 12 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$

SOLUCIÓN

La ecuación $12 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0$ carece de raíces enteras, pues ninguno de los divisores del término independiente "1" es solución.

Si la ecuación admite raíces fraccionarias de la forma "m/n" (siendo "m" y "n" números enteros y "n" distinto de 0 y de 1), entonces "m" es divisor del término independiente (el número 1 en nuestro caso) y "n" es divisor del coeficiente del término de mayor grado (el número 12 en nuestro caso).

Por tanto, las únicas raíces fraccionarias que puede tener la ecuación dada son:

$$\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{6} ; -\frac{1}{6} ; \frac{1}{12} ; -\frac{1}{12}$$

Ahora hay que armarse de paciencia e ir probando una por una a ver si hay suerte y alguna ellas es solución de $12 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0$ y tenemos suerte, pues $x = 1/2$ es solución:

$$12 \cdot (1/2)^3 - 4 \cdot (1/2)^2 - 3 \cdot (1/2) + 1 = 0$$

Mediante Ruffini obtenemos:

$$\frac{12 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{x - \frac{1}{2}} = 12 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2$$

Las soluciones de $12 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 2 = 0$ son $x = 1/3$ y $x = -1/2$; así, la "descomposición factorial" del polinomio $f(x) = 12 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1$ es:

$$12 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = 12 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x - \frac{1}{3}) \cdot (x + \frac{1}{2})$$

Los siguientes ejercicios son muy importantes; en ellos seguiremos calculando rangos de matrices, pero ahora ocurrirá que algunos elementos de las matrices estarán "locos", es decir, podrán tomar cualquier valor



FONEMATO 1.24.5

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según los valores del número real "k":

$$1) A = \begin{pmatrix} 6 & k & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2) B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ k & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

1) Como "A" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "k" se anula dicho determinante: $|A| = 4 \cdot k = 0 \Rightarrow k = 0$

- Si $k \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$.
- Si $k = 0$, la matriz "A" es:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como ahora es $|A| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$.

2) Como "B" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "k" se anula dicho determinante:

$$|B| = k \cdot (k^2 + 4) = 0 \Rightarrow k = 0$$

La ecuación $k \cdot (k^2 + 4) = 0$ tiene dos raíces imaginarias a las que no hacemos caso, pues se nos dice que $k \in \mathcal{R}$

- Si el valor de "k" es distinto de 0 entonces $\text{rg}(B) = 3$, pues $|B| \neq 0$
- Si $k = 0$, la matriz "B" es:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como ahora $|B| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$.

FONEMATO 1.24.6

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según los valores del número real "k":

$$1) C = \begin{pmatrix} 2.k+2 & k & 2 \\ 2 & 2-k & 0 \\ k+1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}; \quad 2) D = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

- 1) Como "C" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "k" se anula dicho determinante:

A la primera columna le restamos la tercera

$$|C| = \begin{vmatrix} 2.k+2 & k & 2 \\ 2 & 2-k & 0 \\ k+1 & 0 & k+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ = \\ \uparrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2.k & k & 2 \\ 2 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera fila

$$= (k+1) \cdot [2.k(2-k) - 2.k \cdot 0] = 2.k.(k+1).(1-k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-1 \\ k=1 \end{cases}$$

- Si "k" es distinto de 0, de 1 y de -1, entonces $\text{rg}(C) = 3$, pues $|C| \neq 0$.
- Si $k = 0$, la matriz "C" es:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como ahora es $|C| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C) = 2$.

- Si $k = 1$, la matriz "C" es:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como ahora es $|C| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C) = 2$.

- Si $k = -1$, la matriz "C" es:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como ahora $|C| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C) = 2$.

- 2) Como "D" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "k" se anula dicho determinante:

$$|D| = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ k+1 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

A la tercera fila le sumamos las dos primeras

Muy astutamente, sacamos factor común "k + 1" en la tercera fila

$$= (k+1) \cdot \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k+1) \cdot \begin{vmatrix} k-2 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

A las columnas primera y segunda les restamos la tercera columna

$$= (k+1) \cdot (k-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Se dice que la solución $k = 2$ es "doble" para poner de manifiesto que el factor "k - 2" aparece elevado al cuadrado

- Si el valor de "k" es distinto de -1 y de 2, entonces $\text{rg}(D) = 3$, pues $|D| \neq 0$
- Si $k = -1$, la matriz "D" es:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como ahora $|D| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D) = 2$.

- Si $k = 2 \Rightarrow$ "D" se convierte en: $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(D) = \text{rg}[1 \ 1 \ 1] = 1$

FONEMATO 1.24.7

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según los valores del número real "k":

$$1) E = \begin{pmatrix} 3 & k & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; 2) F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

- 1) Como "E" es de orden 4×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si en "E" hay algún menor no nulo de orden 3.

$$E = \begin{pmatrix} 3 & k & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "E" es no nulo para cualquier valor de "k", entonces es $\text{rg}(E) \geq 2$ con independencia del valor que tome "k". Al orlar el citado menor no nulo de orden 2 con la tercera fila y la tercera columna de "E" se obtiene un menor de orden 3 que es $\neq 0$ para cualquier valor de "k":

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto, $\forall k \in \mathcal{R}$, es $\text{rg}(E) = 3$.

- 2) Como "F" es de orden 4×4 , el máximo rango que puede tener es 4, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "k" se anula dicho determinante:

$$|F| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{vmatrix} \stackrel{M4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 8}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix} =$$

A la segunda fila le restamos el triple de la primera
 A la tercera fila le restamos la primera
 A la cuarta fila le restamos la primera

Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix} \stackrel{\uparrow}{=} (k+1) \cdot (k^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-1(\text{doble}) \end{cases}$$

Desarrollamos por los elementos de la segunda fila

- Si "k" es distinto de 1 y de -1, es $\text{rg}(F) = 4$, pues $|F| \neq 0$.
- Si $k = 1$, la matriz "F" es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Como ahora $|F| = 0$ y el menor de orden 3 indicado es $\neq 0 \Rightarrow \text{rg}(F) = 3$

- Si $k = -1$, la matriz "F" es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(F) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la tercera fila de "F", pues es igual a la primera

Resulta ser $\text{rg}(F) = 2$, pues el menor de orden 2 indicado es no nulo, y son nulos todos los menores de orden 3 que se obtienen al orlar el citado menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

NOTA

Hemos hecho el pardillo al analizar el rango cuando $k = 1$ ó $k = -1$, pues las matrices "F" y "M" tienen el mismo rango:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{pmatrix}$$

Pero "M" es más cómoda a efectos del cálculo del rango cuando $k = 1$ ó $k = -1$

FONEMATO 1.24.8

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

$$1) M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix} ; 2) N = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a \cdot b & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} ; 3) S = \begin{pmatrix} 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

- 1) Como "M" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "a" y "b" se anula dicho determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & b+1 & 0 \\ 4 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} = a - 4 \cdot b - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 + 4 \cdot b$$

- Así, si $a \neq 3 + 4 \cdot b \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$.
- Si $a = 3 + 4 \cdot b$, la matriz "M" se convierte en

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -3 - 4 \cdot b & -1 \end{pmatrix}$$

Como ahora $|M| = 0$ y es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \forall b$$

entonces, si $a = 3 + 4 \cdot b$ es $\text{rg}(M) = 2$ independientemente del valor de "b".

- 2) Como "N" es de orden 3×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "a" y "b" se anula dicho determinante:

$$|N| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a \cdot b & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b \cdot (a^3 - 3 \cdot a + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a^3 - 3 \cdot a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \text{ ó } a = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

- Si $b \neq 0$ y "a" es distinto de 1 y de -2 es $\text{rg}(N) = 3$, pues $|N| \neq 0$
- Si $b = 0$, la matriz "N" es:

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 2 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto, si $b = 0$ y $a = 1$ es $\text{rg}(N) = 1$; y $\text{rg}(N) = 2$ si $b = 0$ y $a \neq 1$

- Si $a = 1$, la matriz "N" se convierte en:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & b \end{pmatrix} = 1, \forall b$$

Eliminamos la tercera columna, pues es igual a la primera
Eliminamos la segunda columna, pues es proporcional a la primera

- Si $a = -2$, la matriz "N" se convierte en:

$$N = \begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2 \cdot b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix}$$

Como ahora $|N| = 0$ y es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0, \forall b$$

entonces, si $a = -2$ es $\text{rg}(N) = 2$ independientemente del valor de "b".

- 3) Como "S" es de orden 4×3 , el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá si en "S" hay algún menor no nulo de orden 3.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -b & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor de orden 2 indicado en "S" es no nulo para cualesquiera valores de "a" y "b", es $\text{rg}(S) \geq 2$ con independencia de los valores de "a" y "b". Al orlar el citado menor no nulo de orden 2 respectivamente con las filas primera y segunda de "S" se obtienen los siguientes menores de orden 3:

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & -b & 1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + a + 15.b + a.b ; H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.a + 18$$

Si ambos son nulos será $\text{rg}(S) = 2$, y si alguno es no nulo será $\text{rg}(S) = 3$.

- Si $a \neq -9$ es $H_2 \neq 0$, por lo que $\text{rg}(S) = 3$
- Si $a = -9$ es $H_2 = 0$ y $H_1 = 9 - 9 + 15.b - 9.b = 6.b$; así:
 Si $a = -9$ y $b \neq 0$ es $H_1 = 0$ y $H_2 \neq 0$, por lo que $\text{rg}(S) = 3$
 Si $a = -9$ y $b = 0$ es $H_1 = 0$ y $H_2 = 0$, por lo que $\text{rg}(S) = 2$

CALCULO DEL RANGO MEDIANTE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

El método utilizado en los ejercicios anteriores no es recomendable si tenemos que calcular el rango de una matriz "A" que, por ejemplo, tiene 20 filas y 69 columnas. En tan dramática situación es mejor hacer transformaciones elementales con los elementos de "A" para así obtener otras matrices que tienen igual rango que "A" pero que, por contener gran cantidad de ceros, son más cómodas a la hora de calcular de su rango. La secuencia de trabajo es así:

- 1) Haciendo los cambios de filas y columnas que sean menester, colocamos en la posición a_{11} de "A" un elemento no nulo. Mejor que mejor si tal elemento no nulo es el número 1, pues así no hará falta el siguiente paso.
- 2) Si la matriz "A" es tan perversa que ningún elemento de ella es el número 1, dividimos la primera fila por a_{11} , y así conseguimos que el número 1 sea el elemento que está en la primera fila y en la primera columna.
- 3) Reducimos a cero los elementos de la primera columna (salvo el número 1 que ocupa la posición a_{11}) restando a las filas segunda, tercera n-ésima, los elementos de la primera fila multiplicados respectivamente por los números $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$.

- 4) Repetimos las operaciones anteriores para las restantes columnas.
 5) El proceso acaba cuando sea fácil calcular del rango de alguna de las matrices "intermedias" que van apareciendo.

FONEMATO 1.24.7

Determinése el rango de las siguientes matrices

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad 2) B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \quad 3) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Es:

¡Qué suerte!, el elemento a_{11} es el número 1; para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, y a la tercera fila le restamos el triple de la primera

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \downarrow = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \uparrow = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \uparrow = 3$$

(tercera fila) - (doble de la segunda)

La última matriz tiene determinante no nulo (observa que es "triangular")

2) Es:

Cambiamos la primera fila por la tercera

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \downarrow = \text{rg} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \uparrow = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

Cambiamos la primera columna por la segunda

Para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el triple de la primera, y a la tercera fila le restamos el doble de la primera

$$\downarrow = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \uparrow = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Eliminamos la tercera fila, pues es proporcional a la segunda

3) Es:

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, a la tercera fila le restamos el triple de la primera, y a la cuarta fila le restamos el séxtuplo de la primera

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

A la cuarta fila le restamos la tercera

Eliminamos la cuarta fila, pues es igual a la segunda

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

FONEMATO 1.24.8

Determinése el rango de las siguientes matrices

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

1) Es:

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, a la tercera fila le restamos la primera, y a la cuarta fila le restamos el triple de la primera

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -13 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

Para que en la segunda columna "aparezcan" ceros, a la tercera fila le sumamos la segunda, y a la cuarta fila le restamos el doble de la segunda

Eliminamos la cuarta fila, pues es proporcional a la tercera

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & -5 \end{pmatrix} = 3$$

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

2) Es:

Cambiamos la primera columna por la cuarta

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

A las filas tercera y cuarta les restamos la primera

Eliminamos la cuarta fila, pues es proporcional a la tercera

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

Cambiamos las filas segunda y tercera

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

A la tercera fila le sumamos el doble de la segunda, y a la cuarta fila le restamos el triple de la segunda

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Eliminamos la cuarta fila, pues es proporcional a la tercera

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo