Tema 1

Cálculo Matricial

1.25. ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA

*La **adjunta** de una matriz cuadrada "A" se denota Adj.(A), y es la matriz cuadrada que resulta al sustituir cada elemento de la matriz traspuesta de "A" por su adjunto o cofactor.* ***Por ejemplo,*** si:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 7 & 6\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}5 & -9\\ 2 & -3\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

al sustituir en sus traspuestas cada elemento por su cofactor o adjunto, resulta:

$$\text{Adj.}(A)=\begin{pmatrix}6 & -8\\ -7 & 2\end{pmatrix}\ ;\ \text{Adj.}(B)=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -2 & 5\end{pmatrix}$$

$$\text{Adj.}(C)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}5 & 8\\ 6 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 7\\ 6 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 7\\ 2 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -3\\ 6 & -12 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

1) $A\bullet \text{Adj.}(A)=(\text{Adj.}(A))\bullet A=|A|\bullet I$, siendo "I" la matriz unidad del mismo orden que "A".

2) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es:

$$\text{Adj.}(A\bullet B)=((\text{Adj.}(A))\bullet((\text{Adj.}(B))$$

3) Siendo "A" cuadrada de orden "n", es $|A|\,.\,|\text{Adj.}(A)|=(|A|)^n$; por tanto:

$$|\text{Adj.}(A)|=(|A|)^{n-1}$$

4) Si "A" es singular, Adj.(A) también lo es, y $\text{rg}(\text{Adj.}(A))\le 1$; además:

$$A\bullet \text{Adj.}(A)=(\text{Adj.}(A))\bullet A=0$$

1.26. INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si "A" es una matriz cuadrada de orden "n" e "I" es la matriz unidad del mismo orden que "A", se llama ***inversa*** de "A" y se denota A^{-1} a la matriz cuadrada de orden "n" tal que $A\bullet A^{-1}=A^{-1}\bullet A=I$. Se demuestra que:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet \text{Adj.}(A)$$

¡Ojo!, como en Matemáticas está prohibido dividir por cero, la expresión anterior no tiene sentido si $|A|=0$ ($\Rightarrow$las matrices "singulares" carecen de matriz inversa).

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es $|A|=-1$ y $A^t=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$; así, al sustituir en la matriz A^t cada elemento por su adjunto, resulta:

$$\text{Adj.}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\1&5\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}3&2\\5&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\7&-1&-2\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz inversa de "A" es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\bullet \text{Adj.}(A)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-7&1&2\\2&0&-1\end{pmatrix}$

PROPIEDADES

1) $(A^{-1})^{-1}=A$ y $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

2) Si "A" es simétrica, entonces A^{-1} también es simétrica (si existe A^{-1}).

1) Si $|A|\neq 0$ es válida la ley de simplificación; o sea: si "B" y "C" son matrices cuadradas del mismo orden que "A" y $A\bullet B=A\bullet C$, entonces $B=C$

2) La inversa de un producto de matrices regulares del mismo orden es el producto de las inversas en orden contrario. ***Por ejemplo,*** si "A", "B", "C" y "D" son matrices regulares del mismo orden, es:

$$(A\bullet B\bullet C\bullet D)^{-1}=D^{-1}\bullet C^{-1}\bullet B^{-1}\bullet A^{-1}$$

3) Si "A" tiene inversa, entonces $|A^{-1}|=1/|A|$; en efecto:

$$A\bullet A^{-1}=I\Rightarrow |A\bullet A^{-1}|=|I|=1\Rightarrow |A|.|A^{-1}|=1\Rightarrow |A^{-1}|=1/|A|$$

FONEMATO 1.26.1

Sean:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&a+c&a+b\end{pmatrix};\ N=\begin{pmatrix}1&k&2\\k&3&k\\1&k&3\end{pmatrix}$$

1) Compruébese que la matriz "M" carece de inversa.

2) Calcúlese "k" para que la matriz "N" tenga inversa y, en su caso, calcular N^{-1}.

3) Calcúlense "X" e "Y" tales que $2\bullet X+3\bullet Y=A$ y $-3\bullet X+Y=B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}8&13\\-7&6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1&-3\\5&2\end{pmatrix}$$

4) Calcúlense "X" e "Y" tales que $X+A\bullet Y=I$ y $X-3\bullet Y=0$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix};\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\ 0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Para comprobar que "M" carece de inversa debemos comprobar que su determinante es nulo:

A la tercera fila le sumamos la segunda

$$\left|M\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

Pues las filas primera y tercera son proporcionales

2) Para que "N" tenga inversa ha de ser "regular" (o sea, $\left|N\right| \neq 0$):

$$\left|N\right| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 3 - k^2 \neq 0 \text{ siempre que } k \neq \pm\sqrt{3}$$

- Si $k \neq \pm\sqrt{3}$, es: $N^{-1} = \dfrac{1}{\left|N\right|} \bullet \text{Adj.}(N) = \dfrac{1}{3-k^2} \bullet \begin{pmatrix} 9-k^2 & -k & k^2-6 \\ -2.k & 1 & k \\ k^2-3 & 0 & 3-k^2 \end{pmatrix}$

$$N^t = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 3 & k \\ 2 & k & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj.}(N) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & k \\ k & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & k \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 3 \\ 2 & k \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & k \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

En la matriz N^t sustituimos cada elemento por su adjunto

$$= \begin{pmatrix} 9-k^2 & -k & k^2-6 \\ -2.k & 1 & k \\ k^2-3 & 0 & 3-k^2 \end{pmatrix}$$

3) Se trata de calcular "X" e "Y" de modo que se satisfagan las "condiciones" (ecuaciones) $2 \bullet X + 3 \bullet Y = A$ y $-3 \bullet X + Y = B$.

Como todas las matrices que intervienen en la historia "aparecen" únicamente multiplicadas por constantes, podremos resolver la papeleta multiplicando las ecuaciones por números adecuados para que tras sumarlas (o restarlas) "desaparezca" alguna de las "incógnitas" ("X" o "Y"):

Multiplicamos por -3 la segunda ecuación

$$\left.\begin{array}{r} 2 \bullet X + 3 \bullet Y = A \\ -3 \bullet X + Y = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \bullet X + 3 \bullet Y = A \\ 9 \bullet X - 3 \bullet Y = -3 \bullet B \end{array}\right\} \Rightarrow 11 \bullet X = A - 3 \bullet B \Rightarrow$$

Sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro

$$\Rightarrow 11 \bullet X = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} - 3 \bullet \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -22 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación dada se deduce que:

$$Y = B + 3 \bullet X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 3 \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Se trata de calcular "X" e "Y" de modo que se satisfagan las "condiciones" (ecuaciones) $X + A \bullet Y = I$ y $X - 3 \bullet Y = 0$. No hace falta ser un lince para darse cuenta de que como "X" aparece sola en ambas ecuaciones, si restamos las ecuaciones miembro a miembro "desaparece" la incógnita "X":

$$\left.\begin{matrix} X + A \bullet Y = I \\ X - 3 \bullet Y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \bullet Y + 3 \bullet Y = I \Rightarrow (A + 3 \bullet I) \bullet Y = I \Rightarrow$$

En este trance, al sacar factor común "Y" por la derecha, siempre hay algún pardillete que escribe $A \bullet Y + 3 \bullet Y = (A + 3) \bullet Y$, con lo que obtiene una suma absurda: la suma de la matriz "A" (cuadrada de orden 2) y el número 3. Lo correcto es escribir:

$$A \bullet Y + 3 \bullet Y = A \bullet Y + 3 \bullet I \bullet Y = (A + 3 \bullet I) \bullet Y$$

$$\Rightarrow (A + 3 \bullet I)^{-1} \bullet (A + 3 \bullet I) \bullet Y = (A + 3 \bullet I)^{-1} \Rightarrow$$

Para despejar "Y" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por $(A + 3 \bullet I)^{-1}$, pues $(A + 3 \bullet I)^{-1} \bullet (A + 3 \bullet I) = I$

$$\Rightarrow Y = (A + 3 \bullet I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = 3 \bullet Y = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Si $H = A + 3 \bullet I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{|H|} \bullet \text{Adj.}(H) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

$|H| = 20$; $\text{Adj.}(H) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

FONEMATO 1.26.2

Si "A" es una matriz invertible tal que $|A + I| \neq 0$ y $|A - I| \neq 0$, demuéstrese que la matriz "B" es singular si se verifica que $A \bullet B = A^{-1} \bullet B$.

SOLUCIÓN

$$A \bullet B = A^{-1} \bullet B \Rightarrow A \bullet A \bullet B = A \bullet A^{-1} \bullet B \Rightarrow A^2 \bullet B = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 \bullet B - B = 0 \Rightarrow (A^2 - I) \bullet B = 0 \Rightarrow (A + I) \bullet (A - I) \bullet B = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 - I = (A + I) \bullet (A - I)}$$

$$\Rightarrow |A + I| . |A - I| . |B| = 0 \Rightarrow |B| = 0$$

$$\boxed{\text{Es } |A + I| \neq 0 \text{ y } |A - I| \neq 0}$$

FONEMATO 1.26.3

Demuéstrese que si $a^2+b^2+c^2=1$, entonces, siendo "k" es un número natural, es $M^k=M$, donde:

$$M=\begin{pmatrix} a^2 & a.b & a.c \\ a.b & b^2 & b.c \\ a.c & b.c & c^2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

Nuestra proverbial astucia nos hace ver que:

$$M=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

Es:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=a^2+b^2+c^2$$

Por tanto:

$$M^k=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{a^2+b^2+c^2}\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{a^2+b^2+c^2}\bullet\ldots\bullet\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{a^2+b^2+c^2}\bullet\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}=$$

$$=(a^2+b^2+c^2)^{k-1}\bullet\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}}_{M}=(a^2+b^2+c^2)^{k-1}\bullet M=M$$

$$\boxed{\text{Si } a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)^{k-1}=1}$$

FONEMATO 1.26.4

Sea "A" una matriz idempotente.

1) Demuéstrese que si $B=I-A$ entonces $B^2=B$ y $A\bullet B=B\bullet A=0$.

2) Demuéstrese que si $C=2\bullet A-I$ entonces $C^2=C$.

SOLUCIÓN

1) Si $B=I-A$, es:

$$B^2=(I-A)\bullet(I-A)=I^2-2\bullet A+A^2=I-2\bullet A+A=I-A=B$$

$$\boxed{\text{"A" idempotente }\Rightarrow A^2=A}$$

• Es: $A \bullet B = A \bullet (I - A) = A - A^2 = A - A = 0$

$$\boxed{\text{"A" idempotente} \Rightarrow A^2 = A}$$

$$B \bullet A = (I - A) \bullet A = A - A^2 = A - A = 0$$

2) Si $C = 2 \bullet A - I$, entonces:

$$C^2 = C \bullet C = (2 \bullet A - I) \bullet (2 \bullet A - I) = 4 \bullet A^2 - 4 \bullet A + I = I$$

$$\boxed{\text{"A" idempotente} \Rightarrow A^2 = A}$$

1.27. MATRIZ ORTOGONAL

Si "A" es una matriz cuadrada con determinante no nulo e "I" es la matriz unidad del mismo orden que "A", se dice que "A" es ***ortogonal*** si $A \bullet A^t = I$, o lo que es igual: $A^t = A^{-1}$.

Por ejemplo, las siguientes matrices son ortogonales:

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ -\text{sen } x & \cos x \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

1) El determinante de una matriz ortogonal es 1 ó -1. En efecto, si $A \bullet A^t = I$, es $|A| . |A^t| = |I| = 1$, y como $|A| = |A^t|$, resulta: $|A| . |A| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$.

2) Si "A" es ortogonal entonces A^{-1} también lo es. En efecto:

$$\boxed{\text{"A" ortogonal} \Rightarrow A^{-1} = A^t}$$

$$A^{-1} \bullet (A^{-1})^t = A^{-1} \bullet (A^t)^t = A^{-1} \bullet A = I$$

$$\boxed{\text{Siempre es } (A^t)^t = A}$$

3) Si "A" es ortogonal entonces A^t también lo es. En efecto:

$$A^t \bullet (A^t)^t = A^t \bullet A = A^{-1} \bullet A = I$$

$$\boxed{\text{Es sabido que } (A^t)^t = A} \quad \boxed{\text{"A" ortogonal} \Rightarrow A^t = A^{-1}}$$

4) Si "A" y "B" son ortogonales del mismo orden entonces $A \bullet B$ también es ortogonal. En efecto, si $A \bullet A^t = I$ y $B \bullet B^t = I$, es:

$$(A \bullet B) \bullet (A \bullet B)^t = (A \bullet B) \bullet B^t \bullet A^t = A \bullet (B \bullet B^t) \bullet A^t = A \bullet A^t = I$$

$$\boxed{(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t} \qquad \boxed{B \bullet B^t = I}$$

1.28. MATRICES CONGRUENTES

Se dice que las matrices "A" y "B" (cuadradas de orden "n") son ***congruentes*** si existe una matriz "H" (cuadrada de orden "n") tal que $A = H^t \bullet B \bullet H$.

NOTA

En la Universidad te esperan los entes llamados ***formas cuadráticas***; cada forma cuadrática lleva pegadas a su chepa infinidad de matrices (simétricas), y éstas son congruentes.

1.29. MATRICES SEMEJANTES

Si "A" y "B" son matrices cuadradas de orden "n", se dice que son ***semejantes*** si existe una matriz regular "P" (cuadrada de orden "n") tal que:

$$B = P^{-1} \bullet A \bullet P$$

1) *Dos matrices semejantes tienen el mismo determinante.* En efecto, si "A" y "B" son semejantes, es $B = P^{-1} \bullet A \bullet P$, y así:

$$|B| = |P^{-1} \bullet A \bullet P| = |P^{-1}|.|A|.|P| = |A|$$

$$\boxed{|P^{-1}|.|P| = 1}$$

2) *Dos matrices semejantes tienen la misma traza.* En efecto, si las matrices "A" y "B" son semejantes, es $B = P^{-1} \bullet A \bullet P$, y así:

$$tr(B) = tr(P^{-1} \bullet A \bullet P) = tr(P^{-1} \bullet (A \bullet P)) = tr((A \bullet P) \bullet P^{-1}) =$$

$$\boxed{Tr(Pepa \bullet Juana) = Tr(Juana \bullet Pepa)}$$

$$= tr(A \bullet P \bullet P^{-1}) = tr(A)$$

$$\boxed{P \bullet P^{-1} = I \Rightarrow A \bullet P \bullet P^{-1} = A}$$

NOTA

En la Universidad trabajarás con los entes llamados ***endomorfismos***; cada endomorfismo lleva pegadas a su chepa infinidad de matrices, y éstas son semejantes.

FONEMATO 1.29.1

Sea "B" una matriz de orden $n \times 1$ tal que $B^t \bullet B = 1$ e "I" la matriz unidad de orden "n". Sea $A = I - 2 \bullet B \bullet B^t$. Demuéstrese que "A" es simétrica y ortogonal.

SOLUCIÓN

Para demostrar que "A" es simétrica debemos demostrar que $A^t = A$:

$$\boxed{\text{La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas; es } I^t = I}$$

$$A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t)^t = I - 2 \bullet (B \bullet B^t)^t = I - 2 \bullet (B^t)^t \bullet B^t = I - 2 \bullet B \bullet B^t = A$$

$$\boxed{\text{Traspuesta de un producto} = \text{Producto de las traspuestas en orden contrario}}$$

Para demostrar que "A" es ortogonal debemos demostrar que $A \bullet A^t = I$:

$$A \bullet A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t) \bullet (I - 2 \bullet B \bullet B^t) = I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t \bullet B \bullet B^t =$$
$$= I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet (B^t \bullet B) \bullet B^t = I - 4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t = I$$

Según se nos dice, es $B^t \bullet B = 1$

FONEMATO 1.29.2

1) Sea "C" una matriz regular tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ y $C^{-1} \bullet B \bullet C = H$, siendo "D" y "H" matrices diagonales. Demuéstrese que $A \bullet B = B \bullet A$.
2) Demuéstrese que una matriz cuadrada "A" es simétrica si existe una matriz ortogonal "P" tal que $P^t \bullet A \bullet P = D$, siendo "D" una matriz diagonal.

SOLUCIÓN

1) Despejemos "A" y "B":

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = D \Rightarrow C \bullet C^{-1} \bullet A \bullet C \bullet C^{-1} = C \bullet D \bullet C^{-1} \Rightarrow A = C \bullet D \bullet C^{-1}$$

Premultiplicamos por "C" y postmultiplicamos por C^{-1}

$$C^{-1} \bullet B \bullet C = H \Rightarrow C \bullet C^{-1} \bullet B \bullet C \bullet C^{-1} = C \bullet H \bullet C^{-1} \Rightarrow B = C \bullet H \bullet C^{-1}$$

Es:

$$\left.\begin{array}{l} A \bullet B = (C \bullet D \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet H \bullet C^{-1}) = C \bullet D \bullet H \bullet C^{-1} \\ B \bullet A = (C \bullet H \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet H \bullet D \bullet C^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow A \bullet B = B \bullet A$$

Como las matrices "D" y "H" son diagonales, entonces $D \bullet H = H \bullet D$

2) Para demostrar que "A" es simétrica debemos demostrar que $A = A^t$:

Para despejar "A" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) por "P" y postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) por P^t

$$P^t \bullet A \bullet P = D \Rightarrow P \bullet P^t \bullet A \bullet P \bullet P^t = P \bullet D \bullet P^t \Rightarrow A = P \bullet D \bullet P^t \Rightarrow$$

Como "P" es ortogonal, entonces $P \bullet P^t = P^t \bullet P = I$

$$\Rightarrow A^t = (P \bullet D \bullet P^t)^t = (P^t)^t \bullet D^t \bullet P^t = P \bullet D \bullet P^t = A$$