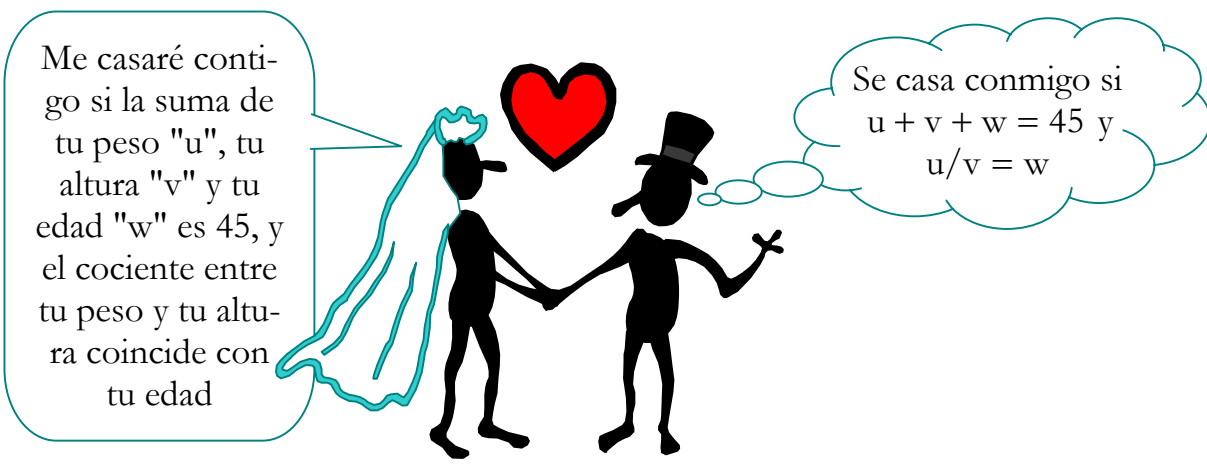


Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.01	Sistemas de ecuaciones lineales	68
2.02	¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?	69
2.03	Teorema de Rouché-Frobenius	71
2.04	Sistemas lineales homogéneos	71
2.05	Regla de Cramer	72
2.06	Resolución de un caso general	75
2.07	El problema inverso	103
2.08	Resolución de sistemas por sustitución	107
2.09	Diferencias entre los ejercicios 2.6.4 y 2.6.5	110
2.10	Método de Gauss	116
2.11	Combinación lineal de matrices	128



2.10. EL MÉTODO DE GAUSS

Consideremos un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes es "A" y ampliada "B". Por comodidad, escribiremos estas matrices "superpuestas" y denotaremos A/B dicha superposición. **Por ejemplo**, para el sistema lineal

$$\begin{array}{l} x + 2.y + 3.z = -1 \\ 2.x + 5.y + 7.z = -2 \\ 3.x + 8.y + 9.z = -1 \end{array} \quad (I)$$

escribiremos:

$$A / B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

donde la columna de los términos independientes está separada de las demás por una línea vertical.

Antes de meternos en harina conviene recordar que el Teorema de Equivalencia de sistemas de ecuaciones lineales garantiza que si, por ejemplo, en el sistema (I), sustituimos la primera ecuación por la que resulta al sumarle miembro a miembro la segunda y restarle miembro a miembro la tercera, obtenemos un "nuevo" sistema, el (II), que es equivalente a (I):

$$\begin{array}{l} -y + z = -2 \\ 2.x + 5.y + 7.z = -2 \\ 3.x + 8.y + 9.z = -1 \end{array} \quad (II)$$

Como requejesabemos, el que los sistemas (I) y (II) sean equivalentes significa que ambos tienen las mismas soluciones.

Observa: para el sistema lineal (II), es:

$$A_1 / B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

Para expresar que A_1 / B_1 se obtiene a partir de A/B sin más que sumar a la primera fila de A/B la segunda fila y restarle la tercera fila, escribimos:

$$A / B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right) = A_1 / B_1$$

Si, por ejemplo, ahora hacemos:

$$A_1 / B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) = A_2 / B_2$$

a la tercera fila le restamos la segunda

entonces, a la vista de A_2 / B_2 , tranquilamente nos apostamos la vida a que el

siguiente sistema lineal

$$\begin{array}{r} -y + z = -2 \\ 2x + 5y + 7z = -2 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{array}$$

es equivalente al (II), por lo que es equivalente al (I).

La idea de Gauss consiste en "manipular" las filas de A/B buscando conseguir una matriz con la siguiente "estructura chollo":

$$\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & k_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & k_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{4n} & k_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{mn} & k_m \end{array}$$

FONEMATO 2.10.1

Resuélvanse los siguientes sistemas lineales mediante el método de Gauss:

$$\begin{array}{l} 1) \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 7z = -2 \\ 3x + 8y + 9z = -1 \end{array} ; 2) \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z + 5t = 1 \\ 3x + 4y + 5z + 6t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{array} \end{array}$$

SOLUCIÓN

1) Para nuestro sistema lineal, es:

$$A/B = \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array}$$

y es:

Para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, y a la tercera fila le restamos el triple de la primera

$$A/B = \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \approx \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \approx \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} = A_1/B_1$$

(tercera fila) - (doble de la segunda)

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones (es equivalente) que el siguiente nuevo sistema (cuya matriz de coeficientes A_1 es "triangular"):

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = -1 \\ y + z = 0 \\ -2z = 2 \end{array}$$

Como $|A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = \text{número de incógnitas}$, el sistema tiene solución única, y su obtención está chupada: de la tercera ecuación del nuevo sistema se deduce que $z = -1$, al hacer $z = -1$ en la segunda ecuación se obtiene $y = 1$, y haciendo $y = 1$ y $z = -1$ en la primera ecuación resulta $x = 0$.

2) El sistema es el del ejercicio 2.6.1; es:

Cambiamos la primera fila por la tercera

$$A/B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

A la segunda fila le restamos el triple de la primera
A la tercera fila le restamos el doble de la primera

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

A la tercera fila le restamos la segunda

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones (es equivalente) que el siguiente nuevo sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 3 \\ y + 2z + 3t &= -7 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

Y éste es incompatible, pues exigir que 0 sea igual a 2 es exigir algo muy imposible.

NOTA

No hay que obsesionarse con la obtención de una triangulación "inferior"; podríamos haber trabajado así:

A la primera fila le restamos el doble de la tercera
A la segunda fila le restamos el triple de la tercera

$$A/B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & -5 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -7 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

A la primera fila le restamos la segunda

y habríamos tardado menos.

FONEMATO 2.10.2

Resuélvase los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss:

$$1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ 3x + y = 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ 3x + y + z = 8 \\ x + 4y = 9 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

matemáticas bachiller

SOLUCIÓN

1) Es el sistema del ejercicio 2.6.2; para él es:

A la segunda fila le restamos el doble de la primera
 A la tercera fila le restamos el triple de la primera
 A la cuarta fila le restamos la primera

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Pues las filas tercera y cuarta son proporcionales a la segunda, y con eso basta: no merece la pena perder el tiempo pensando en los coeficientes de proporcionalidad; o sea, no merece la pena perder el tiempo pensando en que la tercera fila se convierte en una de ceros al sumarle la segunda multiplicada por $-5/3$, y que la cuarta fila se convierte en una de ceros al sumarle la segunda multiplicada por $2/3$.

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones (es equivalente) que el siguiente nuevo sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

2) Es el sistema del ejercicio 2.6.3; para él es:

A la segunda fila le restamos el doble de la primera
 A la tercera fila le restamos el triple de la primera
 A la cuarta fila le restamos la primera

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 9 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 3 & -1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 & -2 \end{array} \right]$$

Cambiamos la segunda fila por la tercera

A la cuarta fila le sumamos la segunda multiplicada por "3/2"

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 0 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \approx A_1/B_1$$

A la cuarta fila le restamos el cuádruple de la tercera

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones (es equivalente) que el siguiente nuevo sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -z = -3 \end{cases}$$

que tiene solución única: de la tercera ecuación se deduce que $z = 3$, sustituyendo este valor de "z" en la segunda ecuación se obtiene $y = 2$, y haciendo $y = 2$ y $z = 3$ en la primera ecuación se obtiene $x = 1$.

3) Es el sistema del ejercicio 2.6.4; para él es:

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{A la segunda ecuación le restamos la primera} \\ \text{A la tercera fila le restamos el doble de la primera}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & -3 & -5 & -9 \end{array} \right) = A_1 / B_1$$

$$\xrightarrow{\text{A la tercera fila le restamos la segunda}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

Como $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado; o sea, tiene infinitas soluciones. Parametrizando x_3 , resulta:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 - x_3 \\ -3x_2 = -3 + 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

FONEMATO 2.10.3

Resuélvase el siguiente sistema lineal por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Es el sistema del ejercicio 2.6.6; para él es:

$$A/B = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 1 & 1 & -1 & -4 & 5 & 0 & 3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -7 & 7 & 0 & 4 & 5 & 4 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{A la primera fila le restamos el doble de la tercera} \\ \text{A la cuarta fila le restamos el triple de la tercera}}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & -6 & -1 & 0 & 3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 4 & -10 & 4 & 0 & 4 & 5 & 4 & -10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{A la primera fila le restamos el triple de la segunda} \\ \text{A la cuarta fila le restamos el cuádruple de la segunda}}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{A la cuarta fila le restamos la primera} \\ \text{A la tercera fila le sumamos la segunda}}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \approx \\ \uparrow \\ \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = A_1 / B_1 \end{array}$$

A la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por "2 / 3"
A la tercera fila le sumamos la primera multiplicada por "1 / 3"

Como $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado; o sea, tiene infinitas soluciones. Para calcularlas, a las vista del menor no nulo de orden 3 indicado, parametrizamos x_4 y x_5 :

$$\begin{aligned} -3 \cdot x_3 &= -6 \cdot x_5 \\ x_2 &= 1 - x_4 \\ x_1 &= 2 + x_4 + x_5 \end{aligned}$$

De la primera ecuación se deduce que $x_3 = 2 \cdot x_5$, de la segunda $x_2 = 1 - x_4$, y de la tercera $x_1 = 2 + x_4 + x_5$. Por tanto, siendo "S" el subconjunto de \mathcal{R}^5 que forman las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \{(2 + x_4 + x_5; 1 - x_4; 2 \cdot x_5; x_4; x_5), \forall x_4, x_5 \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^5$$

FONEMATO 2.10.4

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal según los valores de "k"

$$\begin{aligned} k \cdot x + 2 \cdot z &= 0 \\ k \cdot y - z &= k \\ x + 3 \cdot y + z &= 5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$A / B = \left| \begin{array}{ccc|cc} k & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 & k & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & -3 \cdot k & 2 - k & -5 \cdot k & 0 \\ 0 & k & -1 & k & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right| \approx$$

A la 1ª fila le restamos la 3ª multiplicada por "k"

$$\begin{array}{c} \approx \\ \uparrow \\ \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & -1 - k & -2 \cdot k & 0 \\ 0 & k & -1 & k & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right| = A_1 / B_1 \end{array}$$

A la 1ª fila le sumamos la 2ª multiplicada por "3"

Siendo:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 - k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot (1 + k)$$

como $|A_1|$ se anula sólo si $k = 0$ ó $k = -1$, se tiene que:

- Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = 3 = \text{rg}(B_1) =$ número de incógnitas \Rightarrow el sistema es compatible y determinado (tiene solución única), que es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2.k & 0 & -1-k \\ k & k & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A_1|} ; y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2.k & -1-k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A_1|} ; z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2.k \\ 0 & k & k \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A_1|}$$

- Si $k = -1$, la primera ecuación del nuevo sistema se convierte en $0.z = 2$, lo que es absurdo; por tanto, el sistema es incompatible.
- Si $k = 0$, el nuevo sistema se convierte en:

$$\begin{cases} -z = 0 \\ -z = 0 \\ x + 3.y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + 3.y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + 3.y = 5 \end{cases}$$

que tiene infinitas soluciones; parametrizando "y", resulta:

$$z = 0 ; x = 5 - 3.y$$

FONEMATO 2.10.5

Discútase el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro "a":

$$\begin{cases} (a-2).x - y + z = 0 \\ x + (2.a-1).y - a.z = 0 \\ x + a.y - z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a-2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1-a.(a-2) & 1+(a-2) \\ 1 & 2.a-1 & -a & 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & a & -1 & 0 & 0 & a & -1 \end{array} \right) =$$

A la primera fila le restamos la tercera multiplicada por "a-2"
A la segunda fila le restamos la tercera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -(a-1)^2 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = A_1 / B_1$$

Simplificamos lo que buenamente se pueda

Es:

$$\begin{aligned} |A_1| &= \begin{vmatrix} 0 & -(a-1)^2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (a-1)^3 - (a-1)^2 = \\ &= (a-1)^2 \cdot (a-1-1) = (a-1)^2 \cdot (2-a) \end{aligned}$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = 1$ ó $a = 2$, se tiene que:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = 3 = \text{rg}(B_1) = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema de ecuaciones es compatible y determinado, sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Siendo $a = 1$, es:

$$A_1 / B_1 = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right|$$

El nuevo sistema queda reducido a la ecuación $x + y - z = 0$, que tiene infinitas soluciones. Parametrizando "x" e "y", resulta $z = x + y$; por tanto, el conjunto de dichas infinitas soluciones es $S_{a=1} = \{(\lambda; \theta; \lambda + \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\}$.

- Siendo $a = 2$, es:

$$A_1 / B_1 = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right|$$

Como podemos eliminar la segunda ecuación (por ser proporcional a la primera), el sistema se reduce a:

$$\begin{array}{l} y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; parametrizamos "z"

El conjunto $S_{a=2}$ de sus infinitas soluciones es:

$$S_{a=2} = \{(-\alpha; \alpha; \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \cdot (-1; 1; 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

FONEMATO 2.10.6

Clasifíquese el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$\begin{array}{l} a \cdot x + y + b \cdot z = 1 \\ x + a \cdot y + b \cdot z = 1 \\ x + y + a \cdot b \cdot z = b \end{array}$$

SOLUCIÓN

$$A / B = \left| \begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a \cdot b & b \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & b-a^2 \cdot b & 1-a \cdot b \\ 0 & a-1 & b-a \cdot b & 1-b \\ 1 & 1 & a \cdot b & b \end{array} \right| = A_1 / B_1$$

A la primera ecuación le restamos la tercera multiplicada por "a"
A la segunda ecuación le restamos la tercera

Es:

$$\begin{aligned} |A_1| &= \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & b-a^2 \cdot b & 1-a \cdot b \\ 0 & a-1 & b-a \cdot b & 1-b \\ 1 & 1 & a \cdot b & b \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|c} 1-a & b-a^2 \cdot b & 1-a \cdot b \\ a-1 & b-a \cdot b & 1-b \end{array} \right| = b \cdot (1-a) \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1-a \end{array} \right| = \\ &= b \cdot (1-a)^2 \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{array} \right| = b \cdot (1-a)^2 \cdot (2+a) \end{aligned}$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = 1$ ó $a = -2$ ó $b = 0$, se tiene que:

- Si $b \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = \text{número de incógnitas}$; por tanto, el sistema es compatible y determinado.

- Siendo $b = 0$, es:

$$A_1 / B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

A la primera fila le sumamos la segunda

El sistema es incompatible para todo valor de "a", pues la primera ecuación es:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$$

lo que es bastante imposible.

- Siendo $a = 1$, es:

$$A_1 / B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible si $b \neq 1$ ($\Rightarrow 1 - b \neq 0$), pues en tal caso la primera ecuación es $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1 - b \neq 0$, que es imposible. Siendo $b = 1$, es:

$$A_1 / B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

y el sistema se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$, que tiene infinitas soluciones.

- Siendo $a = -2$, es:

$$A_1 / B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -3 \cdot b & 1+2 \cdot b & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \cdot b & 1-b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \cdot b & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 2+b & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \cdot b & 1-b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \cdot b & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = A_2 / B_2$$

A la primera fila le sumamos la segunda

El sistema es incompatible si $b \neq -2$ ($\Rightarrow 2 + b \neq 0$), pues en tal caso la primera ecuación es $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 + b \neq 0$, que es imposible. Siendo $b = -2$, es:

$$A_2 / B_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Como $\text{rg}(A_2) = \text{rg}(B_2) = 2 < \text{número de incógnitas}$, el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones).

FONEMATO 2.10.7

Discútase el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro "a":

$$\begin{aligned} x + y + a \cdot z &= a \\ a \cdot x + a \cdot y + z &= 1 \\ x + a \cdot y + z &= a \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & a & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & a & a-1 & 1-a \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right) = A_1/B_1$$

A la segunda fila le restamos la primera multiplicada por "a"
A la tercera fila le restamos la primera

Es: $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = -(a-1) \cdot (1-a^2) = -(a-1)^2 \cdot (a+1)$

Como $|A_1| = 0$ sólo si $a = 1$ ó $a = -1$, entonces: si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible y determinado.}$

- Siendo $a = 1$, es:

$$A_1/B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$, que tiene infinitas soluciones.

- Siendo $a = -1$, es:

$$A_1/B_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

A la primera le sumamos la segunda dividida por "2"

El sistema es indeterminado, pues $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 2 < \text{número de incógnitas.}$

FONEMATO 2.10.8

Discútanse los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$1) \begin{cases} x + y + a.z = 1 \\ x + y + b.z = a \\ x + a.y + z = a \end{cases} ; 2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2.y + 3.z = a \\ 2.x + 3.y + 4.z = a \end{cases} ; 3) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2.y = a \\ x + 3.y = b \\ x + 4.y = 2.a \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) $A/B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & a & a-1 & a-1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-a & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a-1 & a-1 \end{array} \right) = A_1/B_1$

A las filas segunda y tercera les restamos la primera

Es: $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (1-a)$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = 1$ ó $b = a$, se tiene que:

- Si $b \neq a$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = \text{número de incógnitas; por tanto, el sistema es compatible y determinado.}$

- Si $a = b$ es $A_1 / B_1 = \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}$

El sistema es incompatible si $a \neq 1$ ($\Rightarrow a - 1 \neq 0$), pues en tal caso la segunda ecuación del sistema es $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = a - 1 \neq 0$, que es un poco imposible. Por el contrario, siendo $a = 1$, es:

$$A_1 / B_1 = \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Y el sistema se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$, que tiene infinitas soluciones.

- Siendo $a = 1$, es $A_1 / B_1 = \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$, y el sistema se reduce a:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ (b-1) \cdot z = 0 \end{array} \quad (I)$$

que tiene infinitas soluciones para cualquier valor de "b", pues si $b = 1$, entonces (I) se transforma en:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 0 \cdot z = 0 \end{array} \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow$$

Parametrizamos las incógnitas "y" y "z"

$$\Rightarrow S_{a=b=1} = \{(1 - \lambda - \theta; \lambda; \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Si $b \neq 1$ ($\Rightarrow b - 1 = k \neq 0$), entonces (I) se transforma en:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ k \cdot z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - y \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow$$

Parametrizamos la incógnita "y"

$$\Rightarrow S_{a=1; b \neq 1} = \{(1 - \alpha; \alpha; 0), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

2) $A / B = \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & a \end{array} \approx \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = A_1 / B_1$

A la tercera fila le restamos la suma de las dos primeras

El sistema tiene infinitas soluciones para cualquier valor de "a", pues para cualquier valor de "a" ocurre que:

$$\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 2 < \text{número de incógnitas}$$

A las filas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera



"n" incógnitas tiene solución o no.

- **Por ejemplo**, siendo $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, el problema de averiguar si "W" es combinación lineal (combinación proporcional) de A_1 y A_2 es el problema de averiguar si es posible encontrar dos números reales α_1 y α_2 tales que $W = \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R5 = 2 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \\ R8 = 3 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \\ R7 = \alpha_1 + 5 \cdot \alpha_2 \\ R6 = 2 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \end{cases} \quad (I)$$

Por tanto, el problema de averiguar si "W" es combinación lineal de A_1 y A_2 se reduce a averiguar si el sistema lineal (I) tiene solución. Si te molestas podrás comprobar que (I) tiene solución única, que es $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$; por ello, la matriz "W" es combinación lineal de A_1 y A_2 (es $W = 2 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2$).

- **Por ejemplo**, si $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $W = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, entonces "W" no es combinación lineal (combinación proporcional) de A_1 y A_2 , pues la ecuación matricial $W = \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2$ nos conduce a un sistema lineal que carece de solución:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R5 = 2 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \\ R8 = 3 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \\ R7 = \alpha_1 + 5 \cdot \alpha_2 \\ R6 = 2 \cdot \alpha_1 + 7 \cdot \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{carece de} \\ \text{solución} \end{cases}$$

pues las matrices de coeficientes y ampliada tienen distinto rango

- **Por ejemplo**, siendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; W = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

la matriz "W" es combinación lineal (proporcional) de A_1 , A_2 y A_3 , pues la ecuación matricial $W = \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \alpha_3 \cdot A_3$ nos conduce a un sistema lineal que tiene solución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R4 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ R5 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ R4 = \alpha_1 + \alpha_3 \\ R5 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\alpha_1 = 4 - \alpha_3 \\ R\alpha_2 = 5 - \alpha_3 \end{cases}$$

parametrizamos la incógnita α_3

Por tanto, para todo α_3 es $W = (4 - \alpha_3) \cdot A_1 + (5 - \alpha_3) \cdot A_2 + \alpha_3 \cdot A_3$;

puedes comprobar que, por ejemplo, si $\alpha_3 = 3$, resulta:

$$W = (4 - 3) \cdot A_1 + (5 - 3) \cdot A_2 + 3 \cdot A_3 \Rightarrow W = 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 3 \cdot A_3$$

Si, por ejemplo, $\alpha_3 = 0$, resulta:

$$W = (4 - 0) \cdot A_1 + (5 - 0) \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 \Rightarrow W = 4 \cdot A_1 + 5 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3$$

Combinación lineal de líneas de una matriz

Siendo "A" una matriz de orden $m \times n$, cabe decir que "A" está formada por "m" matrices "fila" de orden $1 \times n$ o por "n" matrices "columna" de orden $m \times 1$.

Por ejemplo, cabe decir que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

está formada por las siguientes 4 matrices "fila" (matrices de orden 1×3):

$$F_1 = [2 \quad 1 \quad 5]; F_2 = [0 \quad 1 \quad 1]; F_3 = [1 \quad 2 \quad 4]; F_4 = [0 \quad 1 \quad 7]$$

o por las siguientes 3 matrices "columna" (matrices de orden 4×1):

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; C_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Puesto las líneas (filas o columnas) de una matriz "A" también son matrices, cabe plantearse si una cierta línea de "A" (fila o columna) es o no combinación lineal de otras líneas paralelas a ella. El asunto se "lidia" como ya sabemos.

Por ejemplo, para la matriz dada "A" sucede que la tercera columna no es combinación lineal (proporcional) de las dos primeras columnas, pues la ecuación $C_3 = \alpha_1 \cdot C_1 + \alpha_2 \cdot C_2$ nos conduce a un sistema lineal que carece de solución:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = \alpha_2 \\ 4 = \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \\ 7 = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \text{carece de solución}$$

Sin embargo, la tercera fila es combinación lineal (proporcional) de las dos primeras filas, pues la ecuación matricial $F_3 = \gamma_1 \cdot F_1 + \gamma_2 \cdot F_2$ nos conduce a un sistema lineal que tiene solución:

$$\begin{aligned} [1 \quad 2 \quad 4] &= \gamma_1 \cdot [2 \quad 1 \quad 5] + \gamma_2 \cdot [0 \quad 1 \quad 1] \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2 \cdot \gamma_1 \\ 2 = \gamma_1 + \gamma_2 \\ 4 = 5 \cdot \gamma_1 + \gamma_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 1/2 \\ \gamma_2 = 5/2 \end{cases} \Rightarrow F_3 = \frac{1}{2} \cdot F_1 + \frac{5}{2} \cdot F_2 \end{aligned}$$

Nota bene:

- 1) Sabemos que el rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos otras paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera. Esto mismo puede enunciarse diciendo que el rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos una combinación lineal (proporcional) de otras líneas paralelas a ella.
- 2) Sabemos que si una línea de "A" es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, podemos eliminar dicha línea sin que se altere el rango de la matriz. Esto mismo puede enunciarse diciendo que si una línea de "A" es combinación lineal (proporcional) de otras paralelas a ella, podemos eliminar dicha línea sin que se altere el rango de la matriz.

