

Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.01	Sistemas de ecuaciones lineales	68
2.02	¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?	69
2.03	Teorema de Rouché-Frobenius	71
2.04	Sistemas lineales homogéneos	71
2.05	Regla de Cramer	72
2.06	Resolución de un caso general	75
2.07	El problema inverso	103
2.08	Resolución de sistemas por sustitución	107
2.09	Diferencias entre los ejercicios 2.6.4 y 2.6.5	110
2.10	Método de Gauss	116
2.11	Combinación lineal de matrices	128

Recuerda:

LINEAL \equiv PROPORCIONAL

Para ser en un artista lidiando sistemas de ecuaciones lineales es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices



pero no es "lineal" ninguno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5.x_1^2 + 3.x_2 - 7.x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{cases} \text{ no es "lineal" debido a } x_1^2$$

$$\begin{cases} 5.x_1.x_2 - 7.x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{cases} \text{ no es "lineal" debido a } x_1.x_2$$

$$\begin{cases} 5.x_1 + 2.x_2 - 7.Ln x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{cases} \text{ no es "lineal" debido a } Ln x_3$$

$$\begin{cases} 5.x_1 + 2.x_2 - 7.sen x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{cases} \text{ no es "lineal" debido a } sen x_3$$

Un sistema lineal de ecuaciones siempre puede expresarse en forma matricial, pues podemos expresar el sistema (I) en la forma:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \Rightarrow A \cdot X = b$$

De "A" se dice que es la **matriz de los coeficientes**, de "X" se dice que es la **matriz de las incógnitas**, de "b" se dice que es la **matriz de los términos independientes**. Si a la matriz "A" le añadimos la columna de los términos independientes obtenemos la que llamaremos **matriz ampliada** u "orlada" del sistema. **Por ejemplo:**

$$\begin{cases} 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 = 6 \\ 5.x_1 + 7.x_2 + 0.x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix}$$

y las correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{matrix} ; B = \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Por razones de economía, también se escribe:

$$A / B = \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 5 & 7 & 0 & | & 1 \end{matrix}$$

2.2. ¿QUÉ ES RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES?

Resolver un sistema de ecuaciones (lineales o no) con "n" incógnitas es encontrar un valor particular de cada incógnita de modo que al sustituir cada incógnita por su correspondiente valor particular ocurre algo mágico: todas las ecuaciones se convierten en identidades (o sea, todas las ecuaciones quedan de la forma $3=3$ ó $7=7$ ó $-3=-3$ ó $0=0$ ó ...). Del conjunto de dichos valores particulares de las

incógnitas se dice que es **una solución** del sistema.

De Perogrullo: cada "solución" del sistema es un elemento del conjunto \mathfrak{R}^n .

Por ejemplo, en el siguiente sistema lineal con 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4

$$\begin{array}{l} 1. x_1 + 2. x_2 - 2. x_3 + 2. x_4 = 6 \\ 3. x_1 - 2. x_2 + 3. x_3 + 1. x_4 = 5 \\ 3. x_1 - 1. x_2 + 0. x_3 + 1. x_4 = 1 \end{array} \quad \text{(II)}$$

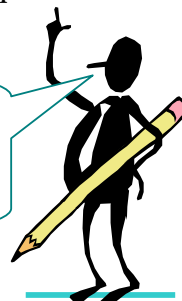
puedes comprobar que si hacemos $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 3$ y $x_4 = 0$ ocurre que todas las ecuaciones de (II) se transforman en identidades; por ello se dice que $(2;5;3;0) \in \mathfrak{R}^4$ es una solución del sistema de ecuaciones (II). También puedes comprobar que si hacemos $x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 7$ y $x_4 = 8$ entonces no ocurre que todas las ecuaciones de (II) se transforman en identidades, por lo que se dice que $(6;2;7;8) \in \mathfrak{R}^4$ no es solución del sistema (II).

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales $A \bullet X = b$ es **incompatible** si no tiene ninguna solución, o sea, si es imposible encontrar valores particulares de las incógnitas que transformen en identidades a todas las ecuaciones del sistema.

Se dice que el sistema es **compatible** si tiene solución, o sea, si es posible encontrar valores particulares de las incógnitas que transformen en identidades a todas las ecuaciones del sistema. En tal caso, se dice que el sistema es **determinado** si tiene una única solución, y si tiene infinitas soluciones se dice que es **indeterminado**.

Toma buena nota: para los sistemas "lineales" no hay más opciones que las descritas: no tienen solución, o tienen una única solución, o tienen infinitas soluciones.



Sistemas Equivalentes

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Teorema de Equivalencia de Sistemas Lineales

Si en un sistema lineal de ecuaciones sustituimos una ecuación cualquiera por la ecuación que resulta al multiplicarla por un número cualquiera no nulo y sumarla miembro a miembro a otras ecuaciones del sistema (después de multiplicar estas últimas por un número cualquiera), el nuevo sistema lineal que obtenemos es equivalente al primero. **Por ejemplo,** si en el sistema lineal

$$\begin{array}{l} 1. x_1 + 2. x_2 - 2. x_3 + 2. x_4 = 6 \\ 3. x_1 - 2. x_2 + 3. x_3 + 1. x_4 = 5 \\ 3. x_1 - 1. x_2 + 0. x_3 + 1. x_4 = 1 \end{array} \quad \text{(II)}$$

sustituimos la primera ecuación por la que resulta al sumar miembro a miembro el doble de la primera ecuación y el triple de la segunda, obtenemos el sistema lineal (III), que es equivalente al (II):

$$\begin{cases} 11.x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 + 7.x_4 = 27 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4 = 5 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Observa: las matrices "ampliadas" de los sistemas (II) y (III) son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 5 & 7 & 27 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y como la primera fila de "N" es la suma del doble de la primera fila de "M" y el triple de la segunda fila de "M" \Rightarrow apostamos la vida a que las matrices "M" y "N" tienen el mismo rango, pues se "pasa" de una a otra haciendo transformaciones elementales. Otro ejemplo: si en el sistema lineal (II) sustituimos la segunda ecuación por la que resulta al sumar miembro a miembro todas las ecuaciones, obtenemos el sistema lineal (IV), que es equivalente al (II) y al (III):

$$\begin{cases} 1.x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 + 2.x_4 = 6 \\ 7.x_1 - 1.x_2 + 1.x_3 + 4.x_4 = 12 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

2.3. TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Sea un sistema lineal de "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes es "A" y cuya matriz ampliada es "B". La condición necesaria y suficiente para que dicho sistema sea compatible (tenga solución) es que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$; en tal caso:

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ el sistema tiene solución única

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones

Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Leftrightarrow$ el sistema es incompatible.

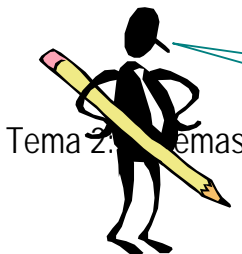
2.4. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Se dice que un sistema lineal es "homogéneo" si es nulo el término independiente de cada ecuación del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + \dots + a_{1n}.x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}.x_1 + \dots + a_{mn}.x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = 0$$

Por ejemplo, es homogéneo el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 2.x - y + 3.z = 0 \\ 4.x + y - 5.z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



En todo sistema lineal homogéneo las respectivas matrices de coeficientes y ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros, por lo que siempre tienen igual rango. Así, todo sistema lineal homogéneo es compatible: al menos admite la solución $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, que es la llamada ***solución trivial***.

Por tanto, según el Teorema de Rouché-Frobenius, para un sistema lineal homogéneo con "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes es "A", se tiene que:

* si $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial

* si $\text{rg}(A) < n \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones

Si un sistema lineal homogéneo $A \cdot X = 0$ tiene infinitas soluciones, el conjunto que forman éstas tiene dos muy mágicas propiedades:

- 1) ***La suma de dos soluciones del sistema es solución del sistema:*** si U y V son soluciones del sistema (es decir, $A \cdot U = 0$ y $A \cdot V = 0$), es $A \cdot (U + V) = A \cdot U + A \cdot V = 0 + 0 = 0$, lo que garantiza que U + V es solución del sistema $A \cdot X = 0$.
- 2) ***El producto de una solución del sistema por un número real es solución del sistema:*** si U es una solución del sistema ($\Rightarrow A \cdot U = 0$) y α es un número real, es :

$$A \cdot (\alpha \cdot U) = \alpha \cdot (A \cdot U) = \alpha \cdot 0 = 0$$

lo que garantiza que $\alpha \cdot U$ es solución del sistema $A \cdot X = 0$.

2.5. LA REGLA DE CRAMER

Sea un sistema lineal $A \cdot X = b$ de "n" ecuaciones con "n" incógnitas (¡el mismo número de ecuaciones que de incógnitas!) cuya matriz de coeficientes "A" (¡cuadrada!) es regular, o sea, $|A| \neq 0$. Sea "B" la matriz ampliada del sistema.

Si $|A| \neq 0$ es $\text{rg}(A) = n$, y como la matriz "B" tiene "n" filas y "n + 1" columnas también es $\text{rg}(B) = n$; o sea, en un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo siempre ocurre que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{número de incógnitas}$. Por tanto, según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema lineal en cuestión siempre tiene solución única (es compatible y determinado).

La regla de Cramer permite calcular dicha solución única: el valor de la incógnita x_i es el resultado de dividir dos determinantes, el denominador es el determinante de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, y el numerador es determinante de

la matriz que resulta al sustituir la i -ésima columna de "A" (formada por los coeficientes de la incógnita x_i) por la columna "b" que forman los términos independientes del sistema.

FONEMATO 2.5.1

Resuélvase el sistema:

$$\begin{cases} 2.x_1 - x_2 + 3.x_3 = 4 \\ 4.x_1 + x_2 - 5.x_3 = 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 2.x_3 = 2 \end{cases} \quad (I)$$

SOLUCIÓN

- Se trata de un sistema lineal de ecuaciones (condiciones) con igual número de ecuaciones que de incógnitas \Rightarrow rezamos para que la matriz de los coeficientes del sistema sea regular (tenga determinante no nulo), pues en tal caso el sistema tendrá solución única y la determinaremos mediante la regla de Cramer.
- Expresado matricialmente, el sistema dado es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = b$$

Como $|A| = -26 \neq 0$, la matriz de coeficientes y la ampliada tienen rango 3, que coincide con el número de incógnitas; así, el sistema tiene solución única. La obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 2; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 3; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

Así, la única solución del sistema es $(2; 3; 1) \in \mathbb{R}^3$.



¡Qué portento!, entre las infinitas ternas de números reales que forman \mathbb{R}^3 , sólo la $(2; 3; 1)$ cumple todas las ecuaciones o condiciones (I) y Cramer la encuentra en unos segundos

NOTA

Todo sistema lineal que pueda resolverse mediante la regla de Cramer se puede resolver también por el método llamado "de la matriz inversa": si el sistema lineal es $A \cdot X = b$, sin más que despejar la matriz de incógnitas X resulta $X = A^{-1} \cdot b$ (observa que si la matriz cuadrada "A" tiene determinante no nulo entonces está garantizado que existe su matriz inversa). En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

FONEMATO 2.5.2

Calcúlese "k" para que el siguiente sistema tenga solución única. Determinése.

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 &= 0 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + k \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

- Estamos ante un sistema lineal de ecuaciones (condiciones) con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Sea "A" su matriz de coeficientes y "B" su matriz ampliada.

- El sistema tiene solución única si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{número de incógnitas} = 3$.

Es $\text{rg}(A) = 3$ si $|A| \neq 0$, y sucede tal cosa si $k \neq 5$: $|A| = 15 - 3 \cdot k \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$

- Si $k \neq 5$ la única solución del sistema es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}}{|A|}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix}}{|A|}; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Al hacer los cálculos, resulta:

$$x_1 = -\frac{k+2}{15-3 \cdot k}; x_2 = \frac{4-k}{15-3 \cdot k}; x_3 = \frac{3}{15-3 \cdot k}$$

Así, por ejemplo, la única solución del sistema si $k = 4$, es:

$$x_1 = -\frac{4+2}{15-3 \cdot 4} = -2; x_2 = \frac{4-4}{15-3 \cdot 4} = 0; x_3 = \frac{3}{15-3 \cdot 4} = 0$$

Por ejemplo, si $k = 2$, la única solución del sistema es:

$$x_1 = -\frac{2+2}{15-3 \cdot 2} = -\frac{4}{9}; x_2 = \frac{4-2}{15-3 \cdot 2} = \frac{2}{9}; x_3 = \frac{3}{15-3 \cdot 2} = \frac{3}{9}$$

- Si $k = 5 (\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 3)$ el sistema es incompatible, pues las matrices "A" y "B" tienen distinto rango. En efecto, si $k = 5$, es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

y como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

resulta ser $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A)$.