Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

***Recuerda*:**

LINEAL $\equiv$ PROPORCIONAL

Para ser en un artista lidiando sistemas de ecuaciones lineales es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices

2.6. RESOLUCIÓN DEL CASO GENERAL

A continuación describimos la secuencia de trabajo para resolver un sistema lineal de "k" ecuaciones con "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes es "A" y cuya matriz ampliada es "B":

1) Calculamos los rangos de las matrices "A" y "B".

2) Si $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ el sistema es incompatible, carece de solución.

3) Si $rg(A) = rg(B) = n$ ($n \equiv$ número de incógnitas) $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, tiene solución única.

   Cálculo de la única solución

   a) Si $n = k$ podemos calcular la solución ipso facto mediante la regla de Cramer o mediante el método de la matriz inversa.

   b) Si $n < k$ seleccionamos las "n" ecuaciones correspondientes a cualesquiera "n" filas de "A" con las que se pueda formar un menor no nulo de orden "n", las restantes ecuaciones del sistema se eliminan. Así resulta un sistema equivalente al sistema dado, pero con igual número de ecuaciones que de incógnitas. A continuación empleamos la regla de Cramer o el método de la matriz inversa para obtener la solución del nuevo sistema.

4) Si $rg(A) = rg(B) = h < n$ ($n \equiv$ número de incógnitas) $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

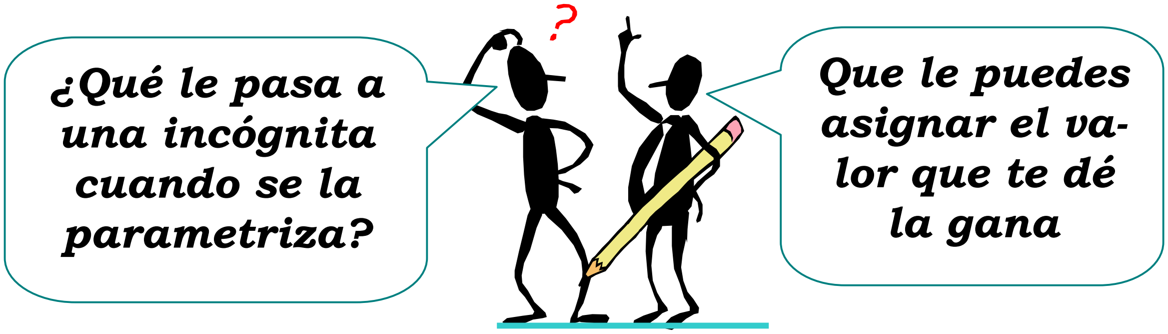
   Cálculo de las infinitas soluciones

   ESENCIAL

   a) Si $rg(A) = rg(B) = h < n \Rightarrow$ en la matriz de coeficientes "A" tendremos localizado un menor no nulo de orden "h".

   b) Seleccionamos las "h" ecuaciones correspondientes a las "h" filas del citado menor no nulo de orden "h"; las restantes ecuaciones del sistema se eliminan. Así obtendremos un sistema lineal equivalente al sistema dado, pero sólo con "h" ecuaciones.

   c) Seleccionamos las "h" incógnitas que corresponden a las "h" columnas del citado menor no nulo de orden "h" y parametrizamos las restantes "$n - h$" incógnitas, pasando éstas a los segundos miembros de las ecuaciones. Así resulta un sistema lineal con "h" ecuaciones, "h" incógnitas y "$n - h$" parámetros; sistema éste que resolveremos mediante la regla de Cramer o mediante el método de la matriz inversa.



FONEMATO 2.6.1

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t &= 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t &= 2 \\ x + y + z + t &= 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ el sistema es incompatible, carece de solución.

FONEMATO 2.6.2

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2.y &= 3 \\ 2.x + y &= 6 \\ 3.x + y &= 9 \\ x + 4.y &= 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con dos incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 =$ número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado; o sea, tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y está formado por las dos primeras filas de "A", nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes; resulta:

$$x + 2.y = 3 \;\; ; \;\; 2.x + y = 6$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3 \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

matematicasbachiller.com

FONEMATO 2.6.3

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2.x + 2.y + z &= 9 \\ 3.x + y + z &= 8 \\ x + 4.y &= 9 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado; o sea, tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y está formado por las tres últimas filas de "A", nos quedamos con tres últimas ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes:

$$\begin{aligned} 2.x + 2.y + z &= 9 \\ 3.x + y + z &= 8 \\ x + 4.y &= 9 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = 1 \;\; ; \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = 2 \;\; ; \;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = 3$$

FONEMATO 2.6.4

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2.x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

matematicasbachiller.com

Cálculo de las infinitas soluciones:

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y está formado por las dos primeras filas de "A", nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (primera columna de "A") y x_2 (segunda columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_3) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así resulta un sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_2 y un parámetro x_3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2.x_2 &= 3 - x_3 \\ x_1 - x_2 &= 2.x_3 \end{aligned}$$

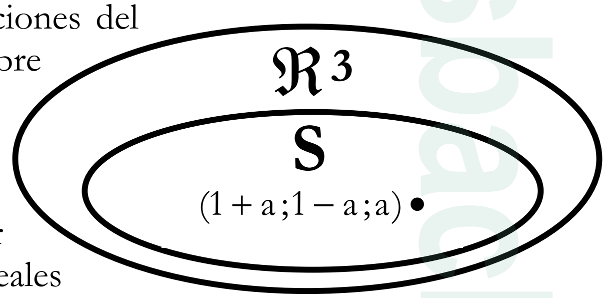
La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 - x_3 & 2 \\ 2.x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 + x_3 \ ; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - x_3 \\ 1 & 2.x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 - x_3$$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es $S = \{(1 + x_3 ; 1 - x_3 ; x_3),\ \forall x_3 \in \Re\} \subset \Re^3$, o bien:

$$S = \{(1 + a ; 1 - a ; a),\ \forall a \in \Re\} \subset \Re^3 \ \text{ ó } \ S = \{(1 + \lambda ; 1 - \lambda ; \lambda),\ \forall \lambda \in \Re\} \subset \Re^3$$

La diferencia radica sólo en el "nombre" que se asigna al parámetro que hemos introducido para calcular las infinitas soluciones del sistema dado. Con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el conjunto "S" que forman las soluciones del sistema lineal de ecuaciones dado es el subconjunto de $\Re^3$ formado por todas las ternas (ordenadas) de números reales en las que el primer número es una unidad superior al tercero, y el segundo se obtiene restando el tercero del número 1.



Basta asignar valores arbitrarios al parámetro para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

* si $a = 5 \Rightarrow (1 + 5 ; 1 - 5 ; 5) \equiv (6 ; -4 ; 5)$ es una solución del sistema
* si $a = 3 \Rightarrow (1 + 3 ; 1 - 3 ; 3) \equiv (4 ; -2 ; 3)$ es una solución del sistema
* si $a = \ldots$

y así, hasta que te canses, puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del sistema lineal dado .... como hay infinitas soluciones, si te va la marcha, tienes entretenimiento para toda la vida.

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es igual con independencia del menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema.

matematicasbachiller.com

Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y está formado por las dos últimas filas de "A", nos quedamos con las dos últimas ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2 (segunda columna de "A") y x_3 (tercera columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_2 y x_3 y un parámetro x_1:

$$\begin{aligned} -x_2 - 2.x_3 &= -x_1 \\ x_2 - x_3 &= 3 - 2.x_1 \end{aligned}$$

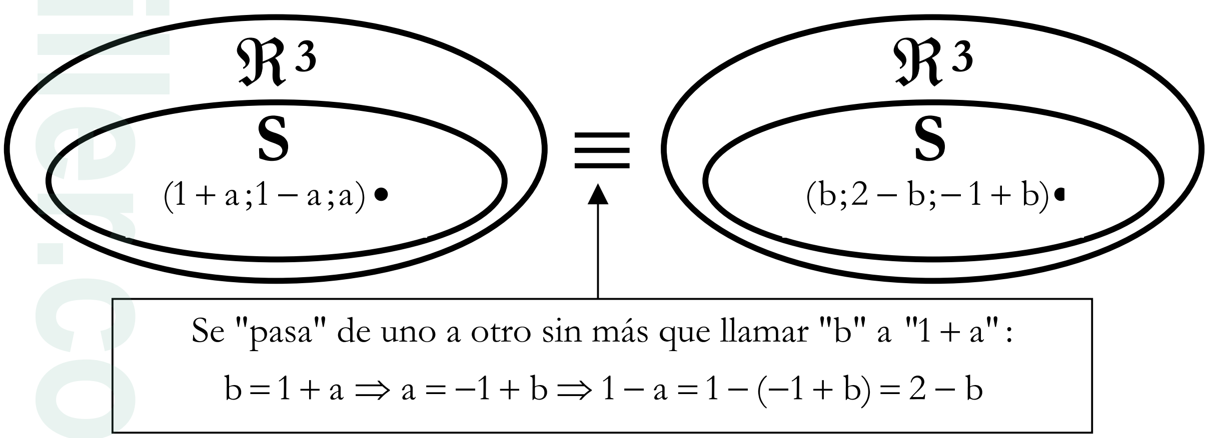
La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -x_1 & -2 \\ 3-2.x_1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 2 - x_1 \;\; ; \;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -x_1 \\ 1 & 3-2.x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -1 + x_1$$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es $S = \{(x_1; 2 - x_1; -1 + x_1), \forall x_1 \in \Re\} \subset \Re^3$, o bien:

$$S = \{(b; 2-b; -1+b), \forall b \in \Re\} \subset \Re^3 \text{ ó } S = \{(\theta; 2-\theta; -1+\theta), \forall \theta \in \Re\} \subset \Re^3$$

La diferencia radica sólo en el "nombre" asignado al parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del sistema dado. Con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el conjunto "S" que forman las soluciones del sistema lineal de ecuaciones dado es el subconjunto de $\Re^3$ formado por todas las ternas (ordenadas) de números reales en las que el segundo número se obtiene al restar el primer número del número 2, y el tercer número se obtiene al sumar -1 al primer número.



matematicasbachiller.com

Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y está formado por las dos últimas filas de "A", nos quedamos con las dos últimas ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (primera columna de "A") y x_3 (tercera columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_2) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_3 y un parámetro x_2:

$$\begin{array}{l} x_1 - 2.x_3 = x_2 \\ 2.x_1 - x_3 = 3 - x_2 \end{array}$$

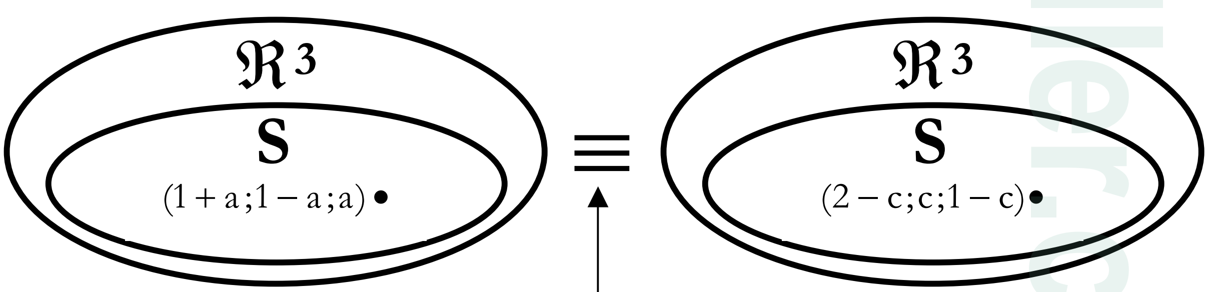
cuya solución determinamos mediante la regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & -2 \\ 3 - x_2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 2 - x_2 \ ; \ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 2 & 3 - x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 1 - x_2$$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es $S = \{(2 - x_2 ; x_2 ; 1 - x_2), \forall x_2 \in \Re\} \subset \Re^3$, o bien:

$$S = \{(2 - c ; c ; 1 - c), \forall c \in \Re\} \subset \Re^3 \text{ ó } S = \{(2 - \delta ; \delta ; 1 - \delta), \forall \delta \in \Re\} \subset \Re^3$$

La diferencia radica sólo en el "nombre" asignado al parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del sistema dado. Con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el conjunto "S" que forman las soluciones del sistema lineal de ecuaciones dado es el subconjunto de $\Re^3$ formado por todas las ternas (ordenadas) de números reales en las que el primer número se obtiene al restar el segundo número del número 2, y el tercer número se obtiene al restar el segundo número del número 1.



Se "pasa" de uno a otro sin más que llamar "c" a "1 − a":

$$c = 1 - a \Rightarrow a = 1 - c \Rightarrow 1 + a = 1`+(1 - c) = 2 - c$$

matematicasbachiller.com

FONEMATO 2.6.5

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 &= 0 \\ 8.x_1 - 2.x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

¡Oh cielos!, estamos ante un sistema lineal homogéneo de ecuaciones $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ las dos tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

Como $rg(A) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado; o sea, tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones:

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y está formado por las dos primeras filas de "A", nos quedamos con las dos primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2 (segunda columna de "A") y x_3 (tercera columna de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_2 y x_3 y un parámetro x_1:

$$\begin{aligned} 2.x_2 - 3.x_3 &= -6.x_1 \\ -2.x_2 + x_3 &= -2.x_1 \end{aligned}$$

cuya solución obtenemos mediante la regla de Cramer:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -6.x_1 & -3 \\ -2.x_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 3.x_1 \;;\; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6.x_1 \\ -2 & -2.x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 4.x_1$$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es

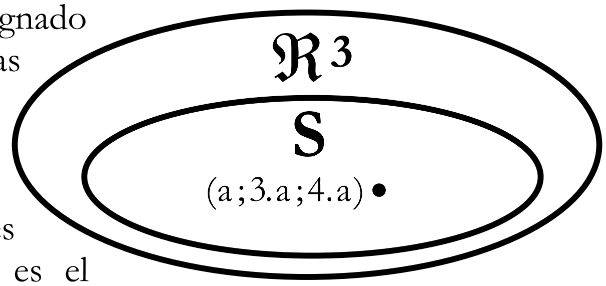
$$S = \{(x_1 ; 3.x_1 ; 4.x_1),\ \forall x_1 \in \Re\} \subset \Re^3$$

o bien:

$$S = \{(a ; 3.a ; 4.a),\ \forall a \in \Re\} \subset \Re^3 \text{ ó } S = \{(\lambda ; 3.\lambda ; 4.\lambda),\ \forall \lambda \in \Re\} \subset \Re^3$$

matematicasbachiller.com

La diferencia está sólo en el "nombre" asignado al parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del sistema. Con independencia del nombre que elijamos, en todos los casos se dice lo mismo: el conjunto "S" que forman las soluciones del sistema lineal de ecuaciones dado es el subconjunto de $\Re^3$ formado por todas las ternas (ordenadas) de números reales en las que el segundo número es el triple del primero, y el tercer número es el cuádruple del primero.



Basta asignar valores arbitrarios al parámetro para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

* si $\lambda = 5 \Rightarrow (5;3.5;4.5) \equiv (5;15;20)$ es una solución del sistema
* si $\lambda = 3 \Rightarrow (3;3.3;4.3) \equiv (3;9;12)$ es una solución del sistema
* si $\lambda = 1 \Rightarrow (1;3.1;4.1) \equiv (1;3;4)$ es una solución del sistema
* si $\lambda =$ .....

y así, hasta que te aburras, puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del sistema lineal dado ..... como hay infinitas soluciones, si te va el rollo, tienes entretenimiento hasta la tercera edad.

Observa: podemos expresar el conjunto $S = \{(\lambda;3.\lambda;4.\lambda),\ \forall\lambda \in \Re\} \subset \Re^3$ así:

$$S = \{\lambda \bullet (1;3;4),\ \forall\lambda \in \Re\} \quad \text{(I)}$$

y siendo $(1;3;4)$ una solución del sistema (la que corresponde a $\lambda = 1$), la expresión (I) nos indica que cualquier solución del sistema puede obtenerse multiplicando la solución $(1;3;4)$ por un número real cualquiera; o sea, cualquier solución del sistema es "proporcional" a la solución $(1;3;4)$.

Como veremos en el Tema 4, el conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal <u>homogéneo</u> dado es un subespacio (¿qué será eso?) del espacio vectorial (¿qué será eso?) $\Re^3$ ($\Re^3$ porque el sistema tiene 3 incógnitas), la dimensión (¿qué será eso?) de "S" es 1 (porque para resolver el sistema hemos parametrizado 1 incógnita), y el vector $(1;3;4)$ (¿qué será un vector?) es una base (¿qué será eso?) de "S".

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es el mismo con independencia del menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal dado; o sea, el conjunto "S" no depende de cuál sea el menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo.

FONEMATO 2.6.6

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 4.x_5 &= 5 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 - 4.x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 + x_5 &= 1 \\ 3.x_1 + x_2 + 2.x_3 - 2.x_4 - 7.x_5 &= 7 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & -7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Como $rg(A) = rg(B) = 3 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado; o sea, tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones:

Como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y está formado por las tres primeras filas de "A", nos quedamos con las tres primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes.

Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 (primera, segunda y tercera columnas de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_4 y x_5) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas x_1, x_2 y x_3 y dos parámetros x_4 y x_5:

$$\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + x_3 &= 5 + x_4 + 4.x_5 \\ x_2 + 2.x_3 &= 1 - x_4 + 4.x_5 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 + 2.x_4 - x_5 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes del nuevo sistema es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

y su solución la obtenemos mediante la regla de Cramer:

matematicasbachiller.com

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5+x_4+4.x_5 & 1 & 1 \\ 1-x_4+4.x_5 & 1 & 2 \\ 1+2.x_4-x_5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 2 + x_4 + x_5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5+x_4+4.x_5 & 1 \\ 0 & 1-x_4+4.x_5 & 2 \\ 1 & 1+2.x_4-x_5 & -1 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 1 - x_4$$

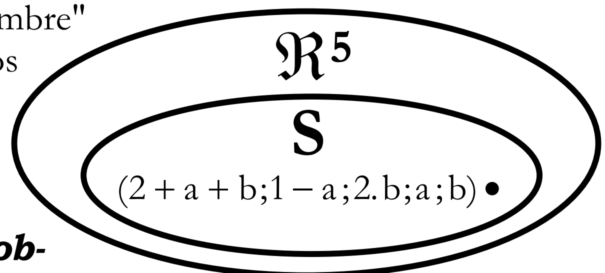
$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5+x_4+4.x_5 \\ 0 & 1 & 1-x_4+4.x_5 \\ 1 & -1 & 1+2.x_4-x_5 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 2.x_5$$

Así, denotando "S" al subconjunto de $\Re^5$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es $S = \{(2+x_4+x_5;1-x_4;2.x_5;x_4;x_5),\ \forall x_4, x_5 \in \Re\} \subset \Re^5$, o bien:

$$S = \{(2+a+b;1-a;2.b;a;b),\ \forall a,b \in \Re\} \subset \Re^5$$

$$S = \{(2+\lambda+\theta;1-\lambda;2.\theta;\lambda;\theta),\ \forall \lambda,\theta \in \Re\} \subset \Re^5$$

La diferencia está únicamente en el "nombre" asignado a los dos parámetros introducidos para calcular las infinitas soluciones del sistema.



Basta asignar valores arbitrarios a los parámetros para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

* si $\lambda = 1$ y $\theta = 1 \Rightarrow (4;0;2;1;1)$ es una solución del sistema
* si $\lambda = 0$ y $\theta = 2 \Rightarrow (4;1;4;0;2)$ es una solución del sistema
* si $\lambda = 3$ y $\theta = 2 \Rightarrow (6;-2;4;3;2)$ es una solución del sistema
* si ....

y así, hasta que te hartes, puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del sistema lineal dado .... como hay infinitas soluciones, si te mola el asunto, tienes entretenimiento for ever.

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es el mismo con independencia del menor no nulo de orden 3 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema; o sea, el conjunto "S" es el mismo sea cual sea el menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo.

FONEMATO 2.6.7

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -2.x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3.x_5 &= 0 \\ -2.x_1 + x_2 + 2.x_3 + x_4 - 3.x_5 &= 0 \\ 2.x_1 - x_2 - x_3 - 2.x_4 + 6.x_5 &= 0 \\ -2.x_1 + x_2 + 2.x_3 - 2.x_4 + 6.x_5 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

¡Oh cielos!, estamos ante un sistema lineal homogéneo de ecuaciones (condiciones) $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ las dos tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema es compatible, pues al menos admite la solución trivial:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

La matriz de los coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

Como $rg(A) = 3 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado; o sea, tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones:

Como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y está formado por las tres primeras filas de "A", nos quedamos con las tres primeras ecuaciones del sistema y eliminamos las restantes.

Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2, x_3 y x_4 (segunda, tercera y cuarta columnas de "A"), parametrizamos las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1 y x_5) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas x_2, x_3 y x_4 y dos parámetros x_1 y x_5:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 &= 2.x_1 - 3.x_5 \\ x_2 + 2.x_3 + x_4 &= 2.x_1 + 3.x_5 \\ -x_2 - x_3 - 2.x_4 &= -2.x_1 - 6.x_5 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes del nuevo sistema es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La solución la obtenemos mediante la regla de Cramer:

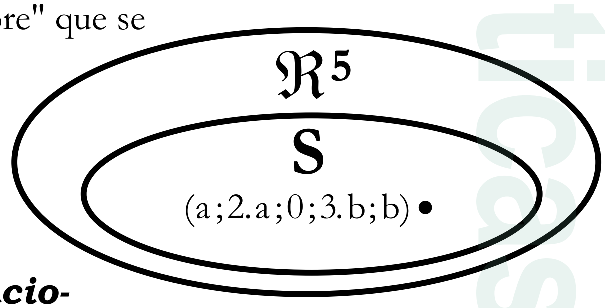
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.x_1 - 3.x_5 & 1 & -1 \\ 2.x_1 + 3.x_5 & 2 & 1 \\ -2.x_1 - 6.x_5 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 2.x_1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2.x_1 - 3.x_5 & -1 \\ 1 & 2.x_1 + 3.x_5 & 1 \\ -1 & -2.x_1 - 6.x_5 & -2 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 0 \ ; \ x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2.x_1 - 3.x_5 \\ 1 & 2 & 2.x_1 + 3.x_5 \\ -1 & -1 & -2.x_1 - 6.x_5 \end{vmatrix}}{|A_1|} = 3.x_5$$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^5$ que forman las infinitas soluciones del sistema, es $S = \{(x_1;2.x_1;0;3.x_5;x_5), \forall x_1, x_5 \in \Re\} \subset \Re^5$; o bien:

$$S = \{(a;2.a;0;3.b;b), \forall a,b \in \Re\} \text{ ó } S = \{(\lambda;2.\lambda;0;3.\theta;\theta), \forall \lambda,\theta \in \Re\}$$

La diferencia está únicamente en el "nombre" que se asigna a los dos parámetros introducidos para calcular las infinitas soluciones del sistema.



Basta asignar valores arbitrarios a los parámetros para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

$*$ si $\lambda = 1$ y $\theta = 0 \Rightarrow (1;2;0;0;0)$ es una solución del sistema
$*$ si $\lambda = 0$ y $\theta = 1 \Rightarrow (0;0;0;3;1)$ es una solución del sistema
$*$ si ...

y así, hasta que te hartes, puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del sistema lineal dado ...... como hay infinitas soluciones, si te enrolla el asunto, tienes entretenimiento asegurado.

Observa: podemos expresar $S = \{(\lambda;2.\lambda;0;3.\theta;\theta), \forall \lambda,\theta \in \Re\} \subset \Re^5$ así:

$$S = \{(\lambda;2.\lambda;0;0;0) + (0;0;0;3.\theta;\theta), \forall \lambda,\theta \in \Re\} \subset \Re^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \{ \underbrace{\lambda \bullet (1;2;0;0;0)}_{\text{proporcional a } (1;2;0;0,0)} + \underbrace{\theta \bullet (0;0;0;3;1)}_{\text{proporcional a } (0;0;0;3,1)}, \forall \lambda,\theta \in \Re \} \subset \Re^5 \quad \text{(I)}$$

Siendo $(1;2;0;0,0)$ una solución del sistema (la que corresponde a $\lambda = 1$ y $\theta = 0$) y $(0;0;0;3,1)$ otra solución del sistema (la que corresponde a $\lambda = 0$ y $\theta = 1$), la expresión (I) nos indica que las infinitas soluciones del sistema se obtienen al multiplicar cada una de las soluciones $(1;2;0;0,0)$ y $(0;0;0;3,1)$ por un número real cualquiera y sumar los resultados.

matematicasbachiller.com

Ve tomando nota: en su momento veremos que el conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo dado es un ***sub-espacio vectorial*** (¿qué será eso?) del ***espacio vectorial*** (¿qué será eso?) $\Re^5$ ($\Re^5$ porque el sistema tiene 5 incógnitas), la ***dimensión*** (¿qué será eso?) de "S" es 2 (porque para resolver el sistema hemos parametrizado 2 incógnitas), y los ***vectores*** (¿qué será eso?) $(1;2;0;0,0)$ y $(0;0;0;3,1)$ forman una ***base*** (¿qué será eso?) de "S".

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es el mismo con independencia del menor no nulo de orden 3 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema; o sea, el conjunto "S" es el mismo sea cual sea el menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo.

En los ejercicios 2.6.8 a 2.6.19 trabajaremos con ***sistemas lineales cuyas matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" están "contaminadas" por parámetros*** (números reales) ***desconocidos***. Los valores de estos parámetros influirán en los rangos de "A" y "B", por lo que influirán en las soluciones del sistema.

Pregunta: ¿qué rango estudiamos primero, el de "A" o el de "B"?
Respuesta: comenzaremos estudiando el rango de "A" si el máximo rango que puede tener coincide con el máximo rango que puede tener "B". Comenzaremos estudiando el rango de "B" si el máximo rango que puede tener "A" es menor que el máximo rango que puede tener "B".

FONEMATO 2.6.8

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{aligned} 3.x + m.y &= 1 \\ 2.x - y + m.z &= 1 \\ m.x - 3.y + 2.z &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & m & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m & 1 \\ m & -3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" coincide con el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "m" que lo anulan: $|A| = m^3 + 5.m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1$

La ecuación $|A| = 0$ tiene dos raíces imaginarias a las que no hacemos caso, pues se nos dice que "m" es real.

$\boxed{\text{Análisis si } m \neq 1}$

Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado; o sea, tiene solución única, que es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ m & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Al hacer los cálculos, resulta:

$$x = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 + 5.m - 6} \; ; \; y = \frac{m^2 - 3.m + 2}{m^2 + 5.m - 6} \; ; \; z = \frac{m^2 - m}{m^2 + 5.m - 6}$$

Por ejemplo, si $m = 2$, la única solución del sistema es:

$$x = \frac{2^2 + 2 - 2}{2^2 + 5.2 - 6} = \frac{1}{2} \; ; \; y = \frac{2^2 - 3.2 + 2}{2^2 + 5.2 - 6} = 0 \; ; \; z = \frac{2^2 - 2}{2^2 + 5.2 - 6} = \frac{1}{4}$$

$\boxed{\text{Análisis si } m = 1}$

Si $m = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Por tanto, como $rg(A) = 2 = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado).

Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación del sistema y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{matrix} 3.x + y = 1 \\ 2.x - y = 1 - z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = (2 - z)/5 \\ y = (3.z - 1)/5 \end{matrix}\right.$$

Por tanto, denotando $S_{m=1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema si $m = 1$, es:

$$S_{m=1} = \left\{ \left(\frac{2 - z}{5}; \frac{3.z - 1}{5}; z\right), \forall z \in \Re \right\} \subset \Re^3$$

o bien:

$$S_{m=1} = \left\{ \frac{1}{5} \bullet (2 - z; 3.z - 1; 5.z), \forall z \in \Re \right\} \subset \Re^3$$

o así:

$$S_{m=1} = \left\{ \frac{1}{5} \bullet (2 - \theta; 3.\theta - 1; 5.\theta), \forall \theta \in \Re \right\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.9

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores del parámetro real "m":

$$(2.m+2).x+m.y+2.z=2.m-2$$
$$2.x+(2-m).y=0$$
$$(m+1).x+(m+1).z=m+1$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2.m+2 & m & 2 & 2.m-2 \\ 2 & 2-m & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 & m+1 \end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" coincide con el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "m" que lo anulan:

$$|A|=-2.m^3+2.m=0\Rightarrow m=\begin{cases}0\\1\\-1\end{cases}$$

$\boxed{\text{Análisis si } m\neq 0 \text{ y } m\neq 1 \text{ y } m\neq -1}$

Si "m" toma un valor distinto de $0, 1$ y -1, ocurre que:

$$|A|\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=3=\text{rg}(B)=\text{número de incógnitas}$$

Así, el sistema es compatible y determinado; o sea, tiene solución única, que es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2.m-2 & m & 2 \\ 0 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|}\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2.m+2 & 2.m-2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|}\ ;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2.m+2 & m & 2.m-2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Al hacer los cálculos, resulta:

$$x=\frac{(m-2)^2}{m.(m-1)}\ ;\ y=\frac{2.(m-2)}{m.(m-1)}\ ;\ z=\frac{3.m-4}{m.(m-1)}$$

$\boxed{\text{Análisis si } m=0}$

Si $m=0$ es $|A|=0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=2\ ;\ B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{rg}(B)=3$$

Así, como $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(B)\Rightarrow$ el sistema es incompatible (carece de solución).

$\boxed{\text{Análisis si } m = 1}$

Si $m = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 3$$

Por tanto, como $rg(A) \neq rg(B) \Rightarrow$ el sistema es incompatible (carece de solución).

$\boxed{\text{Análisis si } m = -1}$

Si $m = -1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \;\;0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = 2 = rg(B) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación del sistema y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{matrix} -y = -4 - 2.z \\ 2.x + 3.y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 - 3.z \\ y = 4 + 2.z \end{cases}$$

Denotando $S_{m=-1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema si $m = -1$, es $S_{m=-1} = \{(-6 - 3.z; 4 + 2.z; z), \forall z \in \Re\} \subset \Re^3$, o bien:

$$S_{m=-1} = \{(-6 - 3.\lambda; 4 + 2.\lambda; \lambda), \forall \lambda \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.10

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{matrix} m.x + y + z = x \\ x + m.y + z = y \\ x + y + m.z = z \end{matrix}$$

SOLUCIÓN

El sistema lineal dado lo podemos escribir así:

$$\begin{matrix} (m-1).x + y + z = 0 \\ x + (m-1).y + z = 0 \\ x + y + (m-1).z = 0 \end{matrix}$$

¡Oh cielos!, estamos ante un sistema lineal homogéneo de ecuaciones $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ las dos tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A=\begin{bmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$

Estudiemos el rango de "A" para los distintos valores de "m"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "m" que lo anulan:

$$|A| = m^3 - 3.m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 2 \text{ (doble)} \\ -1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Análisis si } m \neq 2 \text{ y } m \neq -1}$

Si "m" toma un valor distinto de 2 y -1, entonces ocurre que:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = \text{número de incógnitas}$$

Por tanto el sistema es compatible y determinado; o sea, tiene solución única, que es la trivial $x = y = z = 0$.

$\boxed{\text{Análisis si } m = 2}$

Si $m = 2$ es $|A| = 0$, y la matriz "A" se convierte en:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$$

Como $rg(A) = 1 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones. Para hallarlas, como el menor de orden 1 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la segunda y tercera ecuaciones del sistema y parametrizamos las incógnitas "y" y "z", pasándolas al segundo miembro de la ecuación; resulta $x = -y - z$. Así, denotando $S_{m=2}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema si $m = 2$, es $S_{m=2} = \{(-a - b; a; b)\ \forall a, b \in \Re\} \subset \Re^3$.

$\boxed{\text{Análisis si } m = -1}$

Si $m = -1$ es $|A| = 0$, y la matriz "A" se convierte en:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$$

Como $rg(A) = 2 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera ecuación del sistema y parametrizamos la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{aligned} -2.x + y &= -z \\ x - 2.y &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Así, denotando $S_{m=-1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema si $m = -1$, es $S_{m=-1} = \{(\theta; \theta; \theta),\ \forall \theta \in \Re\} \subset \Re^3$.

matematicasbachiller.com

FONEMATO 2.6.11

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "n" y "k":

$$\begin{aligned} x - n.y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ k.x - 2.y - 5.z &= 0 \\ 3.x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

¡Oh cielos!, estamos ante un sistema lineal homogéneo de ecuaciones $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ las dos tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x = y = z = 0$.

La matriz de los coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y como } H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ es } rg(A) \geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_1 obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & -2 & -5 \end{vmatrix} = n.k - 9 - 5.n - k \;;\; H_3 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.n$$

Por tanto:

- Si $n \neq 0 \Rightarrow H_3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $n = 0 \Rightarrow H_3 = 0$ y $H_2 = -9 - k$; así, si $k \neq -9$, es $H_2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $n = 0$ y $k = -9 \Rightarrow H_2 = H_3 = 0 \Rightarrow rg(A) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, a la vista del menor no nulo H_1, eliminamos la tercera ecuación del sistema y parametrizamos la incógnita "y", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 0 \\ x - z &= -y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -y/2 \\ z = y/2 \end{cases}$$

Denotando "S" al conjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema si $n = 0$ y $k = -9$, es $S = \{(-\theta/2;\theta;\theta/2),\ \forall\theta \in \Re\} \subset \Re^3$, o bien, llamando λ a $\theta/2$:

$$S = \{(-\lambda;2.\lambda;\lambda),\ \forall\lambda \in \Re\} \subset \Re^3$$

FONEMATO 2.6.12

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 7 \\ 5.x - 2.y + z &= 9 \\ x + y + z &= 4 \\ 2.x - y + 2.z &= k \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & k \end{bmatrix}$$

Como el máximo rango que puede tener "A" es menor que el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "B"; para ello calculamos $|B|$ y determinamos los valores de "k" que lo anulan: $|B| = -6.k - 54 = 0 \Rightarrow k = -9$.

$\boxed{\text{Análisis si } k \neq -9}$

Si $k \neq -9 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible

$\boxed{\text{Análisis si } k = -9}$

Si $k = -9$ es $|B| = 0,$ y como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, resulta ser $rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la cuarta ecuación del sistema y resolvemos por Cramer; resulta $x = 11/2,\ y = 17/3,\ z = 43/6.$

FONEMATO 2.6.13

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores del parámetro real "k":

$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 3.x + 4.y - z &= 5 \\ x + y + k.z &= 3 \\ x + 2.y + (k+2).z &= k^2 - 2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2 - 2 \end{array}\right]$$

matematicasbachiller.com

Como el máximo rango que puede tener "A" es menor que el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "B"; para ello calculamos $|B|$ y determinamos los valores de "k" que lo anulan:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix} = (k+1).(k^2-1) = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

A la segunda fila le restamos el triple de la primera, y a las filas segunda y tercera les restamos la primera

Análisis si $k \neq 1$ y $k \neq -1$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Análisis si $k = 1$

Si $k = 1$ es $|B| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Siendo $|B| = 0$, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, resulta ser $rg(A) = rg(B) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene solución única (es compatible y determinado). Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la cuarta ecuación del sistema y resolvemos por Cramer; resulta: $x = 7, y = -4, z = 0$.

Análisis si $k = -1$

Si $k = -1$ es $|B| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) = 2$$

Como $rg(A) = rg(B) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la tercera y cuarta ecuaciones del sistema y parametrizamos "z", pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z + 3 \\ 3.x + 4.y &= z + 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3.z \\ y = -2.z - 4 \end{cases}$$

Así, denotando $S_{k=-1}$ al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema si $k = -1$, es $S_{k=-1} = \{(3.\theta + 7; -2.\theta - 4; \theta), \forall \theta \in \Re\} \subset \Re^3$

FONEMATO 2.6.14

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

$$\begin{aligned} 3.x - y + a.z &= 1 \\ x + 4.y + z &= 3 \\ 2.x - 5.y + z &= b \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & a & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & b \end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" es igual al máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "a" que lo anulan: $|A| = 26 - 13.a = 0 \Rightarrow a = 2$

$\boxed{\text{Análisis si } a \neq 2}$

Si $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(B) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene solución única (es compatible y determinado), que es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 4 & 1 \\ b & -5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & b \end{vmatrix}}{|A|}$$

$\boxed{\text{Análisis si } a = 2}$

Si $a = 2$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 \; ; \; B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -5 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & b \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Estudiemos el rango de "B" en función de los valores de "b": al orlar el menor no nulo de orden 2 indicado en "B", resultan los siguientes menores de orden 3:

$$H_1 = |A| = 0 \; ; \; H_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & b \end{vmatrix} = 13.b + 26$$

Así, si $b \neq -2 \Rightarrow H_2 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

Por el contrario, si $b = -2 \Rightarrow H_2 = 0 \Rightarrow rg(B) = 2 = rg(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado). Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado es no nulo, eliminamos la tercera ecuación del sistema y parametrizamos "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\left.\begin{array}{l}3.x-y=1-2.z\\ x+4.y=3-z\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=(7-9.z)/13\\ y=(8-z)/13\end{array}\right.$$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de $\Re^3$ que forman las infinitas soluciones del sistema cuando $a=2$ y $b=-2$, es

$$S=\left\{(\frac{7-9.\lambda}{13};\frac{8-\lambda}{13},\lambda),\ \forall\lambda\in\Re\right\}\subset\Re^3$$

FONEMATO 2.6.15

Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "a" y "b":

$$\begin{array}{r}3.x-y+z=0\\ 2.x+b.y+z=0\\ x-a.y-z=0\end{array}$$

SOLUCIÓN

¡Oh cielos!, estamos ante un sistema lineal homogéneo de ecuaciones $\Rightarrow$ la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros $\Rightarrow$ las dos tienen el mismo rango $\Rightarrow$ el sistema es compatible, pues al menos admite la solución trivial $x=y=z=0$.

La matriz de los coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & b & 1\\ 1 & -a & -1\end{bmatrix}$$

Estudiemos el rango de "A" para los distintos valores de "a" y "b"; a tal fin, calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "a" y "b" que lo anulan:

$$|A|=a-4.b-3=0$$

- Si "a" y "b" son tales que $a-4.b-3\neq0\Rightarrow rg(A)=3=$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado, sólo tiene la solución trivial.
- Si "a" y "b" son tales que $a-4.b-3=0\Rightarrow rg(A)=2<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

FONEMATO 2.6.16

Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{array}{r}a.x+b.y+z=1\\ x+a.b.y+z=b\\ x+b.y-a.z=1\end{array}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

matematicasbachiller.com

$$A/B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & a.b & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" coincide con el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "a" y "b" que lo anulan:

$$|A|=b.(a^3-3.a+2)=0\Rightarrow\begin{cases} b=0 \\ a=1\text{ (doble)} \\ a=-2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Análisis si } b\neq 0 \text{ y } a\neq 1 \text{ y } a\neq -2}$

Si $b\neq 0$ y $a\neq 1$ y $a\neq -2\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=rg(B)=3=$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).

$\boxed{\text{Análisis si } b=0}$

Si $b=0$ es $|A|=0,$ y la matriz "B" se convierte en:

$$B=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=rg\underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}}_{H}$$

Como $|H|=2.a-2$ se anula sólo si $a=1,$ entonces:

$*$ Si $a\neq 1\Rightarrow |H|\neq 0\Rightarrow rg(B)=3\neq rg(A)\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

$*$ Si $a=1,$ las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1\ ;\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2$$

o sea, resulta $rg(A)\neq rg(B)\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

$\boxed{\text{Análisis si } a=1}$

Si $a=1$ es $|A|=0,$ y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1,\ \forall b$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=rg\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{cases} 1 \text{ si } b=1 \\ 2 \text{ si } b\neq 1 \end{cases}$$

Así:

$*$ Si $b=1\Rightarrow rg(A)=rg(B)=1\Rightarrow rg(A)=rg(B)=1<$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones).

$*$ Si $b\neq 1\Rightarrow rg(B)=2\neq rg(A)\Rightarrow$ el sistema carece de solución

$\boxed{\text{Análisis si } a = -2}$

Si $a = -2$ es $|A| = 0$, y la matriz "B" se convierte en:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2.b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(B) \geq 2, \forall b, \text{ pues } H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \forall b$$

Al orlar el menor no nulo H_1 se obtienen los siguientes menores de orden 3:

$$H_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3.(b+2) \text{ que se anula sólo si } b = -2$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ -2.b & 1 & b \\ b & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3.b.(b+2) \text{ que se anula sólo si } b = 0 \text{ ó } b = -2$$

Por tanto:

$*$ Si $b \neq -2 \Rightarrow H_3 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 3 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

$*$ Si $b = -2 \Rightarrow H_2 = H_3 = 0 \Rightarrow rg(B) = 2 = rg(A) <$ número de incógnitas; por lo que el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones).

FONEMATO 2.6.17

Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2.y &= 1 \\ x + y + t &= 1 \\ x + 3.y + 2.a.z + 2.t &= 1 \\ 2.x + 6.y + 2.z + a.t &= b \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A / B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2.a & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & a & b \end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" coincide con el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "a" que lo anulan:

$$|A| = 6 - 4.a - 2.a^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Análisis si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -3}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 4 =$ número de incógnitas; así, el sistema compatible y determinado; o sea, tiene solución única.

matematicasbachiller.com

$\boxed{\text{Análisis si a = 1}}$

Si $a = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & b \end{bmatrix}$$

En la matriz "B" es:

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & b \end{vmatrix} = 2 - b \text{ que se anula sólo si } b = 2$$

Por tanto:

$*$ Si $b \neq 2 \Rightarrow H_1 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

$*$ Si $b = 2 \Rightarrow H_1 = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$\boxed{\text{Análisis si a = −3}}$

Si $a = -3$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3 \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & -3 & b \end{bmatrix}$$

Como, en la matriz "B", es:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & b \end{vmatrix} = 6.(b-2) \text{ que se anula sólo si } b = 2$$

entonces:

$*$ Si $b \neq 2 \Rightarrow H_2 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible

$*$ Si $b = 2 \Rightarrow H_2 = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

FONEMATO 2.6.18

Discútase y resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + z &= c \\ x + y + 2.t &= 0 \\ b.x + y + 2.z + t &= 0 \\ a.x + 2.y + z + 3.t &= c \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A / B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" coincide con el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "a" y "b" que lo anulan: $|A| = b - a = 0 \Rightarrow a = b$

$\boxed{\text{Análisis si } a \neq b}$

Si $a \neq b \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(B) = 4 =$ número de incógnitas; así, el sistema compatible y determinado; o sea, tiene solución única, que es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ c & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ b & 0 & 2 & 1 \\ a & c & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & c & 3 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 2 & 0 \\ a & 2 & 1 & c \end{vmatrix}}{|A|}$$

$\boxed{\text{Análisis si } a = b}$

Si $a = b$ es $|A| = 0,$ y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ b & 1 & 2 & 1 \\ b & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3, \text{ pues el menor indicado es no nulo}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 1 & 2 & 1 & 0 \\ b & 2 & 1 & 3 & c \end{bmatrix}$$

Como, en la matriz "B", es:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & c \end{vmatrix} = 2.c, \text{ que se anula sólo si } c = 0$$

entonces:

* Si $c \neq 0 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 4 \neq rg(A) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

* Si $c = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones. Para calcularlas, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, eliminamos la cuarta ecuación parametrizamos "x", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones:

$$z=-x$$
$$y+2.t=-x$$
$$y+2.z+t=-b.x$$

cuya solución es (Cramer):

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-x & 0 & 1\\ -x & 1 & 2\\ -b.x & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}\;;\; z=\frac{\begin{vmatrix}0 & -x & 1\\ 0 & -x & 2\\ 1 & -b.x & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}\;;\; t=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & -x\\ 0 & 1 & -x\\ 1 & 2 & -b.x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}$$

FONEMATO 2.6.19

Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$2.x+a.y+z=7$$
$$x+a.y+z+t=b$$
$$x+2.a.y+t=-1$$
$$b.x+a.y=b$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Sus correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A/B=\left[\begin{array}{cccc|c}2 & a & 1 & 0 & 7\\ 1 & a & 1 & 1 & b\\ 1 & 2.a & 0 & 1 & -1\\ b & a & 0 & 0 & b\end{array}\right]$$

Como el máximo rango que puede tener "A" coincide con el máximo rango que puede tener "B", estudiamos el rango de "A"; para ello calculamos $|A|$ y determinamos los valores de "a" y "b" que lo anulan: $|A|=2.a.(1-b)=0\Rightarrow a=0$ ó $b=1$.

$\boxed{\text{Análisis si } a\neq 0 \text{ y } b\neq 1}$

Si $a\neq 0$ y $b\neq 1\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=rg(B)=4=$ número de incógnitas; así, el sistema compatible y determinado; o sea, tiene solución única.

$\boxed{\text{Análisis si } a=0}$

Si $a=0$ es $|A|=0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ b & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=3,\text{ pues }\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 1 & 1 & b\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ b & 0 & 0 & 0 & b\end{bmatrix}$$

Como, en la matriz "B", es:

$$H=\begin{vmatrix}2&1&0&7\\1&1&1&b\\1&0&1&-1\\b&0&0&b\end{vmatrix}=b.(b-4)\text{ que se anula sólo si } b=0 \text{ o } b=4$$

entonces:

$*$ Si $b\neq 0$ y $b\neq 4\Rightarrow H\neq 0\Rightarrow rg(B)=4\neq rg(A)\Rightarrow$ el sistema es incompatible.

$*$ Si $b = 0$ ó $b = 4 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow rg(B) = 3 = rg(A) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$\boxed{\text{Análisis si } b=1}$

Si $b=1$ es $|A|=0,$ y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A=\begin{bmatrix}2&a&1&0\\1&a&1&1\\1&2.a&0&1\\1&a&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=3,\ \forall a,\text{ pues }\begin{vmatrix}2&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$B=\begin{bmatrix}2&a&1&0&7\\1&a&1&1&1\\1&2.a&0&1&-1\\1&a&0&0&1\end{bmatrix}$$

El sistema es incompatible, pues $rg(B)=4\neq rg(A),$ ya que en la matriz "B" es:

$$\begin{vmatrix}2&1&0&7\\1&1&1&1\\1&0&1&-1\\1&0&0&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow rg(B)=4,\ \forall a$$

FONEMATO 2.6.20

Discútase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned}2.x+y&=0\\x+y&=1\\x-y&=1\\x+2.y&=k\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A/B=\left[\begin{array}{cc|c}2&1&0\\1&1&1\\1&-1&1\\\hline 1&2&k\end{array}\right]$$

El sistema es incompatible para todo valor de "k", pues $rg(B)=3\neq rg(A),$ ya que el menor de orden 3 indicado es no nulo.