

Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.01	Sistemas de ecuaciones lineales	68
2.02	¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?	69
2.03	Teorema de Rouché-Frobenius	71
2.04	Sistemas lineales homogéneos	71
2.05	Regla de Cramer	72
2.06	Resolución de un caso general	75
2.07	El problema inverso	103
2.08	Resolución de sistemas por sustitución	107
2.09	Diferencias entre los ejercicios 2.6.4 y 2.6.5	110
2.10	Método de Gauss	116
2.11	Combinación lineal de matrices	128

Recuerda:

LINEAL \equiv PROPORCIONAL

Para ser en un artista lidiando sistemas de ecuaciones lineales es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices



2.7. EL PROBLEMA "INVERSO"

Supuesto que ya somos capaces de calcular el conjunto de soluciones de un sistema lineal dado (problema "directo"), nos planteamos lo contrario: **determinar un sistema lineal cuyo conjunto de soluciones es conocido.**

Los siguientes ejercicios ilustran el asunto.

FONEMATO 2.7.1

- 1) Determinéense tres sistemas lineales homogéneos cuyo conjunto de soluciones sea $S_1 = \{(a + b; a - b; 2.a - b; b), \forall a, b \in \mathbb{R}\}$.
- 2) Determinéense un sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea $S_2 = \{(a + b + 2.c; a - b; 2.a - b + c; b - c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
- 3) Determinéense un sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea $S_3 = \{(a + b + 2.c; a - b; 2.a - b + c; b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

SOLUCIÓN

- 1) Como cada elemento del conjunto S_1 está formado por 4 números, los sistemas lineales homogéneos buscados tienen 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4 ; así, cuando el enunciado dice que

$$S_1 = \{(a + b; a - b; 2.a - b; b), \forall a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

está diciendo que:

$$\begin{array}{l} x_1 = a + b \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 2.a - b \\ x_4 = b \end{array}, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Ahora, para determinar un sistema lineal homogéneo que tenga a S_1 como conjunto de soluciones, basta eliminar los parámetros "a" y "b" (**para eliminar un parámetro basta despejarlo de una de las ecuaciones y sustituirlo por su valor en las otras ecuaciones**):

de la 4ª ecuación despejamos "b" ($b = x_4$), y sustituimos en las demás

$$\begin{array}{l} x_1 = a + b \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 2.a - b \\ x_4 = b \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = a + x_4 \\ x_2 = a - x_4 \\ x_3 = 2.a - x_4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = (x_2 + x_4) + x_4 \\ x_3 = 2.(x_2 + x_4) - x_4 \end{array}$$

de 2ª ecuación despejamos "a" ($a = x_2 + x_4$), y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2.x_4 = 0 \\ 2.x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \quad (I)$$

después de operar y ordenar

Para determinar otros de los infinitos sistemas lineales homogéneos que tienen a S_1 como conjunto de soluciones nos servimos del sistema (I) y del Teorema de Equivalencia de sistemas lineales, que garantiza que es equivalente (tiene las mismas soluciones) al sistema (I) el sistema que se obtiene, por ejemplo, al sustituir la primera ecuación de (I) por la que resulta al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones de (I); o sea, el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

También es equivalente (tiene las mismas soluciones) al sistema (I) el sistema obtenido, por ejemplo, al sustituir la segunda ecuación de (I) por la que resulta al restar miembro a miembro las dos ecuaciones de (I); o sea, es equivalente al sistema (I) el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2 \cdot x_4 &= 0 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 + x_3 - 3 \cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2) Como cada elemento del conjunto S_2 está formado por 4 números, el sistema lineal homogéneo que buscamos tiene 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4 . Cuando el enunciado dice que

$$S_2 = \{(a + b + 2 \cdot c; a - b; 2 \cdot a - b + c; b - c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

está diciendo que:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b + 2 \cdot c \\ x_2 &= a - b \\ x_3 &= 2 \cdot a - b + c \\ x_4 &= b - c \end{aligned}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ahora, para determinar un sistema lineal homogéneo que tenga a S_2 como conjunto de soluciones, basta eliminar los parámetros "a", "b" y "c" (para eliminar un parámetro basta despejarlo de una de las ecuaciones y sustituirlo por su valor en las restantes):

de la 2ª ecuación despejamos "a" ($a = b + x_2$) y sustituimos en las demás

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b + 2 \cdot c \\ x_2 &= a - b \\ x_3 &= 2 \cdot a - b + c \\ x_4 &= b - c \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= (b + x_2) + b + 2 \cdot c \\ x_3 &= 2 \cdot (b + x_2) - b + c \\ x_4 &= b - c \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot b + x_2 + 2 \cdot c \\ x_3 &= b + 2 \cdot x_2 + c \\ x_4 &= b - c \end{aligned}$$

después de operar y ordenar

de la 3ª ecuación despejamos "b" ($b = x_4 + c$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot (x_4 + c) + x_2 + 2 \cdot c \\ x_3 &= (x_4 + c) + 2 \cdot x_2 + c \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \cdot x_4 + x_2 + 4 \cdot c \\ x_3 &= x_4 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot c \end{aligned}$$

de la segunda ecuación despejamos "c" ($c = (x_3 - x_4 - 2 \cdot x_2)/2$) y sustituimos en la primera ecuación

$$\Rightarrow x_1 = 2 \cdot x_4 + x_2 + 4 \cdot \frac{x_3 - x_4 - 2 \cdot x_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$$

3) Como cada elemento del conjunto S_3 está formado por 4 números, el sistema lineal homogéneo que buscamos tiene 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4 . Cuando el enunciado dice que

$$S_3 = \{(a + b + 2 \cdot c; a - b; 2 \cdot a - b + c; b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

está diciendo que:

$$\begin{cases} x_1 = a + b + 2 \cdot c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 2 \cdot a - b + c \\ x_4 = b + c \end{cases}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ahora, para determinar un sistema lineal homogéneo que tenga a S_3 como conjunto de soluciones, basta eliminar los parámetros "a", "b" y "c" (para eliminar un parámetro basta despejarlo de una de las ecuaciones y sustituirlo por su valor en las restantes):

de la 2ª ecuación despejamos "a" ($a = b + x_2$) y sustituimos en las demás

$$\begin{cases} x_1 = a + b + 2 \cdot c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 2 \cdot a - b + c \\ x_4 = b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (b + x_2) + b + 2 \cdot c \\ x_3 = 2 \cdot (b + x_2) - b + c \\ x_4 = b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot b + x_2 + 2 \cdot c \\ x_3 = b + 2 \cdot x_2 + c \\ x_4 = b + c \end{cases}$$

después de operar y ordenar

de la 3ª ecuación despejamos "b" ($b = x_4 - c$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot (x_4 - c) + x_2 + 2 \cdot c \\ x_3 = (x_4 - c) + 2 \cdot x_2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \cdot x_4 + x_2 \\ x_3 = x_4 + 2 \cdot x_2 \end{cases}$$

al operar, sorprendentemente, la "c" desaparece del mapa, se volatiliza

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2 \cdot x_4 = 0 \\ 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

Te suponemos sorprendid@ al descubrir que el sistema lineal homogéneo (II) es el mismo que el (I) y que, por tanto, como las soluciones de un sistema de ecuaciones son las que son, al escribir

$$S_1 = \{(a + b; a - b; 2 \cdot a - b; b), \forall a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

se "dice" lo mismo que al escribir

$$S_3 = \{(a + b + 2 \cdot c; a - b; 2 \cdot a - b + c; b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

O sea, a pesar de que nadie lo diría a primera vista, S_1 y S_3 son el mismo conjunto y como en S_3 hay un protagonista (el parámetro "c") que no está en S_1 , deducimos que ese protagonista es irrelevante y superfluo: es decir, al escribir $S_3 = \{(a + b + 2.c; a - b; 2.a - b + c; b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ no se "añade" nada nuevo a lo "dicho" al escribir:

$$S_1 = \{(a + b; a - b; 2.a - b; b), \forall a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

FONEMATO 2.7.2

Determinense dos sistemas lineales cuyo conjunto de soluciones sea el "S" definido como $S = \{(1 + a + b; a - b; 2.a - b; 2 + b), \forall a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN

Como cada elemento del conjunto "S" está formado por 4 números, los sistemas lineales que buscamos tienen 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4 . Cuando el enunciado dice que $S = \{(1 + a + b; a - b; 2.a - b; 2 + b), \forall a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$, está diciendo que:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + a + b \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 2.a - b \\ x_4 = 2 + b \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Ahora, para determinar un sistema lineal que tenga a "S" como conjunto de soluciones, eliminamos los parámetros "a" y "b" (para eliminar un parámetro basta despejarlo de una de las ecuaciones y sustituirlo por su valor en las restantes):

de la 4ª ecuación despejamos "b" ($b = x_4 - 2$) y sustituimos en las demás

$$\begin{cases} x_1 = 1 + a + b \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 2.a - b \\ x_4 = 2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + a + (x_4 - 2) \\ x_2 = a - (x_4 - 2) \\ x_3 = 2.a - (x_4 - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + a + x_4 \\ x_2 = a - x_4 + 2 \\ x_3 = 2.a - x_4 + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

simplificamos lo que se pueda

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = (1 + x_1 - x_4) - x_4 + 2 \\ x_3 = 2.(1 + x_1 - x_4) - x_4 + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

de la 1ª ecuación despejamos "a" ($a = 1 + x_1 - x_4$) y sustituimos en las demás

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2.x_4 = -3 \\ 2.x_1 - x_3 - 3.x_4 = -4 \end{cases} \quad (I)$$

después de operar y ordenar

Para determinar otro de los infinitos sistemas lineales homogéneos que tienen a "S" como conjunto de soluciones nos servimos del sistema (I) y del Teorema de

Equivalencia de sistemas lineales, que garantiza que es equivalente (tiene las mismas soluciones) al sistema (I) el sistema obtenido, por ejemplo, al sustituir la primera ecuación de (I) por la que resulta al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones de (I):

$$\begin{aligned} 3.x_1 - x_2 - x_3 - 5.x_4 &= -7 \\ 2.x_1 - x_3 - 3.x_4 &= -4 \end{aligned}$$

2.8. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR SUSTITUCIÓN

Para aplicar el **método de sustitución** trabajamos así:

- 1) De una ecuación cualquiera despejamos una incógnita cualquiera x_k .
- 2) En las restantes ecuaciones del sistema sustituimos la incógnita x_k por su valor obtenido en 1); así resulta un nuevo sistema lineal de ecuaciones que tiene una ecuación menos y en él no aparecerá la incógnita x_k .
- 3) Reiteramos el procedimiento.

FONEMATO 2.8.1

Resuélvanse los siguiente sistemas lineales de ecuaciones:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases} ; 2) \begin{cases} x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 = 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) El sistema es el del ejercicio 2.6.4; es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2.x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2.x_3 &= 0 \\ 2.x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (x_2 + 2.x_3) + 2.x_2 + x_3 &= 3 \\ 2.(x_2 + 2.x_3) + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

despejamos x_1 de la segunda ecuación:
 $x_1 = x_2 + 2.x_3$ (I)
 y sustituimos x_1 por su valor en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos	parametrizamos x_3
$\Rightarrow \begin{cases} 3.x_2 + 3.x_3 = 3 \\ 3.x_2 + 3.x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3.x_2 + 3.x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 1 - x_3$	$\Rightarrow x_2 = 1 - x_3$

eliminamos una de las ecuaciones, pues las dos son la misma

Para calcular x_1 en función de x_3 basta hacer $x_2 = 1 - x_3$ en (I); resulta:

$$x_1 = x_2 + 2.x_3 = (1 - x_3) + 2.x_3 \Rightarrow x_1 = 1 + x_3$$

es $x_2 = 1 - x_3$

Por tanto, siendo "S" el subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \{(1 + x_3 ; 1 - x_3 ; x_3), \forall x_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

2) Es:

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (x_2 + 2x_3) + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2(x_2 + 2x_3) + x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

despejamos x_1 de la segunda ecuación ($\Rightarrow x_1 = x_2 + 2x_3$)
y sustituimos en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow 3(-x_3) + 3x_3 = 3 \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow \text{absurdo} \Rightarrow$$

despejamos x_2 de la segunda ecuación ($\Rightarrow x_2 = -x_3$)
y sustituimos en la primera ecuación

\Rightarrow el sistema es incompatible

FONEMATO 2.8.2

Resuélvanse los siguientes sistemas lineales de ecuaciones:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t = 1 \\ 3x + 4y + 5z + 6t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases} ; 2) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ 3x + y = 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) El sistema es el del ejercicio 2.6.1; es:

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z + 5t = 1 \\ 3x + 4y + 5z + 6t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2(3 - y - z - t) + 3y + 4z + 5t = 1 \\ 3(3 - y - z - t) + 4y + 5z + 6t = 2 \end{array}$$

despejamos "x" de la segunda ecuación ($\Rightarrow x = 3 - y - z - t$)
y sustituimos en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y + 2z + 3t = -5 \\ y + 2z + 3t = -7 \end{array}$$

despejamos "y" de la primera ecuación ($\Rightarrow y = -5 - 2z - 3t$)
y sustituimos en la segunda ecuación

$$\Rightarrow (-5 - 2z - 3t) + 2z + 3t = -7 \Rightarrow -5 = -7 \Rightarrow \text{absurdo} \Rightarrow$$

\Rightarrow el sistema es incompatible

2) El sistema es el del ejercicio 2.6.2; es:

$$\begin{array}{l}
 x + 2.y = 3 \\
 2.x + y = 6 \\
 3.x + y = 9 \\
 x + 4.y = 3
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 2.(3 - 2.y) + y = 6 \\
 3.(3 - 2.y) + y = 6 \\
 (3 - 2.y) + 4.y = 3
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 -3.y = 0 \\
 -5.y = 0 \\
 2.y = 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 y = 0 \\
 y = 0 \\
 y = 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 y = 0 \\
 y = 0 \\
 y = 0
 \end{array}$$

operamos y simplificamos

despejamos "x" de la primera ecuación
 $x = 3 - 2.y$ (I)
y sustituimos en las demás ecuaciones

Al hacer $y = 0$ en (I) resulta $x = 3$; por tanto, la única solución del sistema es $x = 3, y = 0$.

FONEMATO 2.8.3

Resuélvase el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{array}{l}
 6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 = 0 \\
 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 = 0 \\
 8.x_1 - 2.x_3 = 0
 \end{array}$$

SOLUCIÓN

El sistema es el del ejercicio 2.6.4; tiene infinitas soluciones, pues se trata de un sistema lineal homogéneo con 3 incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene rango 2. Tras eliminar la tercera ecuación y parametrizar la incógnita x_1 , resulta:

$$\begin{array}{l}
 2.x_2 - 3.x_3 = -6.x_1 \\
 -2.x_2 + x_3 = -2.x_1
 \end{array}$$

Calculemos las infinitas soluciones mediante el método de sustitución: despejamos x_3 de la segunda ecuación (se obtiene $x_3 = 2.x_2 - 2.x_1$) y sustituimos x_3 por su valor en la primera ecuación (despejamos x_3 porque entre todas las incógnitas es la más cómoda de despejar):

$$2.x_2 - 3.(2.x_2 - 2.x_1) = -6.x_1 \Rightarrow 4.x_2 = 12.x_1 \Rightarrow x_2 = 3.x_1$$

El cálculo de x_3 es inmediato:

$$x_3 = 2.x_2 - 2.x_1 = 2.(3.x_1) - 2.x_1 \Rightarrow x_3 = 4.x_1$$

sabemos que $x_2 = 3.x_1$

Por tanto, siendo "S" el subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \{(x_1; 3.x_1; 4.x_1), \forall x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

2.9. DIFERENCIAS ENTRE LOS EJERCICIOS 2.6.4 Y 2.6.5

En el ejercicio 2.6.5 vimos que el subconjunto de \mathfrak{R}^3 que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned}6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 &= 0 \\2.x_1 - 2.x_2 + x_3 &= 0 \\8.x_1 - 2.x_3 &= 0\end{aligned}$$

es:

$$S_H = \{(\lambda; 3.\lambda; 4.\lambda), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

En el ejercicio 2.6.4 vimos que el subconjunto de \mathfrak{R}^3 que forman las infinitas soluciones del sistema lineal no homogéneo

$$\begin{aligned}x_1 + 2.x_2 + x_3 &= 3 \\x_1 - x_2 - 2.x_3 &= 0 \\2.x_1 + x_2 - x_3 &= 3\end{aligned}$$

es:

$$S_{NH} = \{(1 + \lambda; 1 - \lambda; \lambda), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

Observa: la "estructura física" del conjunto S_H que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo es tal que, con la mayor naturalidad del mundo, sin que se altere nuestro ritmo cardiaco, podemos "sacar factor común" el parámetro λ ; o sea, con la mayor naturalidad del mundo podemos hacer una operación tan tremendamente sutil, tan inaccesible a tanta gente, tan complicada y densa conceptualmente como escribir

$$S_H = \{(\lambda; 3.\lambda; 4.\lambda), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\} = \{\lambda \cdot (1; 3; 4), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

Observa: la "estructura física" del conjunto S_{NH} que forman las infinitas soluciones del sistema lineal no homogéneo es tal que resulta imposible "sacar factor común" el parámetro λ , pues si $S_{NH} = \{(1 + \lambda; 1 - \lambda; \lambda), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\}$, la presencia del número 1 en la terna $(1 + \lambda; 1 - \lambda; \lambda)$ hace imposible la operación de "sacar factor común" λ en dicha terna. Por supuesto, no vale escribir:

$$S_{NH} = \left\{ \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + 1; \frac{1}{\lambda} - 1; 1 \right), \forall \lambda \in \mathfrak{R} \right\} \subset \mathfrak{R}^3$$

• **Pregunta:**

¿Por qué la "estructura física" de S_H es distinta de la de S_{NH} ?

• **Respuesta:**

Porque la "estructura metafísica" de ambos conjuntos es distinta; o sea, en el interior, dentro, en lo más profundo, en lo más hondo, en lo más primario y primitivo, en lo que va en los genes, allá donde los ojos no ven y la razón lo ve

todo en el alma del conjunto S_H hay "algo", una marca, una señal, un estigma, un don, una virtud, una semilla, un que no está en el alma del conjunto S_{NH} . Ese "algo" es tan tremendamente diferenciador que hace que S_H pertenezca a una categoría especial de conjuntos, a una raza especial, a una elite, a una casta, a un linaje, a un muy selecto club; el pobre S_{NH} , por carecer de ese "algo", es un paria del Álgebra Lineal, un pringao que chupará poca cámara.

• **Pregunta:**

¿No podemos dejar la metafísica para otro momento y dejarnos de gilipolleces y aclarar un poco más el asunto?

• **Respuesta:**

Para aclarar el asunto tendríamos que introducir el concepto de "espacio vectorial", pero no es oportuno hacerlo ahora, pues podría suceder que los árboles nos impidieran ver el bosque. Ahora lo único que podemos hacer es recordar las dos mágicas propiedades del conjunto S_H que forman las soluciones de un sistema lineal homogéneo (SLH):

- 1) La suma de dos soluciones de un SLH es solución de dicho SLH.
- 2) El producto de una solución de un SLH por un número real es solución de dicho SLH.

El conjunto S_{NH} de las soluciones de un sistema lineal no homogéneo no cumple ninguna de las anteriores dos propiedades (ésta es la diferencia esencial entre los conjuntos S_H y S_{NH}): si el sistema lineal no homogéneo $A \bullet X = b$ tiene infinitas soluciones, y U y V son dos de ellas ($\Rightarrow A \bullet U = b$ y $A \bullet V = b$), es $A \bullet (U + V) = A \bullet U + A \bullet V = b + b = 2 \bullet b \neq b$, lo que garantiza que $U + V$ no es solución del sistema $A \bullet X = b$. De modo análogo, siendo α un número real ($\alpha \neq 1$), es $A \bullet (\alpha \bullet U) = \alpha \bullet (A \bullet U) = \alpha \bullet b \neq b$, por lo que $\alpha \bullet U$ ($\alpha \neq 1$) no es solución del sistema $A \bullet X = b$.

A continuación, para ilustrarte respecto de lo que se te viene encima, ponemos algunos ejemplos de ejercicios que lidiaremos más adelante serán muy fáciles (difíciles) de resolver si se tiene (no se tiene) perfectamente claro el asunto de los sistemas lineales.

Los ejemplos pretenden hacerte ver que **la canción del Álgebra de lo Lineal** (que habla de espacios y subespacios vectoriales, sistemas de generadores, bases, cambios de base, aplicaciones lineales, endomorfismos, formas bilineales y cuadráticas), **a la hora de la verdad**, cuando miramos lo que escribimos en el papel, **se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales** (lo que, a su vez, como hemos visto en los ejercicios precedentes, se reduce a poco más que calcular rangos de matrices).

EJEMPLO 1

En el espacio vectorial \mathcal{R}^3 , calcular la dimensión y una base del subespacio de \mathcal{R}^3 definido como:

$$\begin{aligned}6.x_1 + 2.x_2 - 3.x_3 &= 0 \\2.x_1 - 2.x_2 + x_3 &= 0 \\8.x_1 - 2.x_3 &= 0\end{aligned}$$

COMENTARIO

La densidad conceptual del ejercicio es elevada, pues en él intervienen los siguientes protagonistas:

- 1) Un espacio vectorial (¿qué será eso?) llamado \mathcal{R}^3 .
- 2) Un subespacio de \mathcal{R}^3 (¿qué será un subespacio?) llamado llamado de ninguna manera: en enunciado no dice que el subespacio tenga ningún nombre especial.
- 3) Se nos dice que el subespacio que no tiene nombre está definido por por por ¡mira lo que dice el enunciado! definido por ¿qué hay ante nuestros ojos?:

¡¡un piojoso sistema lineal homogéneo de ecuaciones!!

- 4) En este contexto se nos pide que calculemos la dimensión del subespacio que no tiene nombre (por cierto, ¿qué será la dimensión de un subespacio?), y una base (¿qué será una base? y en cualquier caso, ¿la base es del tipo plana o es base de lanzamiento?) de dicho subespacio.

A pesar de tan elevada densidad conceptual, la solución no puede ser más tonta: pasando de todo, sin acojonarnos por la "jerga", resolvemos el sistema lineal homogéneo que nos dan, y calculamos el conjunto "S" que forman sus infinitas soluciones. Como el sistema es el del ejercicio 2.6.5, obtenemos:

$$S = \{(\lambda; 3.\lambda; 4.\lambda), \forall \lambda \in \mathcal{R}\} = \{\lambda \cdot (1; 3; 4), \forall \lambda \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

sacamos factor común el parámetro λ

A continuación, con la mayor naturalidad del mundo, procurando que no se note que no entendemos un pimiento de piquillo, diremos:

- a) El subespacio "sin nombre" es el conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo dado.
- b) La dimensión de "S" es 1 (pues para resolver el sistema hemos parametrizar una incógnita).
- c) El vector $\vec{h} = (1; 3; 4)$ es una base del subespacio (por cierto, ¿qué es un vector?)

Y colorín colorado, sin entender nada de nada, habremos resuelto el ejercicio y parecerá que sabemos algo.

EJEMPLO 2

Calcular la dimensión y una base del núcleo de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 es:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

COMENTARIO

La densidad conceptual del ejercicio es más elevada que la del anterior, pues ahora intervienen los siguientes protagonistas:

- 1) Una aplicación lineal (¿qué será eso) cuyo nombre es "f".
- 2) El conjunto \mathbb{R}^3 dos veces (una vez a la izquierda de una flechita y otra vez a la derecha de la flechita).
- 3) Una matriz que llamada "A" y que nos dicen está asociada a "f" respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 ¿qué tendrá la base canónica para hacerse acreedora de un nombre tan raro?, ¿en qué consistirá esa asociación?, ¿será mafiosa?, ¿será pía?

En este contexto se nos pide que calculemos la dimensión y una base de una cosa que se llama "núcleo" de "f" el núcleo de "f", ¿se parecerá al núcleo de las células, o más bien se parecerá al núcleo de los átomos?

A pesar de tan elevada densidad conceptual, la solución no puede ser más tonta: pasando de todo, sin asustarnos por la espesa "jerga" del Álgebra Lineal, calculamos el conjunto "S" que forman las soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es "A" y como "A" es la matriz de los coeficientes del sistema lineal homogéneo del ejercicio 2.6.5, obtenemos:

$$S = \{(\lambda; 3\lambda; 4\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \cdot (1; 3; 4), \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

sacamos factor común el parámetro λ

A continuación, con la mayor naturalidad del mundo, procurando que no se note que no entendemos un pimiento de Padrón, diremos:

- a) El núcleo de la aplicación lineal "f" es el conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo que hemos resuelto.
- b) La dimensión del núcleo es 1 (pues para resolver el sistema hemos parametrizado una incógnita).
- c) El vector $\bar{h} = (1; 3; 4)$ es una base del núcleo de "f".

Y colorín colorado, sin saber ni entender nada de nada, habremos resuelto el ejercicio y de nuevo parecerá que sabemos algo.

EJEMPLO 3

Sea el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 es:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que uno de los autovalores de "f" es el número 3, calcular la dimensión y una base del subespacio de autovectores asociados a dicho autovalor.

COMENTARIO

La densidad conceptual del ejercicio no va a la zaga de los dos que le preceden; ahora los protagonistas son:

- 1) Un endomorfismo (¿qué será eso) cuyo nombre es "f".
- 2) El conjunto \mathbb{R}^3 dos veces (una vez a la izquierda de una flechita, y otra vez a la derecha de la flechita).
- 3) Una matriz llamada "H" (¡por fin ha desaparecido la odiosa matriz "A" del ejercicio 2.6.5!, ¡la hemos perdido de vista!) que está asociada a "f" respecto de la base canónica de \mathbb{R}^3 ¿en qué consistirá esa asociación?, ¿será como la de las aplicaciones lineales?, ¿será peor?, ¿será al revés?
- 4) Un número, el 3, del que dicen que es un "autovalor" asociado al endomorfismo "f" ¿es el autovalor 3 el valor del auto o el auto del valor?, en ese caso, ¿de qué auto?, ¿de qué valor? ¿cómo se puede poner a un simple número, el 3, un nombre tan hortera?, ¿qué ha hecho el número 3 para que le castiguen con tal nombrecito?
- 5) En este contexto, se nos pide que calculemos la dimensión y una base de un ente que se llama "subespacio de autovectores" asociados al autovalor 3 ¿los autovectores qué son? ¿son vectores motorizados? ¿es como Dios manda y conforme a las buenas costumbres la asociación que se traen entre manos los autovalores y los autovectores?

Como puedes ver, el asunto es tremendo, ¡menudo lío!, ¡vaya petardo!, ¡acaso sea mejor estudiar Derecho!

Pero a pesar de todo la solución no puede ser más tonta: pasando de todo, sin dejarnos enredar por la viscosa "jerga" del Álgebra Lineal, calcularemos el conjunto "S" que forman las soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es " $H - 3 \cdot I$ ", donde "I" es la matriz unidad del mismo orden que "H" (si el autovalor hubiera sido otro número, por ejemplo el 7, la matriz de coeficientes sería " $H - 7 \cdot I$ ").

¡Oh, no! el destino hace que la matriz " $H - 3 \cdot I$ " sea la famosa matriz "A" de los coeficientes del sistema lineal homogéneo del ejercicio 2.6.5:

$$H - 3 \cdot I = A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por ello, el conjunto de soluciones que obtenemos es:

$$S = \{(\lambda; 3\lambda; 4\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda \cdot (1; 3; 4), \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

sacamos factor común el parámetro λ

A continuación, procurando contener la risa para que no se note nuestra astuta ignorancia, diremos:

- a) El subespacio de autovectores asociados al autovalor 3 es el conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo que hemos resuelto.
- b) La dimensión del subespacio es 1 (pues para resolver el sistema parametrizado una incógnita).
- c) El vector $\bar{h} = (1; 3; 4)$ es una base del subespacio.

Y colorín colorete, sin saber ni entender nada de nada, habremos resuelto el ejercicio en un periquete y parecerá que entendemos algo.

NOTA

A la vista de los tres ejemplos precedentes no debe extrañarnos que algún novato piense que la solución $\bar{h} = (1; 3; 4)$, la obtenida al asignar al parámetro λ el valor 1, tiene algo especial, algo que no tienen las restantes soluciones del sistema lineal homogéneo del ejercicio 3.6.5 y no es para menos, pues al final de cada uno de los tres ejemplos hemos afirmado que el vector $\bar{h} = (1; 3; 4)$ era una base del subespacio Fulano o del subespacio Mengano.

Debemos aclarar que la solución $\bar{h} = (1; 3; 4)$ no tiene nada que no tenga cualquier otra solución (distinta de la trivial) del sistema lineal homogéneo 2.6.5: podríamos asesinar a la solución $\bar{h} = (1; 3; 4)$ y asignar a otra solución no trivial del sistema 2.6.5 el papel que tan dignamente ha desempeñado $\bar{h} = (1; 3; 4)$ hasta el instante del asesinato; nadie notaría la diferencia, pues la nueva solución haría tan buen papel como $\bar{h} = (1; 3; 4)$.

Suponemos que ya has reparado en el elegante "sombbrero" que luce la solución $\bar{h} = (1; 3; 4)$ ¿qué querrá indicar el sombrero?

OTRA NOTA

En el ejercicio 2.6.7 hemos visto que el subconjunto de \mathbb{R}^5 que forman las soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3 \cdot x_5 &= 0 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 - 3 \cdot x_5 &= 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - x_3 - 2 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 &= 0 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 + 6 \cdot x_5 &= 0 \end{aligned}$$

es $S = \{(\lambda; 2\lambda; 0; 3\theta; \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$. Al ver que en "S" aparecen dos parámetros λ y θ , si hubiera que lidiar situaciones como las descritas en los ejemplos 1,2 y 3, el "truco" consiste en **desagregar los parámetros** λ y θ de la siguiente forma:

$$S = \{(\lambda; 2\lambda; 0; 0; 0) + (0; 0; 0; 3\theta; \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$$

expresamos $(\lambda; 2\lambda; 0; 3\theta; \theta)$ como suma de dos sumandos, en el primero sólo interviene el parámetro λ , y en el segundo sólo interviene el parámetro θ

Una vez así, sacamos factor común los parámetros λ y θ :

$$S = \{\lambda \cdot (1; 2; 0; 0; 0) + \theta \cdot (0; 0; 0; 3; 1), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^5$$

• **Pregunta:**

¿Qué dirías de la dimensión del espacio vectorial "S" que forman las infinitas soluciones del sistema lineal homogéneo del ejercicio 2.6.7?, ¿qué dirías de las soluciones $\bar{h}_1 = (1; 2; 0; 0; 0)$ y $\bar{h}_2 = (0; 0; 0; 3; 1)$?

Pues aunque no sé lo que digo, diría que "S" tiene dimensión 2, y que \bar{h}_1 y \bar{h}_2 forman una base de "S"

