Tema 1

Funciones reales de variable real

Dios inventó el número natural,
lo demás es obra del hombre
Kronecker

1.1 LOS NÚMEROS REALES

Desde nuestra más tierna infancia todos estamos familiarizados con los ***números naturales*** (1, 2, 3, 4, 5, ...), pues con ellos aprendimos a "contar". Podemos visualizar dicho conjunto si, tomando como "soporte" una recta, convenimos en representar cada número natural mediante un punto.

VISUALIZACIÓN DE LOS NATURALES

1 2 3 4 5 6 7 8 9 . . . recta soporte

Con los números naturales no puede irse muy lejos, pues todos son positivos; así, dados dos naturales "a" y "b", no siempre existe otro número natural "x" tal que a + x = b. Por ejemplo, $4 + x = 2 \Rightarrow x = -2$, que no es un número natural. ***Esta limitación del conjunto de los números naturales no se presenta en el conjunto de los números enteros*** (0, 1, –1, 2, – 2, 3, – 3, ...). Consideramos que el número "cero" es entero; el "cero" es tan especial que hasta bien entrado el segundo milenio de nuestra era no se le admitió como número, para los sabios del siglo XI no era un número. Si convenimos en representar cada número entero mediante un punto, podemos visualizar el conjunto de dichos números.

VISUALIZACIÓN DE LOS ENTEROS

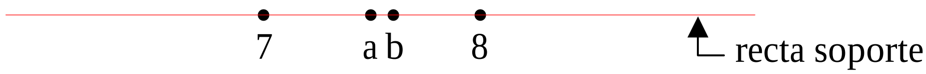
. . –3 –2 –1 0 1 2 3 . .

Con los números enteros tampoco puede irse muy lejos ni construir puentes muy largos, pues ***dados dos números enteros "a" y "b", no siempre existe otro número entero "x" tal que a.x = b.*** Por ejemplo, $7.x = 5 \Rightarrow x = 5/7$, que no es un número entero. Esta limitación de los enteros no se presenta en el conjunto de los ***números racionales***, que son los que pueden expresarse como cociente entre un número entero y otro natural. Dicho de otro modo: ***son racionales los números que tienen un número finito de cifras decimales, y también los números periódicos*** (todo número periódico se puede expresar como cociente entre un número entero y otro natural). La visualización del conjunto de los números racionales es asunto delicado, pues ***por "parecidos" que sean dos racionales entre ellos hay infinidad de racionales, y eso hace que el sentido de la vista pueda engañarnos al representar cada número***

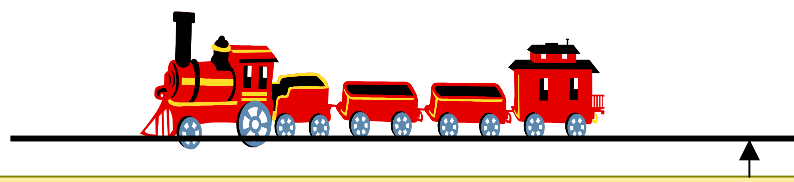
racional mediante un punto. Por ejemplo, si consideramos los números racionales

a = 7'6867385934782764562783834834272347423741238973498**7**
b = 7'6867385934782764562783834834272347423741238973498**8**

es evidente que son distintos y no muy famosos; además "a" es menor que "b" y ambos están comprendidos entre los números 7 y 8. Por tanto, al visualizar los números 7, 8, "a" y "b" obtendremos algo parecido a lo que sigue:



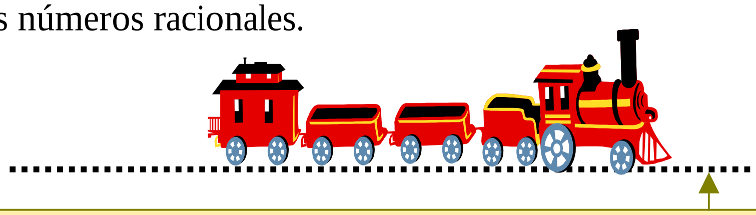
Como entre los números racionales "a" y "b" hay infinidad de números racionales, para visualizarlos todos deberíamos marcar infinidad de puntos entre el punto que representa al número "a" y el que representa al número "b". Así las cosas, es claro que ***los números racionales comprendidos entre "a" y "b" están como sardinas en lata, tan "apretados" que, a simple vista, podría parecer que constituyen un "todo continuo" y que "llenan por completo" la recta soporte***, podría parecer que la visualización de los racionales es la propia recta soporte, un "raíl continuo" por el que rodaría con sigilo el tren de la figura, sin el escándalo que se produce si los raíles están un poco separados para que la vía no se levante por la dilatación que sufre cuando aprieta la calor, cuando canta la calandria y contesta el ruiseñor.



A simple vista, ***la visualización del conjunto de los números racionales parece una recta, un "todo continuo" ...... pero no lo es***

Si mirásemos con un microscopio veríamos que en realidad los números racionales no forman un "todo continuo"; es decir, no "llenan por completo" la recta soporte, pues "eso" que a simple vista parece un "todo continuo" está infectado de "agujeros": cada uno de ellos corresponde a un número de los llamados "irracionales" (un número con infinitas cifras decimales y no periódico), como los números llamados "pi", "raíz cuadrada de dos" (no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, por eso es necesario "inventar" un número que cumpla esa condición, se denota $\sqrt{2}$), etc.

Aunque geométricamente es imposible distinguir un número racional de otro irracional, la siguiente figura es un burdo intento de la imposible visualización del conjunto de los números racionales.



Burdo intento de visualización del conjunto de los números racionales

Al unir el conjunto de los racionales y el de los irracionales se obtiene el conjunto $\Re$ de los números "reales". Para visualizarlo basta añadir los números irracionales al raíl infectado de agujeros que forman los racionales, con lo que cada agujero es "tapado" por el correspondiente número irracional; al hacer eso la recta soporte se "llena por completo", resultando un "todo continuo" que llamamos "recta real". Como cada punto de la recta real representa a un número real, en adelante consideraremos sinónimas las palabras "número" y "punto".

1.2 LA RECTA REAL AMPLIADA

- Llamamos ***recta real ampliada*** al conjunto que resulta al añadir al conjunto $\Re$ los símbolos $+\infty$ ("más infinito"; o sea, como estar hiperpodrido de dinero) y $-\infty$ ("menos infinito", como estar hiperpodrido de deudas).

¡Ojo!: $+\infty$ y $-\infty$ no son números, y para todo número real "x", es: $-\infty < x < +\infty$

- En general, ***con $+\infty$ y $-\infty$ no tienen sentido las operaciones que hacemos con los números; en concreto, carecen de sentido las siguientes expresiones:***

$$(+\infty)+(-\infty)\ ;\ 0.(+\infty)\ ;\ 0.(-\infty)\ ;\ \frac{+\infty}{+\infty}\ ;\ \frac{+\infty}{-\infty}\ ;\ \frac{-\infty}{+\infty}\ ;\ \frac{-\infty}{-\infty}$$

No obstante, ***convenimos*** que:

$$(+\infty).(+\infty)=(-\infty).(-\infty)=+\infty\ \ ;\ \ (+\infty).(-\infty)=(+\infty).(-\infty)=-\infty$$

También ***convenimos*** que, $\forall\ x\in\Re$, es:

$$x+(+\infty)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty\ ;\ x+(-\infty)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$x.(+\infty)=(+\infty).x=\begin{cases}+\infty \text{ si } x>0\\ -\infty \text{ si } x<0\end{cases}\ ;\ x.(-\infty)=(-\infty).x=\begin{cases}-\infty \text{ si } x>0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{cases}$$

$$x/+\infty=x/-\infty=0$$

1.3 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

- El ***valor absoluto*** del número real "x" es el número real no negativo que denotamos $|x|$, siendo $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$.

- Si "x" e "y" son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

$$|x|>0 \text{ si } x\neq 0\ \ ;\ \ |0|=0\ \ ;\ \ |x|<k\Rightarrow -k<x<k\ \ (\text{si } k>0)$$

$$|x.y|=|x|.|y|\ \ ;\ \ |x+y|\leq|x|+|y|\ \ ;\ \ |x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$$

1.4 INTERVALOS DE LA RECTA REAL

Siendo "a" y "b" números reales tales que $a<b$, se llaman ***intervalos de origen "a" y extremo "b"*** a los siguientes subconjuntos de $\Re$:

$$[a;b]=\{x\in\Re \ / \ a\le x\le b\}\equiv \text{intervalo "cerrado" } [a;b], \text{ incluye a "a" y a "b"}$$
$$(a;b)=\{x\in\Re \ / \ a< x< b\}\equiv \text{intervalo "abierto" } (a;b), \text{ excluye a "a" y a "b"}$$
$$[a;b)=\{x\in\Re \ / \ a\le x< b\}\equiv \text{intervalo "cerrado" por la izquierda y "abierto" por la derecha}$$
$$(a;b]=\{x\in\Re \ / \ a< x\le b\}\equiv \text{intervalo "abierto" por la izquierda y "cerrado" por la derecha}$$

De "a" también se dice que es el ***extremo inferior*** del intervalo, y de "b" se dice que es el ***extremo superior.*** Del número real positivo "$b-a$" se dice que es la ***amplitud*** del intervalo. ***Por ejemplo:***

$$[4;9]=\{x\in\Re \ / \ 4\le x\le 9\} \ ; \ (2;5)=\{x\in\Re \ / \ 2< x< 5\}$$
$$[-4;2)=\{x\in\Re \ / \ -4\le x< 2\} \ ; \ (6;8]=\{x\in\Re \ / \ 6< x\le 8\}$$

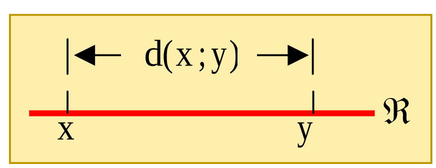
Los cuatro intervalos anteriores tienen amplitud finita, pues el valor absoluto de "x" no se hace infinitamente grande en ningún punto "x" del intervalo; para expresar esto de modo rápido se dice que son ***acotados***. Se dice que un intervalo es ***compacto*** si es cerrado y acotado, como los intervalos $[-2;3]$, $[1;8]$, $[6;9]$.

Los cuatro intervalos siguientes tienen amplitud infinita; también se dice que son ***no acotados***, para así indicar que el valor absoluto de "x" puede hacerse infinitamente grande en puntos "x" del intervalo:

$$[a;+\infty)=\{x\in\Re \ / \ x\ge a\} \ ; \ (a;+\infty)=\{x\in\Re \ / \ x> a\}$$
$$(-\infty;a]=\{x\in\Re \ / \ x\le a\} \ ; \ (-\infty;a)=\{x\in\Re \ / \ x< a\}$$

1.5 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE $\Re$

Para evaluar la "***proximidad***" entre los puntos "x" e "y" usaremos el número real no negativo llamado ***distancia*** entre "x" e "y", que se denota $d(x;y)$, siendo $d(x;y)=|y-x|$. Así, dos puntos "x" e "y" son muy (poco) próximos si $|y-x|$ es muy (poco) próximo a cero.



1.6 ENTORNO DE UN PUNTO DE $\Re$

- Si $c\in\Re$ y "r" es un número real positivo, llamamos ***entorno de centro en "c" y radio "r"*** (se denota $B_r(c)$) al subconjunto de $\Re$ que forman los números reales (puntos) cuya distancia al punto "c" es inferior a "r"; es decir:

$$B_r(c)=\{x\in\Re \ / \ d(c;x)<r\}=\{x\in\Re \ / \ |x-c|<r\}=$$
$$=\{x\in\Re \ / \ -r<x-c<r\}=\{x\in\Re \ / \ c-r<x<c+r\}=(c-r;c+r)$$

Por ejemplo, el entorno de centro en "5" y radio $0'02$ es el conjunto que forman los números reales (puntos) "x" tales que $|x-5|<0'02$, que son los del intervalo $(5-0'02;5+0'02)\equiv(4'98;5'02)$. Del intervalo $(4'98;5]$ se dice que es el ***semientorno izquierdo*** de "5" y radio $0'02$, y del intervalo $[5;5'02)$ se dice que es el ***semientorno derecho*** de "5" y radio $0'02$.

- Si del entorno $B_r(c)$ del punto "c" eliminamos el propio punto "c" obtenemos el ***entorno reducido de centro en "c" y radio "r",*** que se denota $B_r^*(c)$; es decir, $B_r^*(c)=\{x\in\Re\ /\ 0<|x-c|<r\}=(c-r;c)\cup(c;c+r)$.

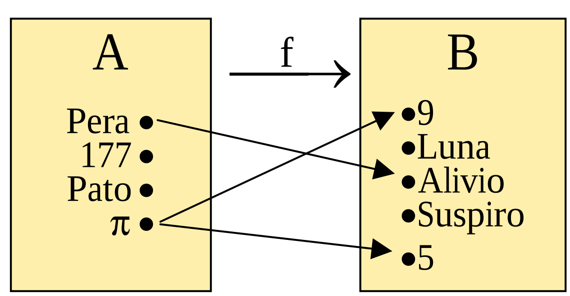
  Por ejemplo, el entorno reducido de centro en "5" y radio $0'02$ es el conjunto que forman los reales "x" tales que $0<|x-5|<0'02$, o sea, los "x" tales que $x\in(4'98;5)\cup(5;5'02)$. Del intervalo $(4'98;5)$ se dice que es el ***semientorno reducido izquierdo*** de "5" y radio $0'02$; del intervalo $(5;5'02)$ se dice que es el ***semientorno reducido derecho*** de "5" y radio $0'02$.

- De todo intervalo de la forma $(a;+\infty)$ se dice que es un ***entorno de*** $+\infty$ y de todo intervalo de la forma $(-\infty;b)$ se dice que es un ***entorno de*** $-\infty$**.** En estos dos casos la palabra "reducido" ni quita ni pone nada a la palabra "entorno", pues como $+\infty$ no es un número, hablar de un entorno de $+\infty$ es igual que hablar de un entorno reducido de $+\infty$, y lo mismo con $-\infty$.

1.7 CORRESPONDENCIA ENTRE CONJUNTOS

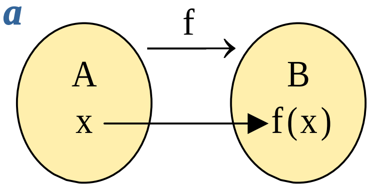
- ***Siendo "A" y "B" conjuntos cualesquiera, se llama "correspondencia" de "A" en "B" a todo criterio o ley que asocie elementos de "A" con elementos de "B";*** si el nombre del criterio es "f", para expresar que "f" es una correspondencia de "A" en "B" escribimos $f:A\to B$. De "A" se dice que es el ***conjunto inicial*** de "f" y de "B" se dice que es el ***conjunto final*** de "f".

  En la definición de "correspondencia" no se impone ninguna restricción o traba al criterio "f" que asocia elementos de "A" con elementos "B"; por tanto, queda definida una "correspondencia" de "A" en "B" en el mismo instante en que se establece un criterio que asocie elementos de "A" con elementos "B", aunque dicho criterio sea muy absurdo o chiripitiflaútico, como el adjunto.



  Observa: en el conjunto inicial "A" puede haber elementos a los que "f" no les asocia ningún elemento del conjunto final "B", y también puede ocurrir que "f" asocie varios elementos de "B" a un mismo elemento de "A".

- ***Si x $\in$ A, para referirnos al elemento del conjunto final "B" que la correspondencia o ley "f" asocia a "x", usaremos la notación "f(x)", que los profesionales leen efe de x, pero tú debes leer imagen de "x" según "f".***



¡Que quede claro!

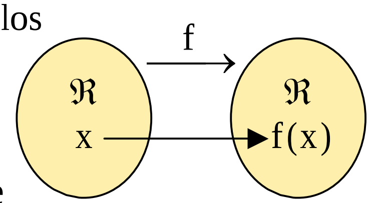
Tras la notación "f(x)" hay 5 protagonistas

1) Un conjunto "A", que es protagonista "invisible", pues "A" no aparece por ningún lado en la notación "f(x)" ..... ¡pero está!
2) Un conjunto "B", también invisible.
3) Una ley "f" que asocia elementos de "A" con elementos de "B"; es protagonista "visible", pues en la notación "f(x)" hay una "f".
4) El elemento "x" del conjunto "A"; también visible, pues en la notación "f(x)" hay una "x".
5) El quinto protagonista es un elemento del conjunto "B", pero no uno cualquiera, el quinto protagonista es el elemento de "B" que la ley "f" asocia a "x", y para denotarlo nadie ha inventado una notación más clara y concisa que "f(x)", introducida por Euler en el año 1734.

Si "f(x)" lo lees imagen de "x" según "f" te será más fácil tener a la vez en el cerebro esos cinco protagonistas

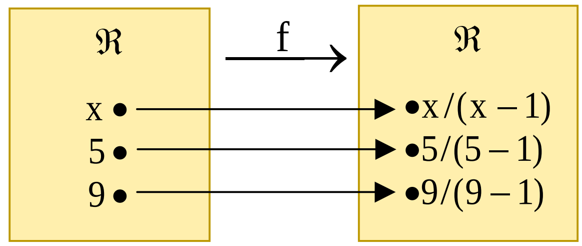
1.8 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

El concepto de ***función*** generó mucha polémica entre los sabios de los siglos XVIII y XIX, y hubo que esperar hasta que Dirichlet zanjó el asunto en el año 1854, llamando ***función real de variable real*** a toda correspondencia $f:\Re\ \alpha\ \Re$; o sea, una función real de variable real es una ley o criterio "f" que asocia números reales con números reales.



Para expresar que el número real $x \in \Re_{inicial}$ puede ser el que nos dé la gana, se dice que "x" es una ***variable independiente;*** y para expresar que el número real $f(x) \in \Re_{final}$ que "f" asocia a "x" escapa por completo a nuestro control (pues es la ley "f" quien decide el valor de "f(x)"), se dice que el número real que denotamos "f(x)" es una ***variable dependiente***.

Se dice que $f:\Re\ \alpha\ \Re$ es una ***función real*** porque el conjunto final de "f" es el de los reales, y se dice que "f" es ***de variable real*** porque el conjunto inicial de "f" es el de los reales. Siguiendo el criterio de Dirichlet, si el conjunto inicial de "f" fuera el de los números racionales y el conjunto final fuera el de los números complejos, diríamos que "f" es una función compleja de variable racional.



Como sólo trabajaremos con funciones reales de variable real, por razones de economía, cuando queramos referirnos a una de ellas (llamada "f") diremos simplemente *sea la función "f"*. ***Por ejemplo,*** al hablar de la función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x)=x/(x-1)$ se está hablando del criterio o ley "f" que al número real "x" le asocia el número real $x/(x-1)$; así, al número real 5 la ley "f" le asocia el número real $5/(5-1)$, y al número real 9 le asocia el número real $9/(9-1)$ ..... y para expresarlo escribimos $f(5)=5/(5-1)$ y $f(9)=9/(9-1)$.

Entenderás la importancia de las funciones reales de variable real si piensas que "x" expresa la cantidad de capital que utiliza una empresa y "f(x)" expresa su producción de acero, o que "x" expresa el tiempo transcurrido a partir de un cierto instante y "f(x)" expresa la velocidad de un móvil en el instante "x"

1.9 OPERACIONES CON FUNCIONES

Con las funciones podemos hacer las mismas operaciones que con los números reales; así, siendo $u:\Re\ \alpha\ \Re$ y $v:\Re\ \alpha\ \Re$ dos funciones, se tiene que:

1) $f=u+v$ es la función tal que $f(x)=u(x)+v(x)$
2) $f=u.v$ es la función tal que $f(x)=u(x).v(x)$
3) $f=u/v$ es la función tal que $f(x)=u(x)/v(x)$
4) $f=u^v$ es la función tal que $f(x)=(u(x))^{v(x)}$
5) $f=\sqrt[k]{u}$ es la función tal que $f(x)=\sqrt[k]{u(x)}$, $k\equiv$ constante
6) $f=\log_k u$ es la función tal que $f(x)=\log_k u(x)$, $k>0$, $k\neq 1$

Por ejemplo, si $u:\Re\ \alpha\ \Re$ y $v:\Re\ \alpha\ \Re$ son tales que $u(x)=x^2$ y $v(x)=1/(1+x)$:

1) $f=u+v$ es la función tal que $f(x)=x^2+(1/(1+x))$
2) $f=u.v$ es la función tal que $f(x)=x^2/(1+x)$
3) $f=u/v$ es la función tal que $f(x)=x^2.(1+x)$
4) $f=u^v$ es la función tal que $f(x)=(x^2)^{1/(1+x)}$
5) $f=\sqrt[7]{u}$ es la función tal que $f(x)=\sqrt[7]{x^2}$
6) $f=\log_5 u$ es la función tal que $f(x)=\log_5 x^2$

1.10 LA REGLA DE RUFFINI

Miles de veces nos encontraremos ante el problema de resolver una ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x)$ un polinomio; o sea, deberemos determinar los valores de "x" que cumplen la condición $f(x) = 0$. De dichos valores de "x" se dice que son las "soluciones" o "raíces" de la ecuación $f(x) = 0$.

1) Si el polinomio es de grado 1 (o sea, $f(x) = a.x + b$, donde "a" y "b" son constantes y a ≠ 0), la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución, y su cálculo es fácil:

$$a.x + b = 0 \Rightarrow a.x = -b \Rightarrow x = -b/a$$

2) Si el polinomio es de grado 2 (o sea, $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, donde "a", "b" y "c" son constantes y a ≠ 0), la ecuación $f(x) = 0$ tiene 2 soluciones o raíces, y las calcularemos usando la "formulita" hiperfamosa que todos conocemos:

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Por ejemplo:

$$2.x^2 - 5.x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2.3}}{2.2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

- ***¡Ojo!,*** si el coeficiente de "x" (o sea, "b") es un número par (por ejemplo, $b = 2.k$), hay otra "formulita" más cómoda y rápida:

$$a.x^2 + 2.k.x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-(2.k) \pm \sqrt{(2.k)^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - a.c}}{a}$$

Por ejemplo:

✓ $$1.x^2 + 6.x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 1.5}}{1} = -3 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{¡qué suerte!, el coeficiente de "x" es par } (2.k = 6 \Rightarrow k = 3) \Rightarrow \Rightarrow \text{ usamos la "formulita" cómoda}}$

✓ $$1.x^2 - 4.x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1.13}}{1} = 2 \pm \sqrt{-9} =$$

$\boxed{\text{¡qué suerte!, el coeficiente de "x" es par } (2.k = -4 \Rightarrow k = -2) \Rightarrow \Rightarrow \text{ usamos la "formulita" cómoda}}$

$$= 2 \pm \sqrt{(-1).9} = 2 \pm \sqrt{-1}.\sqrt{9} = 2 \pm 3.\sqrt{-1} = 2 \pm 3.i$$

$\boxed{\text{el número } \sqrt{-1} \text{ no es "real", se llama "unidad imaginaria" y se denota "i"}}$

- Si el "término independiente" de la ecuación es cero (o sea, $c = 0$) no necesitaremos ninguna formulita, y podremos apostar la vida a que una de las soluciones de la ecuación es $x = 0$.

$$a.x^2 + b.x = 0 \Rightarrow x.(a.x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a.x + b = 0 \Rightarrow x = -b/a \end{cases}$$

para que un producto de dos números sea 0 basta que alguno de ellos sea 0

En general, si "f" es un polinomio de grado "n" superior a 2, el cálculo de las "n" soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ es un petardo, pues no hay ninguna "formulita" que resuelva la papeleta. No obstante, en todos los casos que encontremos (normalmente $n = 3$ ó $n = 4$), el polinomio estará "preparado" para que las soluciones sean enteras .... y Ruffini nos permitirá determinarlas.

FONEMATO 1.10.1 (RAÍCES ENTERAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$

SOLUCIÓN

Debemos determinar los valores de "x" que satisfacen la ecuación (condición de igualdad) $f(x) = 0$. Como f(x) es un polinomio de grado 5, la ecuación en cuestión tiene 5 soluciones, pudiendo estar "repetidas" algunas de ellas.

¡Qué suerte!, como el término independiente de la ecuación es 0, apostamos un brazo a que $x = 0$ es solución:

$$2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = 0 \Rightarrow x.(2.x^4 - 10.x^2 + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2.x^4 - 10.x^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $2.x^4 - 10.x^2 + 8 = 0$, y de nuevo tenemos suerte, pues ***como la suma*** $(2 - 10 + 8)$ ***de los coeficientes es 0, apostamos tranquilamente la vida a que $x = 1$ es una de las soluciones***, lo que garantiza que el polinomio $g(x) = 2.x^4 - 10.x^2 + 8$ es divisible por $x - 1$ (la Regla de Ruffini permite calcular los coeficientes del polinomio h(x) obtenido como cociente de dicha división):

coeficientes de g(x)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -10 & 0 & 8 \\ x = 1 & & 2 & 2 & -8 & -8 \\ \hline & 2 & 2 & -8 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

coeficientes de h(x) = g(x)/(x – 1) resto

Así, es $h(x) = g(x)/(x-1) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8$; o sea:

$$g(x) = (x-1).h(x) = (x-1).(2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8)$$

Por tanto:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x-1).(2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$; y como la suma $(2 + 2 - 8 - 8)$ de sus coeficientes no es 0, podemos apostar una pierna a que $x = 1$ no es una de sus soluciones. ***Si la ecuación tiene raíces enteras deben ser divisores del término independiente*** -8; como los divisores de -8 son $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y -8, debemos armarnos de paciencia e ir probando con todos (excepto el 1, pues sabemos que $x = 1$ no es solución de $2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$), rezando para que alguno de ellos sea solución.

Es $h(2) = 2.2^3 + 2.2^2 - 8.2 - 8 = 0$, lo que garantiza que $x = 2$ es solución de $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$ y que el polinomio $2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8$ es divisible por $x - 2$; la Regla de Ruffini permite calcular los coeficientes del polinomio t(x) que se obtiene como cociente de dicha división:

coeficientes de h(x)

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 2 & -8 & -8 \\ x = 2 & & 4 & 12 & 8 \\ \hline & 2 & 6 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

coeficientes de $t(x) = h(x)/(x-2)$ resto

Así, es $t(x) = h(x)/(x-2) = 2.x^2 + 6.x + 4$; o sea:

$$h(x) = (x-2).t(x) = (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4)$$

Por tanto:

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2.x^2 + 6.x + 4 = 0 \end{cases}$$

y las soluciones de la ecuación $2.x^2 + 6.x + 4 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 2.4}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

En definitiva, siendo $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$ y $x = -2$; el que así sean las cosas nos permite escribir la ***descomposición factorial*** del polinomio f(x):

$$f(x) = 2.(x-0).(x-1).(x-2).(x+1).(x+2)$$

el "2" es el coeficiente del término de mayor grado de f(x)

Raíces múltiples

Si el polinomio "f" es tal que $f(x)=(x-a)^k.p(x)$, siendo el polinomio "p" tal que $p(a)\neq 0$, se dice que "a" es una ***raíz múltiple de orden "k"*** de la ecuación $f(x)=0$.

Por ejemplo:

$$f(x)=x^6-9.x^4=0 \Rightarrow x^4.(x^2-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^4=0 \Rightarrow x=0 \text{ (cuádruple)} \\ x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

Por tanto, las 6 raíces de la ecuación $f(x)=x^6-9.x^4=0$ son:

$$x=0 \text{ (cuádruple) } ; \; x=3 \text{ (simple) } ; \; x=-3 \text{ (simple)}$$

La descomposición factorial es $f(x)=x^6-9.x^4=x^4.(x-3).(x+3)$.

FONEMATO 1.10.2 (RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=12.x^3-4.x^2-3.x+1$

SOLUCIÓN

La ecuación $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ carece de raíces enteras, pues ningún divisor del término independiente "1" es solución. ***Si la ecuación admite raíces fraccionarias de la forma "m/n" (siendo "m" y "n" números enteros y "n" distinto de 0 y de 1), entonces "m" es divisor del término independiente*** (el número 1 en nuestro caso) ***y "n" es divisor del coeficiente del término de mayor grado*** (el número 12 en nuestro caso); por tanto, las únicas raíces fraccionarias que puede tener la ecuación dada son:

$$\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{6} ; -\frac{1}{6} ; \frac{1}{12} ; -\frac{1}{12}$$

Ahora hay que armarse de paciencia e ir probando una por una, rezando para que alguna sea solución de $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ ...... y tenemos suerte, pues $x=1/2$ es solución, ya que $12.(1/2)^3-4.(1/2)^2-3.(1/2)+1=0$.

Mediante Ruffini obtenemos $\dfrac{12.x^3-4.x^2-3.x+1}{x-(1/2)}=12.x^2+2.x-2$

Como las soluciones de $12.x^2+2.x-2=0$ son $x=1/3$ y $x=-1/2$, es:

$$12.x^3-4.x^2-3.x+1=12.(x-\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{3}).(x+\frac{1}{2})$$

FONEMATO 1.10.3 (RAÍCES IMAGINARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$ en los siguientes casos:

$$1)\; f(x)=x^6+64 \quad ; \quad 2)\; f(x)=x^6-64$$

SOLUCIÓN

1) Ninguna de las 6 raíces de la ecuación es real: $x^6 + 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-64} \notin \Re$

- Para calcular $\sqrt[6]{-64}$ consideramos al número -64 como elemento del conjunto de los números imaginarios (de la forma $a + b.i$, siendo $i = \sqrt{-1}$); así, -64 es el número imaginario $-64 + 0.i$, cuyo módulo es 64 (el módulo de $a + b.i$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$) y cuyo argumento es π (el argumento de $a + b.i$ es arc tg $\frac{b}{a}$).

> Un número imaginario no nulo con módulo "r" y argumento "θ" posee "n" raíces n-ésimas distintas, que tienen como módulo la raíz n-ésima de "r", y sus respectivos argumentos son:
>
> $$\frac{\theta}{n} \;;\; \frac{\theta}{n} + 2.\frac{\pi}{n} \;;\; \frac{\theta}{n} + 4.\frac{\pi}{n} \;;\; \frac{\theta}{n} + 6.\frac{\pi}{n} \;;\; .... \;;\; \frac{\theta}{n} + 2(n-1).\frac{\pi}{n}$$

En nuestro caso es $n = 6$; por tanto, el número -64 (para el que $r = 64$ y $\theta = \pi$) tiene 6 raíces sextas distintas, que tienen módulo 2 (la raíz sexta de 64), y sus respectivos argumentos son:

$$\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{\pi}{6} + 2.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{\pi}{6} + 4.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{\pi}{6} + 6.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{\pi}{6} + 8.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{\pi}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $5.\frac{\pi}{6}$, $7.\frac{\pi}{6}$ $3.\frac{\pi}{2}$ y $11.\frac{\pi}{6}$; así, teniendo en cuenta que si un número imaginario "x" tiene módulo "r" y argumento "θ" es $x = r.(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$, las 6 raíces sextas de -64 (o sea, las 6 soluciones de la ecuación $x^6 + 64 = 0$) son:

$$x = 2.(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{6}) = 2.(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i) = \sqrt{3} + 1.i$$
$$x = 2.(\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 2.(0 + 1.i) = 0 + 2.i$$
$$x = 2.(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}) = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i) = -\sqrt{3} + 1.i$$
$$x = 2.(\cos\frac{7\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}) = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i) = -\sqrt{3} - 1.i$$
$$x = 2.(\cos\frac{3\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}) = 2.(0 - 1.i) = 0 - 2.i$$
$$x = 2.(\cos\frac{11\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}) = 2.(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i) = \sqrt{3} - 1.i$$

En definitiva, $x^6 + 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-64} = \left\{\begin{array}{c} \sqrt{3} \pm 1.i \\ 0 \pm 2.i \\ -\sqrt{3} \pm 1.i \end{array}\right\}$.

2) Si $x^6 - 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{64}$, y para calcular $\sqrt[6]{64}$ consideramos $64 = 64 + 0.i$, cuyo módulo es 64 y cuyo argumento es 0. Las seis raíces sextas de 64 tienen módulo 2 (la raíz sexta de 64), y sus respectivos argumentos son:

$$\frac{0}{6} \;;\; \frac{0}{6} + 2.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{0}{6} + 4.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{0}{6} + 6.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{0}{6} + 8.\frac{\pi}{6} \;;\; \frac{0}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea: $0,\ \frac{\pi}{3},\ 2.\frac{\pi}{3},\ \pi,\ 4.\frac{\pi}{3}$ y $5.\frac{\pi}{3}$; por tanto, las seis raíces sextas de 64 son:

$$x = 2.(\cos 0 + i.\text{sen } 0) = 2.(1 + 0.i) = 2$$

$$x = 2.(\cos \frac{\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = 1 + \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \frac{2\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{2\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = -1 + \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \pi + i.\text{sen } \pi) = 2.(-1 + 0.i) = -2$$

$$x = 2.(\cos \frac{4\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{4\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = -1 - \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \frac{5\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{5\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = 1 - \sqrt{3}.i$$

1.11 LAS REGLAS SAGRADAS DEL CÁLCULO

Hay tres operaciones muy peligrosas que causan muchos disgustos a los principiantes; debes grabarlas en tu cerebro de inmediato.

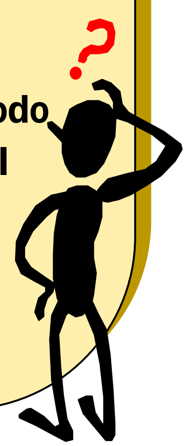
LAS REGLAS SAGRADAS DEL CÁLCULO

peligro de muerte

1) ***Prohibido dividir por cero; es un gran pardillo todo el que diga que el cociente 7/0 es infinito, pues este cociente de números no tiene sentido matemático.***
2) ***El logaritmo de un número no positivo (≤0) no es un número real.***
3) ***Toda raíz de índice par de un número negativo no es un número real.***

SE HACE SABER

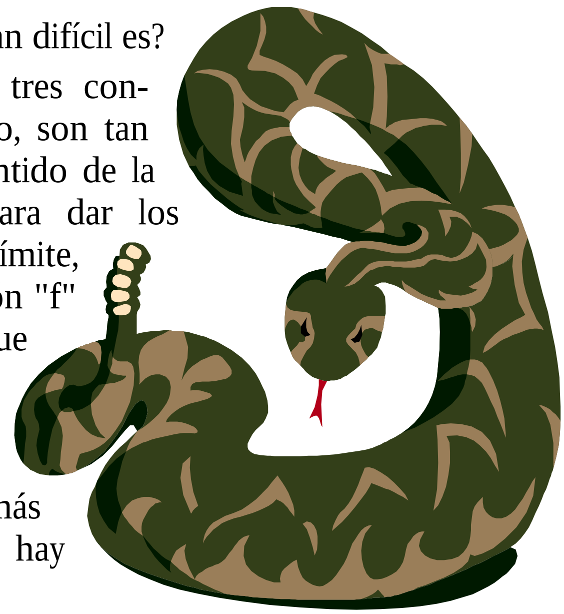
Será inmisericordemente suspendido ipso facto todo violador de una Regla Sagrada; caerán sobre él toneladas de desprestigio y deshonor, y el estigma de tan ignominioso acto apestará la honra de su linaje por los siglos de los siglos.



1.12 DE LAS FUNCIONES Y LAS SERPIENTES

Es el momento de avisarte sobre lo que se nos viene encima ..... utilizando brocha gorda y no pincel, cabe decir que en las próximas quinientas páginas vamos a ocuparnos de poco más que los siguientes tres conceptos:

1) ***Límite*** de una función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ en un punto "a"
2) ***Continuidad*** de una función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ en un punto "a"
3) ***Derivabilidad*** de una función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ en un punto "a"



Pregunta: quinientas páginas son muchas, ¿tan difícil es?

Respuesta: el problema no es que estos tres conceptos sean difíciles de entender, al contrario, son tan tontorrones que "entran" por los ojos, el sentido de la vista es la única herramienta necesaria para dar los primeros pasos por el proceloso mundo del límite, la continuidad y la derivabilidad de una función "f" en un punto "a". El problema es que, en lo que a estos conceptos se refiere, y debido a las Reglas Sagradas del Cálculo, las funcio-nes son como las serpientes: hay gran variedad de "familias", y sobre todo, y eso es lo más importante, las hay inofensivas y también las hay que pueden ser muy peligrosas.

Para que el Cálculo Infinitesimal (ya sea Cálculo Dife-rencial o Cálculo Integral) te haga sufrir poco ***debes aprender a "catalogar" la peligrosidad de las diversas "familias" de funciones*** (como haría con las serpientes toda persona sensata que viviera entre infinidad de tan inquietantes animales), ***pues así podrás valorar en unos pocos segundos qué peligros te acecharán al trabajar*** (límite, continuidad, derivabilidad) ***con una función "f" en un punto "a".***

A veces las serpientes de familias extremadamente peligrosas pueden ser inofensivas: ¿quién no ha observado a pocos centímetros de su nariz los movimientos de una temible serpiente de cascabel que para su desgracia y mayor tranquilidad del observador ha sido introducida en una urna de cristal de dos centímetros de espesor?, ¿pero qué pasa con la tranquilidad del observador si la urna cae al suelo y la serpiente de cascabel queda en libertad y de mala leche por el golpe recibido?

Con las funciones pasa un poco lo mismo, el trabajo (límite, continuidad, derivabilidad) con una función "f" puede ser inofensivo (o sea, fácil) en el punto "5" y ser extremadamente peligroso (o sea, difícil) en el punto "7". En definitiva, ***los peligros que te acecharán al trabajar*** (límite, continuidad, derivabilidad) ***con una función "f" en un punto "a" dependen de la "familia" a la que pertenece "f" y del punto "a" en que se desarrolle el trabajo*** (límite, continuidad, derivabilidad) ***con "f".***

1.13 CATÁLOGO DE PELIGROS

El siguiente catálogo no es exhaustivo, quedan fuera de él algunas situaciones que de momento no comentamos para no complicar nuestros primeros pasos por el Cálculo Diferencial.

1) Las funciones "racionales enteras"

- ***Son de la forma $f(x) =$ polinomio, y son inofensivas sea cual sea el punto "c" en que desarrolle nuestro trabajo con ellas.*** ***Por ejemplo,*** son racionales enteras las siguientes funciones:

$$f:\Re \alpha \ \Re \ / \ f(x) = 3.x^7 + x^2 - 3$$
$$g:\Re \alpha \ \Re \ / \ g(x) = x^2 + x - 1$$
$$h:\Re \alpha \ \Re \ / \ h(x) = -x + 2$$

2) Las funciones "racionales fraccionarias"

- ***Son de la forma $f(x) =$ cociente de polinomios; son inofensivas si el punto "c" en que desarrolla el trabajo con ellas no anula al denominador; por el contrario, son peligrosas si en "c" se anula el denominador, pues en ése punto se viola la regla que prohibe dividir por cero.***

Por ejemplo, son racionales fraccionarias las siguientes funciones:

$$f:\Re \alpha \ \Re \ / \ f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$
$$g:\Re \alpha \ \Re \ / \ g(x) = \frac{x}{x^2 - 3.x + 2}$$
$$h:\Re \alpha \ \Re \ / \ h(x) = \frac{1-x}{4+x^6}$$
$$t:\Re \alpha \ \Re \ / \ t(x) = \frac{x}{2.x^2 - 1 - x^{369696}}$$

El trabajo con "f" sólo es peligroso en el punto $x = 2$, pues el denominador $x - 2$ de $f(x)$ sólo se anula en dicho punto.

El trabajo con "g" sólo es peligroso en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, pues el denominador $x^2 - 3.x + 2$ de $g(x)$ sólo se anula en dichos puntos.

El trabajo con "h" es inofensivo en todo punto, pues el denominador de $h(x)$ no se anula para ningún valor real de "x" $(4 + x^6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-4} \not\subset \Re)$.

Hay 369696 valores de "x" (unos reales, otros imaginarios) que anulan el denominador de $t(x)$, y su cálculo es asunto infumable incluso para los japoneses. No obstante, es muy fácil analizar lo que sucede en cada punto concreto. Por ejemplo, el trabajo con "t" es inofensivo en el punto $x = 7$, pues en dicho punto no se anula el denominador de $t(x)$; sin embargo, es peligroso en $x = 1$, ya que el denominador de $t(x)$ se anula si $x = 1$, pues $2.1^2 - 1 - 1^{369696} = 0$

3) Las raíces de índice impar

- ***Son de la forma $f(x) = \sqrt[impar]{u(x)}$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas o peligrosas en el punto "c" según que la función "u" sea inofensiva o peligrosa en dicho punto.***

  Por ejemplo, sean las funciones:

  $$f:\Re \to \Re \ / \ f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$
  $$g:\Re \to \Re \ / \ g(x) = \sqrt[5]{x/(9-x^2)}$$
  $$h:\Re \to \Re \ / \ h(x) = \sqrt[7]{x/(9+x^2)}$$

  El trabajo con "f" es inofensivo en todo punto, pues el polinomio $u(x) = x-1$ es inofensivo en todo punto.

  El trabajo con "g" sólo es peligroso en los puntos $x = 3$ y $x = -3$, pues el cociente de polinomios $v(x) = x/(9-x^2)$ sólo es peligroso en los puntos $x = 3$ y $x = -3$. en que se anula su denominador.

  El trabajo con "h" es inofensivo en todo punto, pues el cociente de polinomios $w(x) = x/(9+x^2)$ es inofensivo en todo punto, ya que su denominador $9+x^2$ no se anula para ningún valor real de "x" $(9+x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \notin \Re)$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x) = \sqrt[impar]{u(x)}$ en el punto "c" sea inofensivo en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo que se refiere al asunto de la "derivabilidad".*** Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

4) Las raíces de índice par

- ***Son de la forma $f(x) = \sqrt[par]{u(x)}$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas en el punto "c" si la función "u" es inofensiva en dicho punto y además es u(c) >0; son peligrosas en el punto "c" si la función "u" es peligrosa en dicho punto o si u(c)<0,*** pues si $u(c) < 0$ se viola la segunda Regla Sagrada:

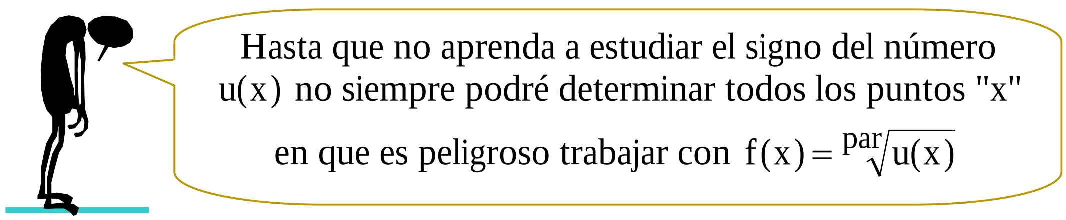
  $$\sqrt[par]{\text{número negativo}} \notin \Re$$

  Si la función "u" es inofensiva en el punto "c" y $u(c) = 0$, lo más frecuente es que haya peligro al trabajar en dicho punto, aunque puede no haberlo.

Observa: el signo del número real $u(x)$ tiene protagonismo estelar a la hora de evaluar la peligrosidad que en cada punto "x" tiene el trabajo ("límite" y "continuidad") con la función $f(x)=\sqrt[par]{u(x)}$. Si la expresión matemática de $u(x)$ es tontorrona será muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo es peligroso; a medida que se complique la expresión matemática de $u(x)$ se complicará la detección de los puntos peligrosos.

Por ejemplo, como el polinomio $u(x)=x-1$ es inofensivo en todo punto, el trabajo con $f(x)=\sqrt{x-1}$ es inofensivo en todo punto "x" tal que $u(x)>0$ $(\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1)$ y es peligroso en los puntos "x" tales que $u(x)<0$ $(\Rightarrow x-1<0\Rightarrow x<1)$. Como $u(1)=0$, lo más probable es que haya peligro en el punto $x=1$, aunque podría no haberlo. El que la expresión matemática de $u(x)$ sea tontorrona hace que resulte muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo con $f(x)=\sqrt[par]{u(x)}$ es peligroso.

Por ejemplo, como el cociente de polinomios $v(x)=x/(x^2-4)$ es peligroso sólo en los puntos $x=2$ y $x=-2$ en que se anula su denominador, el trabajo con $g(x)=\sqrt[4]{x/(x^2-4)}$ es peligroso en dichos puntos y en todos los puntos "x" tales que $v(x)\leq 0$. Pero la expresión matemática de $v(x)=x/(x^2-4)$ es lo bastante complicada como para que, con lo poco que aún sabemos, nos resulte imposible determinar todos los puntos "x" que satisfacen la condición $v(x)=x/(x^2-4)\leq 0$. No obstante, es muy fácil analizar qué sucede en cada punto concreto; por ejemplo, el trabajo con $g(x)=\sqrt[4]{x/(x^2-4)}$ es inofensivo en el punto $x=5$, pues en dicho punto es $v(5)=5/(5^2-4)>0$, sin embargo, el trabajo es peligroso en el punto $x=1$, pues $v(1)=1/(1^2-4)<0$.



Por ejemplo, como el cociente de polinomios $w(x)=(x-5)/(x^6+4)$ es inofensivo en todo punto (pues su denominador no se anula para ningún valor real de "x"), el trabajo con $h(x)=\sqrt[6]{(x-5)/(x^6+4)}$ es inofensivo en los puntos "x" tales que $w(x)>0$. La expresión matemática de $w(x)=(x-5)/(x^6+4)$ es lo bastante tonta como para que el estudio del signo del número real $(x-5)/(x^6+4)$ sea fácil: para todo "x" es $x^6+4>0$, por lo que el signo de $w(x)=(x-5)/(x^6+4)$ es el mismo que tiene su numerador $x-5$, que es positivo sólo si $x>5$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x) = \sqrt[par]{u(x)}$ en el punto "c" sea inofensivo en lo referido a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo referido a la "derivabilidad".*** Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

5) Las funciones logarítmicas

- ***Son de la forma $f(x) = \log_k u(x)$, $k > 0$, $k \neq 1$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas en el punto "c" si la función "u" es inofensiva en dicho punto y además es u(c) >0; son peligrosas en el punto "c" si la función "u" es peligrosa en "c" o si u(c) ≤0,*** pues si $u(c) \leq 0$, en "c" se viola la tercera Regla Sagrada:

$$\log_k(\text{número no positivo}) \notin \Re$$

> ***Observa***: el signo del número real $u(x)$ tiene protagonismo estelar a la hora de evaluar la peligrosidad que en cada punto "x" tiene el trabajo ("límite" y "continuidad") con la función $f(x) = \log_k u(x)$. Si la expresión matemática de $u(x)$ es tontorrona será muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo es peligroso; a medida que se complique la expresión matemática de $u(x)$ se complicará la detección de los puntos peligrosos.

Por ejemplo, como el polinomio $u(x) = x + 3$ es inofensivo en todo punto, el trabajo con $f(x) = \log_5 (x+3)$ es inofensivo en todos los puntos "x" tales que $u(x) > 0$ $(\Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3)$, y es peligroso en los puntos "x" tales que $u(x) \leq 0$ $(\Rightarrow x + 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3)$. El que la expresión matemática de $u(x)$ sea tontorrona hace que sea muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo con $f(x) = \log_k u(x)$ es peligroso.

Por ejemplo, como el cociente de polinomios $v(x) = x/(x^2 - 4)$ es peligroso sólo en los puntos $x = 2$ y $x = -2$ en que se anula su denominador, el trabajo con $g(x) = \log_9 x/(x^2 - 4)$ es peligroso en dichos puntos y en todo punto "x" tal que $v(x) \leq 0$. Pero la expresión matemática de $v(x) = x/(x^2 - 4)$ es lo bastante complicada como para que, con lo que sabemos, nos resulte imposible determinar todos los puntos "x" que satisfacen la condición $v(x) = x/(x^2 - 4) \leq 0$. No obstante, es muy fácil analizar lo que sucede en cada punto concreto; así, por ejemplo, el trabajo con $g(x) = \log_9 x/(x^2 - 4)$ es inofensivo en el punto $x = 5$, pues en dicho punto es $v(5) = 5/(5^2 - 4) > 0$; sin embargo, es peligroso en $x = 1$, pues $v(1) = 1/(1^2 - 4) < 0$.

Hasta que no aprenda a estudiar el signo de $u(x)$ no siempre podré determinar todos los puntos "x" en que es peligroso trabajar con $f(x)=\log_k u(x)$

Por ejemplo, como el cociente de polinomios $w(x)=(5-x)/(x^2+4)$ es inofensivo en todo punto (pues su denominador no se anula en ningún punto), el trabajo con $h(x)=\text{Ln}\,(5-x)/(x^2+4)$ sólo es inofensivo en los puntos "x" tales que $w(x)>0$. La expresión matemática de $w(x)=(5-x)/(x^2+4)$ es lo bastante tonta como para que el estudio del signo del número real $(5-x)/(x^2+4)$ sea fácil: para todo real de "x" es $x^2+4>0$; por tanto, el signo de $w(x)=(5-x)/(x^2+4)$ es el que tiene su numerador $5-x$, que es positivo sólo si $x<5$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x)=\log_k u(x)$ en el punto "c" sea inofensivo en lo referido a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo referido a la "derivabilidad".*** No hay un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

LOS LOGARITMOS

- Se dice que el número real "a" es el logaritmo en base "k" $(k>0,\ k\neq 1)$ del número real positivo "b" si $k^a=b$; o sea: $\log_k b=a \Leftrightarrow k^a=b$
- Se dice que el logaritmo es ***decimal*** si la base "k" es el número 10; si la base es el número irracional "e" $(e\cong 2'7182818)$, se dice que el logaritmo es ***neperiano*** (se denota "Ln", o sea: $\text{Ln}\ b=a \Leftrightarrow e^a=b$).
- ***Propiedades:***

$$\log_k 1=0\ \ ;\ \ \log_k k=1\ \ ;\ \ \log_k k^c=c\ \ ;\ \ \log_k b^c=c.\log_k b$$

$$\log_k(m.n)=(\log_k m)+(\log_k n)\ \ ;\ \ \log_k(m/n)=(\log_k m)-(\log_k n)$$

$$\text{Cambio de base: } \log_{k_1} m=\frac{\log_{k_2} m}{\log_{k_2} k_1}$$

$$\log_k 0^+=\begin{cases}+\infty & \text{si } 0<k<1\\ -\infty & \text{si } k>1\end{cases}$$

Al escribir 0^+ nos referimos a un número muy próximo a cero <u>pero positivo</u>; o sea, si un número positivo es enormemente próximo a 0, su logaritmo es bestialmente positivo si la base "k" es menor que 1, y bestialmente negativo si "k" es mayor que 1

6) Las funciones exponenciales

- ***Son de la forma $f(x)=k^{u(x)}$, siendo $k>0$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas o peligrosas en el punto "c" según que la función "u" sea inofensiva o peligrosa en dicho punto.***

Por ejemplo, la función $u:\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ tal que $u(x)=x \equiv$ polinomio es inofensiva en todo punto; por tanto, el trabajo con $f(x)=3^x$ es inofensivo en todo punto.

Por ejemplo, la función $v:\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definida como $v(x)=1/x \equiv$ cociente de polinomios es peligrosa sólo en el punto $x=0$ en que se anula su denominador; por tanto, el trabajo con $g(x)=5^{1/x}$ sólo es peligroso en dicho punto.

Por ejemplo, la función $w:\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ tal que $w(x)=\sqrt{x}$ es inofensiva si $x>0$; por tanto, el trabajo con $h(x)=2^{\sqrt{x}}$ es inofensivo si $x>0$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x)=k^{u(x)}$ en el punto "c" sea inofensivo en lo referido a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo referido a la "derivabilidad".*** No hay un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

7) El peligro de las sumas y restas

- ***Si la función "f" es el resultado sumar o restar otras funciones, el trabajo con "f" en el punto "c" es inofensivo si todos los sumandos son inofensivos en dicho punto, y es peligroso si algún sumando es peligroso en "c".***

Por ejemplo, siendo $f:\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ tal que

$$f(x)=x^2-\frac{4}{x-\pi}+5^{1/x}+\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{1-x^4}-\log_3(x+5)$$

como:

$*\ u(x)=x^2 \equiv \text{polinomio} \Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

$*\ v(x)=4/(x-\pi) \equiv \text{cociente de polinomios} \Rightarrow$ inofensiva si $x \neq \pi$

$*\ w(x)=5^{1/x} \equiv 5^{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensiva si $x \neq 0$

$*\ h(x)=\sqrt{x+3} \equiv \sqrt[\text{par}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva si $x+3>0$ $(\Rightarrow x>-3)$

$*\ g(x)=\sqrt[3]{1-x^4} \equiv \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

$*\ t(x)=\log_3(x+5) \equiv \log_3(\text{polinomio}) \Rightarrow$ inofensiva si $x+5>0$ $(\Rightarrow x>-5)$

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" será inofensivo en el punto "x" si $x \neq 0$, $x \neq \pi$, $x>-3$ y $x>-5$ (o sea, si $x>-3$ siendo $x \neq 0$ y $x \neq \pi$), y será peligroso en los demás puntos.

8) El peligro del producto

- ***Si la función "f" es el resultado multiplicar diversas funciones, el trabajo con "f" en el punto "c" es inofensivo si todos los factores son inofensivos en dicho punto, y es peligroso si algún factor es peligroso en "c".***

Por ejemplo, siendo $f:\Re \;\alpha\; \Re$ tal que $f(x)=\dfrac{x}{3-x}.e^{x}.\log_6 (x-7)$, como:

$*\ u(x)=x/(3-x)\equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva si $x\neq 3$

$*\ v(x)=e^{x}\equiv e^{\text{polinomio}}\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x\in\Re$

$*\ h(x)=\log_6 (x-7)\equiv \log_6$ (polinomio) $\Rightarrow$ inofensiva si $x-7>0$ ($\Rightarrow x>7$)

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" será inofensivo en el punto "x" si $x\neq 3$ y $x>7$ (o sea, si $x>7$), y será peligroso en los demás puntos.

Por ejemplo, si $f:\Re \;\alpha\; \Re$ es tal que $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}.\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}}.9^{1/x}$, como:

$*\ u(x)=x/(4-x^2)\equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva si $x\neq\pm 2$

$*\ v(x)=\sqrt[3]{1/(x-1)}\equiv \sqrt[\text{impar}]{\text{cociente de polinomios}}\Rightarrow$ inofensiva si $x\neq 1$

$*\ h(x)=9^{1/x}\equiv 9^{\text{cociente de polinomios}}\Rightarrow$ inofensiva si $x\neq 0$

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" será peligroso solo si $x=\pm 2$, $x=1$ y $x=0$, y será inofensivo en los demás puntos.

Por ejemplo, siendo $f:\Re \;\alpha\; \Re$ tal que $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}.7^{1/(2+x^2)}$, como:

$*\ u(x)=x/(4+x^2)\equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x\in\Re$, pues el denominador no se anula para ningún valor real de "x".

$*\ v(x)=7^{1/(1+x^2)}\equiv 7^{\text{cociente de polinomios}}\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x\in\Re$, pues el denominador no se anula para ningún valor real de "x".

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo en todo punto.

Por ejemplo, siendo $f:\Re \;\alpha\; \Re$ tal que $f(x)=x^2.\sqrt{4+x^6}$, como:

$*\ u(x)=x^2\equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x\in\Re$

$*\ v(x)=\sqrt{4+x^6}\equiv \sqrt[\text{par}]{\text{polinomio}}\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x\in\Re$, pues el polinomio $4+x^6$ sólo toma valores positivos.

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo en todo punto.

9) El peligro de la división

- ***Si la función "f" es el cociente entre las funciones "u" y "v" (o sea, es $f(x)=u(x)/v(x)$), el trabajo con "f" es inofensivo en el punto "c" si el numerador $u(x)$ y el denominador $v(x)$ son inofensivos en "c" y además el denominador no se anula en dicho punto; es peligroso si el numerador o el denominador son peligrosos en "c" o el denominador se anula en dicho punto*** (violación de la primera Regla Sagrada).

Por ejemplo, siendo $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x)=\dfrac{x^3}{3^{x+2}-1}$, como:

$*$ $u(x)=x^3 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todo punto

$*$ $v(x)=3^{x+2}-1\equiv$ suma de la constante -1 (inofensiva $\forall\ x\in\Re$, pues una constante es un polinomio de grado cero) y de la función exponencial 3^{x+2} (inofensiva en todos los puntos, pues el exponente $x+2$ es un inofensivo polinomio) $\Rightarrow v(x)=3^{x+2}-1$ es inofensiva en todo punto.

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con $f(x)=u(x)/v(x)$ sólo es peligroso en los puntos que anulen el denominador:

$$3^{x+2}-1=0 \Rightarrow 3^{x+2}=1 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

Por ejemplo, siendo $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x)=\dfrac{x^2-1+\log_5(4-x)}{x^2-9}$, como:

$*$ $u(x)=x^2-1+\log_5(4-x)\equiv$ suma del polinomio x^2-1 (inofensivo en todos los puntos) y de la función logarítmica $\log_5(4-x)\equiv\log_5$ polinomio que es peligrosa sólo si $4-x\le 0 \Rightarrow u(x)=x^2-1+\log_5(4-x)$ es peligrosa sólo si $4-x\le 0$.

$*$ $v(x)=x^2-9\equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todo punto

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con $f(x)=u(x)/v(x)$ es peligroso en el punto "x" si $4-x\le 0\ (\Rightarrow x\ge 4)$ o si $x=\pm 3$ (puntos que anulan el denominador: $x^2-9=0\Rightarrow x=\pm 3$).

Por ejemplo, siendo $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x)=\dfrac{2^x\cdot\sqrt[5]{1+x^3}}{x^6+7}$, como:

$*$ $u(x)=2^x\cdot\sqrt[5]{1+x^3}\equiv 2^{\text{polinomio}}\cdot\sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

$*$ $v(x)=x^6+7\equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

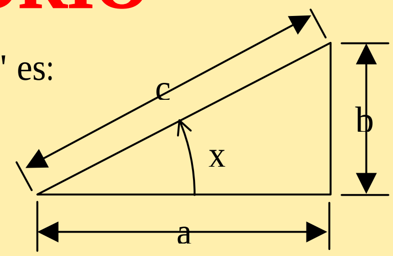
resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con $f(x)=u(x)/v(x)$ es inofensivo en todo punto, pues el denominador $v(x)=x^6+7$ no se anula para ningún valor real de "x".

10) Las funciones trigonométricas o "circulares"

RECORDATORIO

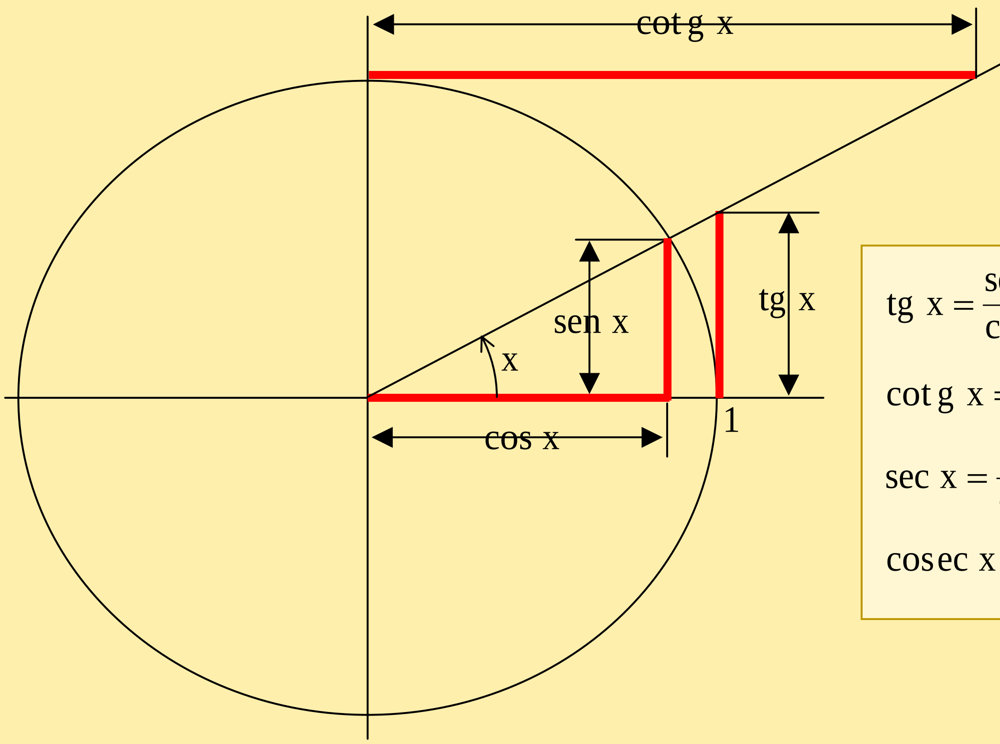
- En un triángulo rectángulo, para el ángulo "x" es:

$$\text{sen } x = b/c \;\; ; \;\; \text{cosec } x = 1/\text{sen } x$$
$$\cos x = a/c \;\; ; \;\; \sec x = 1/\cos x$$
$$\text{tg } x = b/a \;\; ; \;\; \text{cotg } x = 1/\text{tg } x$$



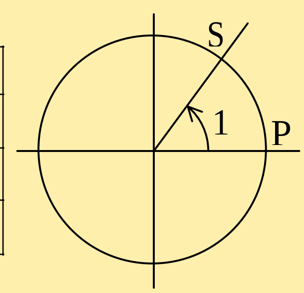
EL CIRCULO GONIOMÉTRICO

- En un circulo de radio 1, para el ángulo "x" es:



$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$
$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Grados	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3.\pi/2$	$2.\pi$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1



- ***Si "f" es de la forma $f(x) = sen\ u(x)$ ó $f(x) = cos\ u(x)$, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo o peligroso en el punto "c" según que la función "u" sea inofensiva o peligrosa en dicho punto. Para las restantes funciones trigonométricas basta tener en cuenta los peligros inherentes a toda división, y saber que, siendo "k" un número entero cualquiera, es:***

$$sen\ u(x) = 0 \Rightarrow u(x) = k.\pi$$

$$cos\ u(x) = 0 \Rightarrow u(x) = (2.k + 1).\frac{\pi}{2}$$

Por ejemplo, siendo $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x) = sen\,(1 + x^2)$, la función "f" es inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el polinomio $u(x) = 1 + x^2$ es inofensivo $\forall\ x \in \Re$.

Por ejemplo, siendo $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x) = cos\,(2 - x^3)$, la función "f" es inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el polinomio $u(x) = 2 - x^3$ es inofensivo $\forall\ x \in \Re$.

Por ejemplo, siendo $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x) = sen\,(Ln\ x)$, la función "f" sólo es peligrosa si $x \leq 0$, pues $u(x) = Ln\ x$ sólo es peligrosa si $x \leq 0$.

Por ejemplo, siendo $f(x) = cos\ 3^{1/x}$, la función "f" sólo es peligrosa en el punto $x = 0$, pues $u(x) = 3^{1/x}$ sólo es peligrosa en dicho punto.

Por ejemplo, siendo $f(x) = tg\ (x - 1) = (sen\,(x - 1))/(cos\,(x - 1))$, como el numerador y el denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en aquellos puntos "x" en que se anula el denominador: $cos\,(x - 1) = 0 \Rightarrow x - 1 = (2.k + 1).\pi/2 \Rightarrow x = 1 + (2.k + 1).\pi/2$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

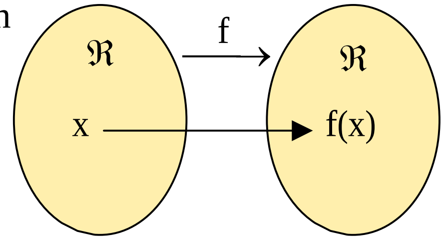
Por ejemplo, siendo $f(x) = cotg\ x = (cos\ x)/(sen\ x)$, como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos "x" que anulen al denominador: $sen\ x = 0 \Rightarrow\ x = k.\pi$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

Por ejemplo, siendo tal que $f(x) = sec\ 2.x = 1/(cos\ 2.x)$, como el numerador y el denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos "x" en que se anule el denominador: $cos\ 2.x = 0 \Rightarrow 2.x = (2.k + 1).\pi/2 \Rightarrow x = (2.k + 1).\pi/4$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

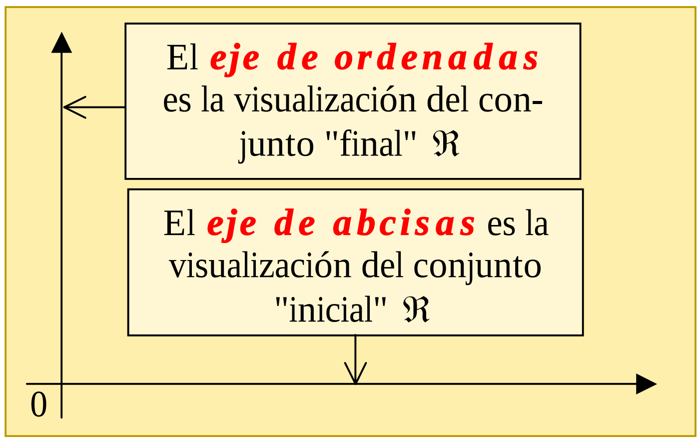
Por ejemplo, si $f(x) = cosec\,(x - 3) = 1/(sen\,(x - 3))$, como el numerador y el denominador son inofensivos en todo punto, "f" sólo es peligrosa en los puntos "x" que anulen al denominador: $sen\,(x - 3) = 0 \Rightarrow x - 3 = k.\pi \Rightarrow x = 3 + k.\pi$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

1.14 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

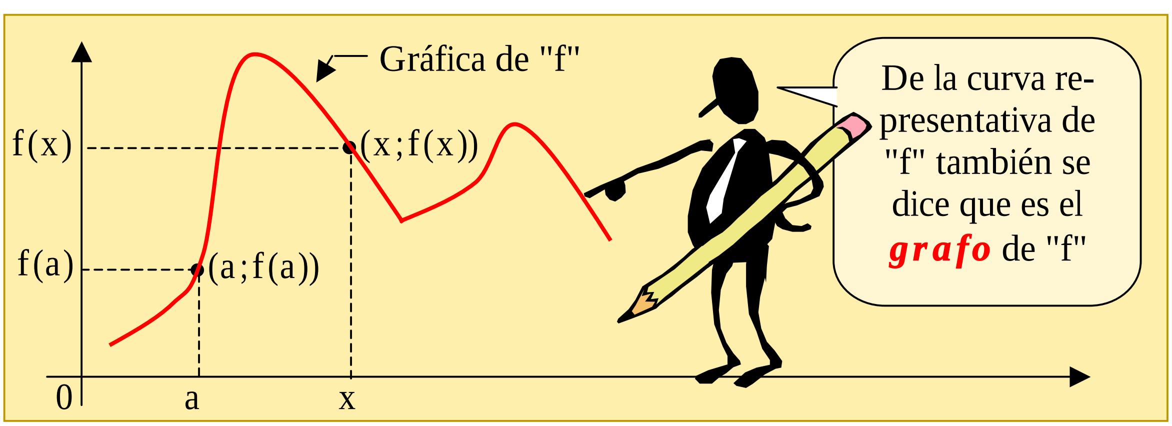
Puesto que la función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ es simplemente un criterio o ley que asocia números reales con números reales, en la visualización de "f" tendrá gran protagonismo la visualización del conjunto $\Re$ de los números reales, que en nuestra historia desempeña dos papeles a la vez, pues hace el papel de conjunto "inicial" de "f" y también hace el papel de conjunto "final" de "f".



Llamamos "eje de abcisas" a la recta elegida para visualizar el conjunto "inicial", y llamamos "eje de ordenadas" a la recta elegida para visualizar el conjunto "final". Por comodidad, siempre consideraremos que el eje de abcisas y el de ordenadas son perpendiculares y que su punto de corte es el que corresponde al número cero en cada eje.

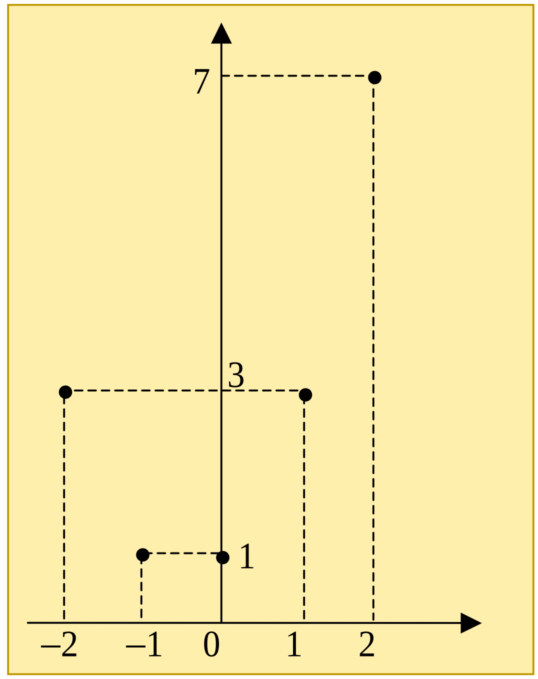


La representación gráfica de una función real de variable real es una curva plana. En efecto, si "x" es un número real del conjunto "inicial" y "$f(x)$" es el número real del conjunto "final" que la función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ asocia a "x", es claro que los números reales "x" y "$f(x)$" determinan de manera inequívoca un punto del plano: el punto que tiene coordenadas $(x;f(x))$. Por tanto, si asignásemos a "x" los infinitos valores que puede tomar y fuésemos posicionando en el plano los infinitos puntos $(x;f(x))$ que se van obteniendo, al final nuestros ojos verían una curva plana.



El Cálculo Diferencial no se ha inventado para fastidiar a nadie, se ha inventado porque es una herramienta eficacísima para resolver infinidad de problemas de la vida real. Aunque es prematuro hablar de esos problemas, conviene que sientas que el Cálculo Diferencial sirve para algo; por eso, y ***hasta que abordemos problemas de la vida real, debes considerar que la finalidad del Cálculo Diferencial es la representación gráfica de funciones***. En consecuencia, debes entender que los conceptos que introduciremos en los próximos temas son las herramientas necesarias para ser eficaces al representar la gráfica de una función $f:\Re \to \Re$ con la que se está trabajando ..... porque no puedes ir por la vida representando funciones "punto a punto", como hacías en cursos anteriores, cuando, para que te acostumbraras a posicionar puntos en un sistema de referencia plano y rectangular, tu profesor te daba, por ejemplo, la función $f:\Re \to \Re$ tal que $f(x) = x^2 + x + 1$ y te pedía que ubicaras en el plano unos pocos puntos por los que "pasa" la gráfica de esa función:

x	–2	–1	0	1	2
f(x)	3	1	1	3	7



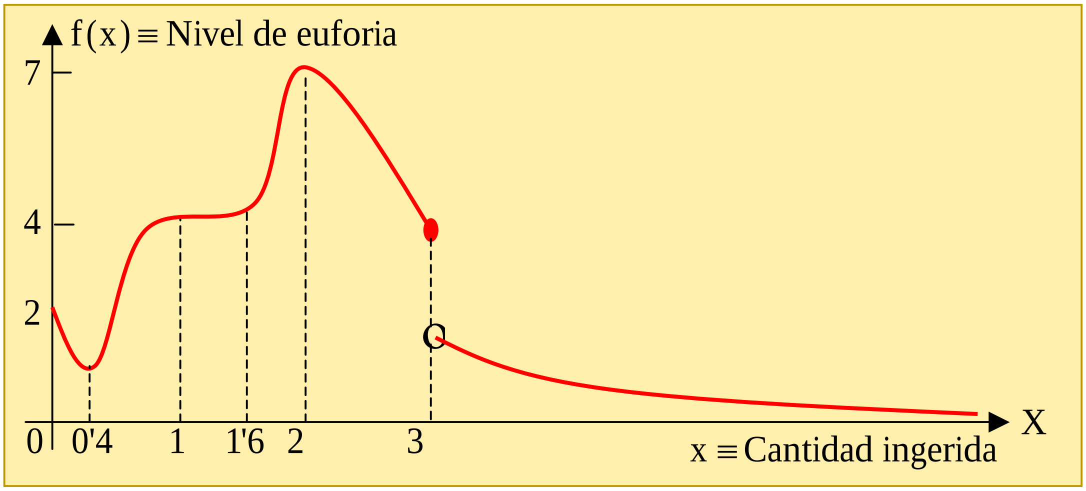
- ***Pregunta:*** ¿por qué nos da la neurosis por representar curvas?

- ***Respuesta:*** nos da la neurosis de representar curvas porque la curva representativa de la función $f:\Re \to \Re$ nos permite tener una visión global del "fenómeno gobernado" por "f".

- ***Pregunta:*** ¿qué es eso del "fenómeno gobernado" por "f"?

- ***Respuesta:*** el Cálculo Diferencial nació ligado a la "Física" que preocupaba a los seres humanos de principios del siglo XVII, pues fueron los grandes físicos de la época los que lo "inventaron" para poder hincarle el diente a fenómenos como el del movimiento de los planetas o el de la transmisión del calor; pero desde entonces ha llovido mucho, y para contestar la pregunta planteada podemos poner ejemplos de fenómenos que nada tienen que ver con la Física.

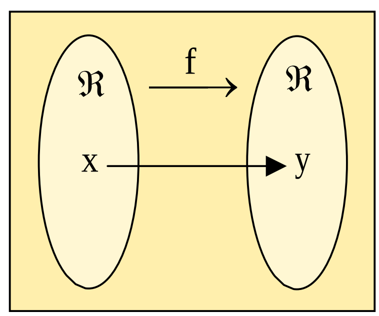
Por ejemplo, piensa en el fenómeno de la ingesta de cerveza y su influencia en tu nivel de euforia; en concreto, considera que el número real "x" expresa en litros la cantidad de cerveza que bebes un día de juerga y que $f:\Re \to \Re$ es la función que determina o gobierna tu nivel de euforia "$f(x)$" cuando la cantidad ingerida de cerveza es "x". Así las cosas, considera que la gráfica de la función "f" es la representada en la siguiente figura.



A la vista de la gráfica de la función "f" podemos hacernos una idea global del fenómeno: cuando no bebes $(x = 0)$ tu nivel de euforia es 2. Los primeros tragos te deprimen un poco, pues tu nivel de euforia va disminuyendo hasta que la cantidad ingerida es $0'4$, pero a partir de ahí la cosa cambia, pues el nivel de euforia empieza aumentar hasta que alcanza una zona de "meseta" entorno al nivel de euforia 4. La "meseta" se mantiene hasta que la cantidad ingerida llega a $1'6$, que marca el inicio de una subida de euforia que alcanza su máximo cuando la cantidad ingerida es 2; a partir de entonces ándate con ojo, porque tu euforia comienza a disminuir si sigues bebiendo, y con la gota que colme los 3 litros de cerveza tu euforia se desplomará muy bruscamente, lo que puede producirte mareos y desagradables vómitos. Si te empecinas y sigues bebiendo tu euforia seguirá disminuyendo, aproximándose al nivel cero, que es el de las piedras.

Muy importante: otras notaciones

A veces se está trabajando con una función $f:\Re \;\alpha\; \Re$ y para abreviar se denota "y" al número real "$f(x)$" que "f" tiene a bien asociar a "x". ***Por ejemplo,*** en vez de escribir



$$f(x) = 3.x - 1 \;;\; f(x) = x.\text{Ln } x \;;\; f(x) = \text{sen } x^2$$

se escribe

$$y = 3.x - 1 \;;\; y = x.\text{Ln } x \;;\; y = \text{sen } x^2$$

Esta notación no es recomendable para los principiantes, porque con ella es más fácil que se les despiste lo esencial, y lo esencial ahora es asimilar que tras la notación "f(x)" hay 5 protagonistas (a saber: el conjunto $\Re_{\text{inicial}}$, el $\Re_{\text{final}}$, la correspondencia "f" que asocia elementos de $\Re_{\text{inicial}}$ con elementos de $\Re_{\text{final}}$, el número $x \in \Re_{\text{inicial}}$ y el número $f(x) \in \Re_{\text{final}}$ que "f" tiene a bien asociar a "x"), ***y que nuestro cerebro debe ser capaz de estar pendiente de los cinco simultáneamente.***

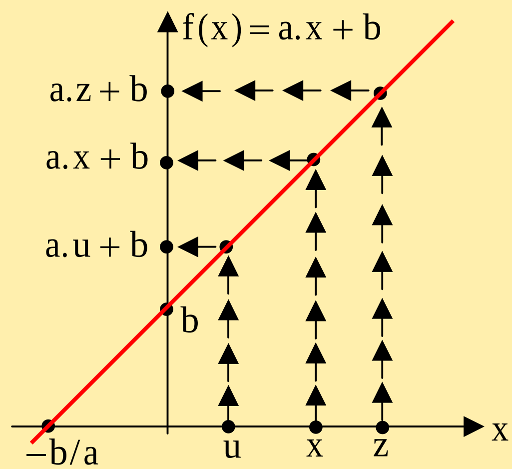
Las rectas y parábolas son las "curvas" más famosas; las encontrarás hasta en la sopa

La gráfica de un polinomio de grado uno es una recta (no perpendicular al eje de abcisas). ***De otro modo:*** toda recta no perpendicular al eje de abcisas es la gráfica de una función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ tal que $f(x)=a.x+b$, donde "a" y "b" son constantes.

Sea cual sea el valor de "a", sucede que $f(0)=a.0+b=b$, por lo que la recta "corta" al eje de ordenadas en el punto "b"; de "b" se dice que es la ***ordenada de la recta en el origen.*** La recta corta al eje de abcisas en el punto "x" tal que $f(x)=0$:

$$f(x)=a.x+b=0 \Rightarrow x=-b/a$$

Del número $-b/a$ se dice que es la ***abcisa de la recta en el origen.***



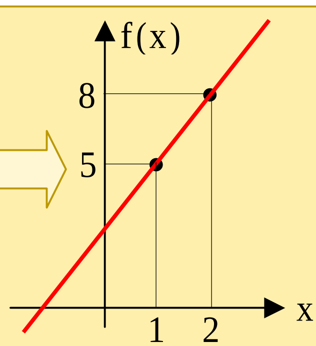
Para dibujar una recta basta "posicionar" dos puntos de ella. Por ejemplo, para dibujar la recta $f(x)=3+4.x$, los pardillos posicionan dos puntos cualquiera de ella:

$$\begin{cases} \text{si } x=1 \Rightarrow f(1)=2+3.1=5 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (1;5) \\ \text{si } x=2 \Rightarrow f(2)=2+3.2=8 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (2;8) \end{cases}$$

Pero los que no se chupan el dedo dibujan la recta calculando su abcisa y su ordenada en el origen, pues así tardan menos:

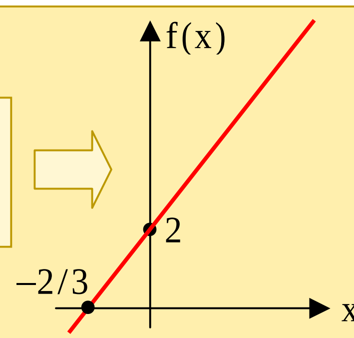
$$\begin{cases} \text{si } x=0 \Rightarrow f(1)=2+3.0=2 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (0;2) \\ f(x)=2+3.x=0 \Rightarrow x=-2/3 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (-2/3;0) \end{cases}$$

x	f(x)
1	5
2	8



PARDILLO

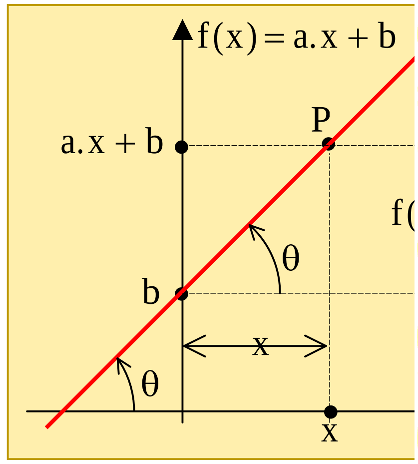
x	f(x)
0	2
−2/3	0



PROFESIONAL

Si una función "f" es un polinomio de grado uno, también se dice que "f" es una función "lineal"

Como en el lenguaje matemático las palabras "lineal" y "proporcional" son sinónimas, sin duda te preguntas dónde está la "proporcionalidad" en esta historia.



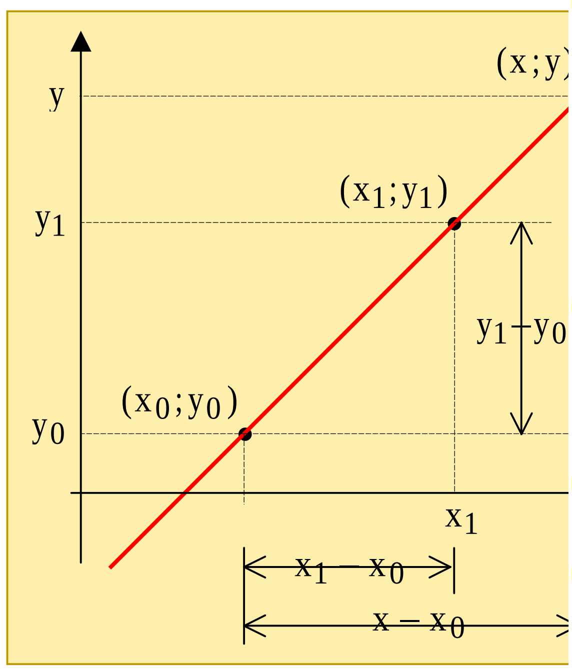
Fíjate: si $P=(x;f(x))$ es un punto genérico de una recta, como $f(x)=a.x+b$, sucede que $f(x)-b=a.x$; o sea, la diferencia $f(x)-b$ entre la ordenada "$f(x)$" del punto "P" y la ordenada "b" de la recta en el origen es proporcional a la abcisa "x" de "P". Si miras la figura podrás comprobar que la constante de proporcionalidad (o sea, "a") coincide con la tangente del ángulo "θ" que la recta forma con la dirección positiva del eje de abcisas:

$$f(x)-b=a.x\Rightarrow\frac{f(x)-b}{x}=a=\operatorname{tg}\theta$$

De "a" se dice que es la ***pendiente*** de la recta. Observa: si $a=0\Rightarrow\theta=0\Rightarrow$ la recta es paralela al eje de abcisas (o también: $a=0\Rightarrow f(x)=b\equiv \text{constante}$).

Recta que pasa por dos puntos conocidos

Si $(x;y)$ son las coordenadas de un punto genérico de la recta que pasa por los puntos $(x_0;y_0)$ y $(x_1;y_1)$, de la figura, por semejanza de triángulos, se deduce que:



$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

Por ejemplo, para la recta que pasa por los puntos (2;3) y (5;–6), es:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-3}{-6-3}\Rightarrow y=5-x$$

Así, la expresión matemática de la función lineal $f:\Re\ \alpha\ \Re$ cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos (2;3) y (5;–6), es $f(x)=5-x$

Recta que pasa por un punto conocido con pendiente conocida

Si $(x;f(x))$ son las coordenadas de un punto genérico de la recta que pasa por el punto conocido $(m;n)$ y tiene pendiente conocida "a", la expresión matemática de la función lineal $f:\Re\ \alpha\ \Re$ cuya gráfica es dicha recta es $f(x)=a.x+b$; el valor de "b" se determina al exigir la recta pase por $(m;n)$, o sea, al exigir que $f(m)=n$:

$$f(m)=n \Rightarrow a.m+b=n \Rightarrow b=n-a.m \Rightarrow f(x)=a.x+n-a.m \Rightarrow$$

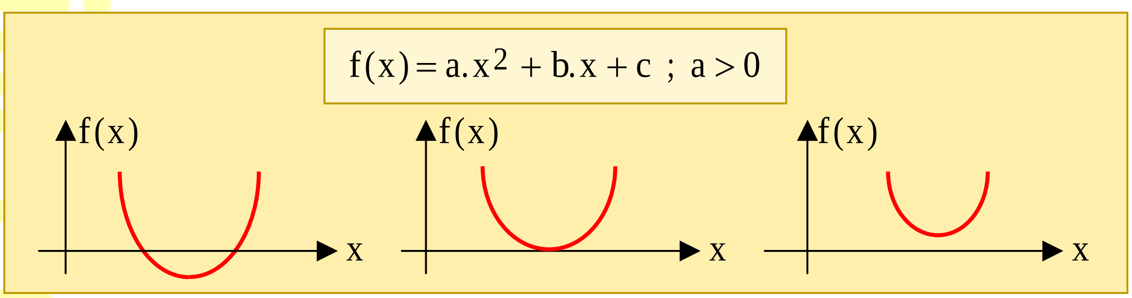
$$\boxed{\text{sustituimos "b" por "}n-a.m\text{" en } f(x)=a.x+b}$$

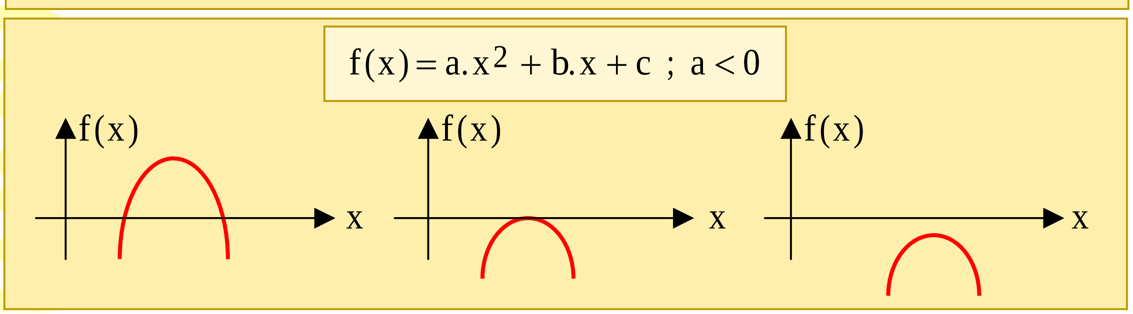
$$\Rightarrow f(x)=n+a.(x-m)$$

Por ejemplo, la expresión matemática de la función lineal $f:\Re\ \alpha\ \Re$ que pasa por el punto $(6;-4)$ y tiene pendiente 3 es $f(x)=-4+3.(x-6)=3.x-22$, y la expresión matemática de la función lineal $g:\Re\ \alpha\ \Re$ que pasa por el punto $(-5;7)$ y tiene pendiente -4 es $g(x)=7-4.(x-(-5))=-4.x-13$.

La gráfica de un polinomio de grado 2 es una parábola; o sea, es una parábola la gráfica de toda función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ cuya expresión matemática sea $f(x)=a.x^2+b.x+c$, siendo "a", "b" y "c" constantes y $a\neq 0$. La parábola tiene sus ***"cuernos" hacia arriba o hacia abajo según que "a" sea positivo o negativo*** ..... y las soluciones de $a.x^2+b.x+c=0$ nos dirán si la parábola y el eje de abcisas se "tocan" o no:

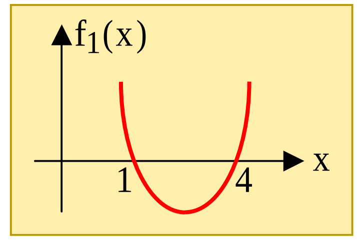
1) Si la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$ tiene dos soluciones reales y distintas $x=x_0$ y $x=x_1$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.
2) Si la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$ tiene una raíz real doble $x=x_0$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.
3) Si la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



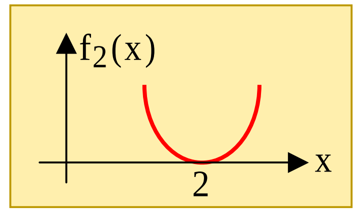


Ejemplos:

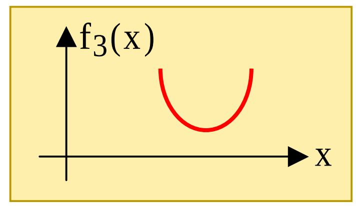
1) La gráfica de $f_1 : \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $f_1(x) = x^2 - 5.x + 4$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo); como las soluciones de $x^2 - 5.x + 4 = 0$ son reales y distintas $(x = 1,\ x = 4)$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.



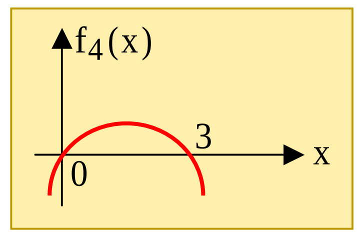
2) La gráfica de $f_2 : \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $f_2(x) = x^2 - 4.x + 4$ es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo); como la ecuación $x^2 - 4.x + 4 = 0$ tiene una raíz real doble $(x = 2)$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.



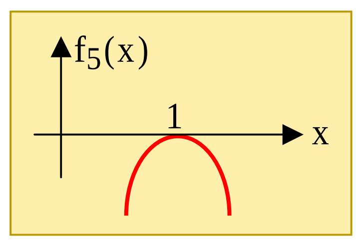
3) La gráfica de $f_3 : \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $f_3(x) = x^2 + x + 5$ es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo); como la ecuación $x^2 + x + 5 = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



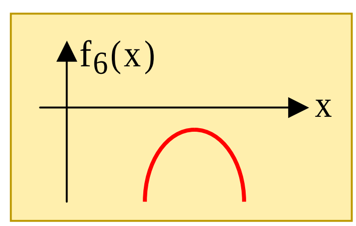
4) La gráfica de $f_4 : \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $f_4(x) = -x^2 + 3.x$ es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo); como las soluciones de $-x^2 + 3.x = 0$ son reales y distintas $(x = 0 \text{ y } x = 3)$ la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.



5) La gráfica de la función $f_5 : \Re \ \alpha \ \Re$ definida como $f_5(x) = -x^2 + 2.x - 1$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo (el coeficiente de x^2 es negativo); como $-x^2 + 2.x - 1 = 0$ tiene una raíz real doble $(x = 1)$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.



6) La gráfica de la función $f_6 : \Re \ \alpha \ \Re$ definida como $f_6(x) = -x^2 + x - 7$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo); como la ecuación $-x^2 + x - 7 = 0$ no tiene raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



Si la parábola no "toca" al eje de abcisas (ejemplos 3 y 6) nos quedamos con el culo al aire. En su momento veremos que el punto en que la parábola $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ presenta su máximo (o mínimo) es $x = -b/2.a$; así, la parábola $f_3(x) = x^2 + x + 5$ presenta su mínimo en el punto $x = -1/2$, y la parábola $f_6(x) = -x^2 + x - 7$ presenta su máximo en el punto $x = 1/2$.