

Tema 1

Funciones reales de variable real

1.01	Los números reales	2
1.02	La recta real ampliada	4
1.03	Valor absoluto de un número real	4
1.04	Intervalos de la recta real.....	5
1.05	Distancia entre dos puntos de la recta real	5
1.06	Entorno de un punto de la recta real	5
1.07	Correspondencia entre conjuntos	6
1.08	Función real de variable real	7
1.09	Operaciones con funciones	8
1.10	La regla de Ruffini	9
1.11	Las Reglas Sagradas del Cálculo	14
1.12	De las funciones y las serpientes	15
1.13	Catálogo de peligros	16
1.14	Gráfica de una función	26
1.15	Las rectas y las parábolas	29
1.16	Funciones uniformes	33
1.17	Funciones algebraicas y trascendentes	33
1.18	Dominio de definición de una función	34
1.19	Signo de una función	44
1.20	Simetrías de una función	67
1.21	Funciones periódicas	69
1.22	Funciones compuestas	72
1.23	Función inversa o recíproca	76
1.24	Funciones trigonométricas inversas	82
1.25	Funciones hiperbólicas	87

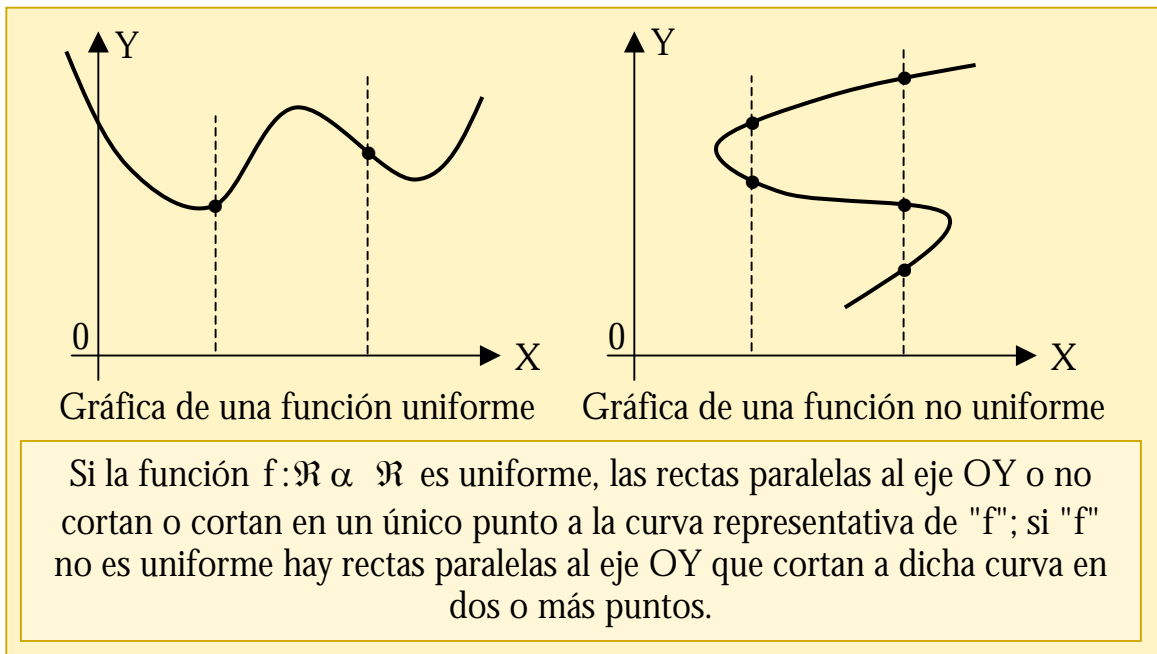
1.16 FUNCIONES UNIFORMES

Se dice que la función $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ es **uniforme** si cada número real "x" del conjunto inicial que tiene imagen en el conjunto final, tiene una única imagen.

Por ejemplo, la función $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = 1 + x^2$ es uniforme, pues cada número real "x" que tiene imagen en el conjunto final \mathfrak{R} tiene una única imagen. Sin embargo, no es uniforme la función $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $(g(x))^2 = 1 + x^2$, pues $(g(x))^2 = 1 + x^2 \Rightarrow g(x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$, lo que indica que cada número real "x" que tiene imagen en el conjunto final \mathfrak{R} tiene dos imágenes; así:

$$g(7) = \pm\sqrt{1 + 7^2} = \pm\sqrt{50} ; g(-4) = \pm\sqrt{1 + (-4)^2} = \pm\sqrt{17}$$

El 99'9 % de las funciones con que trabajaremos serán uniformes.



1.17 FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Se dice que una función "f" es **algebraica** si las operaciones que deben realizarse para calcular el número "f(x)" son las llamadas algebraicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente constante y radicación de índice constante. Se dice que "f" es **trascendente** si no es algebraica. **Por ejemplo**, son algebraicas las funciones tales que:

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x ; f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} ; f(x) = \sqrt[3]{x/(1 + x)} ; f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{1 - \sqrt[5]{2 + x}}$$

pues en los cuatro casos sucede que las operaciones que deben realizarse para calcular el número "f(x)" son las algebraicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente constante y radicación de índice constante. Son trascendentes las funciones $f(x) = 2^{3 \cdot x + 1}$, $f(x) = \log_6(x + 1)$, $f(x) = \sin x^2$.

1.18 DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Si $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es la función cuya gráfica se quiere dibujar y "a" es un número real del conjunto "inicial", puede suceder que "f" no asigne imagen en el conjunto "final" al número "a", lo que en términos geométricos significa que no hay curva en la vertical del punto "a" (es decir, la recta de ecuación $x = a$, que es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto "a" no tiene ningún contacto con la curva representativa de "f"). Por eso, si nuestro trabajo es representar la gráfica de "f", se entiende que la primera preocupación siempre sea la misma: determinar cuáles son los números reales del conjunto "inicial" a los que "f" sí les asigna imagen y cuáles son los pobrecitos desgraciados a los que "f" no les asigna imagen. Para dar respuesta a esta preocupación el Cálculo Diferencial inventa lo que llama **dominio de definición** de "f" (se denota $\text{Dom.}f$), que es el subconjunto de $\mathcal{R}_{\text{inicial}}$ que forman los números reales a los que la función "f" sí les asigna imagen; es decir: $\text{Dom.}f = \{x \in \mathcal{R}_{\text{inicial}} / f(x) \in \mathcal{R}_{\text{final}}\}$. Si $f(a) \in \mathcal{R}$ se dice que la función "f" está definida en el punto "a", y si $f(a) \notin \mathcal{R}$ se dice que "f" no está definida en dicho punto.

DE PEROGRULLO
La función "f" no está definida en el punto "a" si para calcular "f(a)" hay que violar alguna Regla Sagrada del Cálculo

Por ejemplo, si $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es tal que $f(x) = x/(x - 4)$, entonces "f" está definida en el punto "6", pues $f(6) = 6/(6 - 4) = 3 \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de dicho punto. Pero "f" no está definida en el punto "4", pues $f(4) = 4/(4 - 4) = 4/0 \notin \mathcal{R}$ (violación de la primera Regla Sagrada), lo que en términos geométricos significa que no hay curva en la vertical de "4".

Por ejemplo, si $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es tal que $f(x) = \sqrt[5]{x - 3}$, entonces "f" está definida en el punto "9", pues $f(9) = \sqrt[5]{9 - 3} = \sqrt[5]{6} \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "9". La función "f" también está definida en el punto "3", pues $f(3) = \sqrt[5]{3 - 3} = 0 \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "3"; también está definida "f" en el punto "2", pues $f(2) = \sqrt[5]{2 - 3} = \sqrt[5]{-1} = -1 \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "2".

Por ejemplo, si $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es tal que $f(x) = \sqrt[4]{x - 3}$, entonces "f" está definida en el punto "9", pues $f(9) = \sqrt[4]{9 - 3} = \sqrt[4]{6} \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "9". La función "f" también está definida en el

punto "3", pues $f(3) = \sqrt[4]{3-3} = 0 \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "3". Pero "f" no está definida en el punto "2", pues $f(2) = \sqrt[4]{2-3} = \sqrt[4]{-1} \notin \mathcal{R}$ (violación de la segunda Regla Sagrada), lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "2".

Por ejemplo, si $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es tal que $f(x) = \text{Ln}(x-3)$, entonces "f" está definida en el punto "9", pues $f(9) = \text{Ln}(9-3) = \text{Ln} 6 \in \mathcal{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "9". Pero "f" no está definida en los puntos "3" y "2", pues es $f(3) = \text{Ln}(3-3) = \text{Ln} 0 \notin \mathcal{R}$ y $f(2) = \text{Ln}(2-3) = \text{Ln} -1 \notin \mathcal{R}$, lo que significa que no hay curva en la vertical de "3" ni en la vertical de "2".

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

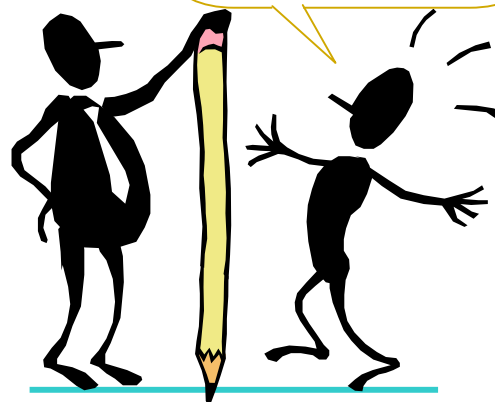
Para no hacer el ridículo con el asunto del "dominio de definición" de una función $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ debes saber que:

- 01) Si $f(x) = \text{polinomio} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}, \forall x \in \mathcal{R}$
- 02) Si $f(x) = u(x) \pm v(x) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$ y $v(x) \in \mathcal{R}$
- 03) Si $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$ y $v(x) \in \mathcal{R}$
- 04) Si $f(x) = u(x)/v(x) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$, $v(x) \in \mathcal{R}$ y $v(x) \neq 0$.
Si $f(x) = \text{cociente de polinomios} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $v(x) \neq 0$.
- 05) Si $f(x) = k^{u(x)}$ ($k > 0$) $\Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$
- 06) Si $f(x) = \sqrt[\text{impar}]{u(x)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$
- 07) Si $f(x) = \sqrt[\text{par}]{u(x)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$ y $u(x) \geq 0$
- 08) Si $f(x) = \log_k u(x) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$ y $u(x) > 0$
- 09) Si $f(x) = \text{sen } u(x)$ ó $f(x) = \text{cos } u(x) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$
- 10) Si $f(x) = |u(x)| \Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}$ sólo si $u(x) \in \mathcal{R}$

Observa: el signo del número real $u(x)$ tiene protagonismo estelar a la hora de determinar el dominio de definición de funciones de la forma

$$f(x) = \sqrt[\text{par}]{u(x)} \text{ ó } f(x) = \log_k u(x)$$

Si la expresión matemática de $u(x)$ es tontorrón será sencillo determinar los puntos "x" tales que $f(x) \in \mathcal{R}$, pero el asunto se complicará si se complica la expresión matemática de $u(x)$.



FONEMATO 1.18.1

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1) f_1(x) = 4/(x - 3) ; 2) f_2(x) = 5^{1/x} ; 3) f_3(x) = e^{x^2}$$

$$4) f_4(x) = \sqrt[3]{x/(x - 7)} ; 5) f_5(x) = \log_3(x + 7) ; 6) f_6(x) = \text{Ln}(1 + x^8)$$

$$7) f_7(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) - f_4(x) - f_5(x) + f_6(x)$$

$$8) f_8(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot f_4(x) \cdot f_5(x) \cdot f_6(x)$$

SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = 4/(x - 3) \equiv$ cociente de polinomios, es $f_1(x) \in \mathfrak{R}$ en todo punto "x" que no anule su denominador. Por tanto: $\text{Dom.}f_1 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 3\}$.

2) Como $f_2(x) = 5^{1/x} \equiv 5^{h(x)}$, es $f_2(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $h(x) \in \mathfrak{R}$; como $h(x) = 1/x \equiv$ cociente de polinomios, es $h(x) \in \mathfrak{R}$ si "x" no anula el denominador de $h(x)$. Por tanto: $\text{Dom.}f_2 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 0\}$.

3) Como $f_3(x) = e^{x^2} \equiv e^{g(x)}$, es $f_3(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $g(x) \in \mathfrak{R}$. Como $g(x) = x^2$ es un polinomio, entonces $g(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x". Por tanto: $\text{Dom.}f_3 = \mathfrak{R}$.

4) Siendo $f_4(x) = \sqrt[3]{x/(x - 6)} \equiv \sqrt[\text{impar}]{v(x)}$, es $f_4(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $v(x) \in \mathfrak{R}$. Como $v(x) = x/(x - 6) \equiv$ cociente de polinomios, es $v(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x" que no anule su denominador. Por tanto: $\text{Dom.}f_4 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 6\}$.

5) Como $f_5(x) = \log_3(x + 7) \equiv \log_3 u(x)$ es $f_5(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $u(x) \in \mathfrak{R}$ y $u(x) > 0$. Como $u(x) = x + 7 \equiv$ polinomio, entonces $u(x) \in \mathfrak{R}$ para todo valor de "x", y es $u(x) = x + 7 > 0$ si $x > -7$. Por tanto: $\text{Dom.}f_5 = \{x \in \mathfrak{R} / x > -7\}$.

6) Como $f_6(x) = \text{Ln}(1 + x^8) \equiv \log_3 t(x)$, es $f_6(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $t(x) \in \mathfrak{R}$ y $t(x) > 0$. Como $t(x) = 1 + x^8 \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x", y además es $t(x) = 1 + x^8 > 0$ para todo "x". Por tanto: $\text{Dom.}f_6 = \mathfrak{R}$.

7) Como la función f_7 es suma de otras funciones, el dominio de definición de f_7 es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos; es decir:

$$\text{Dom.}f_7 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 3, x \neq 0, x \neq 6, x > -7\}$$

8) Como la función f_8 es producto de otras funciones, el dominio de definición de f_8 es la intersección de los dominios de definición de los distintos factores; es decir:

$$\text{Dom.}f_8 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 3, x \neq 0, x \neq 6, x > -7\}$$

FONEMATO 1.18.2

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

- 1) $f_1(x) = x/(x^2 - 9)$; 2) $f_2(x) = \sqrt[5]{1/(6-x)}$; 3) $f_3(x) = \sqrt[4]{1/(7-x)}$
4) $f_4(x) = \sqrt[4]{1/(4+x^6)}$; 5) $f_5(x) = \log_2(x-4)$; 6) $f_6(x) = \text{sen}(1-x^3)$
7) $f_7(x) = f_1(x) - f_2(x) + 3.f_3(x) - 5.f_4(x) - f_5(x) + f_6(x)$
8) $f_8(x) = f_1(x).f_2(x).f_3(x).f_4(x).f_5(x).f_6(x)$

SOLUCIÓN

- 1) Como $f_1(x) = x/(x^2 - 9) \equiv$ cociente de polinomios, es $f_1(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x" que no anule su denominador. Por tanto: $\text{Dom.}f_1 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq \pm 3\}$.
- 2) Como $f_2(x) = \sqrt[5]{1/(6-x)} \equiv \sqrt[\text{impar}]{h(x)}$, es $f_2(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $h(x) \in \mathfrak{R}$. Como $h(x) = 1/(6-x) \equiv$ cociente de polinomios, es $h(x) \in \mathfrak{R}$ si "x" no anula el denominador de $h(x)$. Por tanto: $\text{Dom.}f_2 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 6\}$.
- 3) Como $f_3(x) = \sqrt[4]{1/(7-x)} \equiv \sqrt[\text{par}]{g(x)}$, es $f_3(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $g(x) \in \mathfrak{R}$ y $g(x) \geq 0$. Como $g(x) = 1/(7-x) \equiv$ cociente de polinomios, es $g(x) \in \mathfrak{R}$ si $x \neq 7$ (punto en que se anula el denominador). No existe ningún valor de "x" tal que $g(x) = 1/(7-x) = 0$, y es $g(x) = 1/(7-x) > 0$ siempre que $7-x > 0$ (o sea, siempre que $x < 7$). Por tanto: $\text{Dom.}f_3 = \{x \in \mathfrak{R} / x < 7\}$
- 4) Como $f_4(x) = \sqrt[4]{1/(4+x^6)} \equiv \sqrt[\text{par}]{v(x)}$ es $f_4(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $v(x) \in \mathfrak{R}$ y $v(x) \geq 0$. Como $v(x) = 1/(4+x^6) \equiv$ cociente de polinomios cuyo denominador no se anula para ningún "x", es $v(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y como $v(x) = 1/(4+x^6)$ sólo toma valores positivos, es $\text{Dom.}f_4 = \mathfrak{R}$.
- 5) Como $f_5(x) = \log_2(x-4) \equiv \log_2 u(x)$ es $f_5(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $u(x) \in \mathfrak{R}$ y $u(x) > 0$. Como $u(x) = x-4 \equiv$ polinomio, es $u(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y $u(x) = x-4 > 0$ si $x > 4$. Por tanto: $\text{Dom.}f_5 = \{x \in \mathfrak{R} / x > 4\}$.
- 6) Como $f_6(x) = \text{sen}(1-x^3) \equiv \text{sen } t(x)$, es $f_6(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $t(x) \in \mathfrak{R}$, y como $t(x) = 1-x^3 \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x". Por tanto: $\text{Dom.}f_6 = \mathfrak{R}$.
- 7) Como la función f_7 es suma de otras funciones, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos, o sea:
 $\text{Dom.}f_7 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq \pm 3, x \neq 6, x < 7, x > 4\} = \{x \in \mathfrak{R} / 4 < x < 7, x \neq 6\}$
- 8) Como la función f_8 es producto de otras funciones, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos factores, o sea:
 $\text{Dom.}f_8 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq \pm 3, x \neq 6, x < 7, x > 4\} = \{x \in \mathfrak{R} / 4 < x < 7, x \neq 6\}$

FONEMATO 1.18.3

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1) f_1(x) = (x - 1)/(x^2 + 4) ; 2) f_2(x) = (x + 1)^{5/3} ; 3) f_3(x) = (x - 2)^{5/2}$$

$$4) f_4(x) = \frac{x}{\ln(x - 3)} ; 5) f_5(x) = \frac{\ln(9 - x)}{x - 5}$$

SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = (x - 1)/(x^2 + 4) \equiv$ cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en ningún punto, es $\text{Dom.}f_1 = \mathfrak{R}$.

2) Como $f_2(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^5} \equiv \sqrt[\text{impar}]{h(x)}$, es $f_2(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $h(x) \in \mathfrak{R}$, y como $h(x) = (x + 1)^5 \equiv$ polinomio, es $h(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x". Así: $\text{Dom.}f_2 = \mathfrak{R}$.

3) Como $f_3(x) = (x - 2)^{5/2} = \sqrt{(x - 2)^5} \equiv \sqrt[\text{par}]{g(x)}$, es $f_3(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $g(x) \in \mathfrak{R}$ y $g(x) \geq 0$. Como $g(x) = (x - 2)^5 \equiv$ polinomio, es $g(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x", y es $g(x) = (x - 2)^5 \geq 0$ sólo si $x \geq 2$. Por tanto: $\text{Dom.}f_3 = \{x \in \mathfrak{R} / x \geq 2\}$

4) Como $f_4(x) = \frac{x}{\ln(x - 3)} \equiv \frac{m(x)}{n(x)}$, es $f_4(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si:

$$m(x) \in \mathfrak{R} ; n(x) \in \mathfrak{R} ; n(x) \neq 0$$

Como $m(x) = x \equiv$ polinomio, es $m(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x".

Como $n(x) = \ln(x - 3) \equiv \ln p(x)$, es $n(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $p(x) \in \mathfrak{R}$ y $p(x) > 0$. Como $p(x) = x - 3 \equiv$ polinomio, es $p(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y es $p(x) = x - 3 > 0$ sólo si $x > 3$. Por tanto, es $n(x) = \ln(x - 3) \in \mathfrak{R}$ sólo si $x > 3$.

Determinemos los valores de "x" que anulan a $n(x) = \ln(x - 3)$:

$$n(x) = \ln(x - 3) = 0 \Rightarrow x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

En definitiva: $\text{Dom.}f_4 = \{x \in \mathfrak{R} / x > 3, x \neq 4\}$.

5) Como $f_5(x) = \frac{\ln(9 - x)}{x - 5} \equiv \frac{u(x)}{v(x)}$, es $f_5(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si:

$$u(x) \in \mathfrak{R} ; v(x) \in \mathfrak{R} ; v(x) \neq 0$$

Como $u(x) = \ln(9 - x) \equiv \ln t(x)$, es $u(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $t(x) \in \mathfrak{R}$ y $t(x) > 0$. Como $t(x) = 9 - x \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y es $t(x) = 9 - x > 0$ sólo si $x < 9$. Por tanto, es $u(x) = \ln(9 - x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $x < 9$.

Como $v(x) = x - 5 \equiv$ polinomio, es $v(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x", y es $v(x) \neq 0$ si $x \neq 5$.

En definitiva: $\text{Dom.}f_5 = \{x \in \mathfrak{R} / x < 9, x \neq 5\}$.

FONEMATO 1.18.4

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1) f_1(x) = (x + 3)/(x^2 - 8) ; 2) f_2(x) = (x + 1)^{-7/5} ; 3) f_3(x) = (x - 2)^{-9/4}$$

$$4) f_4(x) = \frac{x + 4}{1 - 6^x} ; 5) f_5(x) = \frac{\text{Ln}(2 - x)}{\text{sen}(x + 1)}$$

SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = (x + 3)/(x^2 - 8) \equiv$ cociente de polinomios cuyo denominador sólo se anula si $x = \pm\sqrt{8}$, es: $\text{Dom.}f_1 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq \pm\sqrt{8}\}$.

2) Como $f_2(x) = (x + 1)^{-7/5} = \sqrt[5]{1/(x + 1)^7} \equiv \sqrt[\text{impar}]{h(x)}$, entonces $f_2(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $h(x) \in \mathfrak{R}$. Como $h(x) = 1/(x + 1)^7 \equiv$ cociente de polinomios, es $h(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x" que no anule su denominador. Así: $\text{Dom.}f_2 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq -1\}$.

3) Como $f_3(x) = (x - 2)^{-9/4} = \sqrt[4]{1/(x - 2)^9} \equiv \sqrt[\text{par}]{g(x)}$, entonces $f_3(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $g(x) \in \mathfrak{R}$ y $g(x) \geq 0$. Como $g(x) = 1/(x - 2)^9 \equiv$ cociente de polinomios, es $g(x) \in \mathfrak{R}$ si $x \neq 2$. No existe ningún "x" tal que $g(x) = 1/(x - 2)^9 = 0$, y es $g(x) > 0$ si $x - 2 > 0$ (o sea, $x > 2$). Por tanto: $\text{Dom.}f_3 = \{x \in \mathfrak{R} / x > 2\}$.

4) Es $f_4(x) = \frac{x + 4}{1 - 6^x} \equiv \frac{m(x)}{n(x)} \in \mathfrak{R}$ sólo si:

$$m(x) \in \mathfrak{R} ; n(x) \in \mathfrak{R} ; n(x) \neq 0$$

Como $m(x) = x + 4 \equiv$ polinomio, es $m(x) \in \mathfrak{R}$ para todo valor de "x".

Como $n(x) = 1 - 6^x$ es suma de una constante y de una función exponencial cuyo exponente es un polinomio, es $n(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y $n(x)$ se anula sólo si $x = 0$ ($n(x) = 0 \Rightarrow 1 - 6^x = 0 \Rightarrow 6^x = 1 \Rightarrow x = 0$).

En definitiva: $\text{Dom.}f_4 = \{x \in \mathfrak{R} / x \neq 0\}$.

5) Es $f_5(x) = \frac{\text{Ln}(2 - x)}{\text{sen}(x + 1)} \equiv \frac{u(x)}{v(x)} \in \mathfrak{R}$ sólo si:

$$u(x) \in \mathfrak{R} ; v(x) \in \mathfrak{R} ; v(x) \neq 0$$

Como $u(x) = \text{Ln}(2 - x) \equiv \text{Ln } t(x)$, es $u(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $t(x) \in \mathfrak{R}$ y $t(x) > 0$. Como $t(x) = 2 - x \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y es $t(x) = 2 - x > 0$ sólo si $x < 2$. Por tanto, $u(x) = \text{Ln}(2 - x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $x < 2$.

Como $v(x) = \text{sen}(x + 1) \equiv \text{sen } p(x)$, es $v(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $p(x) = (x + 1) \in \mathfrak{R}$, lo que sucede para todo "x", pues $p(x) \equiv$ polinomio. Además, es $\text{sen}(x + 1) \neq 0$ siempre que $x + 1 \neq k \cdot \pi$ ($\Rightarrow x \neq k \cdot \pi - 1$), siendo "k" un número entero cualquiera.

En definitiva: $\text{Dom.}f_5 = \{x \in \mathfrak{R} / x < 2, x \neq k \cdot \pi - 1\}$.

FONEMATO 1.18.5

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1) f_1(x) = \frac{x+3}{7+\log_5 x} ; 2) f_2(x) = \sqrt[8]{x-5} ; 3) f_3(x) = \frac{\text{Ln}(x-4)}{\cos x}$$

$$4) f_4(x) = \sqrt[4]{15-3x} ; 5) f_5(x) = f_1(x) + 7.f_2(x) - 3.f_3(x) + 9.f_4(x)$$

SOLUCIÓN

$$1) \text{ Es } f_1(x) = \frac{x+3}{7+\log_5 x} \equiv \frac{m(x)}{n(x)} \in \mathfrak{R} \text{ sólo si:}$$

$$m(x) \in \mathfrak{R} ; n(x) \in \mathfrak{R} ; n(x) \neq 0$$

Como $m(x) = x + 3 \equiv$ polinomio, es $m(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x".

Como $n(x) = 7 + \log_5 x$ es suma de una constante y de una función logarítmica, es $n(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x" tal que $\log_5 x \in \mathfrak{R}$, lo que sucede sólo si $x > 0$.

Además, $n(x)$ sólo se anula si $x = 1/5^7$:

$$n(x) = 7 + \log_5 x = 0 \Rightarrow \log_5 x = -7 \Rightarrow x = 5^{-7} = 1/5^7$$

En definitiva: $\text{Dom.}f_1 = \{x \in \mathfrak{R} / x > 0, x \neq 1/5^7\}$.

2) Como $f_2(x) = \sqrt[8]{x-5} \equiv \sqrt[\text{par}]{g(x)}$, es $f_2(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $g(x) \in \mathfrak{R}$ y $g(x) \geq 0$. Como $g(x) = x - 5 \equiv$ polinomio, es $g(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y $g(x) = x - 5 \geq 0$ sólo si $x \geq 5$. Por tanto: $\text{Dom.}f_2 = \{x \in \mathfrak{R} / x \geq 5\}$.

$$3) \text{ Es } f_3(x) = \frac{\text{Ln}(x-4)}{\cos x} \equiv \frac{u(x)}{v(x)} \in \mathfrak{R} \text{ sólo si:}$$

$$u(x) \in \mathfrak{R} ; v(x) \in \mathfrak{R} ; v(x) \neq 0$$

Como $u(x) = \text{Ln}(x-4) \equiv \text{Ln } t(x)$, es $u(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $t(x) \in \mathfrak{R}$ y $t(x) > 0$. Como $t(x) = x - 4 \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y es $t(x) = x - 4 > 0$ sólo si $x > 4$. Por tanto, $u(x) = \text{Ln}(x-4) \in \mathfrak{R}$ sólo si $x > 4$.

Como $v(x) = \cos x \equiv \cos p(x)$, es $v(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $p(x) = x \in \mathfrak{R}$, lo que sucede para todo "x", pues $p(x) \equiv$ polinomio. Además, $\cos x \neq 0$ si $x \neq (2k+1).\pi/2$, siendo "k" un número entero cualquiera.

En definitiva: $\text{Dom.}f_3 = \{x \in \mathfrak{R} / x > 4, x \neq (2k+1).\pi/2\}$.

4) Como $f_4(x) = \sqrt[4]{15-3x} \equiv \sqrt[\text{par}]{h(x)}$, es $f_4(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $h(x) \in \mathfrak{R}$ y $h(x) \geq 0$. Como $h(x) = 15 - 3x \equiv$ polinomio es $h(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x"; y sucede que $h(x) = 15 - 3x \geq 0$ sólo si $x \leq 5$. Por tanto: $\text{Dom.}f_4 = \{x \in \mathfrak{R} / x \leq 5\}$.

5) Como la función f_5 es suma de otras funciones, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos; o sea:

$$\begin{aligned} \text{Dom.}f_5 &= \{x \in \mathfrak{R} / x > 0, x \neq 1/5^7, x \geq 5, x > 4, x \neq (2k+1).\pi/2, x \leq 5\} = \\ &= \{x \in \mathfrak{R} / x = 5\} \end{aligned}$$

FONEMATO 1.18.6

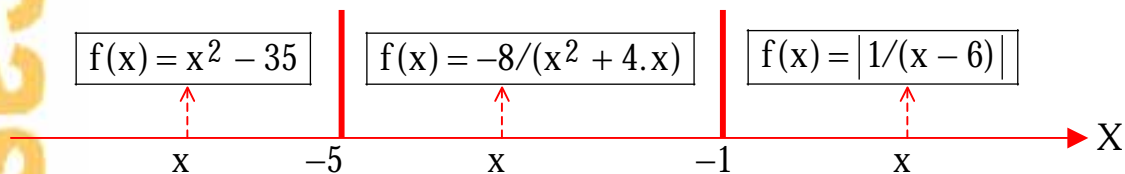
Determinése el dominio de definición de la función $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 35 & \text{si } x \leq -5 \\ -8/(x^2 + 4 \cdot x) & \text{si } -5 < x < -1 \\ |1/(x - 6)| & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



SOLUCIÓN

Por primera vez encontramos una función "f" definida a intervalos, es decir, al contrario de lo sucedido con todas las funciones vistas hasta ahora, la expresión matemática del número real "f(x)" que la función "f" asocia al número real "x" no es la misma para todos los valores de "x", pues **la recta real ampliada se particiona en diversos intervalos disjuntos** (en nuestro caso la partición es $\mathcal{R} = (-\infty; -5] \cup (-5; -1) \cup [-1; +\infty)$) **y la expresión matemática de "f(x)" es una u otra dependiendo de que "x" pertenezca a uno u otro de dichos intervalos.**



Por ejemplo:

- * como $x = -6 \in (-\infty; -5]$ es $f(-6) = (-6)^2 - 35 = 1$
- * como $x = -2 \in (-5; -1)$ es $f(-2) = -8/((-2)^2 + 4 \cdot (-2)) = 2$
- * como $x = 4 \in [-1; +\infty)$ es $f(4) = |1/(4 - 6)| = 1/2$

Para determinar el dominio de definición de la función "f" iremos viendo qué sucede en cada uno de los intervalos en que se ha particionado la recta real.

- 1) Si $x \in (-\infty; -5]$ es $f(x) = x^2 - 35 \equiv$ polinomio $\Rightarrow f(x) \in \mathcal{R}, \forall x \in (-\infty; -5]$.
- 2) Si $x \in (-5; -1)$ es $f(x) = -8/(x^2 + 4 \cdot x) \equiv$ cociente de polinomios, por lo que es $f(x) \in \mathcal{R}$ en los puntos "x" del intervalo $(-5; -1)$ que no anulen el denominador $x^2 + 4 \cdot x$, y como éste se anula sólo si $x = -4 \in (-5; -1)$ y $x = 0 \notin (-5; -1)$, resulta que si $x \in (-5; -1)$ es $f(x) \in \mathcal{R}$ si $x \neq -4$.
- 3) Si $x \in [-1; +\infty)$ es $f(x) = |1/(x - 6)| \equiv |u(x)|$, por lo que $f(x) \in \mathcal{R}$ en todos los puntos "x" del intervalo $[-1; +\infty)$ tales que $u(x) \in \mathcal{R}$. Como $u(x) = 1/(x - 6) \equiv$ cociente de polinomios, es $u(x) \in \mathcal{R}$ siempre que $x \neq 6$ (pues $x = 6$ es el único punto del intervalo $[-1; +\infty)$ que anula al denominador $x - 6$).

• En definitiva, el dominio de definición de "f" es:

$$\text{Dom.} f = \{x \in \mathcal{R} / f(x) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{R} / x \neq -4, x \neq 6\}$$

FONEMATO 1.18.7

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1) f(x) = \log_4 (x^3 - 3.x^2 + 2.x) ; 2) g(x) = \sqrt[8]{x^4 - 10.x^2 + 9}$$

SOLUCIÓN

1) Es $f(x) = \log_4 (x^3 - 3.x^2 + 2.x) \equiv \log_4 u(x) \in \mathfrak{R}$ sólo si $u(x) \in \mathfrak{R}$ y $u(x) > 0$. Como $u(x) \equiv$ polinomio, es $u(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x".

Pero la expresión matemática de $u(x) = x^3 - 3.x^2 + 2.x$ es lo bastante complicada como para que, con lo que sabemos, nos resulte imposible determinar todos los puntos "x" tales que $u(x) = x^3 - 3.x^2 + 2.x > 0$. Por tanto, no somos capaces de determinar el dominio de definición de la función "f".



¡Puaf! ... hasta que hasta que no aprenda a estudiar el signo de $u(x)$ no siempre podré determinar todos los puntos "x" tales que $f(x) = \log_k u(x) \in \mathfrak{R}$

Tu fino olfato matemático sin duda ya te ha hecho tomar conciencia de la gravedad y patetismo de nuestra situación: podemos averiguar si $f(x) \in \mathfrak{R}$ para cada valor concreto de "x", por ejemplo:

$$* f(0) = \log_4 (0^3 - 3.0^2 + 2.0) = \log_4 0 \notin \mathfrak{R}$$

$$* f(5) = \log_4 (5^3 - 3.5^2 + 2.5) = \log_4 60 \in \mathfrak{R}$$

pero como todavía no somos capaces de determinar todos los puntos "x" tales que $u(x) = x^3 - 3.x^2 + 2.x > 0$, nos resulta imposible determinar el dominio de definición de la función "f" tal que $f(x) = \log_4 u(x)$.

2) Es $g(x) = \sqrt[8]{x^4 - 10.x^2 + 9} \equiv \sqrt[\text{par}]{v(x)} \in \mathfrak{R}$ sólo si $v(x) \in \mathfrak{R}$ y $v(x) \geq 0$, y como $v(x) \equiv$ polinomio, es $v(x) \in \mathfrak{R}$ para todo "x".

Pero la expresión matemática de $v(x) = x^4 - 10.x^2 + 9$ es lo bastante complicada como para que, con lo poquito que sabemos, nos sea imposible determinar todos los "x" tales que $v(x) = x^4 - 10.x^2 + 9 \geq 0$. Por lo tanto, de momento no podemos determinar el dominio de definición de la función "g" tal que $g(x) = \sqrt[4]{v(x)}$



¡Vaya ruina! hasta que no aprenda a estudiar el signo de $v(x)$ no siempre podré determinar todos los puntos "x" tales que $g(x) = \sqrt[\text{par}]{v(x)} \in \mathfrak{R}$

FONEMATO 1.18.8

Determinése el dominio de definición de la función $f: \mathfrak{R} \alpha \mathfrak{R}$ tal que:

$$f(x) = (x^2 - 3.x + 2)/(x - 2)$$

SOLUCIÓN

Siempre hay algún pardillete que, al ver que el numerador $x^2 - 3.x + 2$ se anula si $x = 1$ y si $x = 2$ (por lo que $x^2 - 3.x + 2 = (x - 1).(x - 2)$), escribe:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3.x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1).(x - 2)}{x - 2} = x - 1$$

y después dice que como $f(x) = x - 1 \equiv$ polinomio, es $f(x) \in \mathfrak{R}, \forall x \in \mathfrak{R}$.

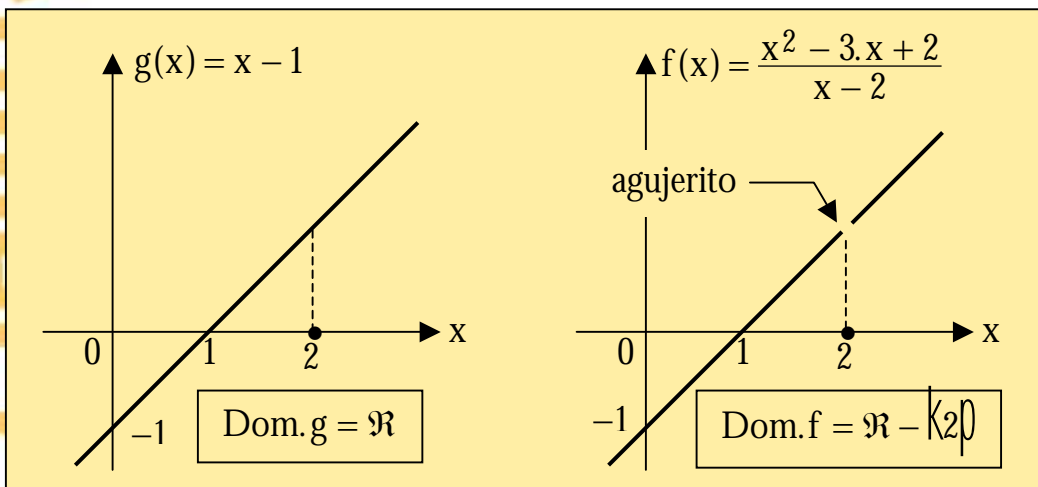
Trabajar así no es correcto, pues el resultado obtenido al dividir por el factor "x - 2" el numerador y el denominador de $(x^2 - 3.x + 2)/(x - 2)$ sólo es valido si $x \neq 2$, ya que si $x = 2$ el factor "x - 2" toma el valor cero, y todo el mundo sabe que la primera Regla Sagrada del Cálculo prohíbe dividir por cero.

Lo correcto es escribir:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3.x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1).(x - 2)}{x - 2} = x - 1$$

sólo si $x \neq 2$ ↑

O sea, si $x \neq 2$ el valor que toma la función dada "f" en el punto "x" coincide con el valor que en dicho punto "x" toma la función $g: \mathfrak{R} \alpha \mathfrak{R}$ definida como $g(x) = x - 1$, lo que en términos geométricos significa que la gráfica de la función "f" coincide con la gráfica de la función "g" si $x \neq 2$. No así en $x = 2$, pues $f(2) = (2^2 - 3.2 + 2)/(2 - 2) = 0/0 \notin \mathfrak{R}$ y sin embargo $g(2) = 2 - 1 = 1 \in \mathfrak{R}$.

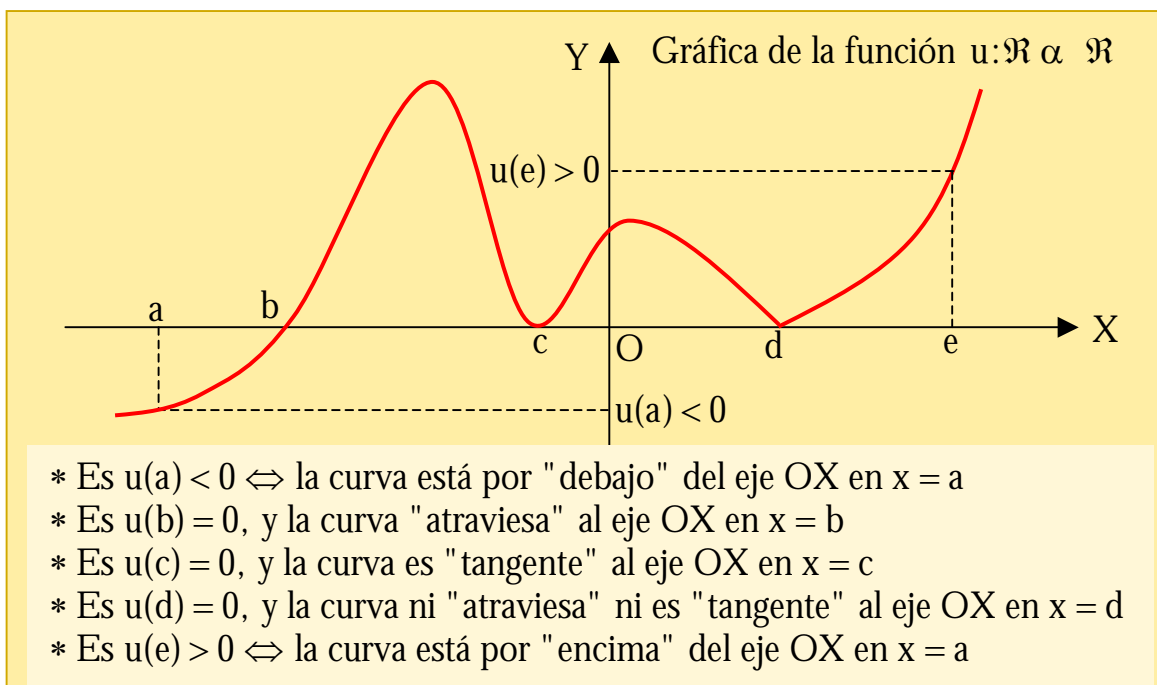
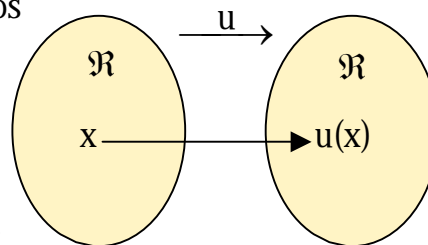


La gráfica de $g(x) = x - 1$ (polinomio de grado uno) es una recta, y la gráfica de $f(x) = (x^2 - 3.x + 2)/(x - 2)$ es la misma recta, salvo en $x = 2$, pues como $f(2) \notin \mathfrak{R}$, la gráfica de $f(x)$ tiene un agujerito en la vertical del punto $x = 2$.

1.19 SIGNO DE UNA FUNCIÓN

Si $u: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ es una función cuya gráfica queremos representar, aprender a estudiar el signo del número real $u(x)$ es muy importante, pues nos permitirá conocer la posición de la gráfica de "u" respecto al eje de abscisas, porque dicha gráfica está por encima del eje de abscisas en todo punto "x" tal que $u(x) > 0$,

estando por debajo de dicho eje en todo punto "x" tal que $u(x) < 0$. Obviamente, en los puntos "x" en que la curva "toca" al eje de abscisas sucede que $u(x) = 0$.



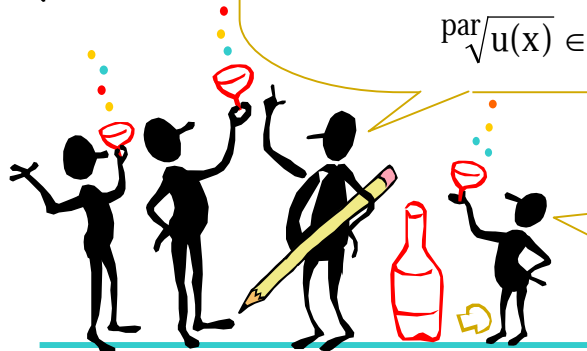
Además, y también esencial, cuando sepamos estudiar el signo del número real $u(x)$ desaparecerán las dificultades que a veces encontramos al determinar el dominio de definición de funciones de la forma

$$f(x) = \log_k u(x) ; f(x) = \sqrt[\text{par}]{u(x)}$$

pues:

$$\log_k u(x) \in \mathcal{R} \text{ sólo si } u(x) \in \mathcal{R} \text{ y } u(x) > 0$$

$$\sqrt[\text{par}]{u(x)} \in \mathcal{R} \text{ sólo si } u(x) \in \mathcal{R} \text{ y } u(x) \geq 0$$



¡Brindemos por tan notable avance!

FONEMATO 1.19.1

- 1) Estúdiese el signo de la función $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / u(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
- 2) Calcúlese el dominio de definición de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como:

$$f(x) = \log_3 (x^4 - 10x^2 + 9) ; g(x) = \sqrt{x^4 - 10x^2 + 9}$$

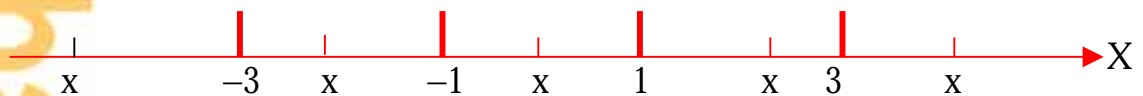
SOLUCIÓN

- 1) Determinemos los números reales "x" cuya imagen según la función polinómica "u" es el número cero; o sea, resolvamos la ecuación $u(x) = 0$:

$$u(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \pm 3 \\ \pm 1 \end{cases}$$

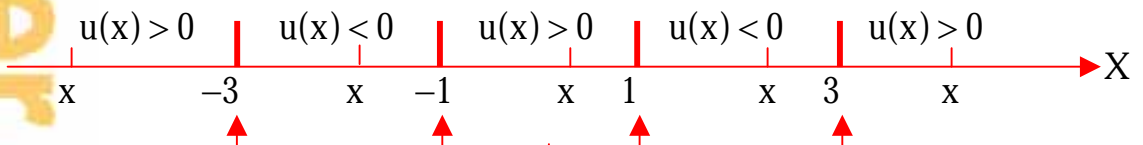
La ecuación $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ es **bicuada** (de la forma $a.x^4 + b.x^2 + c = 0$, siendo "a", "b" y "c" constantes, $a \neq 0$); haciendo $x^2 = z$ se transforma en una ecuación de segundo grado:
 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 9 = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} 9 = x^2 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Las cuatro soluciones de la ecuación $u(x) = 0$ dividen al eje de abscisas en cinco intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos "x" de cada uno de ellos.



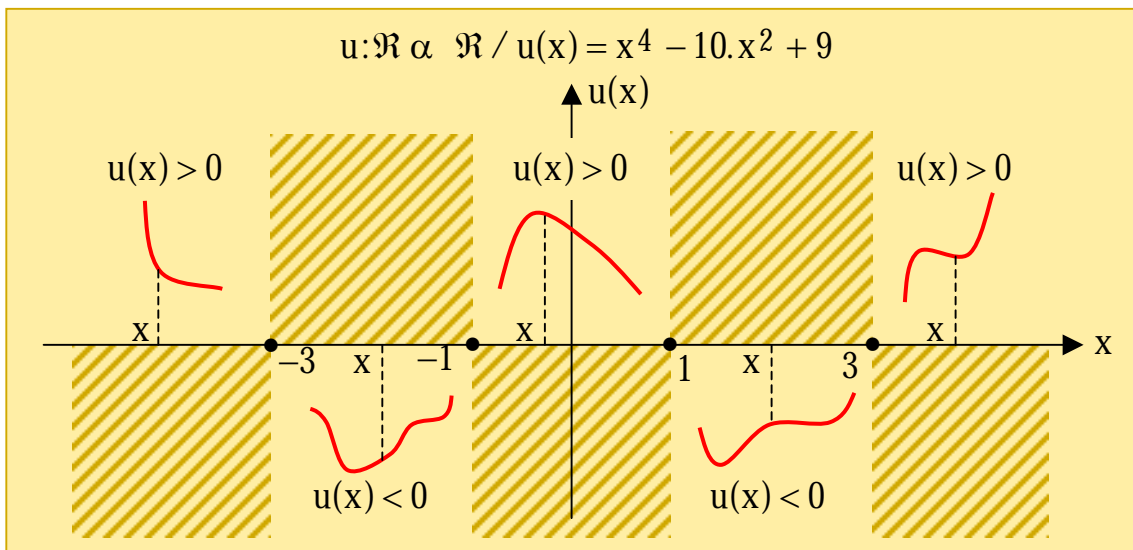
Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

- * como $u(-4) = (-4)^4 - 10(-4)^2 + 9 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x < -3$
- * como $u(-2) = (-2)^4 - 10(-2)^2 + 9 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x \in (-3; -1)$
- * como $u(0) = 0^4 - 10 \cdot 0^2 + 9 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x \in (-1; 1)$
- * como $u(2) = 2^4 - 10 \cdot 2^2 + 9 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x \in (1; 3)$
- * como $u(4) = 4^4 - 10 \cdot 4^2 + 9 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x > 3$

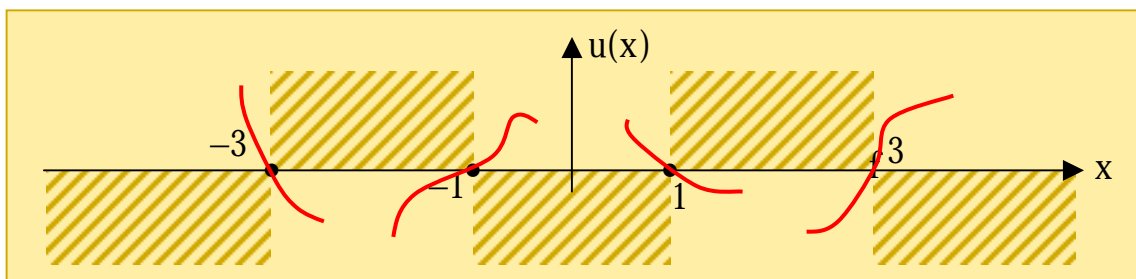


$$u(-3) = u(-1) = u(1) = u(3) = 0$$

Si nuestro objetivo fuera dibujar la gráfica de la función "u", la información que acabamos de obtener indica que la curva representativa de "u" está por encima del eje de abscisas si $x < -3$, si $x \in (-1; 1)$ y si $x > 3$; dicha curva está por debajo del eje de abscisas si $x \in (-3; -1)$ y si $x \in (1; 3)$.

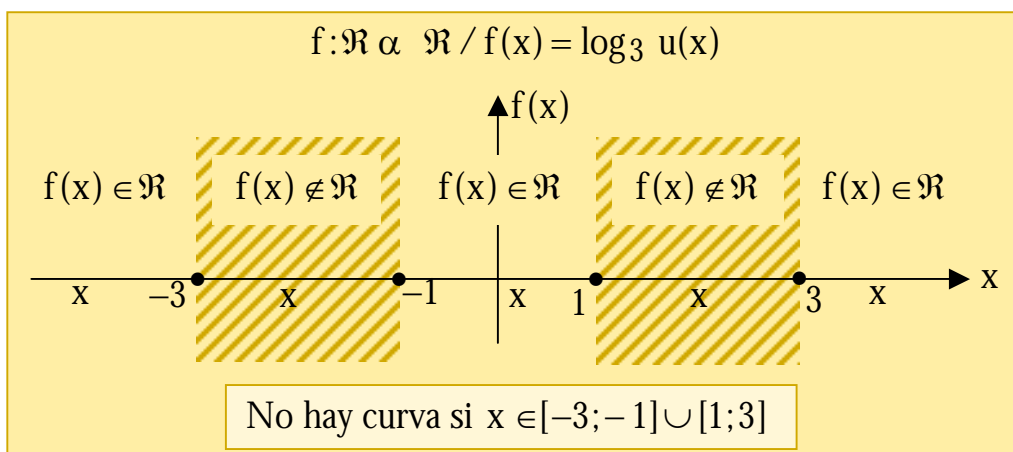


Observa: en los puntos $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$ no sólo ocurre que $u(x) = 0$ (lo que indica que en dichos puntos hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abscisas), también ocurre algo que en general no tiene por qué suceder: como $u(x)$ "cambia de signo" en $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$, el "contacto" entre la gráfica de "u" y el eje de abscisas es tal que la gráfica "atraviesa" dicho eje (lo corta).



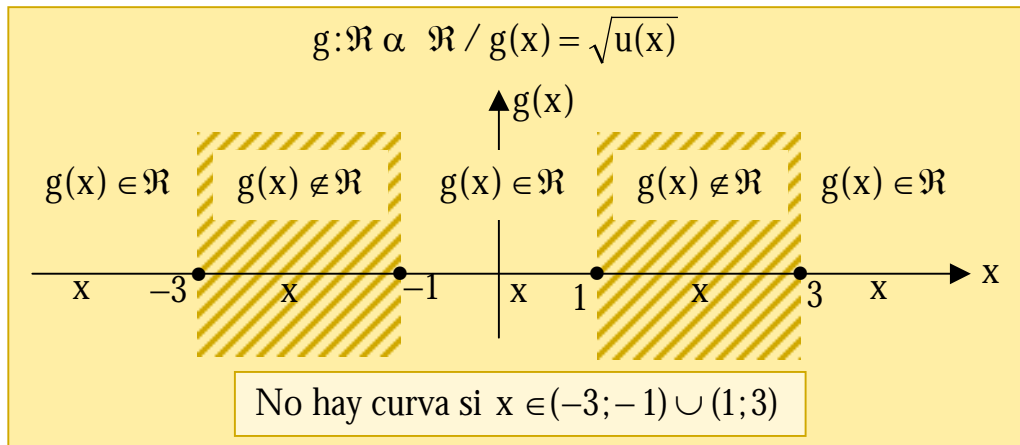
2) Siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_3 (x^4 - 10x^2 + 9) \equiv \log_3 u(x)$, su dominio de definición es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } f &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \in \mathbb{R}, u(x) > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)\} \end{aligned}$$

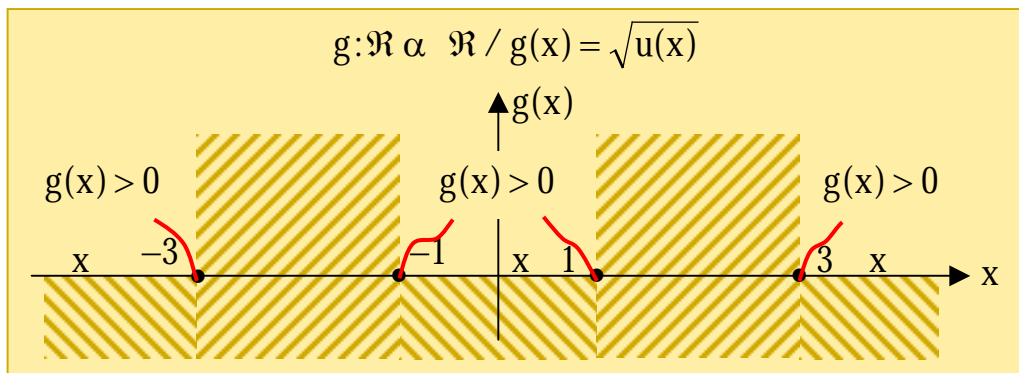


- Siendo $g: \mathcal{R} \alpha \mathcal{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{x^4 - 10x^2 + 9} \equiv \sqrt{u(x)}$, su dominio de definición es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } g &= \{x \in \mathcal{R} / g(x) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{R} / u(x) \in \mathcal{R}, u(x) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{R} / x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)\} \end{aligned}$$



Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, consideramos que lleva el signo "+"; así, si $g(x) = \sqrt{u(x)} \in \mathcal{R}$, es $g(x) = \sqrt{u(x)} \geq 0$, por lo que la gráfica de la función "g" no está por debajo del eje de abscisas. En los puntos $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en esos puntos hay "contacto" entre dicha gráfica y el eje de abscisas.



FONEMATO 1.19.2

- 1) Estúdiese el signo de la función $u: \mathcal{R} \alpha \mathcal{R} / u(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
- 2) Calcúlese el dominio de definición de las funciones $f: \mathcal{R} \alpha \mathcal{R}$ y $g: \mathcal{R} \alpha \mathcal{R}$ definidas como $f(x) = \log_7 u(x)$ y $g(x) = \sqrt{u(x)}$.

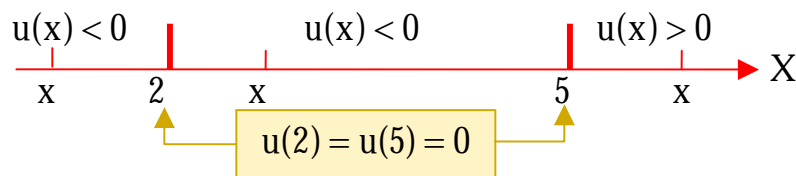
SOLUCIÓN

- 1) Determinemos los números reales "x" cuya imagen según la función polinómica "u" es el número cero; o sea, resolvamos la ecuación $u(x) = 0$:

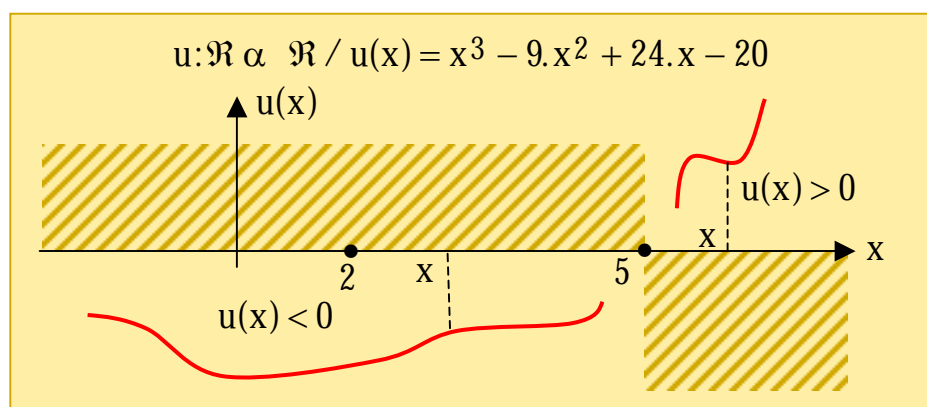
$$u(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 5 \\ 2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Las soluciones $x = 2$ y $x = 5$ de la ecuación $u(x) = 0$ dividen al eje de abscisas en tres intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

- * como $u(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 20 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x < 2$
- * como $u(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 20 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x \in (2;5)$
- * como $u(7) = 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 24 \cdot 7 - 20 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x > 5$

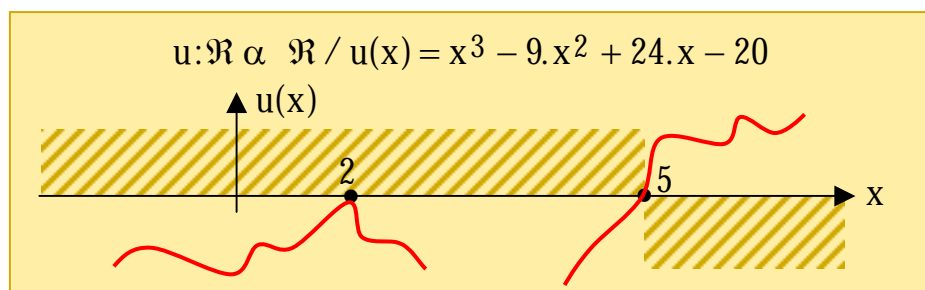


Observa: si nuestro objetivo fuera dibujar la gráfica de la función "u", la información que acabamos de obtener indica que la curva representativa de "u" está por encima del eje de abscisas si $x > 5$, y está por debajo de dicho eje si $x \in (-\infty;2)$ y si $x \in (2;5)$.



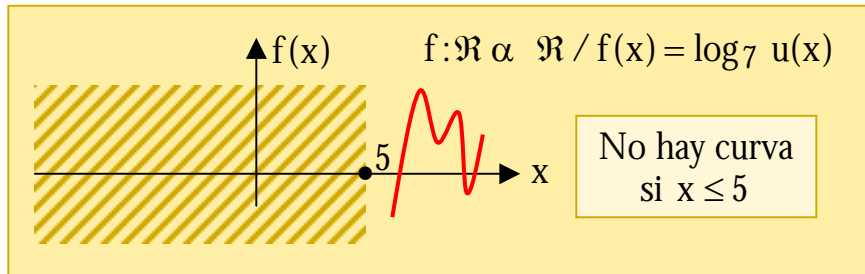
En el punto $x = 5$ ocurre que $u(5) = 0$ (\Rightarrow en $x = 5$ hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abscisas) y además $u(x)$ "cambia de signo" en $x = 5$; por tanto, la gráfica "atraviesa" a dicho eje (lo corta).

En el punto $x = 2$ ocurre que $u(2) = 0$ (\Rightarrow en $x = 2$ hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abscisas), pero como $u(x)$ no "cambia de signo" en $x = 2$, dicha gráfica no "atraviesa" a dicho eje (no lo corta).



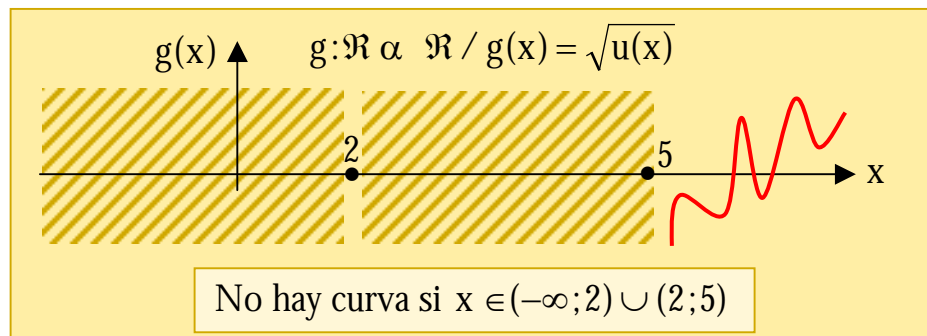
2) Siendo $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que $f(x) = \log_7 (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \equiv \log_7 u(x)$, su dominio de definición es:

$$\text{Dom. } f = \{x \in \mathcal{R} / f(x) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{R} / u(x) \in \mathcal{R}, u(x) > 0\} = \{x \in \mathcal{R} / x > 5\}$$



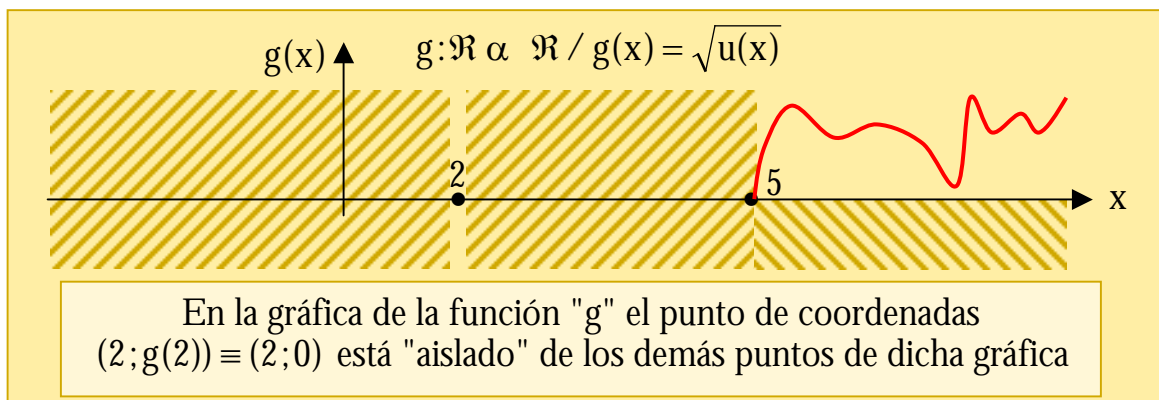
• Siendo $g(x) = \sqrt{x^3 - 9x^2 + 24x - 20} \equiv \sqrt[par]{u(x)}$, el dominio de definición de la función "g" es:

$$\text{Dom. } g = \{x \in \mathcal{R} / g(x) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{R} / u(x) \in \mathcal{R}, u(x) \geq 0\} = \{x \in \mathcal{R} / x = 2 \text{ ó } x > 5\}$$



Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, consideramos que lleva el signo "+"; así, si $g(x) = \sqrt{u(x)} \in \mathcal{R}$ es $g(x) = \sqrt{u(x)} \geq 0$, por eso la gráfica de "g" no está por debajo del eje de abscisas.

En los puntos $x = 2$ y $x = 5$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en dichos puntos hay "contacto" entre la gráfica de "g" y el eje de abscisas.



FONEMATO 1.19.3

- 1) Estúdiase el signo de la función $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / u(x) = \frac{(7+x^2) \cdot 2^x \cdot (x-6)}{(1+x^4) \cdot 5^{1+x^3}}$
- 2) Calcúlese el dominio de definición de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como:

$$f(x) = \text{Ln } u(x) ; g(x) = \sqrt{u(x)}$$

SOLUCIÓN

- 1) El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales

$$h_1(x) = 7 + x^2 ; h_2(x) = 2^x ; h_3(x) = x - 6$$

$$h_4(x) = 1 + x^4 ; h_5(x) = 5^{1+x^3}$$

siendo evidente que:

$$h_1(x) = 7 + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} ; h_4(x) = 1 + x^4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

No lo olvides: si $a > 0$
es $a^{v(x)} > 0, \forall x / v(x) \in \mathbb{R}$

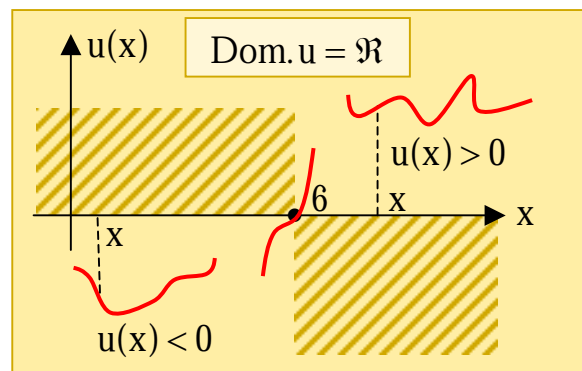


Como también sucede que:

$$h_2(x) = 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$h_5(x) = 5^{1+x^3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces resulta un chollo, pues el signo del número real $u(x)$ es el que tiene el número real $h_3(x) = x - 6$, y éste es positivo si $x > 6$, es negativo si $x < 6$ y es cero si $x = 6$.



En el punto $x = 6$ ocurre que $u(6) = 0$ (\Rightarrow en $x = 6$ hay "contacto" entre la gráfica de "u" y el eje de abscisas). Como $u(x)$ "cambia de signo" en $x = 6$, dicha gráfica "atraviesa" a dicho eje (lo corta).

- 2) Siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

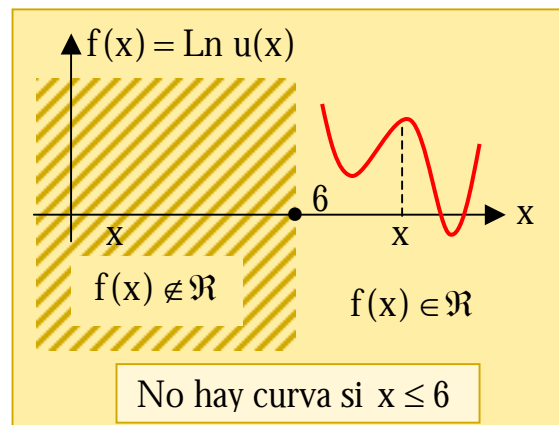
$$f(x) = \text{Ln } \frac{(7+x^2) \cdot 2^x \cdot (x-6)}{(1+x^4) \cdot 5^{1+x^3}} \equiv \text{Ln } u(x)$$

su dominio de definición es:

$$\text{Dom. } f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / u(x) \in \mathbb{R}, u(x) > 0\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x > 6\}$$



- Siendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

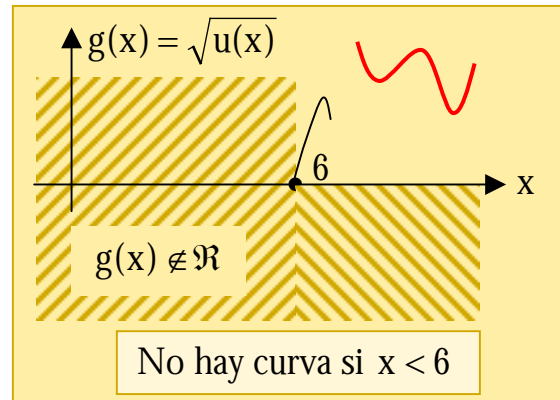
$$g(x) = \sqrt{\frac{(7+x^2) \cdot 2x \cdot (x-6)}{(1+x^4) \cdot 5x^3+1}} \equiv \text{par} \sqrt{u(x)}$$

su dominio de definición es:

$$\text{Dom. } g = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 6\}$$

Como la raíz no lleva signo delante, consideramos que lleva signo "+"; así, si $g(x) = \sqrt{u(x)} \in \mathbb{R}$ es $g(x) = \sqrt{u(x)} \geq 0$, por lo que la gráfica de "g" no está por debajo del eje de abscisas.

En el punto $x = 6$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en $x = 6$ hay "contacto" entre dicha gráfica y el eje de abscisas.



FONEMATO 1.19.4

- 1) Estúdiese el signo de la función $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $w(x) = (x-2)^4 \cdot (9-x)$
- 2) Calcúlese el dominio de definición de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) = \text{Ln } w(x) ; g(x) = \sqrt{w(x)}$$

SOLUCIÓN

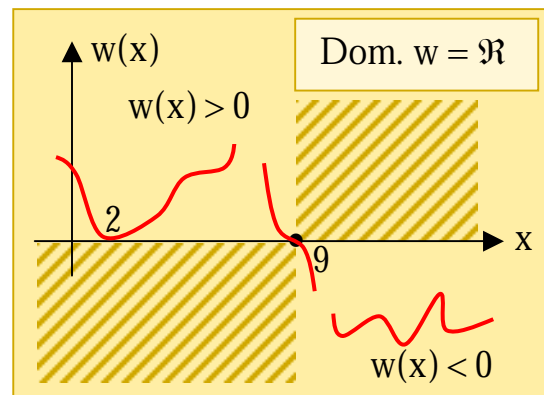
- 1) El signo del número real $w(x)$ depende del signo que tengan los números reales

$$k_1(x) = (x-2)^4 ; k_2(x) = 9-x$$

Como $k_1(x) = (x-2)^4$ toma valores positivos si $x \neq 2$ y se anula sólo si $x = 2$, el signo de $w(x)$ es el de $k_2(x) = 9-x$, salvo si $x = 2$, pues en este punto se anula $w(x)$ pero no se anula $k_2(x)$.

Resulta evidente que $k_2(x) = 9-x$ toma valores positivos o negativos según sea $x < 9$ ó $x > 9$, y se anula sólo si $x = 9$.

Como $w(9) = 0$ y $w(x)$ "cambia de signo" en $x = 9$, la gráfica de la función "w" atraviesa al eje de abscisas en $x = 9$. Como $w(2) = 0$ y $w(x)$ no "cambia de signo" en $x = 2$, la gráfica de "w" no atraviesa al eje de abscisas en $x = 2$.

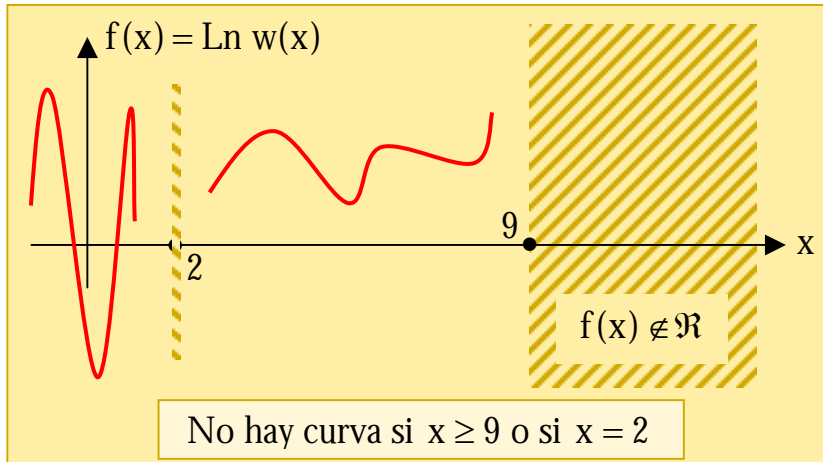


2) Siendo $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

$$f(x) = \text{Ln}(x - 2)^4 \cdot (9 - x) \equiv \text{Ln } w(x)$$

su dominio de definición es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } f &= \{x \in \mathcal{R} / f(x) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{R} / w(x) \in \mathcal{R}, w(x) > 0\} = \\ &= \{x \in \mathcal{R} / x < 9, x \neq 2\} \end{aligned}$$



• Siendo $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tal que

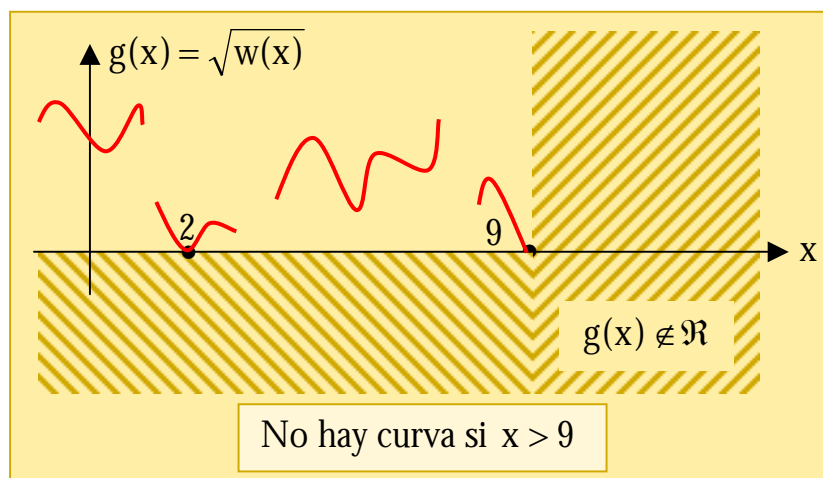
$$g(x) = \sqrt{(x - 2)^4 \cdot (9 - x)} \equiv \sqrt[par]{w(x)}$$

su dominio de definición es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } g &= \{x \in \mathcal{R} / g(x) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{R} / w(x) \in \mathcal{R}, w(x) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathcal{R} / x \leq 9\} \end{aligned}$$

Como la raíz no lleva signo delante, consideramos que lleva el signo "+"; así, si $g(x) = \sqrt{w(x)} \in \mathcal{R}$ es $g(x) = \sqrt{w(x)} \geq 0$, por lo que la gráfica de la función "g" no está por debajo del eje de abscisas.

En los puntos $x = 2$ y $x = 9$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en dichos puntos hay "contacto" entre dicha gráfica y el eje de abscisas.



FONEMATO 1.19.5

Estúdiense el signo de las siguientes funciones:

1) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_1(x) = 2x^2 - 14x + 10$

2) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_2(x) = x^2 - 6x + 9$

3) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_3(x) = x^2 + x + 1$

4) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_4(x) = -x^2 + 4x$

5) $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_5(x) = -x^2 + 2x - 1$

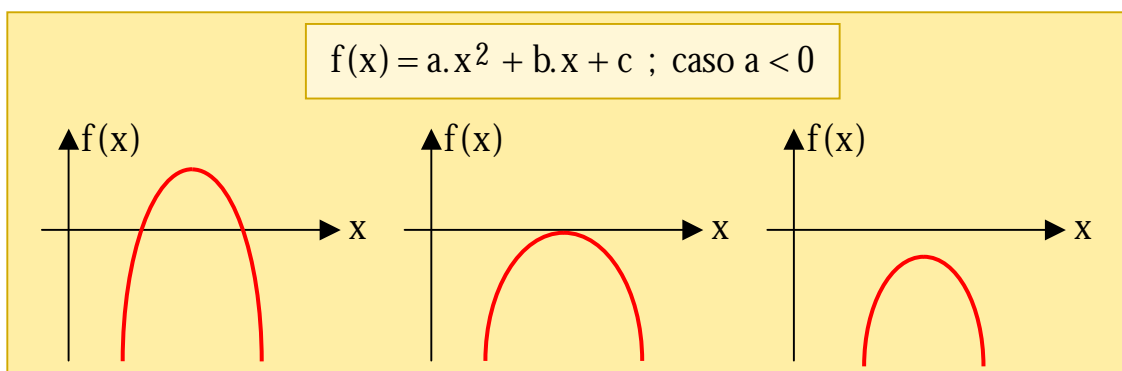
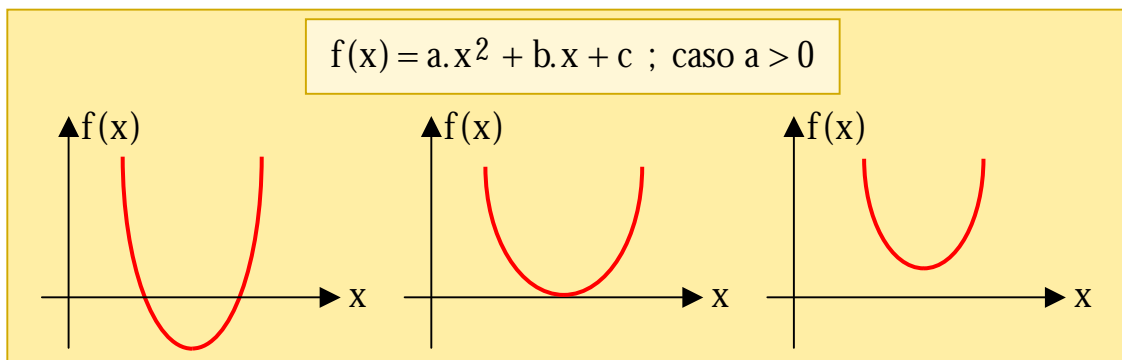
6) $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_6(x) = -2x^2 + 2x - 1$

SOLUCIÓN

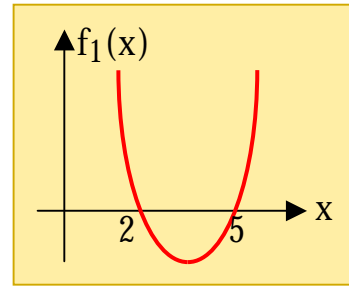
Las seis funciones dadas son polinomios de grado 2, y todo el mundo sabe que si $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ (siendo "a", "b" y "c" constantes y $a \neq 0$), la gráfica de "f" es una parábola con los "cuernos" hacia arriba o hacia abajo según sea $a > 0$ ó $a < 0$.

Independientemente de cómo tenga los "cuernos", las soluciones de la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ nos dirán si la parábola y el eje de abcisas se "tocan" o no; en concreto:

- 1) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas $x = x_0$ y $x = x_1$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.
- 2) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ tiene una raíz real doble $x = x_0$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.
- 3) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



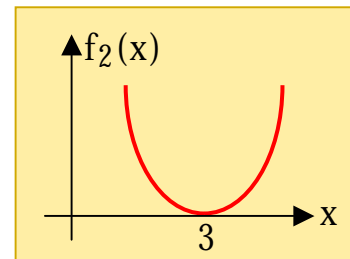
1) La gráfica de la función $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = 2x^2 - 14x + 10$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba (el coeficiente de x^2 es positivo). Como las soluciones de la ecuación $2x^2 - 14x + 10 = 0$ son reales y distintas ($x = 2$ y $x = 5$), la parábola corta al eje de abscisas en esos puntos, por lo que $f_1(x) > 0$ si $x < 2$ o si $x > 5$, y $f_1(x) < 0$ si $x \in (2; 5)$.



2) La gráfica de la función $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_2(x) = x^2 - 6x + 9$$

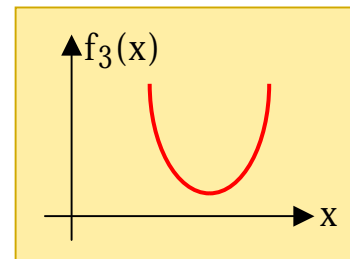
es una parábola con "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo). Como la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$ tiene una raíz real doble ($x = 3$), la parábola es tangente al eje de abscisas en ese punto, por lo que $f_2(x) > 0$ si $x \neq 3$, y $f_2(x) = 0$ si $x = 3$.



3) La gráfica de la función $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_3(x) = x^2 + x + 1$$

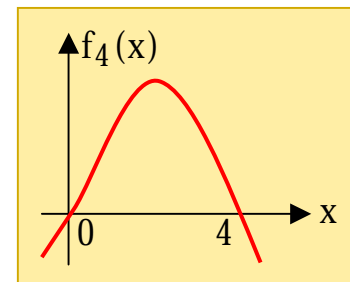
es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo). Como la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abscisas, por lo que $f_3(x) > 0$ para todo valor de "x".



4) La gráfica de la función $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_4(x) = -x^2 + 4x$$

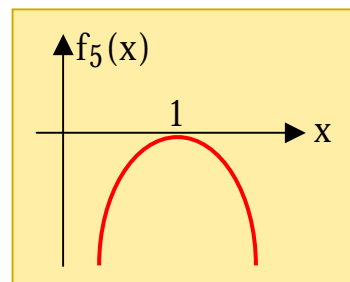
es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo). Como las soluciones de $-x^2 + 4x = 0$ son reales y distintas ($x = 0$ y $x = 4$) la parábola corta al eje de abscisas en esos puntos; así, $f_4(x) > 0$ si $x \in (0; 4)$, y $f_4(x) < 0$ si $x < 0$ o si $x > 4$.



5) La gráfica de la función $f_5: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_5(x) = -x^2 + 2x - 1$$

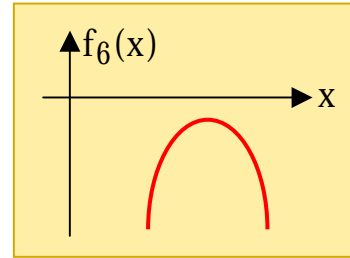
es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo). Como sucede que la ecuación $-x^2 + 2x - 1 = 0$ tiene una raíz real doble ($x = 1$), la parábola es tangente al eje de abscisas en ese punto; así, $f_5(x) < 0$ si $x \neq 1$, y $f_5(x) = 0$ si $x = 1$.



6) La gráfica de la función $f_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_6(x) = -2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$$

es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo). Como la ecuación $-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1 = 0$ carece de raíces reales la parábola no "toca" al eje de abscisas, por lo que $f_6(x) < 0$ para todo valor de "x".



Toma buena muy nota del asunto de las parábolas, porque serán innumerables las veces que estudiarás el signo de un polinomio de grado 2.

No es de recibo que para estudiar el signo de $f_4(x) = -x^2 + 4 \cdot x$ (polinomio de grado dos) necesites montar el siguiente "pollo":

$$-x^2 + 4 \cdot x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

y después asignes a "x" un valor concreto en cada uno de los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 4)$ y $(4; +\infty)$:

$$* f_4(-2) = -(-2)^2 + 4 \cdot (-2) < 0 \Rightarrow f_4(x) < 0, \forall x < 0$$

$$* f_4(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 > 0 \Rightarrow f_4(x) > 0, \forall x \in (0; 4)$$

$$* f_4(5) = -5^2 + 4 \cdot 5 < 0 \Rightarrow f_4(x) < 0, \forall x > 4$$



FONEMATO 1.19.6

Determinése el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1) f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_1(x) = \text{Ln}(x^2 - 4)$$

$$2) f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_2(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 2 \cdot x + 3}$$

$$3) f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_3(x) = \log_7(x^2 - 2 \cdot x + 2)$$

SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = \text{Ln}(x^2 - 4) \equiv \text{Ln } u_1(x)$, es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } f_1 &= \{x \in \mathbb{R} / f_1(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u_1(x) \in \mathbb{R}, u_1(x) > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)\} \end{aligned}$$

La gráfica de $u_1(x) = x^2 - 4$ es una parábola con cuernos hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo) que corta al eje de abscisas en los puntos $x = 2$ y $x = -2$ (pues $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ó $x = -2$). Por tanto, es $u_1(x) > 0$ sólo si $x < -2$ ó $x > 2$.

2) Como $f_2(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 2x + 3} \equiv \text{par}\sqrt[4]{u_2(x)}$, es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } f_2 &= \{x \in \mathbb{R} / f_2(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u_2(x) \in \mathbb{R}, u_2(x) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in [-1; 3]\} \end{aligned}$$

La gráfica de $u_2(x) = -x^2 + 2x + 3$ es una parábola con cuernos hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo) que corta al eje de abscisas en los puntos $x = -1$ y $x = 3$, (pues $-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ó $x = 3$).
Por tanto, es $u_2(x) \geq 0$ sólo si $x \in [-1; 3]$

3) Como $f_3(x) = \log_7(x^2 - 2x + 2) \equiv \text{Ln } u_3(x)$, es:

$$\text{Dom. } f_3 = \{x \in \mathbb{R} / f_3(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u_3(x) \in \mathbb{R}, u_3(x) > 0\} = \mathbb{R}$$

La gráfica de $u_3(x) = x^2 - 2x + 2$ es una parábola con cuernos hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo) que no "toca" al eje de abscisas (pues $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$). Por tanto, es $u(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

FONEMATO 1.19.7

1) Estúdiese el signo de $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = (x + 2)/(x^3 - 7x^2 + 10x)$

2) Calcúlese el dominio de definición de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) = \text{Ln } u(x); \quad g(x) = \sqrt{u(x)}$$

SOLUCIÓN

1) El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales

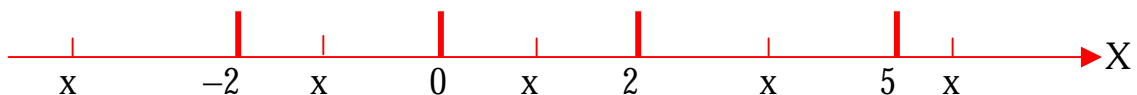
$$k_1(x) = x + 2; \quad k_2(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

Determinemos los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$k_2(x) = x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x = \begin{matrix} \mathbb{R} \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

Los puntos $x = -2, x = 0, x = 2$ y $x = 5$ dividen al eje de abscisas en cinco intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos.



Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

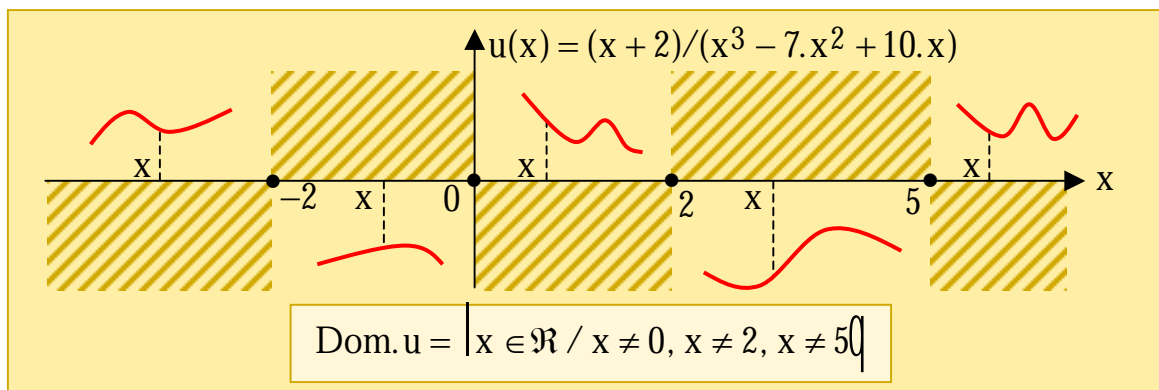
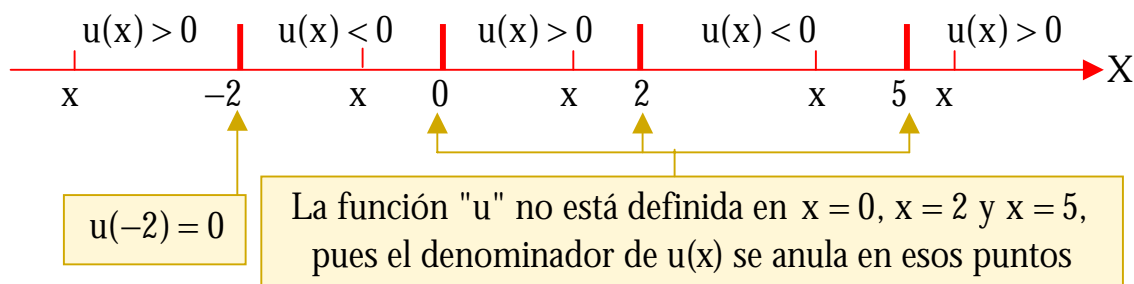
* como $u(-3) = \frac{-3+2}{(-3)^3 - 7 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3)} > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x < -2$

* como $u(-1) = \frac{-1+2}{(-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1)} < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x \in (-2; 0)$

* como $u(1) = \frac{1+2}{1^3 - 7 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1} > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x \in (0; 2)$

* como $u(3) = \frac{3+2}{3^3 - 7 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3} < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x \in (2; 5)$

* como $u(6) = \frac{6+2}{6^3 - 7 \cdot 6^2 + 10 \cdot 6} > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall x > 5$



En el punto $x = -2$ ocurre que $u(x) = 0$ (\Rightarrow en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abscisas) y $u(x)$ "cambia de signo" en $x = -2$ (\Rightarrow la gráfica de "u" atraviesa dicho eje).

2) Siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \ln u(x)$, su dominio de definición es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } f &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \in \mathbb{R}, u(x) > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2) \cup (5; +\infty)\} \end{aligned}$$

• Siendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt{\text{par}}{u(x)}$, su dominio de definición es:

$$\begin{aligned} \text{Dom. } g &= \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \in (-\infty; -2] \cup (0; 2) \cup (5; +\infty)\} \end{aligned}$$

FONEMATO 1.19.8

Estúdiese el signo de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3/(4 - x^2)$

SOLUCIÓN

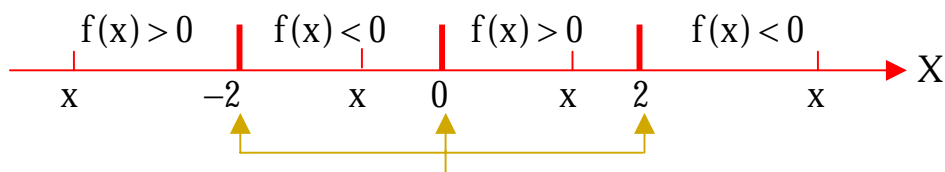
Como el signo del número real $f(x)$ depende del signo que tengan los números reales $k_1(x) = x^3$ y $k_2(x) = 4 - x^2$, determinamos los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x) = x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (triple)}$$

$$k_2(x) = 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ dividen al eje de abscisas en cuatro intervalos, y $f(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $f(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de él:

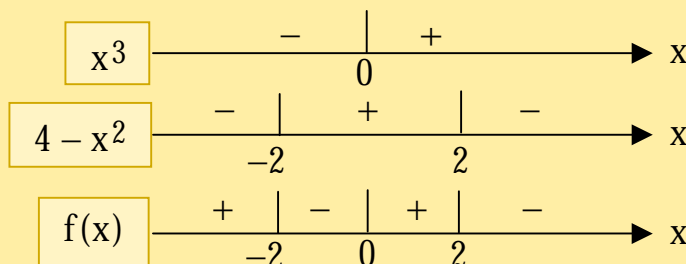
- * como $f(-3) = 27/5 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x < -2$
- * como $f(-1) = -1/3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in (-2; 0)$
- * como $f(1) = 1/3 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in (0; 2)$
- * como $f(3) = -27/5 < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in (2; +\infty)$



Es $f(0) = 0$, y "f" no está definida en $x = -2$ y $x = 2$, pues el denominador de $f(x)$ se anula en esos puntos

En el punto $x = 0$ ocurre que $f(0) = 0$ (\Rightarrow en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "f" y el eje de abscisas) y $f(x)$ "cambia de signo" en $x = 0$ (\Rightarrow la gráfica de "f" atraviesa dicho eje).

Con una función tan tontorrón como nuestra "f" debes ser capaz de estudiar el signo de $f(x)$ sin necesidad de montar el "pollo" precedente: como el numerador x^3 es positivo o negativo según que $x > 0$ ó $x < 0$ y el denominador $4 - x^2$ es negativo o positivo según que $|x| > 2$ ó $|x| < 2$, el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:



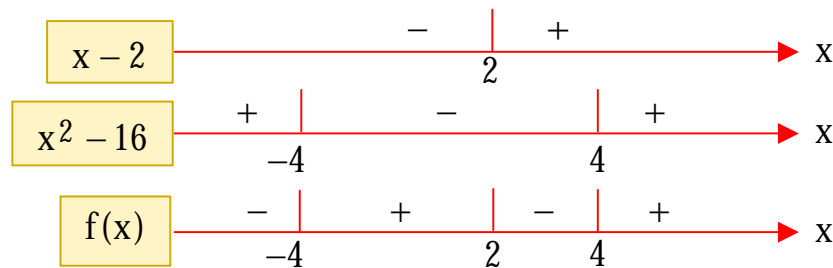
FONEMATO 1.19.9

Estúdiense el signo de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

$$1) f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}; \quad 2) f(x) = \frac{e^x \cdot (16-x^2)}{x^2-4}$$

SOLUCIÓN

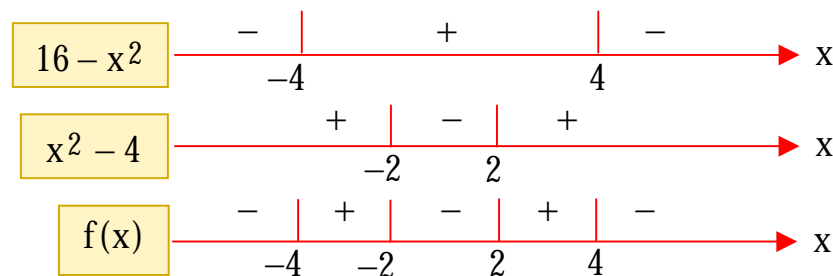
- 1) Si $f(x) = (x-2)/(x^2-16)$, como el numerador $x-2$ es positivo o negativo según que $x > 2$ ó $x < 2$ y el denominador x^2-16 es positivo o negativo según que $|x| > 4$ ó $|x| < 4$, el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:



Así, la gráfica de "f" está por debajo del eje de abscisas si $x < -4$ o si $x \in (2;4)$, y está por encima de dicho eje si $x \in (-4;-2)$ o si $x > 4$.

En el punto $x=2$ ocurre que $f(2)=0$ (\Rightarrow en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "f" y el eje de abscisas) y $f(x)$ "cambia de signo" en $x=2$ (\Rightarrow la gráfica de "f" atraviesa a dicho eje). La función "f" no está definida en los puntos $x=4$ y $x=-4$, pues en ellos se anula el denominador.

- 2) Si $f(x) = e^x \cdot (16-x^2)/(x^2-4)$, sucede que el factor e^x siempre toma valores positivos, el factor $16-x^2$ es positivo o negativo según que $|x| < 4$ ó $|x| > 4$, y el factor x^2-4 es positivo o negativo según que $|x| > 2$ ó $|x| < 2$. Por tanto, el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:



Así, la gráfica de "f" está por encima del eje de abscisas si $x \in (-4;-2)$ y si $x \in (2;4)$, y está por debajo de dicho eje si $x < -4$, si $x \in (-2;2)$ y si $x > 4$.

La gráfica de "f" corta al eje de abscisas en los puntos $x=-4$ y $x=4$, pues $f(-4)=f(4)=0$ y $f(x)$ "cambia de signo" en dichos puntos. La función "f" no está definida en los puntos $x=2$ y $x=-2$, pues en ellos se anula el denominador.

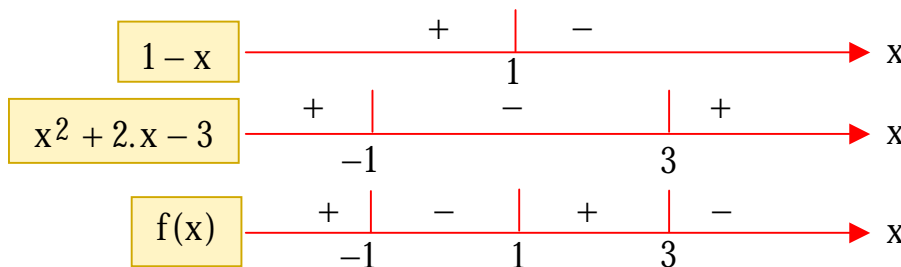
FONEMATO 1.19.10

Estúdiense el signo de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

$$1) f(x) = \frac{1-x}{x^2+2x-3}; \quad 2) f(x) = \frac{7-x^2}{x^2+x+1}; \quad 3) f(x) = \frac{x^2-2x+5}{-x^2+4x-5}$$

SOLUCIÓN

1) Si $f(x) = (1-x)/(x^2+2x-3)$, como el numerador $1-x$ es negativo o positivo según que $x > 1$ ó $x < 1$, y el denominador $u(x) = x^2+2x-3$ es negativo si $x \in (-1; 3)$ y positivo si $x < -1$ ó $x > 3$ (pues $u(x) = x^2+2x-3$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba que corta al eje de abscisas en los puntos $x = -1$ y $x = 3$), el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:



Así, la gráfica de "f" está por encima del eje de abscisas si $x < -1$ o si $x \in (1; 3)$, y está por debajo de dicho eje si $x \in (-1; 1)$ o si $x > 3$.

En el punto $x = 1$ ocurre que $f(1) = 0$ (\Rightarrow en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "f" y el eje de abscisas) y $f(x)$ "cambia de signo" en $x = 1$ (\Rightarrow la gráfica de "f" atraviesa dicho eje). La función "f" no está definida en los puntos $x = -1$ y $x = 3$, pues en ellos se anula el denominador.

2) Si $f(x) = (7-x^2)/(x^2+x+1)$, como el factor $u(x) = x^2+x+1$ sólo toma valores positivos ($u(x) = x^2+x+1$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba que no corta al eje de abscisas, pues $u(x) = 0$ carece de soluciones reales), el signo de $f(x)$ es el de $7-x^2$, que es positivo si $|x| < \sqrt{7}$ y negativo si $|x| > \sqrt{7}$. Así, la gráfica de "f" está encima del eje de abscisas si $|x| < \sqrt{7}$, y está debajo de dicho eje si $|x| > \sqrt{7}$. Dicha gráfica corta al eje de abscisas en $x = -\sqrt{7}$ y $x = \sqrt{7}$, pues $f(-\sqrt{7}) = f(\sqrt{7}) = 0$ y $f(x)$ "cambia de signo" en dichos puntos.

3) Es $f(x) = (x^2-2x+5)/(-x^2+4x-5) < 0$, pues $u(x) = x^2-2x+5$ siempre es positivo ($u(x) = x^2-2x+5$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba que no corta al eje de abscisas, pues $u(x) = 0$ carece de soluciones reales), y $v(x) = -x^2+4x-5$ siempre es negativo ($v(x) = -x^2+4x-5$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo que no corta al eje de abscisas, pues $v(x) = 0$ carece de soluciones reales). Por tanto, la gráfica de "f" está por debajo del eje de abscisas en todos los puntos.