Tema 1

Funciones reales de variable real

FONEMATO 1.19.11

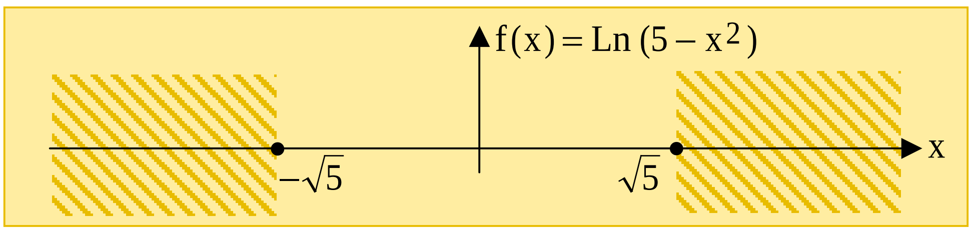
Determínese el dominio de definición y estúdiese el signo de la función $f:\Re \to \Re$ tal que $f(x)=\text{Ln}\,(5-x^2)$.

SOLUCIÓN

Como $f(x)=\text{Ln}\,(5-x^2)\equiv \text{Ln}\,u(x)$, es:

$$\text{Dom.}f=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)>0\}=$$
$$=\{x\in\Re\ /\ x\in(-\sqrt{5};\sqrt{5})\}$$

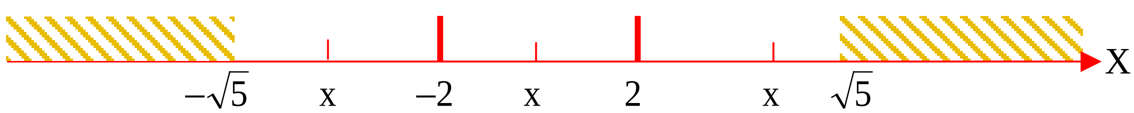
$u(x)=5-x^2$ es un polinomio cuya gráfica es una parábola con cuernos hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es <0) que corta al eje de abcisas en $x=\pm\sqrt{5}$ (pues $5-x^2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$) $\Rightarrow$ $u(x)>0$ sólo si $x\in(-\sqrt{5};\sqrt{5})$



Para estudiar el signo de $f(x)=\text{Ln}\,(5-x^2)$ cuando $x\in(-\sqrt{5};\sqrt{5})$, determinamos los valores de "x" que anulan a $f(x)$; o sea, resolvemos la ecuación $f(x)=0$:

$$f(x)=\text{Ln}\,(5-x^2)=0\Rightarrow 5-x^2=1\Rightarrow x=\pm 2$$

Los puntos $x=-2$ y $x=2$ dividen al intervalo $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$ en tres intervalos, y $f(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos.



Para averiguar el signo de $f(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de él:

- como $f(-2'1)=\text{Ln}\,(5-(-2'1)^2)=\text{Ln}\,0'59<0\Rightarrow f(x)<0,\ \forall\ x\in(-\sqrt{5};-2)$
- como $f(0)=\text{Ln}\,(5-0^2)=\text{Ln}\,5>0\Rightarrow f(x)>0,\ \forall\ x\in(-2;2)$
- como $f(2'1)=\text{Ln}\,(5-2'1^2)=\text{Ln}\,0'59<0\Rightarrow f(x)<0,\ \forall\ x\in(2;\sqrt{5})$

En definitiva, la gráfica de "f" está por encima del eje de abcisas si $x\in(-2;2)$, y está por debajo de dicho eje si $x\in(-\sqrt{5};-2)\cup(2;\sqrt{5})$.

Como $f(x)$ se anula y cambia de signo en $x=2$ y en $x=-2$, la gráfica de "f" corta al eje de abcisas en dichos puntos.

FONEMATO 1.19.12

Determínese el dominio de definición y estúdiese el signo de la función $f:\Re \to \Re$ tal que $f(x)=\text{Ln}\,((x^3+2.x^2)/(4-x))$.

SOLUCIÓN

Como $f(x)=\text{Ln}\,((x^3+2.x^2)/(4-x))\equiv \text{Ln}\,u(x)$, es:

$$\text{Dom.f} = \{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\} = \{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)>0\} =$$
$$= \{x\in\Re\ /\ x\in(-2;0)\cup(0;4)\}$$

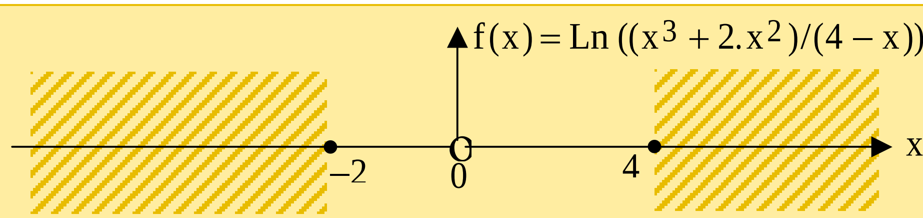
- Como $u(x)=(x^3+2.x^2)/(4-x)\equiv$ cociente de polinomios, es $u(x)\in\Re$ siempre que $x\neq 4$ (único punto en que se anula el denominador de u(x)).
- El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales $k_1(x)=x^3+2.x^2$ y $k_2(x)=4-x$, por lo que debemos determinar los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x)=x^3+2.x^2=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\ (\text{doble})\\ -2\end{cases}$$
$$k_2(x)=4-x=0\Rightarrow x=4$$

  Los puntos $x=-2$, $x=0$ y $x=4$ dividen al eje de abcisas en cuatro intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

  * como $u(-3)<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x<-2$
  * como $u(-1)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(-2;0)$
  * como $u(1)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(0;4)$
  * como $u(5)<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x>4$

- En definitiva, $u(x)>0$ sólo si $x\in(-2;0)\cup(0;4)$.

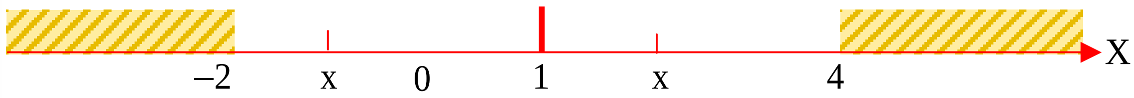


"f" no está definida en el punto $x=0$, pues $f(0)=\text{Ln}\,0\notin\Re$

Para estudiar el signo de $f(x)=\text{Ln}\,((x^3+2.x^2)/(4-x))$ cuando $x\in\text{Dom. f}$, determinamos los valores de "x" que anulan a $f(x)$:

$$f(x)=\text{Ln}\,((x^3+2.x^2)/(4-x))=0\Rightarrow (x^3+2.x^2)/(4-x)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3+2.x^2+x-4=0\Rightarrow x=\begin{cases}1\\ \text{soluciones imaginarias}\end{cases}$$

El punto $x=1$ divide al dominio de "f" en dos zonas, y $f(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada una de ellas.



Para averiguar el signo de $f(x)$ en una zona concreta basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de ella; así:

$$* \text{ como } f(-1)=\text{Ln } 3/4<0 \Rightarrow f(x)<0,\ \forall\ x\in(-2;1),\ x\neq 0$$
$$* \text{ como } f(3)=\text{Ln } 7>0 \Rightarrow f(x)>0,\ \forall\ x\in(1;4)$$

En definitiva, la gráfica de "f" está por encima del eje de abcisas si $x\in(1;4)$, y está por debajo de dicho eje si $x\in(-2;0)\cup(0;1)$. Como $f(x)$ se anula y cambia de signo en $x=1$, la gráfica de "f" corta al eje de abcisas en dicho punto.

FONEMATO 1.19.13

Determínese el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{(x^3-x^2)/(x-5)}$.

SOLUCIÓN

Como $f(x)=\sqrt{(x^3-x^2)/(x-5)}\equiv \sqrt[\text{par}]{u(x)}$, es:

$$\text{Dom.f}=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$
$$=\{x\in\Re\ /\ x\in(-\infty;1]\cup(5;+\infty)\}$$

- Como $u(x)=(x^3-x^2)/(x-5)\equiv$ cociente de polinomios, es $u(x)\in\Re$ si $x\neq 5$ (único punto en que se anula el denominador de u(x)).
- El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales $k_1(x)=x^3-x^2$ y $k_2(x)=x-5$, por lo que debemos determinar los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x)=x^3-x^2=0\Rightarrow x=0\ (\text{doble})\text{ ó } x=1$$
$$k_2(x)=x-5=0\Rightarrow x=5$$

  Los puntos $x=0$, $x=1$ y $x=5$ dividen al eje de abcisas en cuatro intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

$$* \text{ como } u(-3)>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x<0$$
$$* \text{ como } u(1/2)>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(0;1)$$
$$* \text{ como } u(2)<0\Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x\in(1;5)$$
$$* \text{ como } u(6)>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x>5$$

- En definitiva, es $u(x)\geq 0$ sólo si $x\in(-\infty;1]\cup(5;+\infty)$.

FONEMATO 1.19.14

Determínese el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{1-\log_5(9-x^2)}$.

SOLUCIÓN

Como $f(x)=\sqrt{1-\log_5(9-x^2)} \equiv \sqrt[\text{par}]{u(x)}$, es:

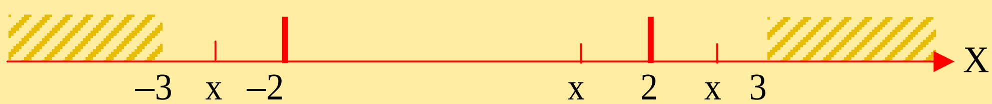
$$\text{Dom.}f = \{x \in \Re \ / \ f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \ / \ u(x) \in \Re,\ u(x) \geq 0\} =$$
$$= \{x \in \Re \ / \ x \in (-3;-2] \cup [2;3)\}$$

- Como $u(x)=1-\log_5(9-x^2) \equiv 1-\log_5 h(x)$, ocurre que $u(x) \in \Re$ sólo si $h(x) \in \Re$ y $h(x) > 0$. Como $h(x)=9-x^2 \equiv$ polinomio, es $h(x) \in \Re$ para todo "x"; además, es $h(x) > 0$ sólo si $x \in (-3;3)$, pues la gráfica de h(x) es una parábola con "cuernos" hacia abajo (el coeficiente de x^2 es negativo) que corta al eje de abcisas en los puntos $x=3$ y $x=-3$. En definitiva, es $u(x) \in \Re$ sólo si $x \in (-3;3)$.

- Para estudiar el signo de $u(x)=1-\log_5(9-x^2)$ cuando $x \in (-3;3)$ determinamos los valores de "x" que anulan a $u(x)$:

$$u(x)=1-\log_5(9-x^2)=0 \Rightarrow \log_5(9-x^2)=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9-x^2=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

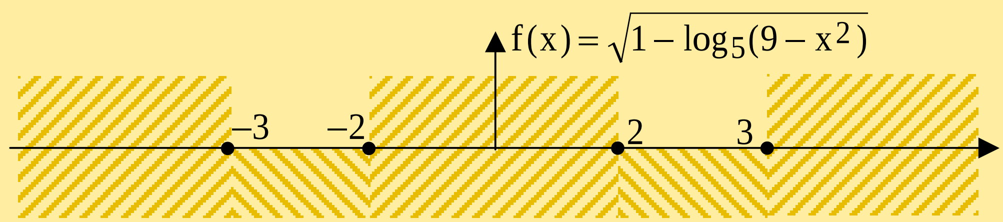
Los puntos $x=-2$ y $x=2$ dividen al intervalo $(-3;3)$ en tres intervalos, y u(x) tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos.



Para averiguar el signo de u(x) en un intervalo concreto basta determinar el signo de u(x) en un punto cualquiera de él:

∗ como $u(-2'5)=1-\log_5(9-(-2'5)^2)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x \in (-3;-2)$
∗ como $u(1)=1-\log_5(9-1^2)<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x \in (-2;2)$
∗ como $u(2'5)=1-\log_5(9-2'5^2)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x \in (2;3)$

- En definitiva, es $u(x) \geq 0$ sólo si $x \in (-3;-2] \cup [2;3)$.



Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, entendemos que lleva el signo "+", por lo que si $x \in (-3;-2] \cup [2;3)$ es $f(x) \geq 0$.

FONEMATO 1.19.15

Determínese el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{1-\log_7(x^2-9)}$.

SOLUCIÓN

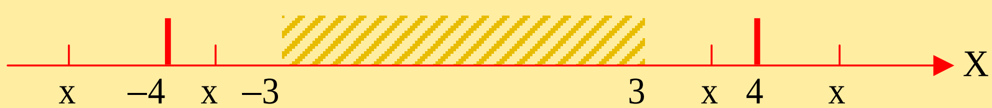
Como $f(x)=\sqrt{1-\log_7(x^2-9)}\equiv\sqrt[\text{par}]{u(x)}$, es:

$$\text{Dom}.f=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$
$$=\{x\in\Re\ /\ x\in[-4;-3)\cup(3;4]\}$$

- Como $u(x)=1-\log_7(x^2-9)\equiv 1-\log_7 h(x)$, ocurre que $u(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$ y $h(x)>0$. Como $h(x)=x^2-9\equiv$ polinomio es $h(x)\in\Re$ para todo valor de "x"; además, es $h(x)>0$ sólo si $x<-3$ ó $x>3$, pues la gráfica de h(x) es una parábola con "cuernos" hacia arriba (el coeficiente de x^2 es positivo) que corta al eje de abcisas en los puntos $x=3$ y $x=-3$. En definitiva, es $u(x)\in\Re$ sólo si $x<-3$ ó $x>3$.

- Para estudiar el signo de $u(x)=1-\log_7(x^2-9)$ si $x<-3$ ó $x>3$, determinamos los valores de "x" que anulan a $u(x)$:

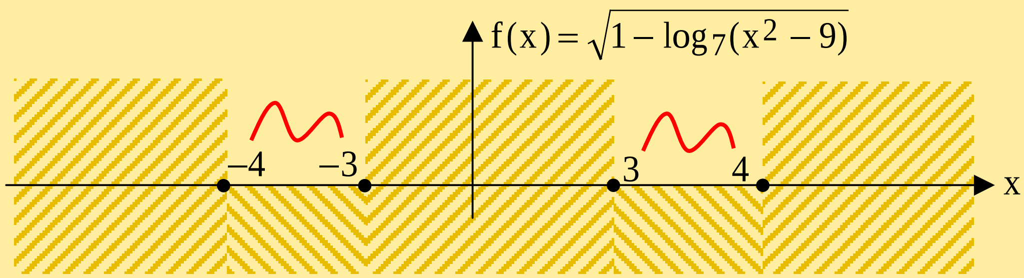
$$u(x)=1-\log_7(x^2-9)=0\Rightarrow\log_7(x^2-9)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-9=7\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm 4$$



Ahora:

$*$ como $u(-5)=1-\log_7 16<0\Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x<-4$
$*$ como $u(-3'5)=1-\log_7 3'25>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(-4;-3)$
$*$ como $u(3'5)=1-\log_7 3'25>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(3;4)$
$*$ como $u(5)=1-\log_7 16<0\Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x>4$

- En definitiva, es $u(x)\geq 0$ sólo si $x\in[-4;-3)\cup(3;4]$.



Como la raíz cuadrada no lleva signo delante entendemos que lleva el signo "+", por lo que si $x\in[-4;-3)\cup(3;4]$ es $f(x)\geq 0$.

FONEMATO 1.19.16

Determínese el dominio de definición de $f:\Re\ \alpha\ \Re$ en los siguientes casos:

$$1)\ f(x)=\sqrt{1-\log_7(x^2+9)}\ ;\ 2)\ f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/x)}$$

SOLUCIÓN

1) La función "f" no está definida en ningún punto:

$$\boxed{\text{pues } f(x)=\sqrt{1-\log_7(x^2+9)}\equiv\sqrt[\text{par}]{u(x)}}$$

$$\text{Dom.f}=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=\varnothing$$

- Como $u(x)=1-\log_7(x^2+9)\equiv 1-\log_7 h(x)$, es $u(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$ y $h(x)>0$. Como $h(x)=x^2+9\equiv$ polinomio que sólo toma valores positivos, es $u(x)=1-\log_7 h(x)\in\Re$ para todo valor de "x".
- Es $u(x)=1-\log_7(x^2+9)<0$ para todo "x", pues para todo "x" es:

$$x^2+9>7\Rightarrow\log_7(x^2+9)>1\Rightarrow u(x)=1-\log_7(x^2+9)<0$$

2) Siendo $f(x)=1/(\operatorname{sen}(\pi/x))\equiv 1/u(x)$, la función "f" está definida excepto si $x=0$ y $x=1/n$, siendo "n" cualquier número entero no nulo. En efecto, como $u(x)=\operatorname{sen}(\pi/x)\equiv\operatorname{sen}$ (cociente de polinomios), es $u(x)\in\Re$ si $x\neq 0$ (pues el denominador de π/x sólo se anula si $x=0$), y es $u(x)=\operatorname{sen}(\pi/x)=0$ si $x=1/n$, siendo "n" cualquier número entero no nulo.

Observa: en todo entorno reducido de $x=0$ hay infinidad de puntos en los que "f" no está definida, pues en dicho entorno de $x=0$ hay infinidad de puntos en los que se anula el denominador de $f(x)$. ***Por ejemplo,*** en el entorno reducido de $x=0$ formado por los "x" tales que $0<|x-0|<1/3000$, los infinitos puntos en que "f" no está definida son:

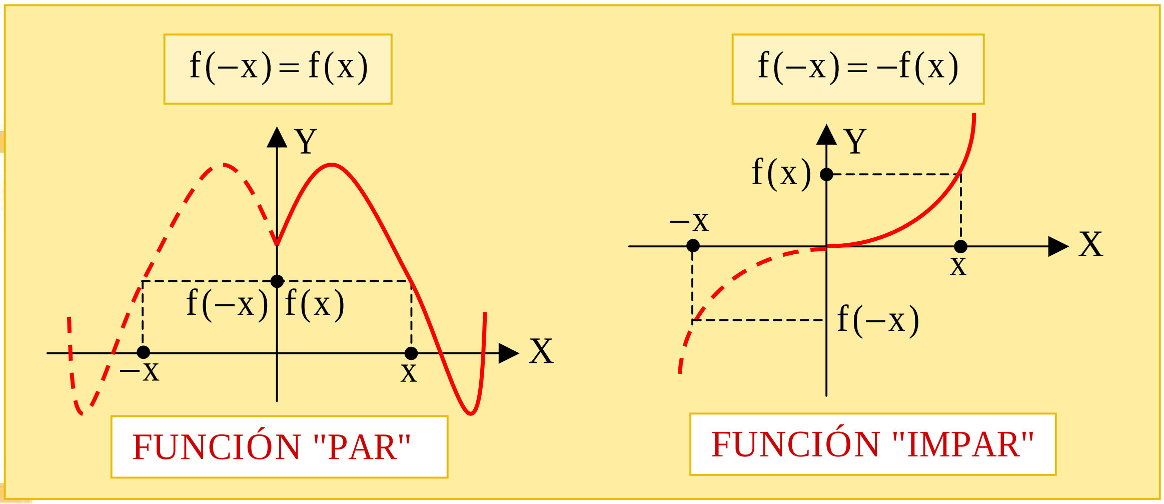
$$\pm\frac{1}{3001}\ ;\ \pm\frac{1}{3002}\ ;\ \pm\frac{1}{3003}\ ;\ \ldots\ldots\ldots$$

PROVERBIO ANAMITA

Nada tarda tanto como lo que no se empieza

1.20 SIMETRÍAS DE UNA FUNCIÓN

- Se dice que la función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ es ***par*** si en todo punto "x" de su dominio de definición sucede que $f(-x)=f(x)$; en términos geométricos significa que ***la gráfica de "f" es simétrica respecto del eje de ordenadas***.
- Se dice que la función $f:\Re\ \alpha\ \Re$ es ***impar*** si en todo punto "x" de su dominio de definición sucede que $f(-x)=-f(x)$; en términos geométricos significa que ***la gráfica de "f" es simétrica respecto al origen de coordenadas***.



- ***El que una función "f" sea "par" o "impar" es un chollo, pues en tal caso sólo nos preocupará dibujar su gráfica para valores positivos de "x", ya que lo que sucede para valores negativos de "x" lo deducimos por simetría.***

Por ejemplo, son "pares" las funciones definidas como

$$f_1(x)=\frac{x^2}{1+x^6}\ ;\ f_2(x)=\frac{\text{sen } x^8}{\sqrt{1-x^2-x^6}}\ ;\ f_3(x)=x^4.e^{x^2}\ ;\ f_4(x)=\text{Ln }(1+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "−x", resulta:

$$f_1(-x)=\frac{(-x)^2}{1+(-x)^6}=\frac{x^2}{1+x^6}=f_1(x)$$

$$f_2(-x)=\frac{\text{sen }(-x)^8}{\sqrt{1-(-x)^2-(-x)^6}}=\frac{\text{sen } x^8}{\sqrt{1-x^2-x^6}}=f_2(x)$$

$$f_3(-x)=(-x)^4.e^{(-x)^2}=x^4.e^{x^2}=f_3(x)$$

$$f_4(-x)=\text{Ln }(1+(-x^2))=\text{Ln }(1+x^2)=f_4(x)$$

Por ejemplo, son "impares" las funciones definidas como

$$f_5(x)=\frac{x^7}{8-x^4}\ ;\ f_6(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ f_7(x)=x^3.e^{x^2}\ ;\ f_8(x)=x^9.\text{Ln }(1+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "−x", resulta:

$$f_5(-x)=\frac{(-x)^7}{8-(-x)^4}=-\frac{x^7}{8-x^4}=-f_5(x)$$

$$f_6(-x)=\frac{(-x)^3}{\sqrt{1-(-x)^2}}=-\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}=-f_6(x)$$

$$f_7(-x)=(-x)^3.e^{(-x)^2}=-x^3.e^{x^2}=-f_7(x)$$

$$f_8(-x)=(-x)^9.\text{Ln}\,(1+(-x^2))=-x^9.\text{Ln}\,(1+x^2)=-f_8(x)$$

Por ejemplo, no son "pares" ni "impares" las funciones definidas como

$$g_1(x)=\frac{1}{x^2+x}\;;\; g_2(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\;;\; g_3(x)=x^4.e^x\;;\; g_4(x)=\text{Ln}\,(1+x+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "$-x$", resulta:

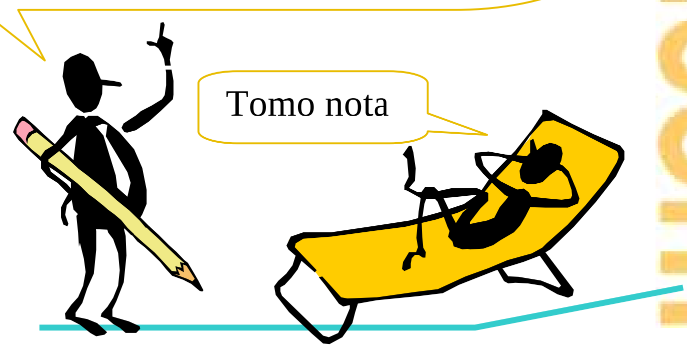
$$g_1(-x)=\frac{1}{(-x)^2+(-x)}=\frac{1}{x^2-x}\neq\begin{cases} g_1(x)\\ -g_1(x)\end{cases}$$

$$g_2(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)}}{\sqrt{1-(-x)^2}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\neq\begin{cases} g_2(x)\\ -g_2(x)\end{cases}$$

$$g_3(-x)=(-x)^4.e^{-x}=x^4.e^{-x}\neq\begin{cases} g_3(x)\\ -g_3(x)\end{cases}$$

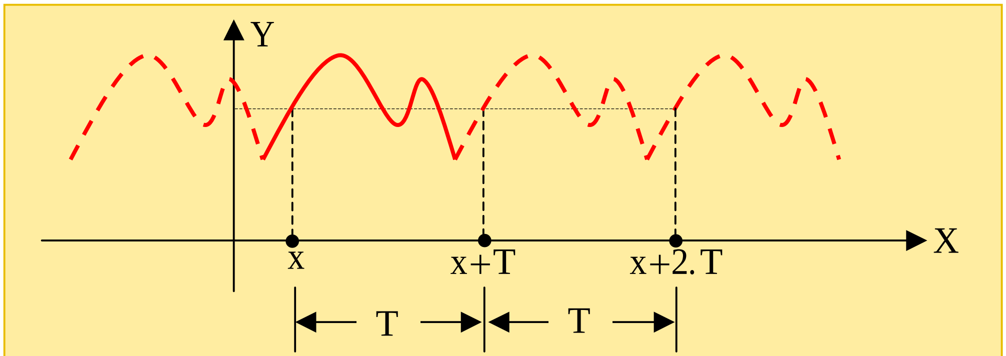
$$g_4(-x)=\text{Ln}\,(1+(-x)+(-x)^2)=\text{Ln}\,(1-x+x^2)\neq\begin{cases} g_4(x)\\ -g_4(x)\end{cases}$$

Si el dominio de definición de una función "f" no es simétrico respecto al punto x = 0 entonces no hay que andar con la puñeta de sustituir "x" por "–x" para analizar las posibles simetrías de "f", pues puedes apostarte tranquilamente la vida a que "f" no es "par" ni es "impar". Por ejemplo, si $f(x)=1/(x-4)$ entonces "f" está definida siempre que $x\neq 4$, y saber eso es suficiente para garantizar "f" no es "par" ni "impar", pues para que fuera "par" o "impar" sería necesario (no suficiente) que "f" no estuviera definida tampoco en el punto $x=-4$ (simétrico del punto $x=4$ respecto del punto $x=0$).



1.21 FUNCIONES PERIÓDICAS

- Se dice que la función "f" es ***periódica o cíclica de periodo "T"*** si "T" es el menor número positivo tal que en todo punto "x" del dominio de definición de "f" sucede que $f(x+T)=f(x)$.

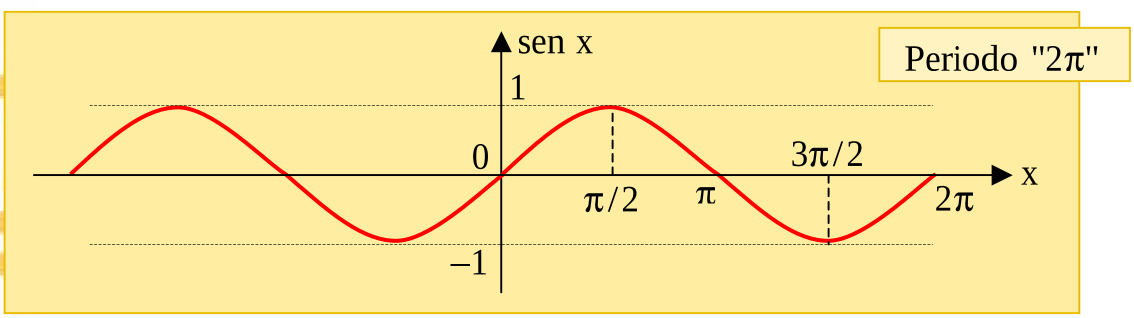


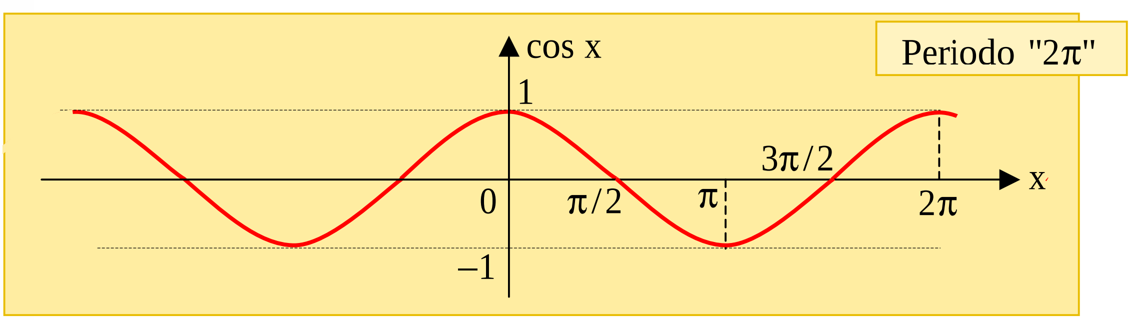
FUNCIÓN PERIÓDICA DE PERIODO "T"

- ***El que una función "f" sea periódica de periodo "T" es un gran chollo, pues así sólo debemos preocuparnos por dibujar su gráfica en el intervalo [a;a+T], siendo "a" un punto cualquiera del dominio de definición de "f".*** Si $0 \in \text{Dom. } f$ suele elegirse el intervalo $[0;T]$.

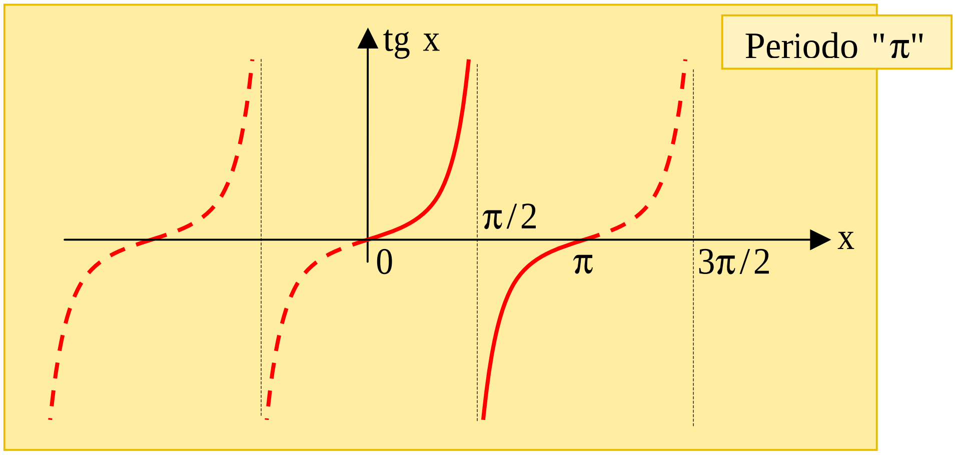
- Las más famosas funciones periódicas son $f(x)=\text{sen } x$ y $f(x)=\cos x$, que tienen periodo "2π", pues para todo "x" sucede que:

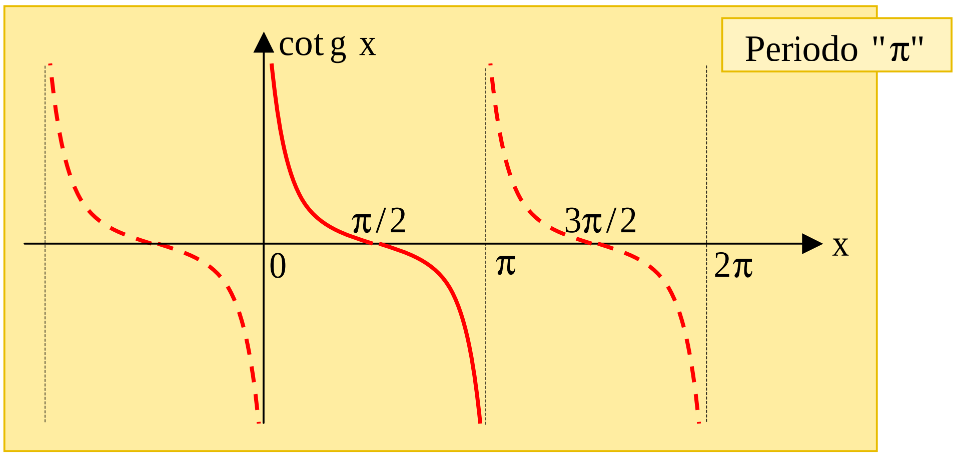
$$\text{sen } x=\text{sen }(x+2\pi)\ ;\ \cos x=\cos(x+2\pi)$$

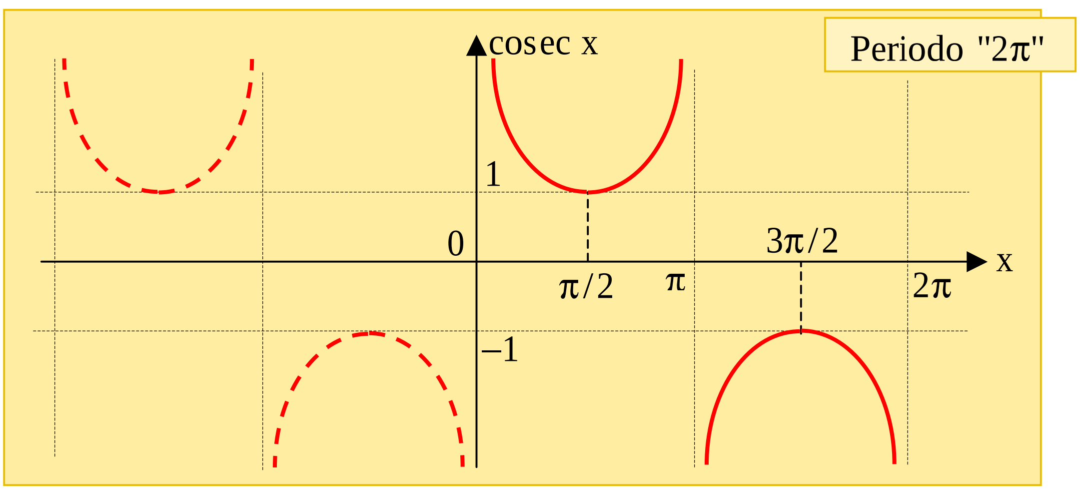


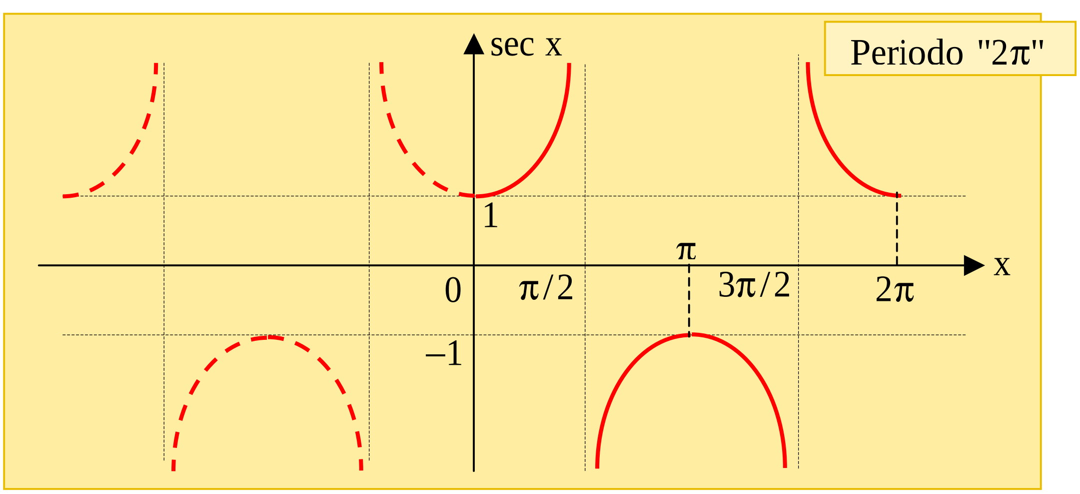


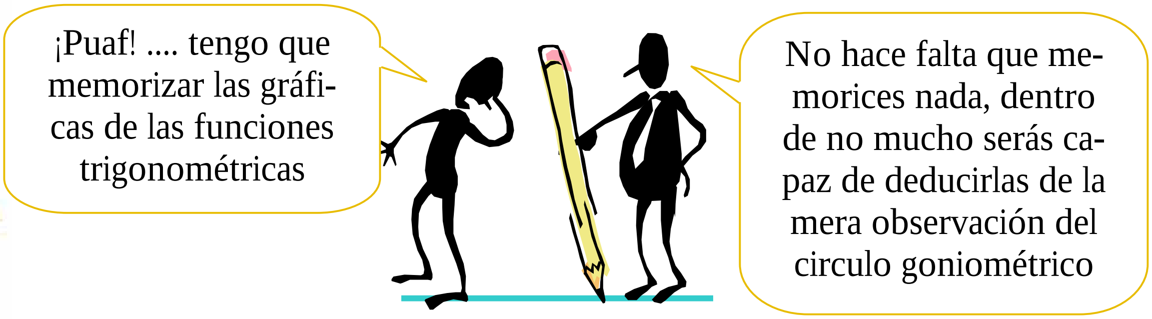
- Las funciones $f(x)=\text{tg } x$ y $f(x)=\text{cotg } x$ son periódicas de periodo "π", y las funciones $f(x)=\sec x$ y $f(x)=\text{cosec } x$ son periódicas de periodo "2π".


tg x
Periodo "π"
π/2
0
π
3π/2
x


cotg x
Periodo "π"
π/2
3π/2
0
π
2π
x


cosec x
Periodo "2π"
1
0
3π/2
π/2
π
2π
–1
x

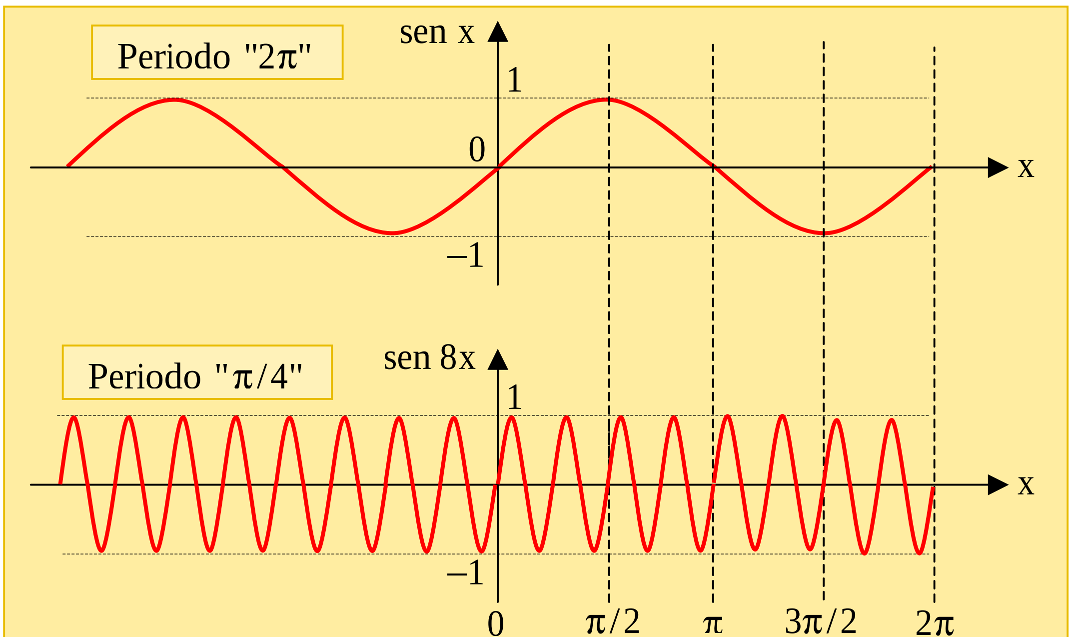

sec x
Periodo "2π"
1
π
0
π/2
3π/2
2π
–1
x



Por ejemplo, la función "g" tal que $g(x) = \text{sen } 8.x$ es periódica de periodo $\pi/4$, pues al exigir que se satisfaga la condición $g(x+T) = g(x)$, resulta:

$$\text{sen } 8.(x+T) = \text{sen } 8.x \Rightarrow 8.(x+T) \underset{\uparrow}{=} 8.x + 2.\pi \Rightarrow T = \pi/4$$

pues el "seno" es una función periódica de periodo 2π



En el intervalo $[0;2\pi]$ la función $f(x) = \text{sen } x$ hace un "ciclo", y la función $g(x) = \text{sen } 8.x$ hace ocho ciclos en ese intervalo.

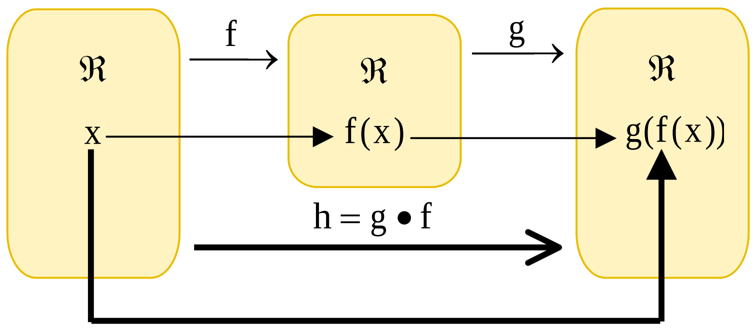
La inversa del periodo se llama "frecuencia", y expresa el número de ciclos que se producen por cada unidad de la variable "x". ***Por ejemplo,*** si "x" mide el tiempo en segundos, el que la frecuencia de $g(x) = \text{sen } 8.x$ sea $4/\pi \cong 1'2732395$ indica que en un segundo se producen $1'2732395$ ciclos.

Por ejemplo, la función "h" tal que $h(x) = \text{tg } 5.x$ es periódica de periodo $\pi/5$, pues al exigir que se satisfaga la condición $h(x+T) = h(x)$, resulta:

$$\text{tg } 5.(x+T) = \text{tg } 5.x \Rightarrow 5.(x+T) \underset{\uparrow}{=} 5.x + \pi \Rightarrow T = \pi/5$$

pues la "tangente" es una función periódica de periodo π

Aunque ya hemos trabajado con multitud de funciones "compuestas", conviene hablar expresamente de ello: si $f:\Re\,\alpha\,\Re$ y $g:\Re\,\alpha\,\Re$ son funciones, se dice que la función $h:\Re\,\alpha\,\Re$ es la ***compuesta*** de "f" y "g" (se denota $h = g \bullet f$) si $h(x) = g(f(x))$; es decir, la imagen de $x \in \Re$ según "h" es la imagen según "g" de la imagen de "x" según "f".



Por ejemplo, si $f:\Re\,\alpha\,\Re$ es tal que $f(x) = 7 + x^2 + e^x$ y $g:\Re\,\alpha\,\Re$ es tal que $g(y) = \text{sen } y$, la función $h_1 = g \bullet f$ es tal que:

$$\boxed{\text{es } f(x) = 7 + x^2 + e^x}$$
$$h_1(x) = g(f(x)) = f(7 + x^2 + e^x) = \text{sen }(7 + x^2 + e^x)$$
$$\boxed{\text{la función "g" establece que } g(\text{Pepe}) = \text{sen }(\text{Pepe})}$$

La función $h_2 = f \bullet g$ es tal que:

$$\boxed{\text{es } g(y) = \text{sen } y}$$
$$h_2(y) = f(g(y)) = f(\text{sen } y) = 7 + (\text{sen } y)^2 + e^{\text{sen } y}$$
$$\boxed{\text{la función "f" establece que } f(\text{Paco}) = 7 + (\text{Paco})^2 + e^{\text{Paco}}}$$

Por ejemplo, si $f:\Re\,\alpha\,\Re$ es tal que $f(x) = \sqrt{1 - x}$ y la función $g:\Re\,\alpha\,\Re$ es tal que $g(y) = \log_7 (y^2 - 9)$, la función $h_1 = g \bullet f$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } f(x) = \sqrt{1 - x}}$$
$$h_1(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1 - x}) = \log_7 ((\sqrt{1 - x})^2 - 9)$$
$$\boxed{\text{la función "g" establece que } g(\text{Pepe}) = \log_7 ((\text{Pepe})^2 - 9)}$$

La función $h_2 = f \bullet g$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } g(y) = \log_7 (y^2 - 9)}$$
$$h_2(y) = f(g(y)) = f(\log_7 (y^2 - 9)) = \sqrt{1 - \log_7 (y^2 - 9)}$$
$$\boxed{\text{la función "f" establece que } f(\text{Paco}) = \sqrt{1 - \text{Paco}}}$$

Por ejemplo, si la función $u:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $u(z) = 1 - z^2 + \sqrt{z}$ y la función $v:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $v(t) = \sqrt{t}$, la función $h_1 = v \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } u(z) = 1 - z^2 + \sqrt{z}}$$

$$h_1(z) = v(u(z)) = v(1 - z^2 + \sqrt{z}) = \sqrt{1 - z^2 + \sqrt{z}}$$

$$\boxed{\text{la función "v" establece que } v(Pepe) = \sqrt{Pepe}}$$

La función $h_2 = u \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } v(t) = \sqrt{t}}$$

$$h_2(t) = u(v(t)) = u(\sqrt{t}) = 1 - (\sqrt{t})^2 + \sqrt{\sqrt{t}}$$

$$\boxed{\text{la función "u" establece que } u(Paco) = 1 - (Paco)^2 + \sqrt{Paco}}$$

Por ejemplo, si la función $u:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $u(\lambda) = 1 - \lambda^3$ y $v:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $v(\theta) = 1/\theta$, la función $h_1 = v \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } u(\lambda) = 1 - \lambda^3}$$

$$h_1(\lambda) = v(u(z)) = v(1 - \lambda^3) = 1/(1 - \lambda^3)$$

$$\boxed{\text{la función "v" establece que } v(Pepe) = 1/Pepe}$$

La función $h_2 = u \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } v(\theta) = 1/\theta}$$

$$h_2(\theta) = u(v(\theta)) = u(1/\theta) = 1 - (1/\theta)^3$$

$$\boxed{\text{la función "u" establece que } u(Paco) = 1 - (Paco)^3}$$

Por ejemplo, si la función $\lambda:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $\lambda(z) = 1 + \sqrt{z}$ y $\theta:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $\theta(t) = 1/t$, la función $h_1 = \theta \bullet \lambda$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } \lambda(z) = 1 + \sqrt{z}}$$

$$h_1(z) = \theta(\lambda(z)) = \theta(1 + \sqrt{z}) = 1/(1 + \sqrt{z})$$

$$\boxed{\text{la función "}\theta\text{" establece que } \theta(Pepe) = 1/Pepe}$$

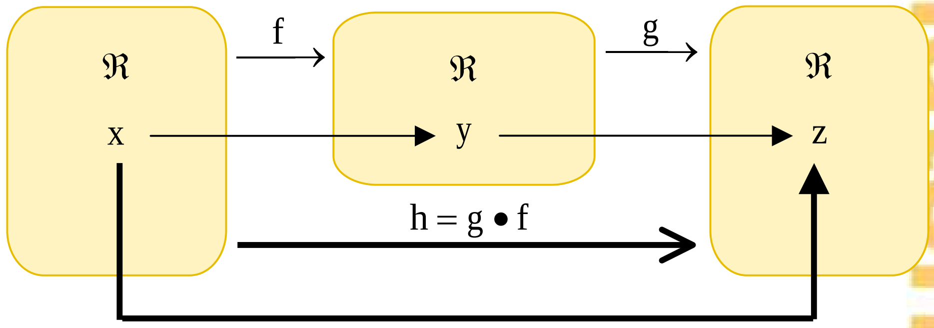
La función $h_2 = \lambda \bullet \theta$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } \theta(t) = 1/t}$$

$$h_2(t) = \lambda(\theta(t)) = \lambda(1/t) = 1 + \sqrt{1/t}$$

$$\boxed{\text{la función "}\lambda\text{" establece que } \lambda(Paco) = 1 + \sqrt{Paco}}$$

Entenderás la utilidad que en la vida cotidiana tienen las funciones "compuestas" si miras el siguiente esquema



y sintiendo como si el negocio fuera tuyo, piensas que, por ejemplo, las variables "x", "y" y "z" expresan lo siguiente:

$$x \equiv \text{cantidad de capital que utiliza Revilla S.A. para producir chorizo}$$
$$y \equiv \text{producción de chorizo de Revilla S.A}$$
$$z \equiv \text{beneficio de Revilla S.A}$$

Cabe decir que estamos ante dos ***fenómenos encadenados***: el fenómeno consistente en producir chorizo a partir de capital, y el fenómeno consistente en obtener beneficios a partir de la producción de chorizo. Cada uno de los dos fenómenos está gobernado por una "ley": la ley "f" determina la producción "y" $(y = f(x))$ en función de la cantidad "x" empleada de capital, y la ley "g" determina el beneficio "z" en función de la producción "y" $(z = g(y))$. En este contexto, cabe decir que la ley "compuesta" $h = g \bullet f$ "conecta" el inicio y el final del proceso, pues expresa el beneficio "z" en función de la cantidad "x" empleada de capital.

Se pueden "encadenar" más de dos funciones.

Por ejemplo, si las funciones "u", "v" y "w" son tales que

$$u(x) = 2.x - 1 \ ; \ v(z) = 5^{z} \ ; \ w(\lambda) = 1/(7 + \lambda)$$

entonces:

1) La función $h_1 = w \bullet v \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{u(x) = 2.x - 1} \qquad \boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$$

$$h_1(x) = w(v(u(x))) = w(v(2.x - 1)) = w(5^{2.x-1}) = \frac{1}{7 + 5^{2.x-1}}$$

$$\boxed{w(\text{Pío}) = \frac{1}{7 + (\text{Pío})}}$$

2) La función $h_2 = w \bullet u \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{v(z) = 5^{z}}$$

$$h_2(z) = w(u(v(z))) = w(u(5^{z})) = w(2.5^{z} - 1) = \frac{1}{7 + (2.5^{z} - 1)}$$

$$\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1} \qquad \boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7 + \text{Pío})}$$

3) La función $h_3 = v \bullet u \bullet w$ es la definida como:

$$\boxed{\text{pues es } w(\lambda) = 1/(7+\lambda)} \qquad \boxed{\text{pues es } u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$$

$$h_3(\lambda) = v(u(w(\lambda))) = v\left(u\left(\frac{1}{7+\lambda}\right)\right) = v\left(\frac{2}{7+\lambda} - 1\right) =$$

$$= 5^{(2/(7+\lambda))-1}$$

$$\boxed{\text{pues es } v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$$

4) La función $h_4 = v \bullet w \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{u(x) = 2.x - 1} \qquad \boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7+\text{Pío})}$$

$$h_4(x) = v(w(u(x))) = v(w(2.x-1)) = v\left(\frac{1}{7+(2.x-1)}\right) = v\left(\frac{1}{6+2.x}\right) =$$

$$= 5^{1/(6+2.x)}$$

$$\boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$$

$$x \xrightarrow{u} 2.x - 1 \xrightarrow{w} \frac{1}{6+2.x} \xrightarrow{v} 5^{1/(6+2.x)}$$

5) La función $h_5 = u \bullet v \bullet w$ es la definida como:

$$\boxed{\text{pues es } w(\lambda) = 1/(7+\lambda)} \qquad \boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$$

$$h_5(\lambda) = u(v(w(\lambda))) = u\left(v\left(\frac{1}{7+\lambda}\right)\right) = u\left(5^{1/(7+\lambda)}\right) =$$

$$= 2.5^{1/(7+\lambda)} - 1$$

$$\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$$

$$\lambda \xrightarrow{w} \frac{1}{7+\lambda} \xrightarrow{v} 5^{1/(7+\lambda)} \xrightarrow{u} 2.5^{1/(7+\lambda)} - 1$$

6) La función $h_6 = u \bullet w \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{v(z) = 5^z}$$

$$h_6(z) = u(w(v(z))) = u(w(5^z)) = u\left(\frac{1}{7+5^z}\right) = 2.\frac{1}{7+5^z} - 1$$

$$\boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7+\text{Pío})} \qquad \boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$$

$$z \xrightarrow{v} 5^z \xrightarrow{w} \frac{1}{7+5^z} \xrightarrow{u} 2.\frac{1}{7+5^z} - 1$$

1.23 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA

Lo mejor es un ejemplillo con un "fenómeno" de la vida cotidiana: sea "x" el tiempo que dedicas a estudiar un examen y sea "f" la función que al tiempo "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en el examen; es decir, $y = f(x)$:

$$\text{tiempo de estudio "x"} \xrightarrow{f} \text{puntuación "y"}$$

variable "independiente",
toma el valor que queramos

variable "dependiente",
su valor depende del de "x"

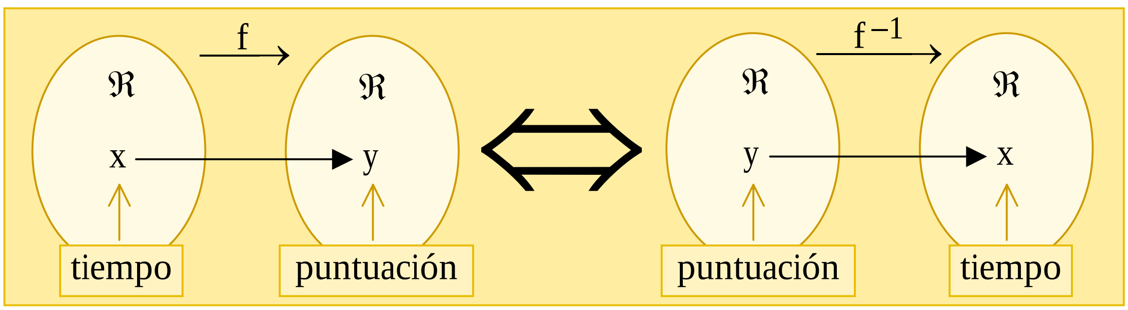
- Se llama ***inversa o recíproca*** de "f" (se denota f^{-1}) a la función que permite analizar el "fenómeno" dando la vuelta a la tortilla (lo que a veces es muy interesante); es decir, la función f^{-1} es la que a la puntuación "y" le asocia el tiempo de estudio "x".

$$\text{puntuación "y"} \xrightarrow{f^{-1}} \text{tiempo de estudio "x"}$$

variable "independiente",
toma el valor que queramos

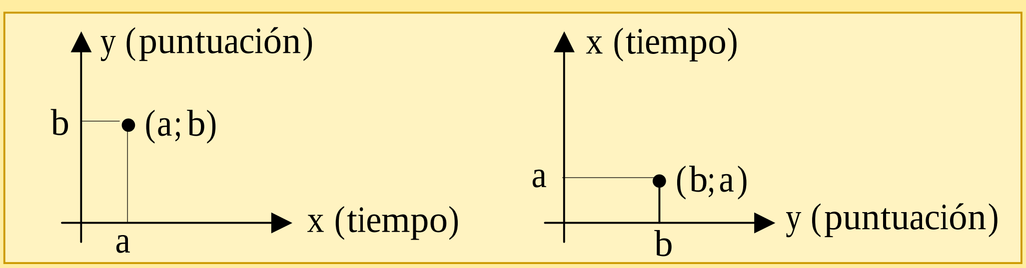
variable "dependiente",
su valor depende del de "y"

- La "inversa" de f^{-1} es "f", por eso se dice que son "inversas" una de otra.



- **¡Ojo!:** el conjunto inicial (final) de "f" es el final (inicial) de f^{-1}.

Si $f(a) = b$ (o sea, la gráfica de "f" pasa por el punto $(a;b)$) es $f^{-1}(b) = a$ (o sea, la gráfica de la función f^{-1} pasa por el punto $(b;a)$).

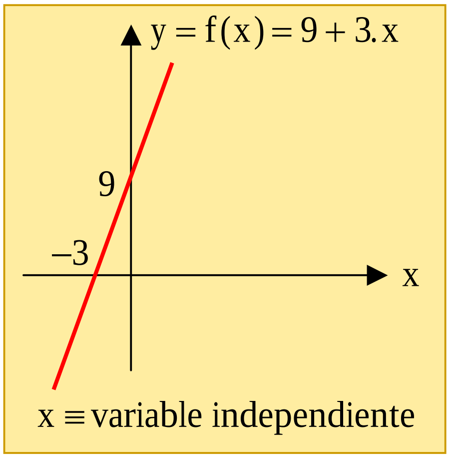


Los puntos $(a;b)$ y $(b;a)$ son simétricos respecto de la bisectriz del primer cuadrante del plano (pues el punto medio del segmento que los une es el $((a+b)/2;(b+a)/2)$ que por tener las dos coordenadas iguales está ubicado en dicha bisectriz); por tanto, la gráfica de f^{-1} es simétrica de la gráfica de "f" respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

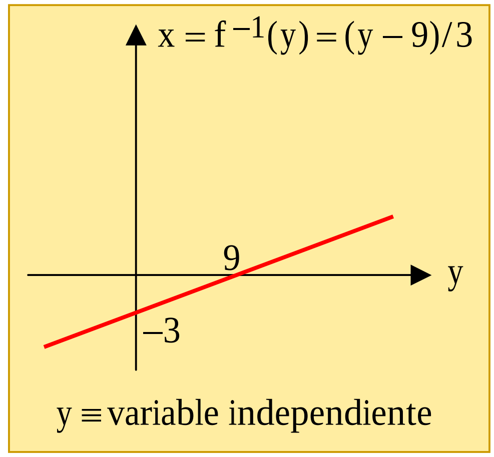
Por ejemplo, siendo $y = f(x) = 9 + 3.x$, es $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-9}{3}$

a partir de $y = 9 + 3.x$ despejamos "x":

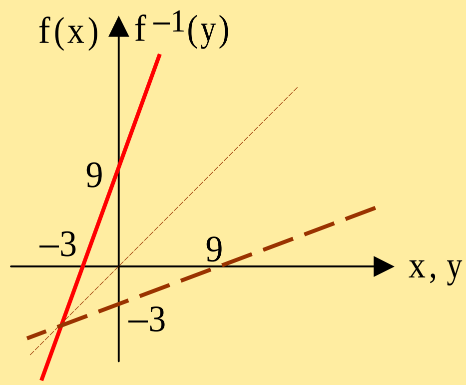
$$y = 9 + 3.x \Rightarrow y - 9 = 3.x \Rightarrow x = \frac{y-9}{3}$$



$\Leftrightarrow$



Como estaba previsto, al "superponer" las figuras anteriores vemos que las gráficas de las funciones "f" y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante



Por ejemplo, siendo $y = f(x) = e^{x-2}$, es $x = f^{-1}(y) = 2 + \mathrm{Ln}\, y$

a partir de $y = e^{x-2}$ despejamos "x":

$$y = e^{x-2} \Rightarrow \mathrm{Ln}\, y = \mathrm{Ln}\, e^{x-2} \Rightarrow \mathrm{Ln}\, y = x - 2 \Rightarrow x = 2 + \mathrm{Ln}\, y$$

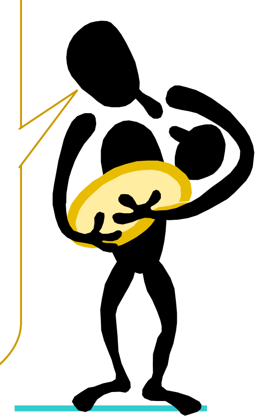
El "fenómeno" es el que es, pero hay dos formas de "mirarlo" .... y como para gustos están los colores, tú lo "miras" como gustes:

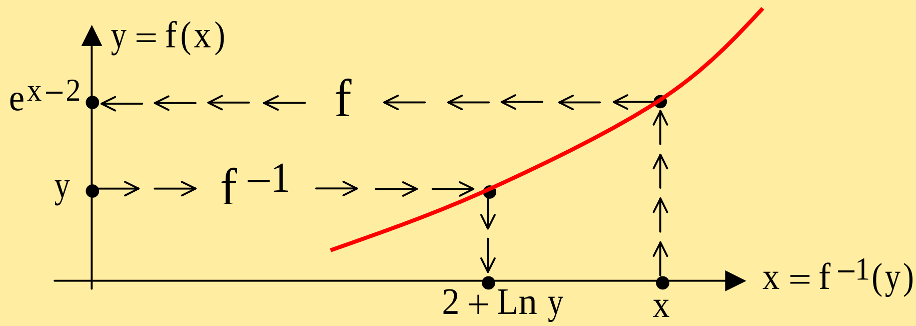
A "x" horas de estudio les corresponde una nota e^{x-2}

O vuelves la tortilla:

A la nota "y" le corresponden $2+\mathrm{Ln}\, y$ *horas de estudio*

En el primer caso la variable "independiente" es "x" (el tiempo de estudio) y en el segundo caso la "independiente" es "y" (la nota del examen) .... ¿Te enteras de algo?



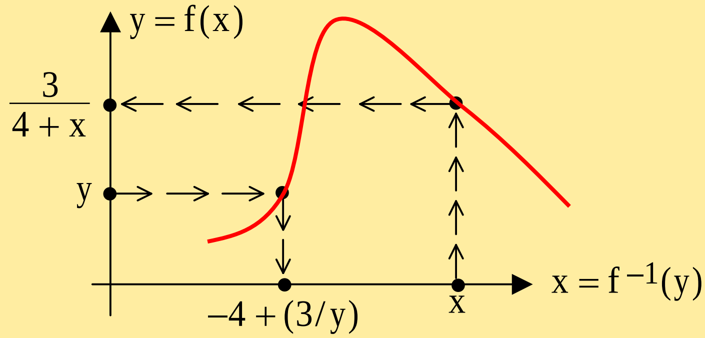


No hace falta andar cambiando los ejes según cuál sea la variable que elijamos como "independiente": si "arrancas" en el punto "x" del eje de abcisas ($\Leftrightarrow$ tomas "x" como independiente), la curva te "lleva" al punto e^{x-2} del eje de ordenadas; si "arrancas" del punto "y" del eje de ordenadas ($\Leftrightarrow$ tomas "y" como independiente), la curva te "lleva" al punto $2 + \text{Ln } y$ del eje de abcisas

Por ejemplo, siendo $y = f(x) = \dfrac{3}{4+x}$, es $x = f^{-1}(y) = -4 + \dfrac{3}{y}$

Despejamos "x":

$$y = \frac{3}{4+x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{4+x}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -4 + \frac{3}{y}$$



Por ejemplo, siendo $z = f(x) = \log_3(2+x)$, es $x = f^{-1}(z) = 3^z - 2$

a partir de $z = \log_3(2+x)$ despejamos "x":
$z = \log_3(2+x) \Rightarrow 3^z = 2 + x \Rightarrow x = 3^z - 2$

Por ejemplo, siendo $y = f(x) = 4^{x-1}$, es $x = f^{-1}(y) = 1 + \log_4 y$

a partir de $y = 4^{x-1}$ despejamos "x":
$y = 4^{x-1} \Rightarrow \log_4 y = x - 1 \Rightarrow x = 1 + \log_4 y$

Las funciones compuestas $h_1 = f^{-1} \bullet f$ y $h_2 = f \bullet f^{-1}$ son la función identidad (una función se dice que es la "identidad" si a cada número le asocia él mismo $\Rightarrow$ la gráfica de una función identidad es la bisectriz del primer cuadrante):

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x \qquad h_1 = f^{-1} \bullet f$$

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y \qquad h_2 = f \bullet f^{-1}$$

Por ejemplo, hemos visto que:

$$y = f(x) = \frac{3}{4+x} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + \frac{3}{y}$$

Comprobemos ahora que la función $h_1 = f^{-1} \bullet f$ es la "identidad":

$$h_1(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3}{4+x}\right) = -4 + \frac{3}{\dfrac{3}{4+x}} = x$$

$$\boxed{\text{es } f^{-1}(\text{Juan}) = -4 + \frac{3}{\text{Juan}} \;;\; \text{en nuestro caso: } \text{Juan} \equiv \frac{3}{4+x}}$$

Comprobemos que la función $h_2 = f \bullet f^{-1}$, también es la "identidad":

$$h_2(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(-4 + \frac{3}{y}\right) = \frac{3}{4 + \left(-4 + \dfrac{3}{y}\right)} = y$$

$$\boxed{\text{es } f(\text{Pepe}) = \frac{3}{4+\text{Pepe}} \;;\; \text{en nuestro caso: } \text{Pepe} \equiv -4 + \frac{3}{y}}$$

¡Ojo con la notación!: volvemos al ejemplo en que "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y "f" es la función que a "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en él. Hemos visto que, por ejemplo:

$$y = f(x) = 3/(4+x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y)$$

Hay quien siempre llama "x" a la variable independiente; es decir, puedes encontrar quien diga que "inversa" de la función $f:\Re \,\alpha\, \Re$ tal que $f(x) = 3/(4+x)$ es la función $f^{-1}:\Re \,\alpha\, \Re$ tal que $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, lo que genera notable confusión entre l@s principiantes, pues no se dan cuenta de que la "x" que aparece en $f(x) = 3/(4+x)$ nada tiene que ver con la "x" que aparece en $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$:

- El número "x" que aparece en $f(x) = 3/(4+x)$ expresa el tiempo que estudias, y el número $f(x)$ expresa la correspondiente nota del examen.
- El número "x" que aparece en $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$ expresa la nota del examen, y el número $f^{-1}(x)$ expresa el correspondiente tiempo de estudio.

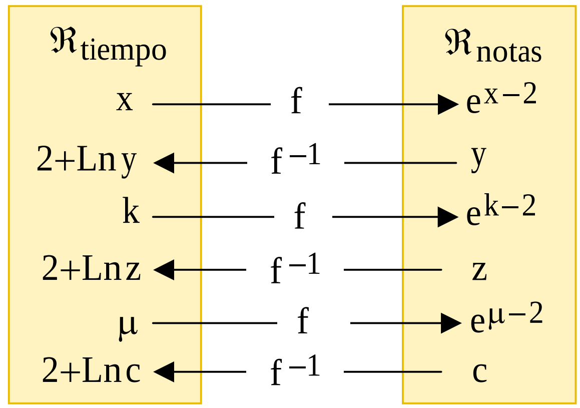
Habría menos lío si se dijera que la función inversa de la $f:\Re_{\text{tiempo}} \,\alpha\, \Re_{\text{notas}}$ tal que $f(x) = 3/(4+x)$ es la $f^{-1}:\Re_{\text{notas}} \,\alpha\, \Re_{\text{tiempo}}$ tal que $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, pues así se entendería que la "x" que aparece en $f(x)$ es un elemento del conjunto $\Re_{\text{tiempo}}$, y la "x" que aparece en $f^{-1}(x)$ es un elemento del conjunto $\Re_{\text{notas}}$.

Como los profesionales tienen perfectamente claro que el conjunto inicial (final) de la función "f" es el final (inicial) de f^{-1}, no se lían si oyen decir que la "inversa" de

$f(x) = 3/(4+x)$ es $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, que es lo mismo que decir:

$$f^{-1}(w) = -4 + (3/w) \ ; \ f^{-1}(z) = -4 + (3/z) \ ; \ \boxed{f^{-1}(y) = -4 + (3/y)}$$
$$f^{-1}(\lambda) = -4 + (3/\lambda) \ ; \ f^{-1}(\theta) = -4 + (3/\theta) \ ; \ f^{-1}(\eta) = -4 + (3/\eta)$$

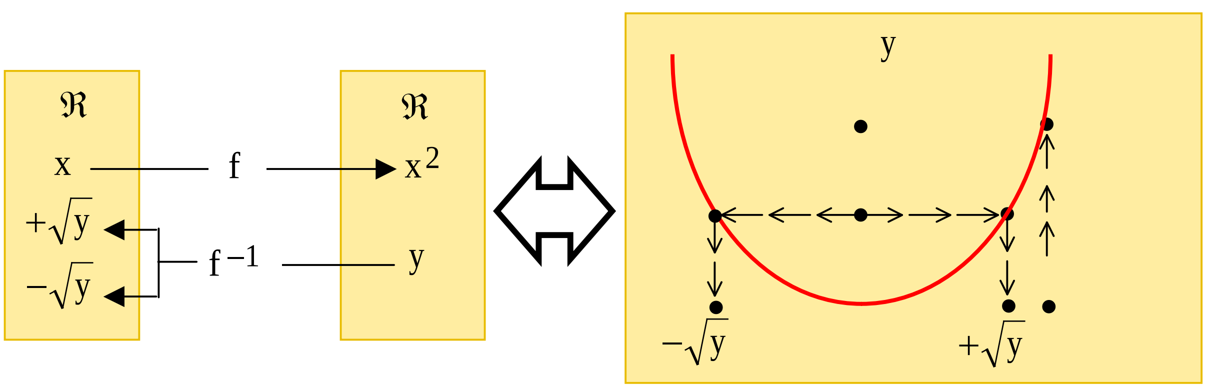
Observa: siendo $f^{-1}: \Re_{notas} \ \alpha \ \Re_{tiempo}$ la "inversa" de $f: \Re_{tiempo} \ \alpha \ \Re_{notas}$, al hablar de $f^{-1}(w)$ estamos llamando "w" a un elemento genérico del conjunto inicial de f^{-1} (que es el final de "f"), y al hablar de $f^{-1}(z)$ estamos llamando "z" a un elemento genérico del conjunto inicial de f^{-1} (que es el final de "f"), y al hablar de ...... lo importante no es el símbolo que usemos para referirnos a un elemento genérico del conjunto "inicial" de f^{-1}, lo importante es tener perfectamente claro que tal conjunto es $\Re_{notas}$.



Recuerda que los principiantes deben leer f^{-1}(Paco) como:

Imagen de "Paco" según f^{-1}

A veces una función es "uniforme" y su función "inversa" no lo es. Por ejemplo, es uniforme la función $f: \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $y = f(x) = x^2$, pero no es uniforme su inversa, que es la $f^{-1}: \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $x = f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$



Hay funciones que carecen de función "inversa". Por ejemplo, la función $f: \Re \ \alpha \ \Re$ tal que $y = f(x) = 1$ carece de "inversa".

Hay funciones cuya inversa no se puede "explicitar": si "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y "f" es la función que al tiempo "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en él (o sea, $y = f(x)$), entonces, siendo

$y = f(x) = 3/(4+x)$, sucede que la función f^{-1} se puede "explicitar", lo que quiere decir que a partir de la igualdad $y = 3/(4+x)$ es posible despejar la variable "x":

$$y = f(x) = 3/(4+x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y)$$

Sin embargo, si $y = g(x) = x + 1 + \text{Ln}\, x$, la función g^{-1} no se puede "explicitar", lo que quiere decir que a partir de la igualdad $y = x + 1 + \text{Ln}\, x$ resulta imposible despejar la variable "x":

$$y = g(x) = x + 1 + \text{Ln}\, x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = ?$$

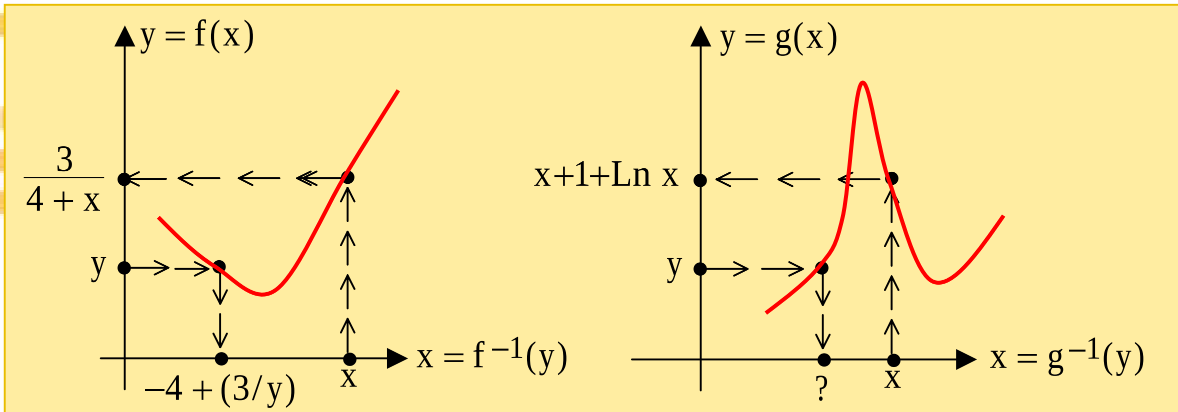
$\boxed{\text{ni los japoneses más listos son capaces de despejar "x"}}$

El que suceda tan desagradable contingencia no significa que en el estudio del "fenómeno" no pueda volverse la tortilla y considerar que la variable independiente es la "y" y la dependiente la "x".

La diferencia entre f^{-1} y g^{-1} es que f^{-1} nos da expresamente (explícitamente) el valor de "x" que corresponde al valor elegido de la variable independiente "y":

$$x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y) \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(1) = -4 + (3/1) \\ f^{-1}(2) = -4 + (3/2) \\ f^{-1}(7) = -4 + (3/7) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Sin embargo, para averiguar el valor de "x" que g^{-1} hace corresponder al valor elegido de "y", debemos resolver una ecuación (cosa que no siempre es fácil). Así, para calcular $g^{-1}(2)$ debemos resolver la ecuación $2 = x + 1 + \text{Ln}\, x$ (que es fácil, su solución es $x = 1$, por lo que $g^{-1}(2) = 1$), y para calcular $g^{-1}(7)$ debemos resolver la ecuación $7 = x + 1 + \text{Ln}\, x$, que es no es tan fácil.



La función inversa de "f" se puede "explicitar", pues es posible despejar "x" en función de "y". La función inversa de "g" no se puede "explicitar, pues no es posible despejar "x" en función de "y"; en este caso, para averiguar el valor de "x" que corresponde a cada valor dado de "y" deberemos resolver la ecuación $x + 1 + \text{Ln}\, x = y$.

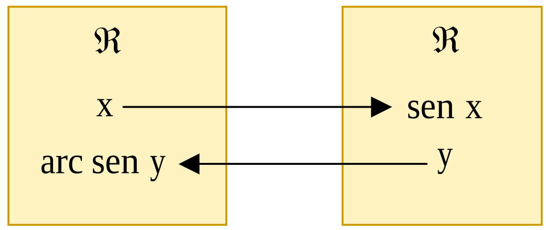
1.24 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas son las inversas o recíprocas de las funciones trigonométricas.

Recuerda: los ángulos se miden en radianes, no en grados.

La función "arco seno"

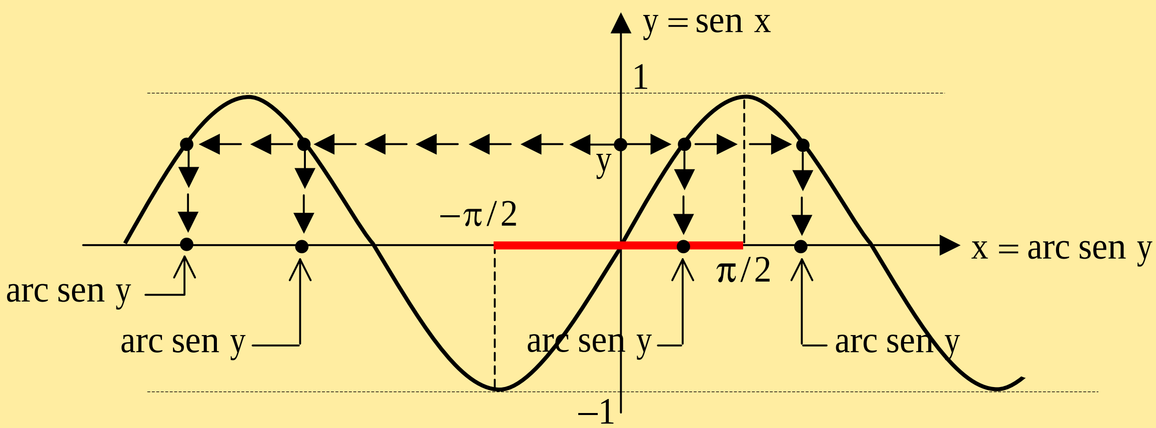
La inversa de la función "seno" se llama "arco seno" y se denota "arc sen". Por ejemplo, como imagen de $\pi/6$ según la función "seno" es el número $1/2$ (o sea, $\text{sen}\,\pi/6 = 1/2$), entonces la imagen del número $1/2$ según la función "arco seno" es el número $\pi/6$, y se escribe $\text{arc sen}\,1/2 = \pi/6$ (se lee: el arco cuyo seno es $1/2$ es $\pi/6$ radianes):



$$\pi/6 \xrightarrow{\text{sen}} 1/2 \;\Leftrightarrow\; 1/2 \xrightarrow{\text{arc sen}} \pi/6$$

O sea:

$$\text{sen}\,\pi/6 = 1/2 \;\Leftrightarrow\; \text{arc sen}\,1/2 = \pi/6$$



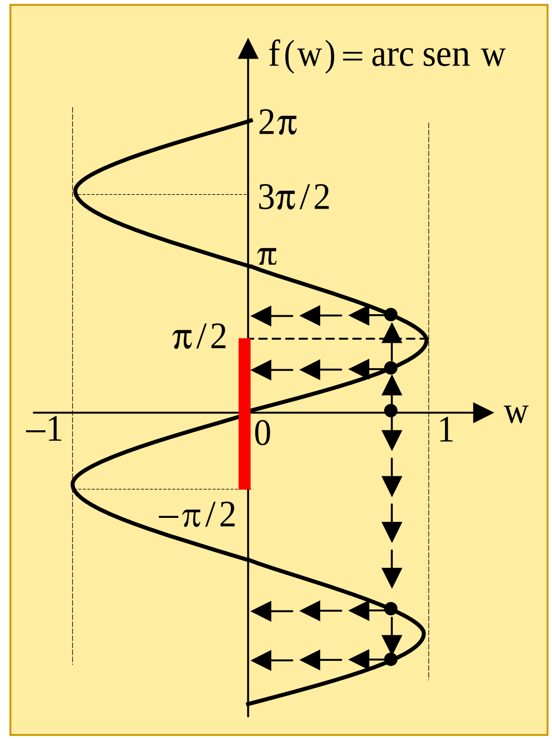
La función "seno" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco seno" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente. Entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$, diciendo de él que es el ***valor principal*** del "arco seno". Del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ se dice que es el ***intervalo principal*** (o fundamental) de la función "arco seno".

Por ejemplo, el seno de $\pi/6, 5.\pi/6, 13.\pi/6, -7.\pi/6$ y $-11.\pi/6$ es $1/2$; por tanto:

$$\text{arc sen}\,1/2 = \pi/6 \;;\; \text{arc sen}\,1/2 = 5.\pi/6 \;;\; \text{arc sen}\,1/2 = 13.\pi/6$$
$$\text{arc sen}\,1/2 = -7.\pi/6 \;;\; \text{arc sen}\,1/2 = -11.\pi/6$$

El valor principal de $\text{arc sen}\,1/2$ es $\pi/6$, pues $\pi/6$ es el único ángulo del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ cuyo seno es $1/2$.

Llamando "w" a la variable "independiente", la gráfica de la función $f(w) = \text{arc sen } w$ es la de la figura adjunta.



Observa: esta función sólo está definida si $-1 \le w \le 1$; por tanto, carece de sentido ha-blar de $\text{arc sen } 7$, pues no hay ningún ángu-lo cuyo seno sea 7.

La función $g: \Re \, \alpha \, \Re$ definida como

$$g(w) = \text{arc sen } 3.w$$

sólo está definida si $-1 \le 3.w \le 1$; o sea, sólo si $-1/3 \le w \le 1/3$.

La función $h: \Re \, \alpha \, \Re$ definida como

$$h(w) = \text{arc sen } (2 - 5.w)$$

sólo está definida si $-1 \le 2 - 5.w \le 1$, y se tiene que:

$$-1 \le 2 - 5.w \le 1 \Rightarrow -3 \le -5.w \le -1 \Rightarrow 3 \ge 5.w \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{5} \le w \le \frac{3}{5}$$

al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

La función $r: \Re \, \alpha \, \Re$ definida como $r(w) = \text{arc sen } (1 - w^2)$ sólo está definida si $-1 \le 1 - w^2 \le 1$, y se tiene que:

$$-1 \le 1 - w^2 \le 1 \Rightarrow -2 \le -w^2 \le 0 \Rightarrow 2 \ge w^2 \ge 0 \Rightarrow 0 \le w^2 \le 2 \Rightarrow |w| \le \sqrt{2}$$

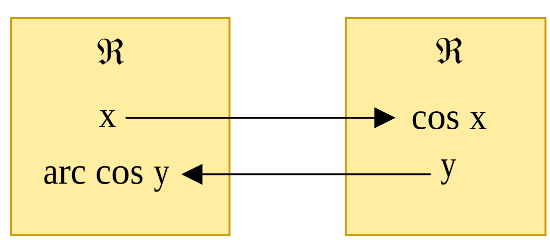
al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

- ***Recuerda:*** al "componer" una función con su inversa siempre se obtiene la función identidad, por tanto: $\text{sen } (\text{arc sen } w) = w$, $\text{arc sen } (\text{sen } w) = w$

La función "arco coseno"

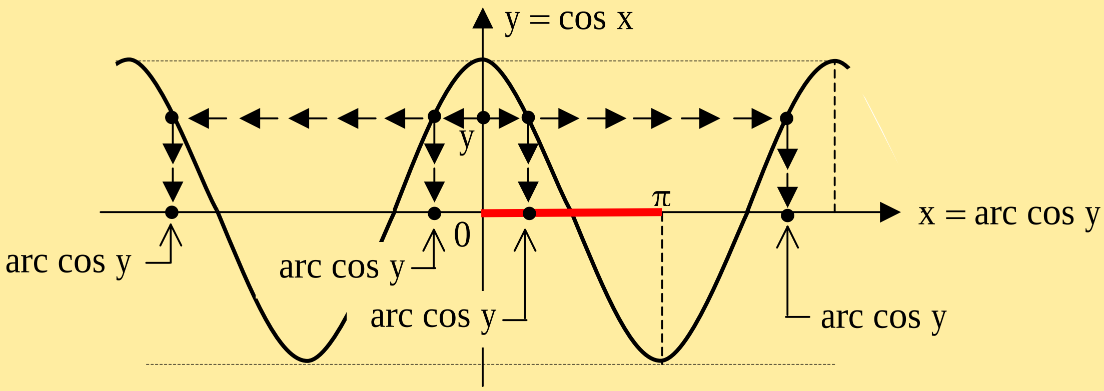
La inversa de la función "coseno" se llama "arco coseno" y se denota "arc cos". Por ejemplo, como imagen de $\pi/3$ según la función "coseno" es el número $1/2$ (o sea, $\cos \pi/3 = 1/2$), entonces la imagen del número $1/2$ según la función "arco coseno" es el número $\pi/3$, y se escribe $\text{arc cos } 1/2 = \pi/3$ (se lee: el arco cuyo co-seno es $1/2$ es $\pi/3$ radianes):

$$\pi/3 \xrightarrow{\cos} 1/2 \iff 1/2 \xrightarrow{\text{arc cos}} \pi/3$$



O sea:

$$\cos \pi/3 = 1/2 \iff \text{arc cos } 1/2 = \pi/3$$



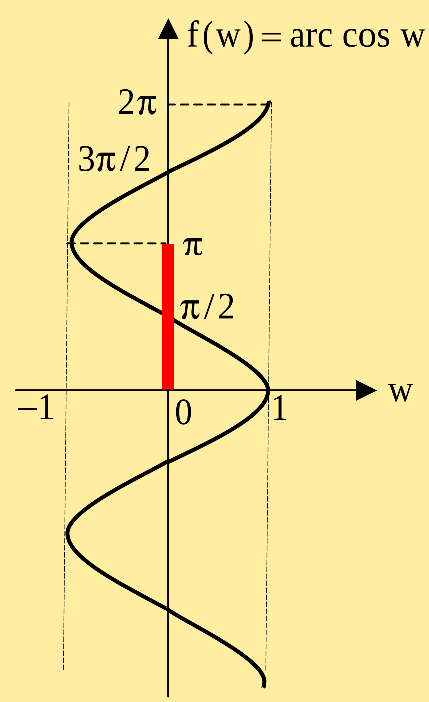
La función "coseno" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco coseno" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[0;\pi]$, diciendo de él que es el ***valor principal*** del "arco coseno". Del intervalo $[0;\pi]$ se dice que es el ***intervalo principal*** (o fundamental) de la función "arco coseno".

Por ejemplo, el coseno de $\pi/3, 7.\pi/3, 13.\pi/3, -\pi/3$ y $-5.\pi/3$ es $1/2$; por tanto:

$$\text{arc cos } 1/2 = \pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = 7.\pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = 13.\pi/3$$
$$\text{arc cos } 1/2 = -\pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = -5.\pi/3$$

El valor principal de $\text{arc cos } 1/2$ es $\pi/3$, pues $\pi/3$ es el único ángulo del intervalo $[0;\pi]$ cuyo coseno es $1/2$.

Llamando "w" a la variable "independiente", la gráfica de la función $f(w) = \text{arc cos } w$ es la de la figura adjunta. ***Observa:*** esta función sólo está definida si $-1 \le w \le 1$; por tanto, carece de sentido hablar de $\text{arc cos } 4$, pues no hay ningún ángulo cuyo coseno sea 4.



Si $h(w) = \text{arc cos }(2 - 3.w)$, la función "h" sólo está definida si $-1 \le 2 - 3.w \le 1$:

$$-1 \le 2 - 3.w \le 1 \Rightarrow -3 \le -3.w \le -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \ge 3.w \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \le w \le 1$$

al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

Si $r(w) = \text{arc cos }(4 - w^2)$, la función "r" sólo está definida si $-1 \le 4 - w^2 \le 1$, y se tiene que:

$$-1 \le 4 - w^2 \le 1 \Rightarrow -5 \le -w^2 \le -3 \Rightarrow 5 \ge w^2 \ge 3 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad}}$

$$\Rightarrow 3 \le w^2 \le 5 \Rightarrow \sqrt{3} \le |w| \le \sqrt{5}$$

- ***Recuerda:*** al "componer" una función con su inversa siempre se obtiene la función identidad, por tanto: $\cos(\text{arc cos } w) = w$, $\text{arc cos}(\cos w) = w$

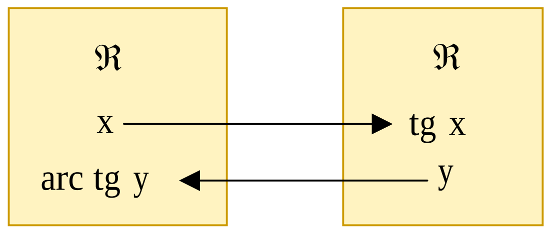
La función "arco tangente"

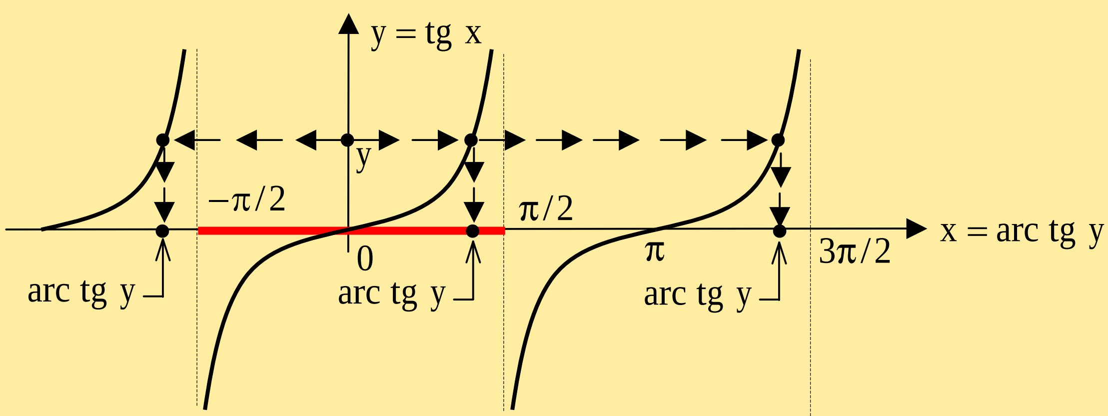
La inversa de la función "tangente" se llama "arco tangente" y se denota "arc tg". Por ejemplo, como imagen de $\pi/4$ según la función "tangente" es el número 1 (o sea, $\text{tg } \pi/4 = 1$), entonces la imagen del número 1 según la función "arco tangente" es el número $\pi/4$, y se escribe $\text{arc tg } 1 = \pi/4$ (se lee: el arco cuyo tangente es 1 es $\pi/4$ radianes):

$$\pi/4 \xrightarrow{\text{tg}} 1 \Leftrightarrow 1 \xrightarrow{\text{arc tg}} \pi/4$$

O sea:

$$\text{tg } \pi/4 = 1 \Leftrightarrow \text{arc tg } 1 = \pi/4$$





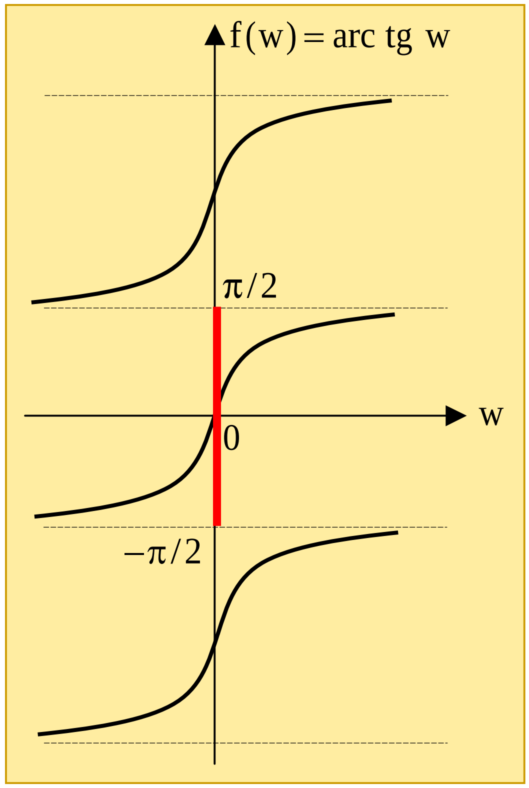
La función "tangente" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco tangente" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$, diciendo de él que es el ***valor principal*** del "arco tangente". Del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ se dice que es el ***intervalo principal*** (o fundamental) de la función "arco tangente".

Por ejemplo, la tangente de $\pi/4$, $5.\pi/4$, $9.\pi/4$, $-3.\pi/4$ y $-7.\pi/4$ es 1; así:

$$\text{arc tg } 1 = \pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = 5.\pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = 9.\pi/4$$
$$\text{arc tg } 1 = -3.\pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = -7.\pi/4$$

El valor principal de $\text{arc tg } 1$ es $\pi/4$, pues $\pi/4$ es el único ángulo del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ cuya tangente es 1.

Llamando "w" a la variable "independiente", la gráfica de la función $f(w) = \text{arc tg } w$ es la de la figura adjunta, que está definida para todo valor de "w" (pues como la función "tangente" toma todos los valores reales, sea cual sea el valor real que se elija para "w" siempre puede encontrarse un ángulo cuya tangente sea "w").



Si $h(w) = \text{arc tg } 1/w$, la función "h" está definida siempre que $w \neq 0$, pues $1/w \in \Re$ siempre que $w \neq 0$.

Si $g(w) = \text{arc tg } (\text{Ln } (1+w))$, la función "g" sólo está definida sólo si $1 + w > 0$, pues $\text{Ln } (1+w) \in \Re$ sólo si $1 + w > 0$.

Si $r(w) = \text{arc tg } \sqrt{1+w}$, la función "r" sólo está definida si $1 + w \geq 0$, pues $\sqrt{1+w} \in \Re$ sólo si $1 + w \geq 0$.

La "inversas" de las funciones "cotangente", "secante" y "cosecante" son las funciones llamadas "arco cotangente" (se denota "arc cotg"), "arco secante" (se denota "arc sec") y "arco cosecante" (se denota "arc cosec"):

$$y = \text{cotg } x \Leftrightarrow x = \text{arc cotg } y$$
$$y = \sec x \Leftrightarrow x = \text{arc sec } y$$
$$y = \text{cosec } x \Leftrightarrow x = \text{arc cosec } y$$

Observa: es $\text{arc cotg } y = \text{arc tg } 1/y$, pues si la cotangente de un ángulo es "y", su tangente es $1/y$. Es $\text{arc sec } y = \text{arc cos } 1/y$, pues si la secante de un ángulo es "y", su coseno es $1/y$. Es $\text{arc cosec } y = \text{arc sen } 1/y$, pues si la cosecante de un ángulo es "y", su seno es $1/y$.

Recuerda: cuando el Cálculo Diferencial se usa para analizar "fenómenos" de la vida real en los que intervienen dos variables "x" e "y" relacionadas entre sí, el asunto de la función "inversa" permite volver la tortilla, según se elija como "independiente" la variable "x" o la "y".

Si decido trabajar "x" horas ganaré $4 + \sqrt[3]{x-1}$ euros

O vuelves la tortilla: si decides ganar "y" euros trabajarás $1 + (y-4)^3$ horas

1.25 LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se llaman ***hiperbólicas*** las siguientes funciones:

$$* \ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \equiv \text{seno hiperbólico de "x"} \equiv \text{sh } x$$

$$* \ f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \equiv \text{coseno hiperbólico de "x"} \equiv \text{ch } x$$

$$* \ f(x)=\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \equiv \text{tangente hiperbólica de "x"} \equiv \text{th } x$$

$$* \ f(x)=\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \equiv \text{cotangente hiperbólica de "x"} \equiv \text{coth } x$$

$$* \ f(x)=\frac{1}{\text{ch } x} \equiv \text{secante hiperbólica de "x"} \equiv \text{sech } x$$

$$* \ f(x)=\frac{1}{\text{sh } x} \equiv \text{cosecante hiperbólica de "x"} \equiv \text{cosech } x$$

Por ejemplo, si te dicen que $f:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $f(x)=\text{sh } x^2$, te dicen que:

$$f(x)=\frac{e^{x^2}-e^{x^2}}{2}$$

Si te dicen que $f:\Re \ \alpha \ \Re$ es tal que $f(x)=\text{ch } 1/x$, te dicen que:

$$f(x)=\frac{e^{1/x}+e^{-1/x}}{2}$$

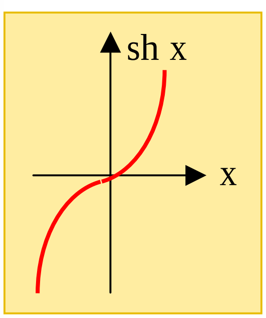
La función $f(x)=\text{sh } x$ es "impar" (su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas), pues:

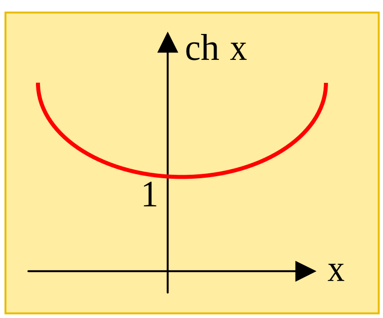
$$f(-x)=\text{sh }(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\text{sh } x=-f(x)$$

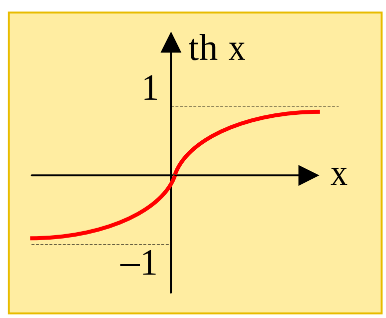
La función $f(x)=\text{ch } x$ es "par" (su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas), pues:

$$f(-x)=\text{ch }(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\text{ch } x=f(x)$$

La gráfica de $f(x)=\text{ch } x$ se llama ***catenaria:*** es la forma que toma un cable suspendido por sus extremos bajo la acción de la gravedad.







Es $\text{ch } x+\text{sh } x=e^{x}$ y $\text{ch } x-\text{sh } x=e^{-x}$; y multiplicando miembro a miembro las anteriores, resulta $\text{ch}^2\, x - \text{sh}^2\, x = 1$.

Es: $$\text{ch}\,(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a . e^b + e^{-a} . e^{-b}}{2} =$$

$$\boxed{e^a = \text{ch}\, a + \text{sh}\, a \;\; ; \;\; e^{-a} = \text{ch}\, a - \text{sh}\, a \;\; ; \;\; e^b = \text{ch}\, b + \text{sh}\, b \;\; ; \;\; e^{-b} = \text{ch}\, b - \text{sh}\, b}$$

$$= \frac{(\text{ch}\, a + \text{sh}\, a).(\text{ch}\, b + \text{sh}\, b) + (\text{ch}\, a - \text{sh}\, a).(\text{ch}\, b - \text{sh}\, b)}{2} =$$
$$= \text{ch}\, a . \text{ch}\, b + \text{sh}\, a . \text{sh}\, b$$

De modo análogo se demuestra que:

$$* \; \text{ch}\,(a-b) = \text{ch}\, a \;.\text{ch}\, b - \text{sh}\, a \;.\; \text{sh}\, b$$
$$* \; \text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\, a \;.\; \text{ch}\, b + \text{ch}\, a \;.\; \text{sh}\, b$$
$$* \; \text{sh}\,(a-b) = \text{sh}\, a \;.\; \text{ch}\, b - \text{ch}\, a \;.\; \text{sh}\, b$$

Las funciones hiperbólicas inversas son las inversas o recíprocas de las funciones hiperbólicas:

$$y = f(x) = \text{sh}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arg \text{sh}\, y$$
$$y = f(x) = \text{ch}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arg \text{ch}\, y$$
$$y = f(x) = \text{th}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arg \text{th}\, y$$
$$y = f(x) = \text{coth}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arg \text{cth}\, y$$
$$y = f(x) = \text{sech}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arg \text{sech}\, y$$
$$y = f(x) = \text{cosech}\, x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \arg \text{cosech}\, y$$

$$\begin{array}{ccc} \Re & & \Re \\ x & \longrightarrow & \text{sh}\, x \\ \arg \text{sh}\, y & \longleftarrow & y \end{array}$$

donde "arg" lo debes leer "argumento".