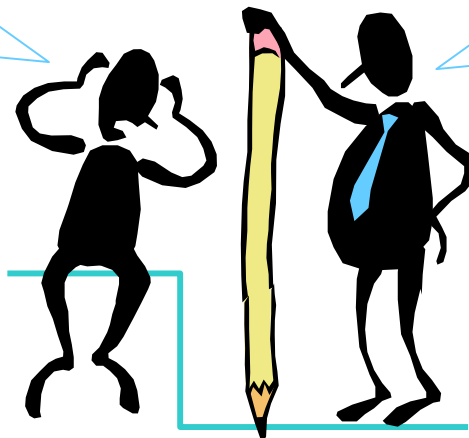


Tema 1

Cálculo de primitivas

1.01	Requisitos previos	2
1.02	Primitiva de una función	3
1.03	El problema del cálculo de primitivas	5
1.04	Primitivas inmediatas	6
1.05	Funciones hiperbólicas	21
1.06	Cálculo de primitivas "por partes"	34
1.07	Cambio de variable	45
1.08	Primitiva de un cociente de polinomios	50
1.09	Funciones racionales del seno y el coseno	71
1.10	Funciones racionales de las funciones "sh" y "ch"	84
1.11	Primitivas de algunas funciones irracionales	92
1.12	Cálculo de primitivas por reducción	107

Me temo que esto no me va a gustar mucho



El primer tema es bastante pe-tardete, pero luego la cosa se anima mucho y lo pasarás bomba resolviendo problemas de la vida real

1.6 CÁLCULO DE PRIMITIVAS "POR PARTES"

Si "u" y "v" son funciones de la variable "x", es $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$; al despejar $u \cdot dv$ resulta $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$, y así:

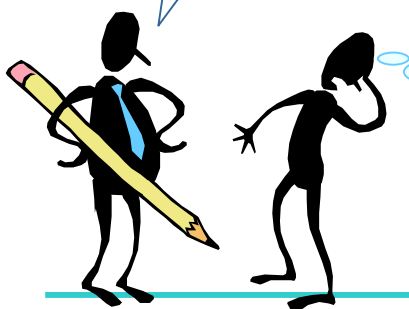
$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$$

Como $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, resulta la llamada fórmula de integración por partes

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

que transforma el problema de calcular $\int u \cdot dv$ en el problema de calcular $\int v \cdot du$

En los siguientes seis ejemplos calculamos primitivas de funciones cuya "estructura" es $f(x) = P(x) \cdot a^{b \cdot x}$ ($a > 0$), siendo $P(x)$ un polinomio y "b" una constante. Además, para aplicar la formulita $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ siempre haremos $u = P(x)$ y $dv = a^{b \cdot x} \cdot dx$, repitiendo el proceso tantas veces como grado tiene el polinomio.



Esperemos que en examen el grado no sea muy grande

$$1.6.1 \quad \int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad | \quad dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x$$

$$1.6.2 \quad \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx) =$$

$$* u = x^2 \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx$$

$$* dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x$$

$$* u = x \Rightarrow du = dx$$

$$* dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$$

$$1.6.3 \quad \int x^3 \cdot e^x \cdot dx = x^3 \cdot e^x - 3 \cdot \int x^2 \cdot e^x \cdot dx =$$

$$* u = x^3 \Rightarrow du = 3 \cdot x^2 \cdot dx$$

$$* dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot (x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x \cdot dx) =$$

$$* u = x^2 \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx$$

$$* dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x$$

$$= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \cdot e^x + 6 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx) =$$

$$\begin{aligned} * u = x &\Rightarrow du = dx \\ * dv = e^x \cdot dx &\Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x \end{aligned}$$

$$= x^3 \cdot e^x - 3 \cdot x^2 \cdot e^x + 6 \cdot x \cdot e^x - 6 \cdot e^x + C$$

1.6.4

$$\int x^2 \cdot 3^x \cdot dx = \frac{x^2 \cdot 3^x}{\text{Ln } 3} - \frac{2}{\text{Ln } 3} \cdot \int x \cdot 3^x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u = x^2 &\Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx \\ * dv = 3^x \cdot dx &\Rightarrow v = \int 3^x \cdot dx = \frac{3^x}{\text{Ln } 3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{\text{Ln } 3} - \frac{2}{\text{Ln } 3} \cdot \left(\frac{x \cdot 3^x}{\text{Ln } 3} - \frac{1}{\text{Ln } 3} \cdot \int 3^x \cdot dx \right) =$$

$$\begin{aligned} * u = x &\Rightarrow du = dx \\ * dv = 3^x \cdot dx &\Rightarrow v = \int 3^x \cdot dx = \frac{3^x}{\text{Ln } 3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{\text{Ln } 3} - \frac{2 \cdot x \cdot 3^x}{(\text{Ln } 3)^2} - \frac{3^x}{(\text{Ln } 3)^3} + C$$

1.6.5

$$\int x^2 \cdot e^{3 \cdot x} \cdot dx = \frac{x^2 \cdot e^{3 \cdot x}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \int x \cdot e^{3 \cdot x} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u = x^2 &\Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx \\ * dv = e^{3 \cdot x} \cdot dx &\Rightarrow v = \int e^{3 \cdot x} \cdot dx = e^x / 3 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{3 \cdot x}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x \cdot e^{3 \cdot x}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int e^{3 \cdot x} \cdot dx \right) =$$

$$\begin{aligned} * u = x &\Rightarrow du = dx \\ * dv = e^{3 \cdot x} \cdot dx &\Rightarrow v = \int e^{3 \cdot x} \cdot dx = e^x / 3 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{3 \cdot x}}{3} - \frac{2 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x}}{9} + \frac{2 \cdot e^{3 \cdot x}}{27} + C$$

1.6.6

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x \cdot e^{-x} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u = x^2 &\Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx \\ * dv = e^{-x} \cdot dx &\Rightarrow v = \int e^{-x} \cdot dx = -e^x \end{aligned}$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot (-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx) =$$

$$\begin{aligned} * u = x &\Rightarrow du = dx \\ * dv = e^{-x} \cdot dx &\Rightarrow v = \int e^{-x} \cdot dx = -e^x \end{aligned}$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot x \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + C$$

En los siguientes seis ejemplos calculamos primitivas de funciones cuya "estructura" es $f(x) = P(x) \cdot \text{sen } ax$ ó $f(x) = P(x) \cdot \text{cos } ax$, siendo $P(x)$ un polinomio y "a" una constante. Para aplicar la formulita $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ haremos $u = P(x)$ y $dv = \text{sen } ax$ ó $u = P(x)$ y $dv = \text{cos } ax$, repitiendo el proceso tantas veces como grado tiene el polinomio.



$$\boxed{1.6.7} \quad \int x \cdot \text{sen } x \cdot dx = -x \cdot \text{cos } x + \int \text{cos } x \cdot dx = -x \cdot \text{cos } x + \text{sen } x + C$$

$$\begin{aligned} & * u = x \Rightarrow du = dx \\ & * dv = \text{sen } x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{sen } x \cdot dx = -\text{cos } x \end{aligned}$$

$$\boxed{1.6.8} \quad \int x \cdot \text{cos } x \cdot dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \cdot dx = x \cdot \text{cos } x + \text{cos } x + C$$

$$\begin{aligned} & * u = x \Rightarrow du = dx \\ & * dv = \text{cos } x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{cos } x \cdot dx = \text{sen } x \end{aligned}$$

$$\boxed{1.6.9} \quad \int x \cdot \text{sen } 4 \cdot x \cdot dx = -\frac{x \cdot \text{cos } 4 \cdot x}{4} + \frac{1}{4} \cdot \int \text{cos } 4 \cdot x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} & * u = x \Rightarrow du = dx \\ & * dv = \text{sen } 4 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{sen } 4 \cdot x \cdot dx = -\frac{\text{cos } 4 \cdot x}{4} \\ & = -\frac{x \cdot \text{cos } 4 \cdot x}{4} + \frac{\text{sen } 4 \cdot x}{16} + C \end{aligned}$$

$$\boxed{1.6.10} \quad \int x \cdot \text{cos } 5 \cdot x \cdot dx = \frac{x \cdot \text{sen } 5 \cdot x}{5} - \frac{1}{5} \cdot \int \text{sen } 5 \cdot x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} & * u = x \Rightarrow du = dx \\ & * dv = \text{cos } 5 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{cos } 5 \cdot x \cdot dx = \frac{\text{sen } 5 \cdot x}{5} \\ & = \frac{x \cdot \text{sen } 5 \cdot x}{5} + \frac{\text{cos } 5 \cdot x}{25} + C \end{aligned}$$

$$\boxed{1.6.11} \quad \int x^2 \cdot \text{cos } 3 \cdot x \cdot dx = \frac{x^2 \cdot \text{sen } 3 \cdot x}{3} - \frac{2}{3} \cdot \int x \cdot \text{sen } 3 \cdot x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} & * u = x^2 \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx \\ & * dv = \text{cos } 3 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{cos } 3 \cdot x \cdot dx = \frac{\text{sen } 3 \cdot x}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \text{sen } 3x}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{x \cdot \cos 3x}{3} + \frac{1}{3} \int \cos 3x \cdot dx \right) =$$

$$\begin{aligned} & * u = x \Rightarrow du = dx \\ & * dv = \text{sen } 3x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{sen } 3x \cdot dx = -\frac{\cos 3x}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \text{sen } 3x}{3} + \frac{2x \cdot \cos 3x}{9} - \frac{2 \cdot \text{sen } 3x}{27} + C$$

1.6.12

$$\int x^3 \cdot \cos 4x \cdot dx = \frac{x^3 \cdot \text{sen } 4x}{4} - \frac{3}{4} \int x^2 \cdot \text{sen } 4x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} & * u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 \cdot dx \\ & * dv = \cos 4x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos 4x \cdot dx = \frac{\text{sen } 4x}{4} \end{aligned}$$

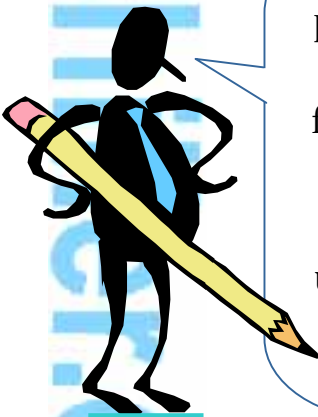
$$= \frac{x^3 \cdot \text{sen } 4x}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{x^2 \cdot \cos 4x}{4} + \frac{2}{4} \int x \cdot \cos 4x \cdot dx \right) =$$

$$\begin{aligned} & * u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ & * dv = \text{sen } 4x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{sen } 4x \cdot dx = -\frac{\cos 4x}{4} \end{aligned}$$

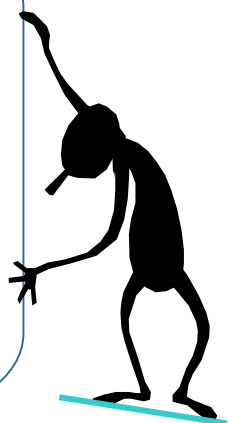
$$= \frac{x^3 \cdot \text{sen } 4x}{4} + \frac{3x^2 \cdot \cos 4x}{4^2} - \frac{6}{4^2} \cdot \left(\frac{x \cdot \text{sen } 4x}{4} - \frac{1}{4} \int \text{sen } 4x \cdot dx \right) =$$

$$\begin{aligned} & * u = x \Rightarrow du = dx \\ & * dv = \cos 4x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos 4x \cdot dx = \frac{\text{sen } 4x}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3 \cdot \text{sen } 4x}{4} + \frac{3x^2 \cdot \cos 4x}{4^2} - \frac{6x \cdot \text{sen } 4x}{4^3} + \frac{6 \cdot \cos 4x}{4^4} + C$$



En los siguientes tres ejemplos calculamos primitivas de funciones cuya "estructura" es de la forma $f(x) = k^a \cdot x \cdot \text{sen } bx$ ó $f(x) = k^a \cdot x \cdot \cos bx$, donde $k > 0$ y "a" y "b" son constantes. Para aplicar la formulita $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ da lo mismo elegir $u = k^a \cdot x$ ó $dv = k^a \cdot x \cdot dx$; tras repetir el proceso dos veces aparecerá de nuevo la primitiva que hemos de calcular.



1.6.13

$$\int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx = e^x \cdot \text{sen } x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} & * u = \text{sen } x \Rightarrow du = \cos x \cdot dx \\ & * dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x \end{aligned}$$

$$= e^x \cdot \text{sen } x - (e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx)$$

$$\begin{aligned} * u &= \cos x \Rightarrow du = -\text{sen } x \cdot dx \\ * dv &= e^x \cdot dx \Rightarrow v = \int e^x \cdot dx = e^x \end{aligned}$$

O sea, aparece de nuevo la primitiva que debemos calcular:

$$\int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx = e^x \cdot \text{sen } x - e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx$$

por tanto:

$$2 \cdot \int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx = e^x \cdot \text{sen } x - e^x \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \text{sen } x \cdot dx = \frac{e^x \cdot \text{sen } x - e^x \cdot \cos x}{2} + C$$

$$\boxed{1.6.14} \quad \int e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{e^{3 \cdot x} \cdot \text{sen } 2 \cdot x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \int e^{3 \cdot x} \cdot \text{sen } 2 \cdot x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u &= e^{3 \cdot x} \Rightarrow du = 3 \cdot e^{3 \cdot x} \cdot dx \\ * dv &= \cos 2 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{\text{sen } 2 \cdot x}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{3 \cdot x} \cdot \text{sen } 2 \cdot x}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x}{2} + \frac{3}{2} \cdot \int e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx \right)$$

$$\begin{aligned} * u &= e^{3 \cdot x} \Rightarrow du = 3 \cdot e^{3 \cdot x} \cdot dx \\ * dv &= \text{sen } 2 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \text{sen } 2 \cdot x \cdot dx = -\frac{\cos 2 \cdot x}{2} \end{aligned}$$

O sea, aparece de nuevo la primitiva que debemos calcular:

$$\int e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{e^{3 \cdot x} \cdot \text{sen } 2 \cdot x}{2} + \frac{3 \cdot e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x}{4} - \frac{9}{4} \cdot \int e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx$$

por tanto:

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \cdot \int e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{e^{3 \cdot x} \cdot \text{sen } 2 \cdot x}{2} + \frac{3 \cdot e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{4}{13} \cdot \left(\frac{e^{3 \cdot x} \cdot \text{sen } 2 \cdot x}{2} + \frac{3 \cdot e^{3 \cdot x} \cdot \cos 2 \cdot x}{4} \right) + C$$

$$\boxed{1.6.15} \quad \int e^{5 \cdot x} \cdot \text{sen } 3 \cdot x \cdot dx = \frac{e^{5 \cdot x} \cdot \text{sen } 3 \cdot x}{5} - \frac{3}{5} \cdot \int e^{5 \cdot x} \cdot \cos 3 \cdot x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u &= \text{sen } 3 \cdot x \Rightarrow du = 3 \cdot \cos 3 \cdot x \cdot dx \\ * dv &= e^{5 \cdot x} \cdot dx \Rightarrow v = \int e^{5 \cdot x} \cdot dx = \frac{e^{5 \cdot x}}{5} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{5 \cdot x} \cdot \text{sen } 3 \cdot x}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{e^{5 \cdot x} \cdot \cos 3 \cdot x}{5} + \frac{3}{5} \cdot \int e^{5 \cdot x} \cdot \text{sen } 3 \cdot x \cdot dx \right)$$

$$\begin{aligned} * u &= \cos 3 \cdot x \Rightarrow du = -3 \cdot \text{sen } 3 \cdot x \cdot dx \\ * dv &= e^{5 \cdot x} \cdot dx \Rightarrow v = \int e^{5 \cdot x} \cdot dx = \frac{e^{5 \cdot x}}{5} \end{aligned}$$

O sea, aparece de nuevo la primitiva que debemos calcular:

$$\int e^{5x} \cdot \sin 3x \cdot dx = \frac{e^{5x} \cdot \sin 3x}{5} - \frac{3 \cdot e^{5x} \cdot \cos 3x}{25} - \frac{9}{25} \int e^{5x} \cdot \sin 3x \cdot dx$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{9}{25}\right) \cdot \int e^{5x} \cdot \sin 3x \cdot dx &= \frac{e^{5x} \cdot \sin 3x}{5} - \frac{3 \cdot e^{5x} \cdot \cos 3x}{25} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int e^{5x} \cdot \sin 3x \cdot dx &= \frac{25}{34} \cdot \left(\frac{e^{5x} \cdot \sin 3x}{5} - \frac{3 \cdot e^{5x} \cdot \cos 3x}{25}\right) + C \end{aligned}$$



En los siguientes cinco ejemplos calculamos primitivas de funciones cuya "estructura" es $f(x) = P(x) \cdot \text{Ln } Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Para aplicar la formulita $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ haremos $u = \text{Ln } Q(x)$ y $dv = P(x) \cdot dx$, y no es raro que al final nos encontremos con el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios.

1.6.16

$$\int \text{Ln } x \cdot dx = x \cdot \text{Ln } x - \int dx = x \cdot \text{Ln } x - x + C$$

$$\begin{aligned} * u &= \text{Ln } x \Rightarrow du = dx/x \\ * dv &= dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{aligned}$$

1.6.17

$$\int x \cdot \text{Ln } x \cdot dx = \frac{x^2 \cdot \text{Ln } x}{2} - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{x^2 \cdot \text{Ln } x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\begin{aligned} * u &= \text{Ln } x \Rightarrow du = dx/x \\ * dv &= x \cdot dx \Rightarrow v = \int x \cdot dx = x^2/2 \end{aligned}$$

1.6.18

$$\int x^2 \cdot \text{Ln } x \cdot dx = \frac{x^3 \cdot \text{Ln } x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3 \cdot \text{Ln } x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\begin{aligned} * u &= \text{Ln } x \Rightarrow du = dx/x \\ * dv &= x^2 \cdot dx \Rightarrow v = \int x^2 \cdot dx = x^3/3 \end{aligned}$$

1.6.19

$$\int \text{Ln } (1 + x^2) \cdot dx = x \cdot \text{Ln } (1 + x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} * u &= \text{Ln } (1 + x^2) \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx / (1 + x^2) \\ * dv &= dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{aligned}$$

Nuestro problema se transforma en el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios; por tanto, hasta que no aprendamos a calcular este tipo de primitivas no podremos acabar el ejercicio.

$$\boxed{1.6.20} \quad \int x \cdot \ln(1+x^2) \cdot dx = \frac{x^2 \cdot \ln(1+x^2)}{2} - 2 \cdot \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} * u &= \ln(1+x^2) \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx / (1+x^2) \\ * dv &= x \cdot dx \Rightarrow v = \int x \cdot dx = x^2/2 \end{aligned}$$

Nuestro problema se transforma en el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios; por tanto, hasta que no aprendamos a calcular este tipo de primitivas no podremos acabar el ejercicio.



En los siguientes seis ejemplos calculamos primitivas de funciones cuya "estructura" es $f(x) = P(x) \cdot T(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio y $T(x)$ una función trigonométrica inversa. Para aplicar la formulita $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ haremos $u = T(x)$ y $dv = P(x) \cdot dx$, y no es raro que al final nos encontremos con el problema de calcular primitivas que de momento nos desbordan

$$\boxed{1.6.21} \quad \int \arctg x \cdot dx = x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u &= \arctg x \Rightarrow du = dx / (1+x^2) \\ * dv &= dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{aligned}$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x^2| + C$$

$$\boxed{1.6.22} \quad \int x \cdot \arctg x \cdot dx = \frac{x^2 \cdot \arctg x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx = ?$$

$$\begin{aligned} * u &= \arctg x \Rightarrow du = dx / (1+x^2) \\ * dv &= dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{aligned}$$

Nuestro problema se transforma en el problema de calcular la primitiva de un cociente de polinomios; por tanto, hasta que no aprendamos a calcular este tipo de primitivas no podremos acabar el ejercicio.

$$\boxed{1.6.23} \quad \int \arcsen x \cdot dx = x \cdot \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u &= \arcsen x \Rightarrow du = dx / \sqrt{1-x^2} \\ * dv &= dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{aligned}$$

$$= x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C$$

1.6.24

$$\int x \cdot \operatorname{arc\,sec} x \, dx = \frac{x^2 \cdot \operatorname{arc\,sec} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx =$$

$$* u = \operatorname{arc\,sec} x \Rightarrow du = \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$* dv = x \, dx \Rightarrow v = \int x \, dx = x^2/2$$

$$= \frac{x^2 \cdot \operatorname{arc\,sec} x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 1} + C$$

1.6.25

$$\int x \cdot \operatorname{arc\,sen} x \, dx = \frac{x^2 \cdot \operatorname{arc\,sen} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = ?$$

$$* u = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow du = dx/\sqrt{1 - x^2}$$

$$* dv = x \, dx \Rightarrow v = \int x \, dx = x^2/2$$

Nuestro problema se transforma en el problema de calcular la primitiva de una función de la forma $R(x; \sqrt{a^2 - x^2})$; por tanto, hasta que no aprendamos a calcular este tipo de primitivas no podremos acabar el ejercicio.

1.6.26

$$\int \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$* u = \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1/x^2}{\sqrt{1 - (1/x)^2}} \, dx = -\frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$* dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{x} + \operatorname{arg\,ch} x + C$$

Además de los 5 tipos de "estructuras" que ya sabéis lidiar "por partes", deberéis probar "por partes" **siempre** que estéis jodidos con una primitiva que os desborda porque no corresponde a ninguna de las "estructuras" de referencia que tenéis archivadas en el "coco" ¿está claro?

Sí, bwuana



$$\boxed{1.6.27} \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - \int \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u &= \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow du = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \cdot dx \\ * dv &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - 2 \cdot \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - 2 \cdot \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx =$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - 2 \cdot \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot dx + 2 \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx$$

es la primitiva que buscamos

Resulta:

$$3 \cdot \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + 2 \cdot \int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} \cdot dx$$

o sea:

$$3 \cdot \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + 2 \cdot \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + 2 \cdot \operatorname{tg} x$$

En definitiva:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + 2 \cdot \operatorname{tg} x \right) + C$$

$$\boxed{1.6.28} \quad \int x^3 \cdot (\operatorname{Ln} x)^2 \cdot dx = \frac{x^4 \cdot (\operatorname{Ln} x)^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \int x^3 \cdot \operatorname{Ln} x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u &= (\operatorname{Ln} x)^2 \Rightarrow du = \frac{2 \cdot \operatorname{Ln} x}{x} \cdot dx \\ * dv &= x^3 \cdot dx \Rightarrow v = \int x^3 \cdot dx = x^4 / 4 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^4 \cdot (\operatorname{Ln} x)^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^4 \cdot \operatorname{Ln} x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \int x^3 \cdot dx \right) =$$

$$\begin{aligned} * u &= \operatorname{Ln} x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ * dv &= x^3 \cdot dx \Rightarrow v = \int x^3 \cdot dx = x^4 / 4 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^4 \cdot (\operatorname{Ln} x)^2}{4} - \frac{x^4 \cdot \operatorname{Ln} x}{8} + \frac{1}{8} \cdot \int x^3 \cdot dx =$$

$$= \frac{x^4 \cdot (\operatorname{Ln} x)^2}{4} - \frac{x^4 \cdot \operatorname{Ln} x}{8} + \frac{x^4}{32} + C$$

$$1.6.29 \int x^2 \cdot \cos(\ln x) \cdot dx = \frac{x^3 \cdot \cos(\ln x)}{3} + \frac{1}{3} \int x^2 \cdot \sin \ln x \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} * u = \cos(\ln x) &\Rightarrow du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} \cdot dx \\ * dv = x^2 \cdot dx &\Rightarrow v = \int x^2 \cdot dx = x^3/3 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3 \cdot \cos(\ln x)}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^3 \cdot \sin(\ln x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \cdot (\cos \ln x) \cdot dx \right)$$

es la primitiva que buscamos

Por tanto:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{9}\right) \int x^2 \cdot \cos(\ln x) \cdot dx &= \frac{x^3 \cdot \cos(\ln x)}{3} + \frac{x^3 \cdot \sin(\ln x)}{9} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int x^2 \cdot \cos(\ln x) \cdot dx &= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{x^3 \cdot \cos(\ln x)}{3} + \frac{x^3 \cdot \sin(\ln x)}{9} \right) + C \end{aligned}$$

$$1.6.30 \int 2 \cdot x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \int 2 \cdot x \cdot \frac{1 - \cos 2 \cdot x}{2} \cdot dx = \int x \cdot (1 - \cos 2 \cdot x) \cdot dx =$$

$$\text{Todo el mundo sabe que } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2 \cdot x}{2}$$

$$= \int x \cdot dx - \int x \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{x^2}{2} - \int x \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x \cdot \sin 2 \cdot x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2 \cdot x \cdot dx \right) =$$

$$* u = x \Rightarrow du = dx$$

$$* dv = \cos 2 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{\sin 2 \cdot x}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x \cdot \sin 2 \cdot x}{2} + \frac{\cos 2 \cdot x}{4} + C$$

$$1.6.30 \int 2 \cdot x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int 2 \cdot x \cdot \frac{1 + \cos 2 \cdot x}{2} \cdot dx = \int x \cdot (1 + \cos 2 \cdot x) \cdot dx =$$

$$\text{Todo el mundo sabe que } \cos^2 x = (1 + \cos 2 \cdot x)/2$$

$$= \int x \cdot dx + \int x \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + \int x \cdot \cos 2 \cdot x \cdot dx =$$

$$* u = x \Rightarrow du = dx$$

$$* dv = \cos 2 \cdot x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos 2 \cdot x \cdot dx = \frac{\sin 2 \cdot x}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \left[\frac{x \cdot \text{sen } 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \text{sen } 2x \cdot dx \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x \cdot \text{sen } 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

1.6.31 $\int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{2} - \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx =$

$$* u = x^2 \Rightarrow du = 2 \cdot x \cdot dx$$

$$* dv = x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow v = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{e^{x^2}}{2}$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

1.6.32 $\int (\cos x) \cdot \text{Ln}(1 + \cos x) \cdot dx =$

$$= (\text{sen } x) \cdot \text{Ln}(1 + \cos x) + \int \frac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x} \cdot dx =$$

$$* u = \text{Ln}(1 + \cos x) \Rightarrow du = -\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} \cdot dx$$

$$* dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos x \cdot dx = \text{sen } x$$

$$= (\text{sen } x) \cdot \text{Ln}(1 + \cos x) + \int (1 - \cos x) \cdot dx =$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x)}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$$

$$= (\text{sen } x) \cdot \text{Ln}(1 + \cos x) + x - \text{sen } x + C$$

1.6.33 $\int x^n \cdot \text{Ln } x \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \text{Ln } x - \frac{1}{n+1} \int x^n \cdot dx =$

$$* u = \text{Ln } x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$* dv = x^n \cdot dx \Rightarrow v = \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \text{Ln } x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

1.6.34 $\int \frac{\text{Ln } x}{x^2} \cdot dx = -\frac{\text{Ln } x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\text{Ln } x}{x} - \frac{1}{x} + C$

$$* u = \text{Ln } x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$* dv = dx/x^2 \Rightarrow v = \int dx/x^2 \cdot dx = -1/x$$

1.7 CAMBIO DE VARIABLE

Si para calcular $\int f(x).dx$ efectuamos el cambio de variable definido por:

$$x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t).dt$$

Al sustituir "x" por $\phi(t)$ y "dx" por $\phi'(t).dt$, se obtiene:

$$\int f(x).dx = \int f(\phi(t)).\phi'(t).dt$$

Y ahora **rezamos** para que el problema de calcular $\int f(\phi(t)).\phi'(t).dt$ sea más sencillo que el problema de calcular $\int f(x).dx$.



No hay receta que en todos los casos diga cuál es el cambio de variable que resuelve la papeleta; pero don't worry, no van a pedirte que descubras cambios de variable hasta ahora no descubiertos. Sólo te pedirán que conozcas los cambios de variable más famosos; de ellos hablaremos en su momento

1.7.1

$$\int \cos 3.x . dx = \int \cos z . \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} . \text{sen } z =$$

Aunque la primitiva es inmediata, también la podemos calcular haciendo el cambio $3.x = z \Rightarrow x = z/3 \Rightarrow dx = dz/3$

$$= \frac{1}{3} . \text{sen } 3.x + C$$

deshacemos el cambio de variable; o sea, sustituimos "z" por "3.x"

1.7.2

$$\int \frac{dx}{(x+4)^6} = \int \frac{dx}{z^6} = \frac{z^{-6+1}}{-6+1} = -\frac{1}{5.z^5} =$$

Aunque la primitiva es inmediata, también la podemos calcular haciendo el cambio $x+4 = z \Rightarrow dx = dz$

$$= -\frac{1}{5.(x+4)^5} + C$$

deshacemos el cambio de variable; o sea, sustituimos "z" por "x+4"

1.7.3

$$\int x . \sqrt{x-1} . dx = \int (1+z^2) . z . (2.z . dz) = 2 . \int (z^2 + z^4) . dz =$$

$$\sqrt{x-1} = z \Rightarrow x-1 = z^2 \Rightarrow x = 1+z^2 \Rightarrow dx = 2.z . dz$$

$$= 2 . \left(\frac{1}{3} . z^3 + \frac{1}{5} . z^5 \right) = \frac{2}{3} . (\sqrt{x-1})^3 + \frac{2}{5} . (\sqrt{x-1})^5 + C$$

deshacemos el cambio de variable; o sea, sustituimos "z" por $\sqrt{x-1}$

1.7.4

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2+4^2} \cdot dx = \int \frac{2(1+4t)+3}{4^2 \cdot t^2+4^2} \cdot 4 \cdot dt =$$

$$x-1=4t \Rightarrow x=1+4t \Rightarrow dx=4 \cdot dt$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{2t \cdot dt}{t^2+1} = \frac{5}{4} \cdot \text{arc tg } t + \text{Ln}|t^2+1| =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \text{arc tg } \frac{x-1}{4} + \text{Ln}\left|\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1\right| + C$$

deshacemos el cambio de variable: $x-1=4t \Rightarrow t = \frac{x-1}{4}$

1.7.5

$$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2+5^2} \cdot dx = \int \frac{3(-1+5t)-2}{5^2 \cdot t^2+5^2} \cdot 5 \cdot dt =$$

$$x+1=5t \Rightarrow x=-1+5t \Rightarrow dx=5 \cdot dt$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2+1} + 3 \cdot \int \frac{t \cdot dt}{t^2+1} = -\text{arc tg } t + \frac{3}{2} \cdot \text{Ln}|t^2+1| =$$

$$= -\text{arc tg } \frac{x+1}{5} + \frac{3}{2} \cdot \text{Ln}\left|\left(\frac{x+1}{5}\right)^2+1\right| + C$$

deshacemos el cambio de variable: $x+1=5t \Rightarrow t = \frac{x+1}{5}$

1.7.6

$$\int \cos \sqrt{x} \cdot dx = \int (\cos y) \cdot (2 \cdot y \cdot dy) = 2 \cdot \int y \cdot \cos y \cdot dy =$$

$$\sqrt{x}=y \Rightarrow x=y^2 \Rightarrow dx=2 \cdot y \cdot dy$$

$$= 2 \cdot (y \cdot \text{sen } y - \int \text{sen } y \cdot dy) = 2 \cdot (y \cdot \text{sen } y + \cos y) =$$

$$\begin{aligned} & * u = y \Rightarrow du = dy \\ & * dv = \cos y \cdot dy \Rightarrow v = \int \cos y \cdot dy = \text{sen } y \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot (\sqrt{x} \cdot \text{sen } \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}) + C$$

deshacemos el cambio de variable: $y = \sqrt{x}$

1.7.7

$$\int \text{arc sen } x \cdot dx = \int y \cdot \cos y \cdot dy =$$

$$\text{arc sen } x = y \Rightarrow x = \text{sen } y \Rightarrow dx = \cos y \cdot dy$$

$$= y \cdot \text{sen } y + \cos y =$$

calculada en el ejercicio anterior

$$= (\text{arc sen } x) \cdot (\text{sen arc sen } x) + \cos \text{arc sen } x + C =$$

deshacemos el cambio de variable: $y = \text{arc sen } x$

$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

* es $\sin \arcsin x = x$

* es $\cos \arcsin x = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$$\arcsin x = y$$

$$\sin y = x$$

1.7.8

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \cdot dx = \int \frac{z^2-1}{z} \cdot (2 \cdot z \cdot dz) =$$

$$\sqrt{1+x} = z \Rightarrow 1+x = z^2 \Rightarrow x = z^2 - 1 \Rightarrow dx = 2 \cdot z \cdot dz$$

$$= 2 \cdot \int (z^2 - 1) \cdot dz = \frac{2}{3} \cdot z^3 - \frac{1}{2} \cdot z = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x} + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \sqrt{1+x}$

1.7.9

$$\int \sqrt{9-x^2} \cdot dx = \int \sqrt{9-9 \cdot \sin^2 z} \cdot 3 \cdot \cos z \cdot dz =$$

$$x = 3 \cdot \sin z \Rightarrow dx = 3 \cdot \cos z \cdot dz$$

$$= 9 \cdot \int \sqrt{1-\sin^2 z} \cdot \cos z \cdot dz = 9 \cdot \int \cos^2 z \cdot dz =$$

$$\sqrt{1-\sin^2 z} = \cos z$$

$$= 9 \cdot \int \frac{1 + \cos 2z}{2} \cdot dz = \frac{9}{2} \cdot z + \frac{9}{4} \cdot \sin 2z =$$

Todo el mundo sabe que $\cos^2 z = \frac{1 + \cos 2z}{2}$

$$= \frac{9}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{2 \cdot x}{3} \cdot \sqrt{1 - (x/3)^2} + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

* $x = 3 \cdot \sin z \Rightarrow \sin z = \frac{x}{3} \Rightarrow z = \arcsin \frac{x}{3}$

* $\sin 2z = 2 \cdot \sin z \cdot \cos z = \frac{2 \cdot x}{3} \cdot \sqrt{1 - (x/3)^2}$

$$\sin z = \frac{x}{3}; \cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - (x/3)^2}$$

1.7.10

$$\int \frac{1}{1+e^x} \cdot dx = \int \frac{1}{1+e^{-\ln z}} \cdot \left(-\frac{dz}{z}\right) =$$

$$x = -\ln z \Rightarrow dx = -\frac{dz}{z}$$

$$= \int \frac{1}{1 + (1/z)} \cdot \left(-\frac{dz}{z}\right) = - \int \frac{dz}{z+1} = -\text{Ln}|z+1| = -\text{Ln}|e^{-x} + 1| + C$$

$$e^{-\text{Ln } z} = 1/z$$

deshacemos el cambio de variable: $x = -\text{Ln } z \Rightarrow \text{Ln } z = -x \Rightarrow z = e^{-x}$

$$\begin{aligned} \text{1.7.11} \quad \int \cos^5 x \cdot dx &= \int \cos^4 x \cdot \cos x \cdot dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \cdot dx = \\ &= \int (1 - z^2)^2 \cdot dz = \int (1 - 2z^2 + z^4) \cdot dz = z - \frac{2}{3} \cdot z^3 + \frac{1}{5} \cdot z^5 = \end{aligned}$$

$$\sin x = z \Rightarrow \cos x \cdot dx = dz$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} \cdot \sin^3 x + \frac{1}{5} \cdot \sin^5 x + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \sin x$

$$\begin{aligned} \text{1.7.12} \quad \int \sin^5 x \cdot dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x \cdot dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot dx = \\ &= - \int (1 - z^2)^2 \cdot dz = - \int (1 - 2z^2 + z^4) \cdot dz = -z + \frac{2}{3} \cdot z^3 - \frac{1}{5} \cdot z^5 = \end{aligned}$$

$$\cos x = z \Rightarrow -\sin x \cdot dx = dz$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cdot \cos^3 x - \frac{1}{5} \cdot \cos^5 x + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \cos x$

$$\text{1.7.13} \quad \int \frac{(\text{Ln } x)^2 + (\text{Ln } x)^3 + (\text{Ln } x)^4}{x} \cdot dx = \int (z^2 + z^3 + z^4) \cdot dz =$$

$$\text{Ln } x = z \Rightarrow dx/x = dz$$

$$= \frac{1}{3} \cdot z^3 + \frac{1}{4} \cdot z^4 + \frac{1}{5} \cdot z^5 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\text{Ln } x)^3 + \frac{1}{4} \cdot (\text{Ln } x)^4 + \frac{1}{5} \cdot (\text{Ln } x)^5 + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \text{Ln } x$

$$\text{1.7.14} \quad \int e^{\sqrt{x}} \cdot dx = \int e^z \cdot 2 \cdot z \cdot dz =$$

$$\sqrt{x} = z \Rightarrow x = z^2 \Rightarrow dx = 2 \cdot z \cdot dz$$

$$* u = z \Rightarrow du = dz$$

$$* dv = e^z \cdot dz \Rightarrow v = \int e^z \cdot dz = e^z$$

$$= 2 \cdot (z \cdot e^z - \int e^z \cdot dz) = 2 \cdot (z \cdot e^z - e^z) = 2 \cdot (\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}) + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \sqrt{x}$

$$1.7.15 \quad \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x-3)^2-4}} =$$

astutamente, observamos que $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-4}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz =$$

padecemos una hemorragia de genialidad y hacemos el cambio
 $x-3 = 1/z \Rightarrow dx = -dz/z^2$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1-4z^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \text{arc sen } 2z =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \text{arc sen } \frac{2}{x-3} + C$$

deshacemos el cambio de variable: $x-3 = 1/z \Rightarrow z = 1/(x-3)$

$$1.7.16 \quad \int \cos \sqrt[3]{x} \cdot dx = \int (\cos z) \cdot (3z^2 \cdot dz) = 3 \int z^2 \cdot \cos z \cdot dz =$$

$$\sqrt[3]{x} = z \Rightarrow x = z^3 \Rightarrow dx = 3z^2 \cdot dz$$

hiperfamosa: por partes dos veces

$$= \dots = g(z) = g(\sqrt[3]{x}) + C$$

deshacemos el cambio de variable: $z = \sqrt[3]{x}$



Acabo de ver varios ejemplos de cambios de variable que no se me habrían ocurrido ni en un millón de años

No te agobies por los cambios de "idea feliz", no aparecen en examen. Basta estar atentos a las situaciones en las que el ejercicio "pide a gritos" el cambio de variable que hay que hacer, como en los casos

$$\int x \cdot \sqrt{x-1} \cdot dx ; \int \cos \sqrt{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \cdot dx ; \int e^{\sqrt{x}} \cdot dx$$

