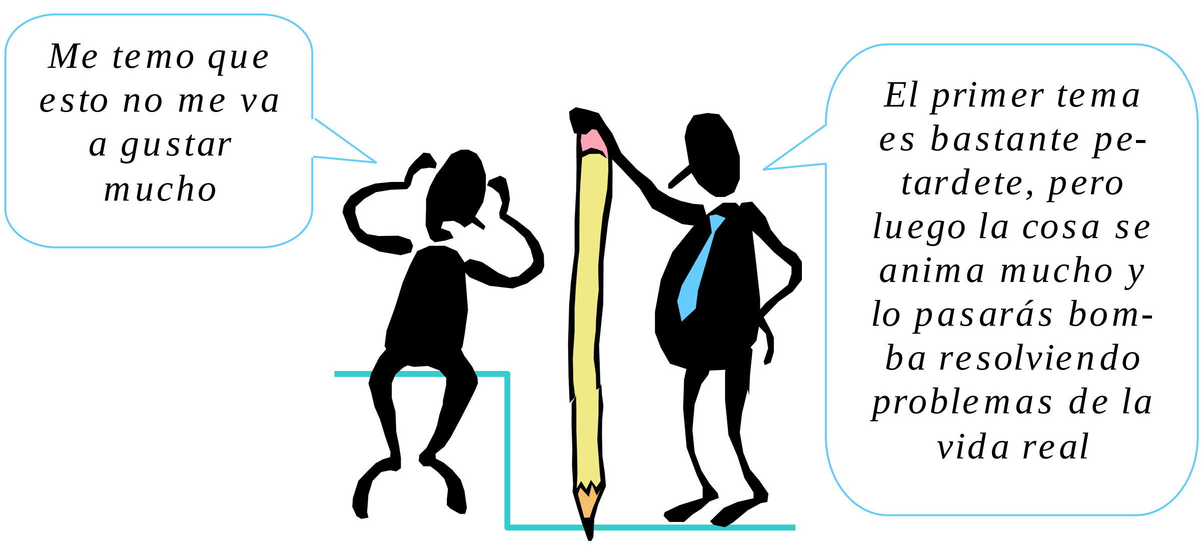
Tema 1

Cálculo de primitivas



1.8 PRIMITIVA DE UN COCIENTE DE POLINOMIOS

Para determinar la primitiva de un cociente de polinomios P(x)/Q(x), lo expresaremos como suma de "fracciones simples" cuya "estructura" será de alguna de las siguientes tres formas:

$$\frac{A}{x-a} \; ; \; \frac{A}{(x-a)^k} \; ; \; \frac{A.x+B}{(x-a)^2+b^2}$$

siendo constantes "A", "B", "a" y "b", y siendo "k" un número natural. Hecha la descomposición, obtendremos la primitiva de $P(x)/Q(x)$ al sumar las primitivas de las distintas fracciones simples, que son muy fáciles de calcular:

$$\bullet \int \frac{A}{x-a}.dx = A.Ln\left|x-a\right|$$

$$\bullet \int \frac{A}{(x-a)^k}.dx = \frac{A}{-k+1}.(x-a)^{-k+1}$$

$$\boxed{\text{si } k \neq 1}$$

$$\bullet \int \frac{A.x+B}{(x-a)^2+b^2}.dx = \int \frac{A.(a+b.z)+B}{b^2.z^2+b^2}.b.dz =$$

$$\boxed{x-a=b.z \Rightarrow x=a+b.z \Rightarrow dx=b.dz}$$

$$= \frac{A.a+B}{b}.\int \frac{dz}{z^2+1} + A.\int \frac{z.dz}{z^2+1} =$$

$$= \frac{A.a+B}{b}.\text{arc tg } z + \frac{A}{2}.Ln\left|z^2+1\right| =$$

$$= \frac{A.a+B}{b}.\text{arc tg }\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{A}{2}.Ln\left|\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right|$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } x-a=b.z \Rightarrow z=(x-a)/b}$$

Fracciones simples

Sea $P(x)/Q(x)$ un cociente de polinomios. Sin perder generalidad, supondremos que el coeficiente del término de mayor grado del denominador es la unidad. Para descomponer $P(x)/Q(x)$ en suma de fracciones simples, trabajamos así:

1) Si el grado del numerador es inferior al del denominador, pasamos a 3).
2) Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador dividimos los dos polinomios; siendo $C(x)$ el polinomio cociente y $R(x)$ el polinomio resto, obtendremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

A continuación descompondremos el cociente $R(x)/Q(x)$ en suma de fracciones simples, pero ahora el grado del numerador $R(x)$ será inferior al de $Q(x)$.

3) Determinamos los valores de "x" que anulan al denominador Q(x) (esto es, resolvemos la ecuación $Q(x)=0$), y comprobamos que ninguno de ellos anula también al numerador.

Si el numerador y el denominador se anulan cuando $x=a$ entonces podremos dividir ambos por el factor "$x-a$"; por ejemplo:

$$\frac{x^2-3.x+2}{x^3-x}=\frac{(x-1).(x-2)}{x.(x-1).(x+1)}=\frac{(x-2)}{x.(x+1)}$$

el numerador y el denominador se anulan si $x=1$

4) Conocidas las raíces del denominador, efectuamos la descomposición en fracciones simples de acuerdo al siguiente criterio:

✓ Cada raíz real $x=a$ múltiple de orden "n" de la ecuación $Q(x)=0$ contribuye a la descomposición en fracciones simples con los siguientes "n" sumandos:

$$\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_3}{(x-a)^{n-2}}+....+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^2}+\frac{A_n}{(x-a)}$$

donde $A_1, A_2, ..., A_n$ son constantes desconocidas.

Por ejemplo, si $x=3$ es raíz cuádruple de $Q(x)=0$, su contribución a la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{A_1}{(x-3)^4}+\frac{A_2}{(x-3)^3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}+\frac{A_4}{(x-3)}$$

✓ Cada par $x=a\pm i.b$ de raíces imaginarias simples de la ecuación $Q(x)=0$ contribuye a la descomposición en fracciones simples con un sumando de la forma

$$\frac{A.x+B}{(x-a)^2+b^2}$$

donde A y B son constantes desconocidas.

Por ejemplo, si $x=2\pm 3.i$ es un par de raíces imaginarias simples de la ecuación $Q(x)=0$, su contribución a la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{A.x+B}{(x-2)^2+3^2}$$

5) La ecuación $Q(x)=0$ tendrá "k" raíces (reales o imaginarias) si el denominador Q(x) es de grado "k"; por tanto, al hacer la descomposición en facciones simples se introducirán en el problema "k" constantes desconocidas. Para calcularlas reduciremos a común denominador las fracciones simples e identificaremos los numeradores a ambos lados del signo de igualdad; así obtendremos una ecuación en la aparecerán las "k" constantes. A partir de dicha ecuación, dando "k" valores particulares a la variable "x" obtendremos el valor de las "k" constantes.

LA REGLA DE RUFFINI

VERY IMPORTANT

Muchas veces deberás resolver una ecuación f(x)=0, donde f(x) es un polinomio; o sea, deberás determinar los valores de "x" que cumplen la condición f(x)=0. De esos valores de "x" se dice que son las "soluciones" o "raíces" de la ecuación f(x)=0.

1) Si el polinomio es de grado 1 (o sea, $f(x) = a.x + b$, donde "a" y "b" son constantes y a ≠ 0), la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución, y su cálculo es asunto fácil: $a.x + b = 0 \Rightarrow a.x = -b \Rightarrow x = -b/a$

2) Si el polinomio es de grado 2 (o sea, $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, donde "a", "b" y "c" son constantes y a ≠ 0), la ecuación $f(x) = 0$ tiene 2 soluciones o raíces, y las calcularemos usando la "formulita" hiperfamosa que todos conocemos:

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Por ejemplo:

$$2.x^2 - 5.x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2.3}}{2.2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

- ***¡Ojo!,*** si el coeficiente de "x" (o sea, "b") es un número par (por ejemplo, $b = 2.k$), hay otra "formulita" más cómoda y rápida:

$$a.x^2 + 2.k.x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-(2.k) \pm \sqrt{(2.k)^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - a.c}}{a}$$

Por ejemplo:

✓ $$1.x^2 + 6.x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 1.5}}{1} = -3 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

¡qué suerte!, el coeficiente de "x" es par ($2.k = 6 \Rightarrow k = 3$) ⇒
⇒ usamos la "formulita" cómoda

✓ $$1.x^2 - 4.x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1.13}}{1} = 2 \pm \sqrt{-9} =$$

¡qué suerte!, el coeficiente de "x" es par ($2.k = -4 \Rightarrow k = -2$) ⇒
⇒ usamos la "formulita" cómoda

$$= 2 \pm \sqrt{(-1).9} = 2 \pm \sqrt{-1}.\sqrt{9} = 2 \pm 3.\sqrt{-1} = 2 \pm 3.i$$

el número $\sqrt{-1}$ no es "real", se llama "unidad imaginaria" y se denota "i"

- Si el "término independiente" de la ecuación es el número cero (o sea, $c = 0$) no necesitaremos ninguna formulita, y podremos apostar la vida a que una de las soluciones de la ecuación es $x = 0$.

$$a.x^2 + b.x = 0 \Rightarrow x.(a.x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a.x + b = 0 \Rightarrow x = -b/a \end{cases}$$

para que un producto de dos números sea 0 basta que alguno de ellos sea 0

En general, si "f" es un polinomio de grado "n" (superior a 2), el cálculo de las "n" soluciones de la ecuación f(x)=0 es un gran petardo, pues no hay ninguna "formulita" que nos resuelva la papeleta. No obstante, en todos los casos que encontremos (normalmente será n = 3 ó n = 4), el polinomio f(x) estará "preparado" para que las soluciones sean números enteros .... y Ruffini nos permitirá determinarlas.

FONEMATO 1.8.1 (RAÍCES ENTERAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$

SOLUCIÓN

Debemos determinar los valores de "x" que satisfacen la ecuación (condición de igualdad) $f(x) = 0$. Como f(x) es un polinomio de grado 5, la ecuación en cuestión tiene 5 soluciones, pudiendo estar "repetidas" algunas de ellas.

¡Qué suerte!, como el término independiente de la ecuación es 0, apostamos tranquilamente un brazo a que x = 0 es una de las soluciones:

$$2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = 0 \Rightarrow x.(2.x^4 - 10.x^2 + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2.x^4 - 10.x^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora hay que resolver la ecuación $2.x^4 - 10.x^2 + 8 = 0$, y de nuevo tenemos suerte de cara, pues ***como la suma*** $(2 - 10 + 8)$ ***de los coeficientes es 0, apostamos tranquilamente la vida a que x = 1 es una de las soluciones***, lo que garantiza que el polinomio $g(x) = 2.x^4 - 10.x^2 + 8$ es divisible por $x - 1$ (con la Regla de Ruffini calcularemos los coeficientes del polinomio h(x) obtenido como cociente de dicha división):

coeficientes de g(x)

	2	0	−10	0	8
$x = 1$		2	2	−8	−8
	2	2	−8	−8	0

coeficientes de $h(x) = g(x)/(x - 1)$ resto

Así, es $h(x)=g(x)/(x-1)=2.x^3+2.x^2-8.x-8$, o sea:

$$g(x)=(x-1).h(x)=(x-1).(2.x^3+2.x^2-8.x-8)$$

En consecuencia:

$$g(x)=0 \Rightarrow (x-1).(2.x^3+2.x^2-8.x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2.x^3+2.x^2-8.x-8=0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$; como la suma $(2+2-8-8)$ de sus coeficientes no es 0, podemos apostar una pierna a que $x=1$ no es una de sus soluciones. ***Si la ecuación tiene raíces enteras deben ser divisores del término independiente*** -8, y como los divisores de -8 son $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y -8, debemos armarnos de paciencia e ir probando con todos (excepto el 1, pues sabemos que $x=1$ no es solución de $2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$), rezando para que alguno de ellos sea solución.

Es $h(2)=2.2^3+2.2^2-8.2-8=0$, lo que garantiza que $x=2$ es solución de $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$ y que el polinomio $2.x^3+2.x^2-8.x-8$ es divisible por $x-2$; la Regla de Ruffini nos permite calcular los coeficientes del polinomio t(x) obtenido como cociente de dicha división:

coeficientes de h(x)

	2	2	–8	–8
x = 2		4	12	8
	2	6	4	0

coeficientes de t(x) = h(x)/(x – 2) | resto

Así, es $t(x)=h(x)/(x-2)=2.x^2+6.x+4$; o sea:

$$h(x)=(x-2).t(x)=(x-2).(2.x^2+6.x+4)$$

En consecuencia:

$$h(x)=0 \Rightarrow (x-2).(2.x^2+6.x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2.x^2+6.x+4=0 \end{cases}$$

Y las soluciones de la ecuación $2.x^2+6.x+4=0$ son:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2.4}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases}-1\\-2\end{cases}$$

En definitiva, siendo $f(x)=2.x^5-10.x^3+8.x$, las soluciones de la ecuación $f(x)=0$ son $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=-1$ y $x=-2$; el que así sean las cosas nos permite escribir la ***descomposición factorial*** del polinomio f(x):

$$f(x)=2.(x-0).(x-1).(x-2).(x+1).(x+2)$$

el "2" es el coeficiente del término de mayor grado de f(x)

Raíces múltiples

Si el polinomio "f" es tal que $f(x)=(x-a)^k.p(x)$, siendo el polinomio $p(x)$ tal que $p(a)\neq 0$, se dice que "a" es una ***raíz múltiple de orden "k"*** de la ecuación $f(x)=0$.

Por ejemplo:

$$f(x)=x^6-9.x^4=0\Rightarrow x^4.(x^2-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x^4=0\Rightarrow x=0\text{ (cuádruple)}\\ x^2-9=0\Rightarrow x=\pm 3\end{cases}$$

Por tanto, las 6 raíces de la ecuación $f(x)=x^6-9.x^4=0$ son:

$$x=0\text{ (cuádruple) };\ x=3\text{ (simple) };\ x=-3\text{ (simple)}$$

La descomposición factorial es $f(x)=x^6-9.x^4=x^4.(x-3).(x+3)$.

FONEMATO 1.8.2 (RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=12.x^3-4.x^2-3.x+1$

SOLUCIÓN

La ecuación $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ carece de raíces enteras, pues ningún divisor del término independiente "1" es solución. ***Si la ecuación admite raíces fraccionarias de la forma "m/n" (siendo "m" y "n" números enteros y "n" distinto de 0 y de 1), entonces "m" es divisor del término independiente*** (el número 1 en nuestro caso) ***y "n" es divisor del coeficiente del término de mayor grado*** (el número 12 en nuestro caso); así, las únicas raíces fraccionarias que puede tener la ecuación dada son:

$$\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{6};-\frac{1}{6};\frac{1}{12};-\frac{1}{12}$$

Ahora hay que armarse de paciencia e ir probando una, rezando para que alguna sea solución de $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ ...... y tenemos suerte, pues $x=1/2$ es solución, ya que $12.(1/2)^3-4.(1/2)^2-3.(1/2)+1=0$.

Mediante Ruffini obtenemos $\dfrac{12.x^3-4.x^2-3.x+1}{x-(1/2)}=12.x^2+2.x-2$

Como las soluciones de $12.x^2+2.x-2=0$ son $x=1/3$ y $x=-1/2$, es:

$$12.x^3-4.x^2-3.x+1=12.(x-\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{3}).(x+\frac{1}{2})$$

FONEMATO 1.8.3 (RAÍCES IMAGINARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$ en los siguientes casos

$$1)\ f(x)=x^6+64\ \ ;\ \ 2)\ f(x)=x^6-64$$

SOLUCIÓN

1) Ninguna de las 6 raíces de la ecuación es real: $x^6 + 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-64} \notin \Re$

- Para calcular $\sqrt[6]{-64}$ consideramos al número -64 como miembro del conjunto de los números imaginarios (de la forma $a + b.i$, siendo $i = \sqrt{-1}$); así, -64 es el número imaginario $-64 + 0.i$, cuyo módulo es 64 (el módulo de $a + b.i$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$) y cuyo argumento es π (el argumento de $a + b.i$ es arc tg $\frac{b}{a}$).

Un número imaginario no nulo con módulo "r" y argumento "θ" posee "n" raíces n-ésimas distintas, que tienen como módulo la raíz n-ésima de "r", y sus respectivos argumentos son:

$$\frac{\theta}{n} \; ; \; \frac{\theta}{n} + 2.\frac{\pi}{n} \; ; \; \frac{\theta}{n} + 4.\frac{\pi}{n} \; ; \; \frac{\theta}{n} + 6.\frac{\pi}{n} \; ; \; .... \; ; \; \frac{\theta}{n} + 2(n-1).\frac{\pi}{n}$$

En nuestro caso es $n = 6$; por tanto, el número -64 (para el que $r = 64$ y $\theta = \pi$) tiene 6 raíces sextas distintas, que tienen como módulo la raíz sexta de 64 (o sea, 2), y cuyos argumentos son:

$$\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6} + 2.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6} + 4.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6} + 6.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6} + 8.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{\pi}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $5.\frac{\pi}{6}$, $7.\frac{\pi}{6}$ $3.\frac{\pi}{2}$ y $11.\frac{\pi}{6}$; así, teniendo en cuenta que si un número imaginario "x" tiene módulo "r" y argumento "θ" es $x = r.(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$, las 6 raíces sextas de -64 (o sea, las 6 soluciones de la ecuación $x^6 + 64 = 0$) son:

$$x = 2.(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{6}) = 2.(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i) = \sqrt{3} + 1.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 2.(0 + 1.i) = 0 + 2.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}) = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i) = -\sqrt{3} + 1.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{7\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}) = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i) = -\sqrt{3} - 1.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{3\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}) = 2.(0 - 1.i) = 0 - 2.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{11\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}) = 2.(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i) = \sqrt{3} - 1.i$$

2) Si $x^6 - 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{64}$, y para calcular $\sqrt[6]{64}$ consideramos $64 = 64 + 0.i$, cuyo módulo es 64 y cuyo argumento es 0.

Las seis raíces sextas de 64 tienen como módulo la raíz sexta de 64 (o sea, 2), y sus respectivos argumentos son:

$$\frac{0}{6} \; ; \; \frac{0}{6} + 2.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{0}{6} + 4.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{0}{6} + 6.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{0}{6} + 8.\frac{\pi}{6} \; ; \; \frac{0}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea: 0, $\frac{\pi}{3}$, $2.\frac{\pi}{3}$, π, $4.\frac{\pi}{3}$ y $5.\frac{\pi}{3}$; por tanto, las seis raíces sextas de 64 son:

$$x = 2.(\cos 0 + i.\text{sen } 0) = 2.(1 + 0.i) = 2$$

$$x = 2.(\cos \frac{\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = 1 + \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \frac{2\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{2\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = -1 + \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \pi + i.\text{sen } \pi) = 2.(-1 + 0.i) = -2$$

$$x = 2.(\cos \frac{4\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{4\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = -1 - \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \frac{5\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{5\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = 1 - \sqrt{3}.i$$

FONEMATO 1.8.4 (RAÍCES REALES SIMPLES)

$$\int \frac{7.x - 10}{x^2 - 3.x + 2}.dx = \int \frac{3}{x-1}.dx + \int \frac{4}{x-2}.dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^2 - 3.x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3.x + 2 = (x-1).(x-2)$$

- Ninguna de las raíces del denominador lo es también del numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{7.x - 10}{x^2 - 3.x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{7.x - 10}{x^2 - 3.x + 2} = \frac{A.(x-2) + B.(x-1)}{(x-1).(x-2)} \quad \text{(II)}$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$7.x - 10 = A.(x-2) + B.(x-1) \quad \text{(III)}$$

- Al hacer $x = 1$ en (III):

$$7.1 - 10 = A.(1-2) + 0 \Rightarrow A = 3$$

- Al hacer $x = 2$ en (III):

$$7.2 - 10 = 0 + B.(2-1) \Rightarrow B = 4$$

- En definitiva: $\dfrac{7.x - 10}{x^2 - 3.x + 2} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{x-2}$

$$= 3.\text{Ln}\,|x-1| + 4.\text{Ln}\,|x-2| + C$$

FONEMATO 1.8.5 (RAÍCES REALES SIMPLES)

$$\int \frac{x-8}{x^2-x-2}.dx = \int \frac{3}{x+1}.dx - \int \frac{2}{x-2}.dx = 3.\text{Ln}\,|x+1| - 2.\text{Ln}\,|x-2| + C$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ x=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x+1).(x-2)$$

- Ninguna de las raíces del denominador lo es también del numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x-8}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{x-8}{x^2-x-2} = \frac{A.(x-2)+B.(x+1)}{(x+1).(x-2)} \quad \text{(II)}$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$x - 8 = A.(x-2) + B.(x+1) \quad \text{(III)}$$

- Al hacer $x=-1$ en (III): $-1-8 = A.(-1-2)+0 \Rightarrow A = 3$
- Al hacer $x=2$ en (III): $2-8 = 0 + B.(2+1) \Rightarrow B = -2$
- En definitiva: $\dfrac{x-8}{x^2-x-2} = \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-2}$

FONEMATO 1.8.6 (RAÍCES IMAGINARIAS SIMPLES)

$$\int \frac{3.x+4}{x^2-2.x+5}.dx = \int \frac{3.x+4}{(x-1)^2+2^2}.dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^2 - 2.x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2.\sqrt{-1} = 1 \pm 2.i$$

- Nuestro cociente de polinomios ***ya está descompuesto en fracciones simples***; el que las dos raíces del denominador sean $x = 1 \pm 2.i$ nos indica que $x^2 - 2.x + 5 = (x-1)^2 + 2^2$.

$$\boxed{x - 1 = 2.z \Rightarrow x = 1 + 2.z \Rightarrow dx = 2.dz}$$

$$= \int \frac{3.(1+2.z)+4}{2^2.z^2+2^2}.2.dz = \frac{7}{2}.\int \frac{dz}{z^2+1} + 3.\int \frac{z.dz}{z^2+1} = \frac{7}{2}.\text{arc tg } z + \frac{3}{2}.\text{Ln}\,|z^2+1| =$$

$$= \frac{7}{2}.\text{arc tg }\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{3}{2}.\text{Ln}\left|\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right| + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } x - 1 = 2.z \Rightarrow z = \frac{x-1}{2}}$$

FONEMATO 1.8.7

$$\int \frac{x^4 - 7.x^3 + 17.x^2 - 22.x + 14}{x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8}.dx =$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4}\right).dx =$$

- Como el numerador es de grado $\geq$ que el denominador, dividimos:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 7.x^3 + 17.x^2 - 22.x + 14 & x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8 \\ \cline{2-2} \underline{-x^4 + 7.x^3 - 14.x^2 + 8.x} & x \\ \quad 3.x^2 - 14.x + 14 & \end{array}$$

Así, es: $\dfrac{x^4 - 7.x^3 + 17.x^2 - 22.x + 14 - 8}{x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8} = x + \underbrace{\dfrac{3.x^2 - 14.x + 14}{x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8}}_{k(x)}$

Ahora descomponemos el cociente k(x), cuyo numerador es de grado inferior al denominador.

- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8 = (x-1).(x-2).(x-4)$$

- Ninguna de las raíces del denominador anula al numerador de k(x).
- La descomposición de k(x) en fracciones simples:

$$\frac{3.x^2 - 14.x + 14}{x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I) e igualamos los numeradores:

$$3.x^2 - 14.x + 14 = A.(x-2).(x-4) + B.(x-1).(x-4) + C.(x-1).(x-2) \quad \text{(II)}$$

- Al hacer $x = 1$ en (II): $3 - 14 + 14 = A.(1-2).(1-4) + 0 + 0 \Rightarrow A = 1$
- Al hacer $x = 2$ en (II): $12 - 28 + 14 = 0 + B.(2-1).(2-4) + 0 \Rightarrow B = 1$
- Al hacer $x = 4$ en (II): $48 - 56 + 14 = 0 + 0 + C.(4-1).(4-2) \Rightarrow C = 1$
- En definitiva:

$$\frac{x^4 - 7.x^3 + 17.x^2 - 22.x + 14 - 8}{x^3 - 7.x^2 + 14.x - 8} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4}$$

$$= \frac{1}{2}.x^2 + \mathrm{Ln}\left|x-1\right| + \mathrm{Ln}\left|x-2\right| + \mathrm{Ln}\left|x-4\right| + C$$

FONEMATO 1.8.8

$$\int \frac{2.x^4-9.x^2-x+10}{x^4-5.x^2+4}.dx =$$

$$=\int \left(2-\frac{1/3}{x-1}+\frac{1/3}{x-2}+\frac{2/3}{x+1}-\frac{2/3}{x+2}\right).dx =$$

- Como el numerador es de grado ≥ que el denominador, dividimos:

$$\begin{array}{r|l} 2.x^4-9.x^2-x+10 & x^4-5.x^2+4 \\ \cline{2-2} -2.x^4+10.x^2-8 & 2 \\ \hline x^2-x+2 & \end{array}$$

Así, es: $\dfrac{2.x^4-9.x^2-x+10}{x^4-5.x^2+4}=2.x+\underbrace{\dfrac{x^2-x+2}{x^4-5.x^2+4}}_{k(x)}$

Ahora descomponemos el cociente k(x), cuyo numerador es de grado inferior al denominador.

- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^4-5.x^2+4 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^4-5.x^2+4=(x-1).(x-2).(x+1).(x+2)$$

- Ninguna de las raíces del denominador anula al numerador de k(x).
- La descomposición de k(x) en fracciones simples:

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5.x^2+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Al reducir a común denominador en el segundo miembro de (I) e igualar los numeradores, resulta:

$$x^2-x+2=A.(x-2).(x+1).(x+2)+B.(x-1).(x+1).(x+2)+$$
$$+(x-1).(x-2).(x+2)+D.(x-1).(x-2).(x+1) \quad \text{(II)}$$

- Al hacer $x=1$ en (II): $2=A.(1-2).(1+1).(1+2)\Rightarrow A=-1/3$
- Al hacer $x=2$ en (II): $4=B.(2-1).(2+1).(2+2)\Rightarrow B=1/3$
- Al hacer $x=-1$ en (II): $4=C.(-1-1).(-1-2).(-1+2)\Rightarrow C=2/3$
- Al hacer $x=-2$ en (II): $8=D.(-2-1).(-2-2).(-2+1)\Rightarrow D=-2/3$
- En definitiva: $\dfrac{2.x^4-9.x^2-x+10}{x^4-5.x^2+4}=2-\dfrac{1/3}{x-1}+\dfrac{1/3}{x-2}+\dfrac{2/3}{x+1}-\dfrac{2/3}{x+2}$

$$=2.x-\frac{1}{3}.Ln\,|x-1|+\frac{1}{3}.Ln\,|x-2|+\frac{2}{3}.Ln\,|x+1|-\frac{2}{3}.Ln\,|x+2|+C$$

FONEMATO 1.8.9

$$\int \frac{3.x+1}{x^2-2.x+1}.dx = \int \left(\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}\right).dx = -\frac{4}{x-1}+3.Ln\,|x-1|+C$$

- El numerador es de grado inferior al denominador
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^2-2.x+1=0 \Rightarrow x=1\,(\text{doble}) \Rightarrow x^2-2.x+1=(x-1)^2$$

- Ninguna de las raíces del denominador lo es también del numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3.x+1}{x^2-2.x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1} \quad (I)$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{3.x+1}{x^2-2.x+1}=\frac{A+B.(x-1)}{(x-1)^2} \quad (II)$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$3.x+1=A+B.(x-1) \quad (III)$$

- Al hacer $x=1$ en (III): $3.1+1=A+0 \Rightarrow A=4$
- Para calcular la segunda constante ("B") introducida por la raíz doble $x=1$, damos a "x" un valor arbitrario en (III); por ejemplo, al hacer $x=0$, resulta: $3.0+1=4+B.(0-1) \Rightarrow B=3$
- En definitiva: $\dfrac{3.x+1}{x^2-2.x+1}=\dfrac{4}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}$

FONEMATO 1.8.10

$$\int \frac{dx}{5.x^2-20.x+65}=\frac{1}{5}.\int \frac{dx}{(x-2)^2+3^2}=$$

- El numerador es de grado inferior al denominador
- Raíces del denominador: $5.x^2-20.x+65=0 \Rightarrow x=2\pm 3.i$
- Nuestro cociente de polinomios ***ya está descompuesto en fracciones simples***; el que las dos raíces del denominador sean $x=2\pm 3.i$ nos indica que $5.x^2-20.x+65=5.((x-2)^2+3^2)$,

$\boxed{x-2=3.z \Rightarrow dx=3.dz}$

$$=\frac{1}{5}.\int \frac{3.dz}{3^2.z^2+3^2}=\frac{1}{15}.\int \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{15}.\text{arc tg } z=\frac{1}{15}.\text{arc tg }\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$$

$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } x-2=3.z \Rightarrow z=\frac{x-2}{3}}$

FONEMATO 1.8.11

$$\int \frac{3.x - x^2}{x^3 - 3.x^2 + 3.x - 1}.dx = \int \left(\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right).dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

  $x^3 - 3.x^2 + 3.x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1\,(\text{triple}) \Rightarrow x^3 - 3.x^2 + 3.x - 1 = (x-1)^3$
- Ninguna de las raíces del denominador anula al numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3.x - x^2}{x^3 - 3.x^2 + 3.x - 1} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} \quad (I)$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{3.x - x^2}{x^3 - 3.x^2 + 3.x - 1} = \frac{A + B.(x-1) + C.(x-1)^2}{(x-1)^3} \quad (II)$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$3.x - x^2 = A + B.(x-1) + C.(x-1)^2 \quad (III)$$

- Al hacer $x = 1$ en (III): $3 - 1 = A + 0 + 0 \Rightarrow A = 2$
- Para calcular la otras dos constantes ("B" y "C") introducidas por la raíz triple $x = 1$, damos a "x" dos valores arbitrarios en (III); así obtendremos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas "B" y "C":

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } x = 0 \Rightarrow 0 = 2 + B.(0-1) + C.(0-1)^2 \\ * \text{ si } x = 2 \Rightarrow 2 = 2 + B.(2-1) + C.(2-1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

- En definitiva: $\dfrac{3.x - x^2}{x^3 - 3.x^2 + 3.x - 1} = \dfrac{2}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$

NOTA

También podemos determinar "B" y "C" trabajando así:

✓ Determinamos "B" al hacer $x = 1$ en la expresión que se obtiene al derivar los dos miembros de (III); o sea, al hacer $x = 1$ en:

$$3 - 2.x = B + 2.C.(x-1) \quad (IV)$$

Al hacer $x = 1$ en (IV), resulta: $3 - 2 = B \Rightarrow B = 1$

✓ Determinamos "C" al hacer $x = 1$ en la expresión que se obtiene al derivar los dos miembros de (IV); o sea, al hacer $x = 1$ en:

$$-2 = 2.C \quad (V)$$

Al hacer $x = 1$ en (V), resulta: $-2 = 2.C \Rightarrow C = -1$

$$= 2.\frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} - \text{Ln}\,|x-1| + C$$

FONEMATO 1.8.12

$$\int \frac{3.x^2+9.x+4}{x^3-4.x^2+4.x}.dx = \int \left(\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-0}\right).dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^3-4.x^2+4.x=0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=-2 \text{ (doble)} \\ x=0 \text{ (simple)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3-4.x^2+4.x=(x+2)^2.(x-0)$$

- Ninguna de las raíces del denominador anula al numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3.x^2+9.x+4}{x^3-4.x^2+4.x}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-0} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{3.x^2+9.x+4}{x^3-4.x^2+4.x}=\frac{A.x+B.(x+2).x+C.(x+2)^2}{(x+2)^2.x} \quad \text{(II)}$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$3.x^2+9.x+4=A.x+B.(x+2).x+C.(x+2)^2 \quad \text{(III)}$$

- Al hacer $x=0$ en (III): $4=0+0+C.(0+2)^2 \Rightarrow C=1$
- Al hacer $x=-2$ en (III): $-2=-2.A+0+0 \Rightarrow A=1$
- Para calcular la segunda constante ("B") introducida por la raíz doble $x=-2$, damos a "x" un valor arbitrario en (III); por ejemplo, al hacer $x=1$, resulta:

$$16=1+B.(1+2)+(1+2)^2 \Rightarrow B=2$$

- En definitiva: $\dfrac{3.x^2+9.x+4}{x^3-4.x^2+4.x}=\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-0}$

NOTA

También podemos determinar "B" haciendo $x=-2$ en la expresión que se obtiene al derivar los dos miembros de (III); o sea, al hacer $x=-2$ en:

$$6.x+9=A+B.(2.x+2)+2.C.(x+2) \quad \text{(IV)}$$

Al hacer $x=-2$ en (IV), y teniendo en cuenta que $A=1$ y $C=1$, resulta:

$$6.(-2)+9=1+B.(-4+2)+0 \Rightarrow B=2$$

$$=\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+2.\text{Ln}\,|x+2|+\text{Ln}\,|x|+C$$

FONEMATO 1.8.13

$$\int \frac{3.x^2-3.x-1}{x^3-4.x^2+9.x-10}.dx = \int \frac{1}{x-2}.dx + \int \frac{2.x+3}{(x-1)^2+2^2}.dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^3-4.x^2+9.x-10=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \text{ (simple)} \\ x=1\pm 2.i \text{ (simples)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3-4.x^2+9.x-10=(x-2).((x-1)^2+2^2)$$

- Ninguna de las raíces del denominador anula al numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3.x^2-3.x-1}{x^3-4.x^2+9.x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{M.x+N}{(x-1)^2+2^2} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{3.x^2-3.x-1}{x^3-4.x^2+9.x-10} = \frac{A.((x-1)^2+2^2)+(M.x+N).(x-2)}{(x-2).((x-1)^2+2^2)} \quad \text{(II)}$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$3.x^2-3.x-1 = A.((x-1)^2+2^2)+(M.x+N).(x-2) \quad \text{(III)}$$

- Al hacer $x=2$ en (III): $5=A.((2-1)^2+2^2)+0 \Rightarrow A=1$
- Para calcular las dos constantes ("M" y "N") introducidas por el par de raíces imaginarias $x=1\pm 2.i$, damos a "x" dos valores arbitrarios en (III); así obtendremos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas "M" y "N":

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } x=0 \Rightarrow -1=((0-1)^2+2^2)+(M.0+N).(0-2) \\ * \text{ si } x=1 \Rightarrow -1=((1-1)^2+2^2)+(M+N).(1-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2.N=6 \\ M+N=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M=2 \\ N=3 \end{array}\right.$$

- En definitiva: $\dfrac{3.x^2-3.x-1}{x^3-4.x^2+9.x-10} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2.x+3}{(x-1)^2+2^2}$

$$= \text{Ln}\,|x-2| + \int \frac{2.(1+2.z)+3}{2^2.z^2+2^2}.2.dz =$$

$$\boxed{x-1=2.z \Rightarrow x=1+2.z \Rightarrow dx=2.dz}$$

$$= \text{Ln}\,|x-2| + \frac{5}{2}.\int \frac{1}{z^2+1}.dz + \int \frac{2.z}{z^2+1}.dz =$$

$$= \text{Ln}\,|x-2| + \frac{5}{2}.\text{arc tg } z + \text{Ln}\,|z^2+1| =$$

$$= \text{Ln}\,|x-2| + \frac{5}{2}.\text{arc tg }\left(\frac{x-1}{2}\right) + \text{Ln}\left|\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right| + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } x-1=2.z \Rightarrow z=(x-1)/2}$$

FONEMATO 1.8.14

$$\int \frac{x^3+2.x^2-4.x+13}{x^4-4.x^3+13.x^2}.dx = \int \frac{1}{(x-0)^2}.dx + \int \frac{x+1}{(x-2)^2+3^2}.dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$x^4-4.x^3+13.x^2=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \text{ (doble)} \\ x=2\pm 3.i \text{ (simples)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3-4.x^2+9.x-10=(x-0)^2.((x-2)^2+3^2)$$

- Ninguna de las raíces del denominador anula al numerador.
- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x^3+2.x^2-4.x+13}{x^4-4.x^3+13.x^2} = \frac{A}{(x-0)^2} + \frac{B}{x-0} + \frac{M.x+N}{(x-2)^2+3^2} \quad \text{(I)}$$

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I) e igualamos los numeradores; resulta:

$$x^3+2.x^2-4.x+13 = A.((x-2)^2+3^2)+$$
$$+B.x.((x-2)^2+3^2)+(M.x+N).x^2 \quad \text{(II)}$$

- Al hacer $x=0$ en (II): $13=A.((0-2)^2+3^2)+0+0 \Rightarrow A=1$
- Para calcular las restantes constantes ("B", "M" y "N") damos a "x" tres valores arbitrarios en (II); así obtendremos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas "B", "M" y "N":

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } x=1 \Rightarrow 2=10.B+M+N \\ * \text{ si } x=-1 \Rightarrow 0=-18.B-M+N \\ * \text{ si } x=2 \Rightarrow 12=18.B+8.M+4.N \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B=0 \\ M=1 \\ N=1 \end{array}\right.$$

- En definitiva:

$$\frac{x^3+2.x^2-4.x+13}{x^4-4.x^3+13.x^2} = \frac{1}{(x-0)^2} + \frac{x+1}{(x-2)^2+3^2}$$

$$= -\frac{1}{x} + \int \frac{(2+3.z)+1}{3^2.z^2+3^2}.3.dz =$$

$$\boxed{x-2=3.z \Rightarrow x=2+3.z \Rightarrow dx=3.dz}$$

$$= -\frac{1}{x} + \int \frac{1}{z^2+1}.dz + \int \frac{z}{z^2+1}.dz =$$

$$= -\frac{1}{x} + \text{arc tg } z + \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|z^2+1\right| =$$

$$= -\frac{1}{x} + \text{arc tg }\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{1}{2}.\text{Ln}\left|\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1\right| + C$$

$$\boxed{\text{deshacemos el cambio de variable: } x-2=3.z \Rightarrow z=(x-2)/3}$$

FONEMATO 1.8.15

$$\int \frac{7.x^3-8.x^2+2.x}{3.x^4-5.x^3+2.x^2}.dx = \int \frac{7.x^2-8.x+2}{3.x^3-5.x^2+2.x}.dx =$$

- El numerador es de grado inferior al denominador.
- Determinamos las raíces del denominador:

$$3.x^4-5.x^3+2.x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0\ (\text{doble}) \\ x=1\ (\text{simple}) \\ x=3/2\ (\text{simple}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.x^4-5.x^3+2.x^2 = 3.x^2.(x-1).(x-\frac{3}{2})$$

- Como el numerador también se anula si $x=0$, simplificamos:

$$\frac{7.x^3-8.x^2+2.x}{3.x^4-5.x^3+2.x^2} = \frac{7.x^2-8.x+2}{3.x^3-5.x^2+2.x}$$

$$= \frac{1}{3}.\int \left(\frac{3}{x-0}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-(2/3)}\right).dx =$$

- Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{7.x^2-8.x+2}{3.x^3-5.x^2+2.x} = \frac{1}{3}.\left(\frac{A}{x-0}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-(2/3)}\right) \quad (I)$$

No olvides dividir la descomposición en fracciones simples por el coeficiente del término de mayor grado del denominador

Cálculo de las constantes

- Reducimos a común denominador en el segundo miembro de (I):

$$\frac{7.x^2-8.x+2}{3.x^3-5.x^2+2.x} = \frac{A.(x-1).(x-\frac{2}{3})+B.x.(x-\frac{2}{3})+C.x.(x-1)}{3.x^2.(x-1).(x-\frac{3}{2})} \quad (II)$$

- Al igualar los numeradores de (II), resulta:

$$7.x^2-8.x+2 = A.(x-1).(x-\frac{2}{3})+B.x.(x-\frac{2}{3})+C.x.(x-1) \quad (III)$$

- Al hacer $x=0$ en (III) resulta $A=3$, al hacer $x=1$ en (III) resulta $B=3$, y al hacer $x=2/3$ en (III) se obtiene $C=1$; en definitiva:

$$\frac{7.x^2-8.x+2}{3.x^3-5.x^2+2.x} = \frac{1}{3}.\left(\frac{3}{x-0}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-(2/3)}\right)$$

$$= Ln\left|x\right| + Ln\left|x-1\right| + \frac{1}{3}.Ln\left|x-\frac{2}{3}\right| + C$$

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{(x-1)^5}.dx = \int \frac{4+6.(x-1)+4.(x-1)^2+(x-1)^3}{(x-1)^5}.dx =$$

Si el denominador tiene una única raíz real múltiple $x = a$, podemos resolver la papeleta expresando el polinomio numerador como suma de potencias de "$x - a$"; en nuestro caso, expresamos el numerador $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ como suma de potencias de "$x - 1$":

$$g(x) = g(1) + \frac{g'(1)}{1!}.(x-1) + \frac{g''(1)}{2!}.(x-1)^2 + \frac{g'''(1)}{3!}.(x-1)^3 =$$
$$= 4 + 6.(x-1) + 4.(x-1)^2 + (x-1)^3$$

$*\ g(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow g(1) = 4$
$*\ g'(x) = 3.x^2 + 2.x + 1 \Rightarrow g''(1) = 6$
$*\ g''(x) = 6.x + 2 \Rightarrow g''(1) = 8$
$*\ g'''(x) = 6 \Rightarrow g'''(1) = 6$

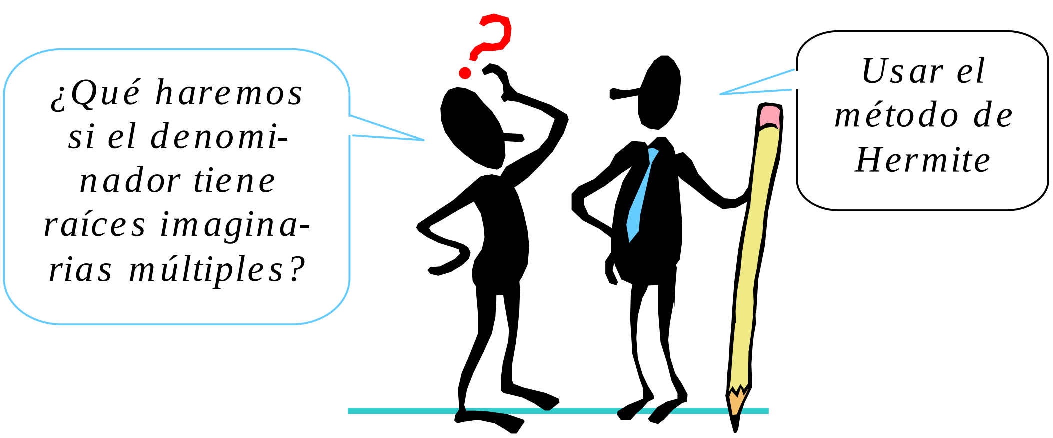
• Si no te apetece derivar, usa el ***algoritmo de Horner***:

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x=1 & & 1 & 2 & 3 \\ \hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} \\
x=1 & & 1 & 3 & \\ \hline
 & 1 & 3 & \boxed{6} & \\
x=1 & & 1 & & \\ \hline
 & \boxed{1} & \boxed{4} & &
\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = 4 + 6.(x-1) + 4.(x-1)^2 + 1.(x-1)^3$$

$$= 4.\int (x-1)^{-5}.dx + 6.\int (x-1)^{-4}.dx + 4.\int (x-1)^{-3}.dx + \int (x-1)^{-2}.dx =$$

$$= 4.\frac{(x-1)^{-5+1}}{-5+1} + 6.\frac{(x-1)^{-4+1}}{-4+1} + 4.\frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$



EL MÉTODO DE HERMITE

Podremos usar este método de trabajo siempre que el polinomio denominador tenga raíces múltiples (aunque todas sean reales); su uso está expresamente indicado si el denominador tiene raíces imaginarias múltiples.

- Sea $P(x)/Q(x)$ un cociente de polinomios cuyo denominador tiene grado "k" y cuyo numerador es de grado inferior a "k" (si no fuera así, dividiríamos los polinomios). Además, $Q(x)$ tiene raíces múltiples y es 1 el coeficiente de su término de mayor grado (si no fuera así, sacaríamos factor común dicho coeficiente).

  Sea $D(x)$ la descomposición en fracciones simples que haríamos si todas las raíces del denominador fueran simples.

  Sea $Q_1(x)$ el polinomio que tiene las mismas raíces que $Q(x)$, pero todas simples. Sea $Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x)$.

  Sea $S(x)$ un polinomio completo de coeficientes indeterminados y grado una unidad inferior al grado de $Q_2(x)$.

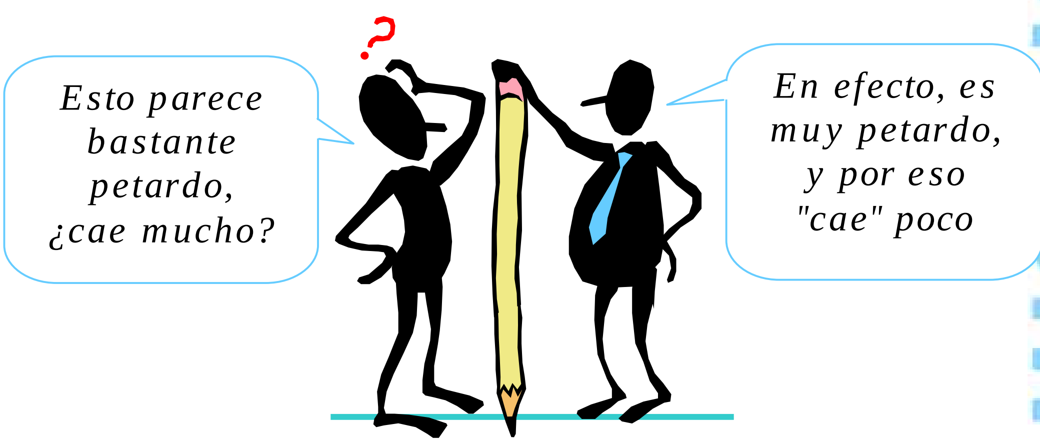
  El señor Hermite demuestra que:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}.dx = \frac{S(x)}{Q_2(x)} + \int D(x).dx \quad (I)$$

  Los "k" coeficientes indeterminados que aparecerán en (I) se calculan derivando respecto de "x" los dos miembros de (I); resulta:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{Q_2(x)}\right) + D(x) \quad (II)$$

  Una vez hecha la derivación, para calcular los "k" coeficientes indeterminados reducimos a común denominador en el segundo miembro de (II) e identificamos los numeradores de ambos lados del signo de igualdad; así obtendremos una ecuación en la que aparecerán los "k" coeficientes. Sin más que igualar los coeficientes de los términos del mismo grado a uno y otro lado del signo de igualdad obtendremos un sistema lineal de "k" ecuaciones cuyas "k" incógnitas son los "k" coeficientes indeterminados; resuelto el sistema, el asunto se reduce a calcular la primitiva de D(x).



FONEMATO 1.8.17

$$\int \frac{3.x^3-4.x^2+3.x-1}{x^4-2.x^3+x^2}.dx = \frac{-1}{x.(x-1)} + 2.\text{Ln}\,|x-1| + \text{Ln}\,|x| + C$$

- El numerador es de grado inferior al denominador
- Las raíces del denominador son $x=0$ (doble) y $x=1$ (doble)
- Usamos el método de Hermite; siendo:

  $*\ Q_1(x)=x.(x-1)\equiv$ polinomio que tiene las mismas raíces que el denominador $Q(x)=x^4-2.x^3+x^2$, pero todas simples

  $*\ Q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{x^4-2.x^3+x^2}{x.(x-1)}=\dfrac{x^2.(x-1)^2}{x.(x-1)}=x.(x-1)$

  $*\ S(x)=A.x+B\equiv$ polinomio de coeficientes indeterminados y grado una unidad inferior al grado de $Q_2(x)$

  $*\ D(x)=\dfrac{M}{x-1}+\dfrac{N}{x-0}\equiv$ descomposición en fracciones simples si las raíces del denominador (o sea, $x=0$ y $x=1$) fueran todas simples

según Hermite, es:

$$\int \frac{3.x^3-4.x^2+3.x-1}{x^4-2.x^3+x^2}.dx = \frac{S(x)}{Q_2(x)} + \int D(x).dx$$

o sea:

$$\int \frac{3.x^3-4.x^2+3.x-1}{x^4-2.x^3+x^2}.dx = \frac{A.x+B}{x.(x-1)} + \int \left(\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-0}\right).dx \quad (I)$$

Al derivar los dos miembros de (I), resulta:

$$\frac{3.x^3-4.x^2+3.x-1}{x^4-2.x^3+x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{A.x+B}{x.(x-1)}\right) + \frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-0}$$

o sea:

$$\frac{3.x^3-4.x^2+3.x-1}{x^4-2.x^3+x^2} = \frac{A.x.(x-1)-(A.x+B).(2.x-1)}{x^2.(x-1)^2} + \frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-0}$$

Al reducir a común denominador en el segundo miembro e igualar los numeradores, se obtiene:

$$3.x^3-4.x^2+3.x-1=$$
$$=A.x.(x-1)-(A.x+B).(2.x-1)+M.x^2.(x-1)^2+N.x.(x-1)^2$$

o sea:

$$3.x^3-4.x^2+3.x-1=(M+N).x^3+(-A-M-2N).x^2+(-2B+N).x+B$$

Al igualar los coeficientes de los términos del mismo grado:

$$\left.\begin{array}{r} M+N=3 \\ -A-M-2.N=-4 \\ -2B+N=3 \\ B=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0 \\ B=-1 \\ M=2 \\ N=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{3.x^3-4.x^2+3.x-1}{x^4-2.x^3+x^2}.dx = \frac{-1}{x.(x-1)} + \int \left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-0}\right).dx$$

FONEMATO 1.8.18

$$\int \frac{x^4+x^3+3.x^2+2.x+1}{x.(x^2+1)^2}.dx = \frac{x-1}{2.(x^2+1)} + \frac{3}{2}.\text{arc tg } x + \text{Ln}\,|x| + C$$

- Las raíces del denominador son $x=0$ (simple) y $x=0\pm 1.i$ (dobles)
- Usamos el método de Hermite; siendo:

  $*$ $Q_1(x)=x.(x^2+1) \equiv$ polinomio que tiene las mismas raíces que el denominador $Q(x)=x.(x^2+1)^2$, pero todas simples

  $*$ $Q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}=\dfrac{x.(x^2+1)^2}{x.(x^2+1)}=x^2+1$

  $*$ $S(x)=A.x+B \equiv$ polinomio de coeficientes indeterminados y grado una unidad inferior al grado de $Q_2(x)$

  $*$ $D(x)=\dfrac{M.x+N}{x^2+1}+\dfrac{K}{x-0} \equiv$ descomposición en fracciones simples si las raíces del denominador (o sea, $x=0$ y $x=0\pm 1.i$) fueran todas simples

según Hermite, es:

$$\int \frac{x^4+x^3+3.x^2+2.x+1}{x.(x^2+1)^2}.dx = \frac{S(x)}{Q_2(x)} + \int D(x).dx$$

o sea:

$$\int \frac{x^4+x^3+3.x^2+2.x+1}{x.(x^2+1)^2}.dx = \frac{A.x+B}{x^2+1} + \int \left(\frac{M.x+N}{x^2+1}+\frac{K}{x-0}\right).dx \quad \text{(I)}$$

Al derivar los dos miembros de (I), resulta:

$$\frac{x^4+x^3+3.x^2+2.x+1}{x.(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{A.x+B}{x^2+1}\right) + \frac{M.x+N}{x^2+1} + \frac{K}{x-0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+x^3+3.x^2+2.x+1}{x.(x^2+1)^2} = \frac{A.(x^2+1)-(A.x+B).2.x}{(x^2+1)^2} + \frac{M.x+N}{x^2+1} + \frac{K}{x}$$

Al reducir a común denominador en el segundo miembro e igualar los numeradores, se obtiene:

$$x^4+x^3+3.x^2+2.x+1 = (A.(x^2+1)-(A.x+B).2.x).x + \\ +(M.x+N).(x^2+1).x + K.(x^2+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4+x^3+3.x^2+2.x+1 = (M+K).x^4+(N-A).x^3+ \\ +(M+2.K-2.B).x^2+(N+A).x+K$$

Al igualar los coeficientes de los términos del mismo grado:

$$\left.\begin{array}{r} M+K=1 \\ N-A=1 \\ M+2.K-2.B=3 \\ N+A=2 \\ K=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=1/2 \\ B=-1/2 \\ M=0 \\ N=3/2 \\ K=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4+x^3+3.x^2+2.x+1}{x.(x^2+1)^2}.dx = \frac{x-1}{2.(x^2+1)} + \int \left(\frac{3/2}{x^2+1}+\frac{1}{x-0}\right).dx$$