Tema 1:
Sucesiones de variables aleatorias

1.3.1: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0;a)$. Utilizando la acotación de Tchebychef, demuéstrese que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} a$, siendo:

$$Z_n = \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv 2.(\text{Media aritmética de } X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

1.3.2: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables independientes, todas con las misma distribución de probabilidad, con media μ y varianza σ^2, ambas finitas. Mediante la acotación de Tchebychef, demuéstrese que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} \mu$, siendo Z_n la media aritmética de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Razone si la demostración es cierta si sólo exigimos que las variables de $\{X_n\}$ sean incorreladas, no necesariamente igualmente distribuidas, aunque todas con la misma media y la misma varianza finitas.

1.3.3: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas densidad $f(x) = e^{-(x-\lambda)}$, $x > \lambda$. Siendo $Z_n = \min.\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, demuestre que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} \lambda$,

1.3.4: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores 1 y 0 con probabilidades respectivas $1/n$ y $1-1/n$. Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$. ¿Qué ocurre con la convergencia de la funciones de distribución de las variables que forman la sucesión?

1.3.5: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores 0 y n^2 con probabilidades respectivas $1-1/n$ y $1/n$. Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$.

1.3.6: Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores "a" y $a + n.b$ $(b \neq 0)$ con probabilidades respectivas $1-1/n$ y $1/n$.

Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} a$. Estúdiese si $\{X_n\} \xrightarrow{2} a$.

1.3.7: Sea $Z \approx U(-1;1)$ y $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$X_n = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < Z < -1/n \\ 0 & \text{si } -1/n < Z < 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n < Z < 1 \end{cases}$$

1) Calcúlese la función de distribución de X_n. A partir de ella, demuestre que la sucesión dada converge en ley a cualquier variable aleatoria que tome los valores -1 y 1 de modo equiprobable.

2) Sea "W" la variable aleatoria tal que $W = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < Z < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < Z < 1 \end{cases}$

   Pruébese que $\{X_n\} \xrightarrow{L} W$ y que $\{X_n\} \xrightarrow{2} W$.

1.4.1: Determínese el número "n" de veces que debe lanzarse una moneda para que no sea inferior a 0'8 la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "cara" esté comprendida entre 0'45 y 0'55. ¿Cuántas veces debe lanzarse la moneda para que no sea inferior a 0'9 la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "cara" esté comprendida entre 0'49 y 0'51?

1.4.2: La probabilidad de tránsitos en un aeropuerto se desconoce. Para estudiar la rentabilidad de una instalación hotelera en el aeropuerto, se estima dicha probabilidad mediante la frecuencia relativa de tránsitos respecto al total de viajeros del aeropuerto. Determínese el número "n" de pasajeros que deben observarse si se quiere que no sea mayor que 0'05 la probabilidad de que la desviación entre la frecuencia relativa de tránsitos y la probabilidad desconocida sea superior a 0'06.

1.6.1: El número de muertos cada minuto a causa del hambre en una región alejada de nuestro idílico primer mundo tiene distribución de Poisson de parámetro 40, con independencia unos minutos de otros. Calcúlese la probabilidad de que durante el día de Nochebuena mueran de hambre no menos de 28800 personas en esa región. ¿Qué cota de muertos se superará ese día con probabilidad 0'95?

1.6.2: Con independencia unos días de otros, la aleatoria demanda diaria de vino (en litros) en un bar tiene distribución uniforme en el intervalo $(20;40)$. Calcúlese la probabilidad de que en 182 días se vendan más de 6370 litros de vino.

1.6.3: Al lanzar un dado 500 veces ganamos 100 \$ por punto si sale cara par, y perdemos 100 \$ por punto si sale cara impar. Calcúlese la probabilidad de ganar menos de 23000 \$.

1.6.4: Con independencia unos de otros, el tiempo de espera de un cliente en la cola de un banco tiene distribución exponencial de parámetro 0'05. Calcúlese la probabilidad de que el tiempo medio de espera de 2 clientes sea superior a 21, y la probabilidad de que el tiempo medio de espera de 100 clientes sea superior a 21.

1.6.5: Con independencia unos días de otros, el aleatorio número de casos de corrupción que se descubren cada día tiene distribución de Poisson de parámetro 4. Calcúlese la probabilidad de que el número medio de casos de corrupción en dos días sea superior a 4'5, y la probabilidad de que el número medio de casos de corrupción en 100 días sea superior a 4'5,

1.6.6: Una máquina necesita para su funcionamiento una determinada válvula de la que hay en stock dos tipos A y B, en cantidades respectivas 220 y 300. Sin embargo, si empezamos a utilizar un tipo de válvula, ya no se puede mezclar ninguna del otro a no ser que paremos la máquina. La duración (en minutos) de cada válvula de tipo A es exponencial de media 5, mientras que la duración de cada válvula del tipo B tiene se distribuye (también minutos) de modo uniforme en el intervalo $(0;6)$. Además, se considera que la duración de cada válvula es independiente de la duración de las demás. Una vez averiada la válvula que hace funcionar la máquina, ésta es sustituida inmediatamente por otra del mismo tipo modo automático. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione ininterrumpidamente al menos 14'5 horas si trabaja con válvulas de tipo A? ¿Y si trabaja con válvulas de tipo B?

1.6.7: El tiempo (en horas) que tarda una máquina en realizar un ciclo de trabajo tiene densidad $f(x) = 2.x,\ 0 < x < 1$. Calcúlese la probabilidad de que la máquina tarde mas de 40 horas en realizar 45 ciclos.

1.6.8: Determine el percentil 90 de la variable $X \approx \chi^2_{30}$ y compare el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.

1.6.9: Sean $X_1, \dots, X_{100}$ variables independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con media 75 y varianza 225. Utilícese la desigualdad de Tchebychef para acotar la probabilidad de que su media aritmética no difiera de 75 en más de 6. Compárese el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy. Mediante la desigualdad de Tchebychef, determínese la cota que con probabilidad no inferior a 0'75 no es superada por la desviación de la media aritmética respecto a 75. Compárese el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.

1.6.10: El número de clientes que entran cada día a la farmacia "A" tiene distribución de Poisson de parámetro 20, y para la farmacia "B" tiene distribución $B(30;0'7)$. Calcúlese la probabilidad de que el número medio diario de clientes de "A" durante 100 días se desvíe del número medio diario de clientes de "B" durante 200 días en menos de dos. ¿Qué cota no superará dicha desviación con probabilidad 0'95?

1.7.1: El 20 % de las ventas de una empresa son al contado. Si en un mes se realizan 1000 ventas, determínese la probabilidad de que como máximo 250 hayan sido al contado?

1.7.2: La probabilidad de que en una ciudad y durante un año en un parto nazca un varón es 0'48. Si la probabilidad de que nazcan 1000 o más varones es 0'1711, determínese el número "n" de nacimientos que se han producido en esa ciudad durante el año en cuestión

1.7.3: Con independencia unos días de otros, la aleatoria venta diaria de vino (en miles de litros) de una bodega tiene distribución $U(0;2)$, obteniendo beneficio la empresa sólo si la venta es superior a 1'5. Si se consideran 200 días, determínese el 60 percentil del número de días en que no se obtiene beneficio.

1.7.4: La probabilidad de que un estudiante se chupe el dedo hasta el codo es 0'7. Observados 300 estudiantes, determínese la probabilidad de que entre 230 y 250 contesten afirmativamente.

1.7.5: La duración (en horas) de un fusible tiene distribución $N(2000;200)$. Los fusibles se empaquetan en lotes de 10, y se considera que un lote es defectuoso si contiene dos o más fusibles que duran menos de 1790 horas. Determínese la probabilidad de rechazar un embarque de 1000 lotes si se acepta cuando contiene menos de 150 lotes defectuosos.