Tema 2:
Distribuciones en el muestreo

2.3.1: Se toma m.a.s de tamaño 2 de una población "X" tal que

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Determínese la distribución de probabilidad de los siguientes estadísticos:

$$1)\ T_1=\overline{X}\ ;\ 2)\ T_2=X_1+X_2\ ;\ 3)\ T_3=S^2\ ;\ 4)\ T_4=S_c^2$$
$$5)\ T_5=X_1-X_2\ ;\ 6)\ T_2=2.X_1-X_2\ ;\ T_7=\text{máx.}(X_1;X_2)$$

2.3.2: Sea "X" una población continua de la que se toma m.a.s de tamaño "n". Determínese la distribución del mínimo valor muestral "Z", del máximo valor muestral "Y" y del recorrido muestral $R=Y-Z$. Aplíquese al caso $n=3$ si la densidad de "X" es $f(x)=2.x,\ x\in[0;1]$, determinando las probabilidades de los sucesos $Y\le 0'1,\ Y>0'9,\ Z\le 0'1,\ Z>0'9$ y $R\le 0'5$.

2.3.3: De una población $X\approx N(0;\sigma)$ se toma m.a.s de tamaño 2. Demuéstrese que los estadísticos $Z=(X_1+X_2)/2$ y $T=X_1^2+X_2^2$ son incorrelados.

2.3.4: En el muestreo aleatorio simple de tamaño 5 de una población exponencial de parámetro "a", determínese la distribución del recorrido muestral. Calcúlese la probabilidad de que el recorrido muestral sea mayor que 1.

2.3.5: Sea "X" una población continua de la que se toma m.a.s de tamaño impar $2.n+1$. Determínese la distribución de la mediana muestral "M". Particularícese en el caso $n=2$ si la densidad de "X" es $f(x)=2.x,\ x\in[0;1]$. En las condiciones del apartado anterior, calcúlense la media y la varianza de "M".

2.3.6: Si se toma m.a.s de tamaño 9 de una población "X" con distribución uniforme en el intervalo $(0;1)$, determínese la distribución de probabilidad de la diferencia entre el sexto menor valor muestral y el tercer menor valor muestral.

2.4.1: Si el 70 % de los estudiantes se chupan el dedo y seleccionamos 100 estudiantes al azar, determínese la probabilidad de que la proporción de estudiantes que se chupan el dedo esté entre 0'65 y 0'8. Determínese un intervalo en el que con probabilidad 0'95 puede esperarse que se encuentre la proporción muestral de chupadedos.

2.4.2: De una población "X" se toma muestra aleatoria simple de tamaño 81. En los siguientes casos, determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre el estadístico media muestral: Población de Poisson de parámetro 5. Población $B(4;0'3)$. Población $\text{Exp.}(0'02)$. Población $U(-1;1)$. Población con densidad $f(x)=2.x,\ 0\le x\le 1$. Población geométrica de parámetro 0'1. Población $G(20;2)$.

2.4.3: Si la producción diaria oscila entre 6000 y 10000 kg. Determínese la probabilidad de que la producción media durante 320 días supere los 8000 kg.

2.5.1: Determínese la distribución de probabilidad de la varianza muestral en el muestreo aleatorio simple de tamaño 2 de una población $Z\approx\text{Exp.}(1)$.

2.5.2: Determínese la distribución de probabilidad de la varianza muestral en el muestreo aleatorio simple de tamaño 2 de una población $Z \approx U(0;1)$.

2.6.1: Una máquina de refrescos está regulada de modo que la cantidad de bebida que suministra tiene distribución normal con media 22'5 dl. y desviación típica 1'5 dl. Determínese la probabilidad de que al obtener una muestra de 36 bebidas, el contenido medio supere los 24 dl.

2.6.2: De una población normal de varianza 1000 se toma m.a.s. de tamaño 100. Determínese la probabilidad de que la media muestral supere a la media poblacional en no menos de 0'2.

2.6.3: Siendo $X \approx N(100;12)$, determínese el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para garantizar, con probabilidad no inferior a 0'95, que la media muestral no difiera de la media poblacional en más de 2 unidades.

2.6.4: Siendo $X \approx N(\mu;1)$, determínese el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para garantizar, con probabilidad no inferior a 0'95, que la media muestral no diferirá de la media poblacional en más de 0'5 unidades.

2.6.5: En horas, la duración de un tipo de bombillas es $N(1000;100)$. Se desea enviar un muestra de modo que la duración media muestral no difiera de la poblacional en más de 50 horas con probabilidad no inferior a 0'95. Determínese el tamaño de la muestra. Determínese el tamaño de la muestra si de "X" sólo se sabe que tiene media 1000 y desviación típica 100.

2.6.6: De una población $X \approx N(13;6)$ se toma m.a.s de tamaño 9. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'99, que se encuentre la media muestral. Repita lo anterior si $n = 100$ y si $n = 10000$. ¿Qué diría si en una m.a.s de tamaño 10000 la media muestral es 15?

2.6.7: De una población $X \approx N(5;0'1)$ se toma m.a.s de tamaño 16. Determínese la probabilidad del suceso $5 < \overline{X} < 5'2$, la del suceso $S^2 \le 0'019125$, la del suceso $S > 0'1$ y la del suceso $5 < \overline{X} < 5'2 \,/\, S^2 \le 0'019125$.

2.6.8: Si de una población $X \approx N(1'7;4)$ se toma m.a.s de tamaño 10, determínese la cota que superará la desviación típica muestral con probabilidad 0'99.

2.6.9: En el muestreo aleatorio simple de tamaño "n" de una población normal, determínese la función de densidad del estadístico varianza muestral.

2.6.10: En una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ de una población $N(\mu;\sigma)$, siendo $\overline{X}$ y S^2 las correspondientes media y varianza muestrales, y siendo $X_{n+1} \approx N(\mu;\sigma)$ independiente de $X_1, \ldots, X_n$, determínese la distribución de probabilidad de "T", siendo:

$$T = \frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

2.6.11: De una población $X \approx N(\mu;2)$ se toma m.a.s de tamaño 9. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre la varianza muestral. Repita lo anterior si $n = 101$.

2.6.12: De una población normal de varianza 4'5 se toman dos muestras independientes de tamaño "n". Determínese "n" de modo que sea al menos 0'95 la probabilidad de que las medias muestrales difieran en no más de 2 unidades.

2.6.13: De dos poblaciones independientes $N(\mu_1;\sigma_1)$ y $N(\mu_2;\sigma_2)$ se toman muestras de tamaños respectivos "n" y "m", siendo $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ las respectivas medias muestrales y S_{c1}^2 y S_{c2}^2 las cuasivarianzas muestrales. Determínese la distribución de probabilidad de los estadísticos T_1 y T_2:

$$T_1 = \frac{n-1}{\sigma_1^2}.S_{c1}^2 + \frac{m-1}{\sigma_2^2}.S_{c2}^2 \;;\; T_2 = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n)+(\sigma_2^2/m)}}.\frac{\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{T_1}}$$

2.6.14: De dos poblaciones independientes con la misma varianza σ^2 se toman muestras de tamaños respectivos "n" y "m", siendo $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ las respectivas medias muestrales. Si $\overline{W}$ es la media aritmética de todas las observaciones realizadas, demuéstrese que $V(\overline{W}-\overline{X}) = m.\sigma^2/(n^2+n.m)$.

2.6.15: La duración media de las bombillas tipo A es de 2500 horas con desviación típica 600 horas, y la duración media de las bombillas tipo B es de 2300 horas con desviación típica 800 horas. Se toman 300 bombillas tipo A y 200 tipo B. Calcúlese la probabilidad de que la duración media de las bombillas tipo A no supere en más de 100 horas a la duración media de la del tipo B. Calcúlese la probabilidad de que la duración media de las bombillas tipo A supere en más de 200 horas a la duración media de la del tipo B. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre la diferencia de medias muestrales.

2.6.16: Sean S_1^2 y S_2^2 las respectivas varianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños 5 y 4 de dos poblaciones normales con igual varianza. Determínese la probabilidad del suceso $S_2^2/S_1^2 > 5'2$. Con los mismos tamaños muestrales, si las poblaciones son $N(3;2)$ y $N(7;8)$, determínese un intervalo en el que, con probabilidad 0'95, se encuentre el cociente de varianzas muestrales.

2.6.17: De una población normal bidimensional $(X;Y)$ con coeficiente de correlación $\rho = 0'5$ se toma m.a.s de tamaño 19, determínese la probabilidad de que el coeficiente de correlación muestral "r" esté entre 0'45 y 0'55.

2.6.18: Si de una población normal bidimensional $(X;Y)$ cuyo coeficiente de correlación es $\rho = 0'8$ se toma muestra aleatoria simple de tamaño 28, determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre el coeficiente de correlación muestral "r".

2.6.19: Si de una población normal bidimensional $(X;Y)$ cuyo coeficiente de correlación es $\rho = 0$ se toma muestra aleatoria simple de tamaño 6, determínese la probabilidad de que el coeficiente de correlación muestral "r" esté entre 0'608 y 0'729. Determínese un intervalo en el que puede esperarse, con probabilidad 0'95, que se encuentre el coeficiente de correlación muestral "r".