

Tema 3:

Estimación puntual

3.2.1: De una población "X" con media μ y varianza σ^2 se toma m.a.s. de tamaño "n". Demuéstrese que el estadístico media muestral siempre es estimador insesgado de la media poblacional μ . Demuéstrese que el estadístico varianza muestral no es estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2 . Conocida μ , demuestre que el estadístico "T" es estimador insesgado de σ^2 :

$$T = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 / n$$

3.2.2: Demuéstrese que si T_1 y T_2 son estimadores insesgados del parámetro θ , también es insesgado $Z = a.T_1 + (1 - a).T_2$, $a \in (0;1)$. En una población con distribución uniforme en el intervalo $(0;\theta)$, analícese si el estadístico la media muestral es insesgado para θ . Determinése un estimador insesgado de θ .

3.2.3: Demuéstrese que, en una población uniforme en el intervalo $(a;b)$, el máximo muestral es asintóticamente insesgado para el extremo superior "b" y el mínimo muestral lo es para el extremo inferior "a".

3.2.4: Se toman dos muestras independientes de tamaños respectivos "n" y "m" de una población $X \approx N(\mu; \sigma)$ cuya media quiere estimarse, siendo \bar{X} y \bar{Z} las respectivas medias muestrales. En la familia $W = a.\bar{X} + b.\bar{Z}$ ($a, b \in \mathfrak{R}$), determinése el que es insesgado y tiene varianza mínima.

3.2.5: Se toma m.a.s de tamaño "n" de una población "X" cuya media quiere estimarse. Sea la familia de estimadores $Z = \sum_{k=1}^n a_k.X_k$; $a_k \in \mathfrak{R}$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$

Determinése el que es insesgado y tiene varianza mínima.

3.2.6: En el m.a.s. de tamaño "n" de una población "X" tal que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, sea "T" el cuadrado del estadístico media muestral. Determine el valor esperado de "T" en función de μ y σ^2 . Imponga condiciones para que "T" sea estimador insesgado de σ^2 . ¿Cuándo podría decirse que "T" es estimador insesgado de μ^2 ? ¿Es "T" asintóticamente insesgado para μ^2 ?

3.2.7: De una población "X" con varianza σ^2 sea toman "k" muestras independientes de tamaños respectivos n_1, \dots, n_k . Siendo S_i^2 la varianza muestral de la i-ésima muestra, demuéstrese que "T" es estimador insesgado de σ^2 .

$$T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i.S_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)}$$

3.2.8: De una población $X \approx N(0; \sigma)$ se toma m.a.s. de tamaño "n". Compruébese que es insesgado el estimador de σ^2 definido como

$$T = \frac{1}{2 \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

3.2.9: Siendo "X" el aleatorio número de estupideces que un ciudadano dice en un semestre e "Y" la aleatoria cantidad de horas que invierte en ver telebasura durante el semestre, demuéstrese que la covarianza muestral es un estimador asintóticamente insesgado de la covarianza poblacional.

3.2.10: Siendo "T" un estimador del parámetro θ , si es posible, determínese un estimador insesgado de θ en los siguientes casos:

1) $E(T) = (\theta - 1)/(\theta + 1)$; 2) $E(T) = p \cdot \theta + q$; $p, q \in \mathcal{R}$, $p \neq 0$

3.5.1: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro de una población de Poisson.

3.5.2: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro de una población de Bernouilli.

3.5.3: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro θ de una población $B(k; \theta)$.

3.5.4: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro de una población geométrica.

3.5.5: Demuéstrese que el estadístico suma total es suficiente para el parámetro θ de una población $BN(k; \theta)$.

3.5.6: Supuesto m.a.s. de tamaño dos, demuestre que la suma total es suficiente para el parámetro de una población exponencial y para la media de una normal.

3.5.7: De una población $X \approx U(0; \theta)$ se toma m.a.s. de tamaño dos. Demuéstrese que el máximo muestral es suficiente para θ .

3.5.8: De una población $X \approx U(\theta; 3)$ se toma m.a.s. de tamaño dos. Demuéstrese que el mínimo muestral es suficiente para θ .

3.5.9: Supuesto m.a.s. de tamaño 2, demuéstrese que el mínimo muestral es suficiente para el parámetro θ si $f(x) = 3 \cdot \theta^3 / x^4$, $0 < \theta \leq x$

3.5.10: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población de Poisson.

3.5.11: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población de Bernouilli.

3.5.12: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población geométrica.

3.5.13: Determínese un estadístico suficiente para el parámetro de una población exponencial.

3.5.14: Determínese un estadístico suficiente para la media de una población normal.

3.5.15: Determínese un estadístico suficiente para la varianza de una población normal.

3.5.16: Analícese si el estadístico $T = 2.X_1 + X_2 + X_3$ es suficiente para el parámetro de una población de Bernoulli.

3.6.1: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para el parámetro de una población de Bernoulli.

3.6.2: Considerando muestreo aleatorio simple de tamaño "n" y siendo $X \approx B(k;p)$, demuéstrese que el estimador $T = \bar{X}/k$ es eficiente para "p".

3.6.3: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para el parámetro de una población de Poisson.

3.6.4: Si $X \approx \text{Exp.}(1/\theta)$ y considerando muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para θ .

3.6.5: Considerando muestreo aleatorio simple de tamaño "n", demuéstrese que la media muestral es eficiente para la media de una normal.

3.6.6: Sea $X \approx N(\mu;\sigma)$ sometida a m.a.s de tamaño "n" para estimar la varianza σ^2 . Compare la eficiencia de la cuasivarianza muestral con la de la varianza muestral. Estudie la eficiencia de la varianza muestral y la de la cuasivarianza muestral como estimadores de la varianza poblacional. Analícese la eficiencia de la varianza muestral como estimador de la función $h(\sigma^2) = (n-1).\sigma^2/n$.

3.6.7: De una población $X \approx \text{Exp.}(\theta)$ se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n". Sea el estadístico $Z = (n-1)/(n.\bar{X})$. Demuéstrese que "Z" es estimador insesgado de θ . Calcúlese la varianza de "Z". Calcúlese la CCR para estimadores insesgados de θ . Sabiendo que puede demostrarse que "Z" es el estimador insesgado de θ que tiene varianza mínima, ¿qué diría?

3.6.8: De una población se toma muestra aleatoria simple de tamaño "n" y se define el estadístico $T = \sum X_i^2/n$. Determínese bajo qué condiciones "T" es estimador insesgado de la varianza poblacional. En tales condiciones, y supuesto que la población es normal, analícese la eficiencia de "T".

3.6.9: Sean T_1 y T_2 estimadores del parámetro λ . Se sabe que:

$$T_1 \text{ es insesgado y } V(T_1) = 0'08 ; T_2 \text{ es sesgado y } V(T_2) = 0'01$$

¿Cuál elegiríamos?

3.6.10: De una población $X \approx N(\mu;\sigma)$ se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 3 y se definen los siguientes estimadores de la media poblacional μ :

$$T_1 = 0'6.X_1 + 0'2.X_2 + 0'2.X_3 ; T_2 = (4.X_3 - X_1)/3 ; T_3 = (X_1 + X_2 + X_3)/3$$

¿Cuál de ellos es mejor estimador de la media poblacional?

3.7.1: Si de una población se toma m.a.s. de tamaño "n", analícese la consistencia de la media muestral como estimador puntual de la media poblacional.

3.7.2: Se toma m.a.s. de tamaño "n" de $X \approx U(0; \theta)$, siendo \bar{X}_n la media muestral, analice la consistencia de $T_n = 2 \cdot \bar{X}_n$ como estimador puntual de θ .

3.7.3: De una población $X \approx N(\mu; \sigma)$ se toma m.a.s. de tamaño "n" y como estimador puntual de la media poblacional se elige el estadístico

$$T_n = k \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot X_i$$

Determinese "k" para que T_n sea insesgado; en tal caso, analícese la eficiencia y la consistencia de T_n .

3.7.4: Se toma m.a.s. de tamaño "n" de una población "X" tal que

$$P(X = x) \mid \begin{array}{c} x \\ \hline (1 - \theta)/2 \quad 0 \quad 1 \\ \hline \end{array} ; 0 < \theta < 1$$

Analícese la insesgadez y la consistencia de $T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$.

3.7.5: Supuesto m.a.s. de tamaño "n", analícese la consistencia simple de la varianza muestral y de la cuasivarianza muestral como estimadores de la varianza de una población normal.

3.7.6: Utilizando la función de distribución, demuéstrese que la media muestral es consistente para la media de una población normal.

3.7.7: Si de una población $X \approx U(0; \theta)$ se toma m.a.s. de tamaño "n", analícese la insesgadez y la consistencia del máximo muestral como estimador puntual de θ .

3.7.8: Se toma m.a.s. de tamaño "n" de una población de Bernouilli de parámetro θ , y como estimadores puntuales de θ se eligen los estadísticos

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i ; Z_n = \frac{1}{n+2} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

Calcúlese el error cuadrático medio de cada uno. Analícese la consistencia de \bar{X}_n . Analícese la consistencia de Z_n .

3.7.9: De una población logarítmico normal de parámetros μ y σ se toma m.a.s. de tamaño "n", y como estimador puntual de μ se elige el estadístico

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Ln } X_i$$

Analícese la insesgadez, la eficiencia y la consistencia de T_n .

3.7.10: De una población $X \approx U(0; \theta)$ se toma m.a.s. de tamaño $2 \cdot n + 1$; siendo "M" la mediana muestral, analícese la insesgadez y la consistencia de $T = 2 \cdot M$ como estimador puntual de θ .

3.7.11: Si $X \approx G(b; 1/\theta)$ y se conoce el valor de "b", demuestre que el estadístico $T = (X_1 + \dots + X_n)/n \cdot b$ es insesgado, consistente, eficiente y suficiente para θ .

3.8.1: Sea "X" una población con densidad $f(x) = (1 + \theta) \cdot x^\theta$, $0 < x < 1$. Determine el estimador de θ por el método de los momentos.

3.8.2: Utilizando el método de los momentos, determinense los estimadores de los parámetros de una población normal "X".

3.8.3: Sea "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es:

$$\frac{x}{P(X=x)} \mid \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ (1-\theta)/2 & (\theta+\lambda)/2 & (1-\lambda)/2 \end{array}$$

Determinense los estimadores θ y λ por el método de los momentos. Particularícese si en una muestra aleatoria simple de tamaño 50 los resultados fueron:

$$\frac{x}{n_i} \mid \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 15 & 25 & 10 \end{array}$$

¿Son insesgados los estimadores obtenidos?

3.8.4: Si $X \approx U(a; b)$, halle los estimadores "a" y "b" por el método de los momentos.

3.8.5: Utilizando el método de los momentos, determinense los estimadores de los parámetros de una población gamma y los de los parámetros de una población beta.

3.8.6: Determine el estimador de θ por el método de los momentos.

- 1) Población de Bernoulli de parámetro θ .
- 2) Población de $B(k; \theta)$, siendo conocido "k".
- 3) Población exponencial de parámetro θ .
- 4) Población geométrica de parámetro θ .

3.9.1: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", determinese la estimación más verosímil del parámetro en los siguientes casos:

- 1) Población de Bernoulli de parámetro "p".
- 2) Población binomial de parámetros "k" (conocido) y "p".
- 3) Población geométrica de parámetro "p".
- 4) Población binomial negativa de parámetros "k" (conocido) y "p".
- 5) Población de Poisson de parámetro θ .

3.9.2: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determinese la estimación más verosímil de la media de una población normal cuya varianza se conoce.

3.9.3: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determinese la estimación más verosímil de la varianza de una población normal cuya media se conoce.

3.9.4: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determinense las estimaciones más verosímiles de los parámetros de una población normal.

3.9.5: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determinese la estimación más verosímil del parámetro de una población exponencial.

3.9.6: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro θ de una población exponencial de media θ .

3.9.7: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro θ de una población $G(r;\theta)$, suponiendo conocido "r".

3.9.8: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determínese la estimación más verosímil del parámetro θ en los siguientes casos:

1) Población "X" con densidad $f(x) = (1 + \theta) \cdot x^\theta$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

2) Población "X" con densidad $f(x) = \frac{3}{\theta} \cdot x^2 \cdot e^{-x^3/\theta}$, $x > 0$, $\theta > 0$.

3) Población "X" con densidad $f(x) = \frac{4}{\theta^3 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-x^2/\theta^2}$, $x > 0$, $\theta > 0$.

3.9.9: Estúdiese la consistencia y la eficiencia del estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ en una población "X" con distribución $G(2;1/\theta)$.

3.9.10: Sea "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

$$P(X = x) \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 1 - \theta & \theta/2 & \theta/2 \end{array}$$

Tomada muestra aleatoria simple de tamaño "n" y siendo \bar{X} la aleatoria media muestral, como estimador de θ se define el estadístico $T = k \cdot \bar{X}$. Determínese "k" para que "T" sea estimador insesgado de θ . ¿Es consistente? Determínese la estimación más verosímil de θ si en una m.a.s de tamaño 10 los resultados fueron

3.9.11: Sea "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

$$P(X = x) \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline & (1 - \theta)/2 & (\theta + \lambda)/2 & (1 - \lambda)/2 \end{array}$$

Determínense las estimaciones más verosímiles de θ y λ .

3.9.12: El precio de un producto para el conjunto de todos los mercados internacionales tiene distribución $N(\mu; 2^15)$. Para los principales mercados europeos se dispone de estudios específicos que permiten una mayor precisión en los análisis. En concreto, para los mercados de Londres, París y Roma se ha comprobado que la media es idéntica que la mundial, pero las desviaciones típicas son distintas: el precio en Londres tiene distribución $N(\mu; 2)$, el de París es $N(\mu; 1)$ y el de Roma es $N(\mu; 3)$. Determínese la estimación más verosímil de μ si en una muestra de tamaño tres formada por una observación de Londres, otra de París y otra de Roma los precios respectivos observados son 10, 12 y 8.

3.9.13: Determínese la estimación más verosímil del parámetro θ de la población "X" cuya densidad es $f(x) = (2 + \theta) \cdot x^{\theta+1}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

3.9.14: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = \frac{2 \cdot \theta}{1 - \theta} \cdot x^{(3 \cdot \theta - 1)/(1 - \theta)} ; 0 < x < 1 ; 0 < \theta < 1$$

Determínese el estimador de máxima verosimilitud de θ . Determínese el estimador θ por el método de los momentos.

3.9.15: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \cdot (1-x)^{(1-\theta)/\theta} ; 0 < x < 1 ; \theta > 0$$

Determinese la distribución de probabilidad del estimador de máxima verosimilitud de θ , analizando su insesgadez, eficiencia, consistencia y suficiencia.

3.9.16: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = \theta \cdot x^{\theta-1} ; 0 < x < 1 ; \theta > 0$$

Determinese la distribución de probabilidad del estimador de máxima verosimilitud de θ , analizando su insesgadez.

3.9.17: Se toma muestra de tamaño "n" de una población (X;Y) con densidad

$$\begin{aligned} 1) f(x;y) &= \lambda \cdot \theta \cdot e^{-(\lambda \cdot x + \theta \cdot y)} ; x > 0 ; y > 0 \\ 2) f(x;y) &= \theta^2 \cdot x^{\theta-1} \cdot y^{\lambda-1} ; 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Determinense las estimaciones más verosímiles de λ y θ .

3.9.18: Una urna contiene 5 bolas, rojas y blancas. Estímese la composición de la urna por el método de la máxima verosimilitud si al extraer 3 bolas con reposición resultan dos rojas y una blanca.

3.9.19: Una urna contiene 5 bolas, rojas, blancas y negras. Estímese la composición de la urna por el método de la máxima verosimilitud si al extraer 4 bolas con reposición resultan dos rojas, una blanca y una negra.

3.9.20: Una urna contiene 6 bolas, blancas y negras. Estímese la composición de la urna por el método de la máxima verosimilitud si al extraer 4 bolas sin reposición se obtienen en el orden blanca, blanca, negra, blanca.

3.9.21: Supuesto muestreo aleatorio simple de tamaño "n", determinese la estimación más verosímil de θ si $X \approx U(b;\theta)$ y si $X \approx U(\theta;c)$.

3.9.22: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = 3 \cdot \theta^3 / x^4 ; 0 < \theta \leq x$$

Determinese la estimación más verosímil de θ , estudiando su sesgo. Estúdiense la insesgadez y la consistencia del estimador de momentos de θ .

3.9.23: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = 2 \cdot x / \theta^2 ; 0 < x \leq \theta$$

Determinese la estimación más verosímil de θ , estudiando su sesgo y calculando su error cuadrático medio. Estúdiense la insesgadez y la consistencia del estimador de momentos de θ . ¿Es más eficiente que el de máxima verosimilitud?

3.9.24: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} ; 0 < \theta \leq x$$

Determinese la estimación más verosímil de θ , estudiando su sesgo. Calcúlese el estimador de momentos de θ .

3.9.25: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-(x-\theta)/\lambda} ; 0 < \theta \leq x ; \lambda > 0$$

Determinense las estimaciones más verosímiles de λ y θ , estudiando su sesgo.

3.9.26: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x) = 4 \cdot \theta^4 \cdot x^3 ; 0 < x \leq 1/\theta ; \theta > 0$$

Determinense la distribución de probabilidad del estimador de máxima verosimilitud. Determinense un estimador insesgado de θ ; calcúlese su varianza y compárese con la cota de Cramer-Rao para estimadores insesgados de θ .

3.9.27: Supuesto m.a.s de tamaño "n", y siendo $X \approx G(1/(1+\theta))$, $\theta > 0$, determinense los estimadores de θ por el método de los momentos y de la máxima verosimilitud. Estúdiese la insesgidez y la eficiencia de dichos estimadores.

3.9.28: Supuesto m.a.s de tamaño "n", determinense el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ de una población $X \approx U(\theta - 3; \theta + 2)$.

© matemáticasbachiller.com