Tema 4:
Intervalos de confianza

4.2.1: Se toma muestra de tamaño 1 de una población con densidad

$$f(x)=\frac{2.\theta}{1-\theta}.x^{(3.\theta-1)/(1-\theta)}\ ;\ 0<x<1\ ;\ 0<\theta<1$$

Determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'8$ si el valor observado es 0'6.

4.2.2: Empleando el método de Neyman y con muestra de tamaño uno, determínese un intervalo de confianza 0'95 para θ si $f(x)=2.(\theta-x)/\theta^2$, $0<x<\theta$.

4.2.3: Si de una población $X\approx \text{Exp.}(1/\theta)$ se toma muestra de tamaño 1, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'8$ si el valor observado es 2.

4.2.4: Si de una población $X\approx \text{Exp.}(\theta)$ se toma muestra de tamaño 1, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'9$ si el valor observado es 0'2.

4.2.5: Se toma muestra de tamaño "n" de una población "X" con densidad

$$f(x)=3.x^2/\theta^3\ ;\ 0\le x\le\theta$$

Determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'8$ si la muestra seleccionada es la $(4;3;7;8)$.

4.2.6: Demuéstrese que si $Y\approx G(k;a)$ y "k" es natural, $W=2.a.Y\approx\chi^2_{2k}$. De una población $X\approx G(2;1/\theta)$ se observa la muestra $(7;5;6)$. Determínese un intervalo de confianza 0'95 para θ.

4.2.7: De una población $X\approx U(0;\theta)$ se observa la muestra $(4;7;6;5)$. Determínese un intervalo de confianza 0'9 para θ.

4.2.8: Se observa el valor 5 al tomar una muestra de tamaño 1 de una población "X" con densidad

$$f(x)=\frac{2}{3.\theta^2}.(\theta+x),\ 0<x<\theta,\theta>0$$

Utilícese el estimador de momentos de θ para determinar un intervalo de confianza 0'7269 para θ.

4.2.9: Supuesto muestra grande, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para el parámetro de una población dicotómica, particularizando al caso $\alpha=0'05$ si en una muestra de 64 estudiantes hay 16 que se chupan el dedo.

4.2.10: Si el número de exámenes de Estadística que suspende un alumno hasta aprobar esa asignatura tiene distribución de Poisson de parámetro θ, determínese un intervalo de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha=0'99$ si en una muestra de tamaño 100 se suspendieron 300 exámenes.

4.3.1: La duración "X" de una tarta a la puerta de un colegio tiene distribución normal con 6 minutos de desviación típica. Determínese un intervalo de confianza del 99 % para la media poblacional si en una muestra de 100 colegios la duración media fue de 14'35 minutos. Analícese si puede aceptarse la hipótesis $E(X)=13$. ¿Puede aceptarse la hipótesis $E(X)=13$ con una confianza del 95 %? ¿En qué se modifica la solución si la variable "X" no es normal?

4.3.2: Un investigador estudia el tiempo medio de vida de un tipo de bacterias, buscando un intervalo de confianza del 95 % con amplitud 10. Si la población es normal de varianza 900, ¿qué tamaño muestral debe tomar? ¿Qué tamaño muestral debe tomarse si desea un intervalo de amplitud 10 con confianza 0'99? En una muestra de tamaño 100, ¿cuál es el máximo nivel de confianza que podemos tener en un intervalo de amplitud no superior a 6?

4.3.3: Determine la distribución de probabilidad de los extremos de un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para la media de una $N(\mu;\sigma)$ de varianza conocida.

4.3.4: El tiempo que tarda una máquina en producir una pieza es $N(10;2)$. Tras un ajuste que no afecta a la variabilidad del tiempo de fabricación, se toma m.a.s de tamaño 16 y se obtiene media muestral 9'7. Determínese el máximo nivel de confianza con que puede afirmarse que el ajuste disminuye el tiempo medio de fabricación.

4.3.5: La producción diaria de una máquina tiene distribución $N(20;5)$. Tras un ajuste que no afecta a la variabilidad de la producción, se toma m.a.s. de tamaño 25 y se obtiene una media muestral 21. Determínese el máximo nivel de confianza con el que puede afirmarse que el ajuste aumenta la producción media diaria.

4.3.6: Determínese un intervalo de confianza 0'95 para la media de una población $N(\mu;2)$ de la que se han tomado tres muestras de tamaños respectivos 4, 8 y 24 obteniéndose medias muestrales 19, 19'5 y 19'2.

4.3.7: Determínese un intervalo de confianza 0'98 para la media de una población normal si en una m.a.s. de tamaño 101 la media muestral es 166 y la desviación típica muestral es 2'4.

4.3.8: Determínese un intervalo de confianza 0'9 para la media de una población normal de la que, en una m.a.s. de tamaño 626, se ha obtenido la siguiente distribución de frecuencias:

Intervalo	Frecuencia
$20-24$	92
$24-28$	134
$28-32$	161
$32-36$	141
$36-40$	98

4.3.9: Las pruebas realizadas a 10 pacientes a los que se les administró un cierto somnífero para comprobar su eficacia dieron los siguientes resultados

Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Horas ganadas de sueño	1'2	−1'3	0'7	0'2	3'4	0'8	3'1	1'8	2'0	3'1

Si el número de horas ganadas de sueño tiene distribución normal, ¿justificarían estos datos, con una confianza del 95 %, que el medicamento actúa aumentando las horas de sueño? Si en el prospecto del medicamento quiere indicarse el número medio de horas ganadas de sueño con un intervalo de amplitud 1 hora, indíquese la confianza que corresponde a ese intervalo. ¿A partir de qué nivel de confianza no puede decirse que el medicamento actúa aumentando las horas de sueño?

4.4.1: La demanda diaria de un artículo tiene distribución normal de media 98. Determínese un intervalo de confianza 0'95 para la varianza poblacional si durante seis días las ventas han sido 95, 98, 100, 96, 98 y 99.

4.4.2: Determínese un intervalo de confianza 0'98 para la varianza de una población normal si se ha observado la muestra 2'70, 2'72, 2'70, 2'76, 2'74, 2'78, 2'73.

4.4.3: Al tomar m.a.s. de tamaño 201 de una población normal se ha obtenido

$$\sum_{i=1}^{201} X_i = 1809 \ ; \ \sum_{i=1}^{201} (X_i - \overline{X})^2 = 500$$

Determínese un intervalo de confianza 0'9 para la media poblacional y un intervalo de confianza 0'9 para la varianza poblacional.

4.4.4: Determínese un intervalo de confianza 0'96 para la varianza de una normal si se han tomado 5 muestras de tamaños respectivos 7, 5, 6, 8 y 9, siendo 150, 120, 190, 160 y 210 las correspondientes varianzas muestrales observadas.

4.5.1: La empresa "A" fabrica un producto con demanda normal de varianza 40000, y la empresa "B" fabrica el mismo producto con demanda normal de varianza 10000. Observados 125 puntos de venta de cada producto, la demanda media de "A" es 300, siendo 290 la demanda media de "B". Determínese un intervalo de confianza 0'95 para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ entre las medias poblacionales. ¿Cuál es el máximo nivel de confianza para poder afirmar que $\mu_1 > \mu_2$? ¿Cuál es el máximo nivel de confianza en un intervalo de amplitud inferior a 40? ¿Qué tamaño muestral debe tomarse (el mismo en ambas poblaciones) para que la amplitud del intervalo de confianza 0'8 sea inferior a 30? ¿En qué se modifica la solución si las poblaciones no son normales?

4.5.2: Para comparar la resistencia de dos tipos de cables se ensayan 50 cables de cada tipo. Para el material "A" resulta una carga media de rotura de 78 kilos con desviación típica de 10 kilos, y para el "B" se observa una carga media de rotura de 87 kilos con desviación típica 20 kilos. Considerando que ambas poblaciones son normales de igual varianza, determínese un intervalo de confianza 0'95 para la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ entre las medias poblacionales. ¿A qué nivel de confianza no puede decirse que $\mu_1 < \mu_2$? ¿Qué confianza puede tenerse en un intervalo de amplitud 3?

4.6.1: En un curso hay dos grupos "A" y "B" de una misma asignatura. Se sabe que la distribución de las notas en el grupo "A" es normal de media 6, y en el grupo "B" es normal de media 5. Al seleccionar una muestra de cada grupo se obtuvieron los siguientes resultados:

Grupo "A": 7, 6, 6, 4, 5, 5, 3, 2
Grupo "B": 6, 5, 4, 8, 3, 4, 3

Determínese un intervalo de confianza del 90 % para el cociente entre las varianzas poblacionales.

4.6.2: En un curso hay dos grupos "A" y "B" de una misma asignatura. En las calificaciones de 15 alumnos del grupo "A" se observa varianza muestral 7, y en las calificaciones de 14 alumnos del grupo "B" la varianza muestral es 9. Supuesto que las calificaciones tienen distribución normal en ambos grupos, determínese un intervalo de confianza del 95 % para el cociente entre las varianzas poblacionales.

4.8.1: Sea "X" una población con densidad $f(x) = (1+\theta).x^{\theta}$, $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

Si el tamaño muestral es grande, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha = 0'95$ si la estimación más verosímil de θ correspondiente a una muestra de tamaño 400 es 2.

4.8.2: Sea $X \approx Exp.(1/\theta)$. Si el tamaño muestral es grande, determínese un intervalo aleatorio de confianza $1-\alpha$ para θ. Particularícese al caso $1-\alpha = 0'95$ si la media muestral toma el valor 6 en una muestra de tamaño 2500.

4.8.3: Si la suma total toma el valor 800 en una muestra de tamaño 1600 de $X \approx B(5;\theta)$, determínese un intervalo aleatorio de confianza 0'95 para θ.