Tema 2:

VARIABLES UNIDIMENSIONALES (113)

VARIABLES DISCRETAS

2.2.1: Sea "X" la v.a cuya función de probabilidad es

x	0	1	2	3	4
$f(x)=P(X=x)$	1/16	4/16	k	4/16	1/16

1) Calcúlense "k" y la función de distribución de "X".
2) Calcúlense las probabilidades de los sucesos $X \le 2'7$, $X > 2$ y $1 \le X < 4$.
3) Siendo $Y = 2.X + 1$, calcúlense $P(Y < 3)$ y $P(Y \ge 2)$.

2.2.2: Sea "X" la v.a cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2/4 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 3/4 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Calcúlese la función de probabilidad de "X". Calcúlense las probabilidades de los sucesos $X = 1/2$ y $1'5 < X < 3$. Si $Y = 2/(X+3)$, calcúlese $P(Y \le 1/4)$.

2.2.3: Calcúlese "k" para que las siguientes funciones sean las de probabilidad de una variable aleatoria discreta "X":

$$1)\ f(x) = k.\frac{x-1}{n},\quad x = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$2)\ f(x) = k.\frac{x-1}{n},\quad x = 2, 3, 4, \dots, 2.n$$

2.2.4: Sea "X" la variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ b & \text{si } 1 \le x < 3 \\ c & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Determínese la función de probabilidad de "X" sabiendo que

$$P(1 \le X \le 3) = 0'7\ ;\ P(X = 3) = 0'4\ ;\ P(X \le 2) = 0'5$$

2.2.5: En un examen con tres preguntas la probabilidad de acertar la primera es 0'8, la segunda 0'3 y la tercera 0'5. Determínese la función de distribución de la variable "X" que expresa el número de preguntas acertadas.

2.2.6: La función de probabilidad de la variable aleatoria que expresa el número de periódicos que vende un kiosko en un día es

$$P(X=x)=\begin{cases} k.x & \text{si } x=1,2,\dots,50 \\ k.(100-x) & \text{si } x=51,52,\dots,100 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Calcúlese "k", $P(X>50)$, $P(X<50)$, $P(X=50)$, $P(25\le X\le 75)$, $P(X=\text{impar})$.

2.2.7: Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Considere que $P(A)=0'7$ y que el experimento se repite 5 veces. Calcúlese la probabilidad de que el suceso "A" ocurra 3 veces. Determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el aleatorio número de veces que ocurre "A" si el experimento se repite 5 veces. Calcule $P(2<X\le 4)$ y $P(X\le 1)$. Calcule $P(X\ge 4/X>2)$ y $P(X\ge 2/X\le 4)$.

2.2.8: Un agente de seguros vende pólizas a 5 individuos, todos con 40 años de edad. Según las tablas actuariales vigentes, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años más es $0'6$. Calcúlese la probabilidad de que dentro de 30 años vivan los 5, vivan al menos 3, vivan 2, viva al menos 1, vivan no más de tres, vivan no más de 4.

2.2.9: Un juego consiste en lanzar un dado equilibrado que en sus caras tiene dos ases y cuatro reyes. El dado se lanza cuatro veces y si al menos se obtienen tres reyes se gana una muñeca Chichona. Calcúlese la probabilidad de ganar la muñeca. Si juegan tres personas con las mismas reglas, una después de otra, calcúlese la probabilidad de que ganen dos de ellas, la probabilidad de que ganen al menos dos de ellas y la probabilidad de que gane al menos una.

2.2.10: La probabilidad de que un individuo tenga nivel de renta bajo es $0'5$, la probabilidad de que tenga nivel de renta medio es $0'3$ y la probabilidad de que tenga nivel de renta alto es $0'2$. Si se seleccionan al azar 5 individuos, calcular la probabilidad de que los cinco tengan nivel de renta bajo. Probabilidad de que al menos cuatro no tengan nivel de renta bajo. Probabilidad de que a lo sumo tres no tengan nivel de renta alto. Probabilidad de que tres tengan nivel de renta medio. Probabilidad de que no más de tres tengan nivel de renta medio.

2.2.11: Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso de él, siendo $P(A)=0'8$. ¿Qué número mínimo de veces debe repetirse el experimento para que sea mayor que $0'99$ la probabildad de que "A" suceda al menos una vez?

2.2.12: Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si $P(A)=0'07$ y el experimento se repite hasta que ocurre "A" por primera vez, calcule la probabilidad de que haya que realizar el experimento 9 veces. Determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de veces que debe repetirse el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por 1ª vez. Calcule $P(4\le X<7)$, $P(X\ge 3)$, $P(X\ge 5/X>3)$ y $P(X\ge 3/X\le 4)$.

2.2.13: En un proceso de control de calidad de un cierto tipo de piezas se procede a la rotura sucesiva de piezas para comprobar su resistencia. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 0'1 y cada pieza cuesta 50 $. Si el proceso de control se detiene cuando se encuentra la primera pieza defectuosa.

1) Determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el aleatorio número de piezas que se rompen durante el proceso.
2) Determínese la función de probabilidad de la variable "Z" que expresa el aleatorio número de piezas no defectuosas que se rompen durante el proceso.
3) Determínese la probabilidad de que el coste del proceso sea superior a 200 $.

2.2.14: Sea E un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si $P(A) = 0'07$ y el experimento se repite hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez. Calcúlese la probabilidad de que haya que realizar el experimento 9 veces. Determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el aleatorio número de veces que se debe repetir el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez.

2.2.15: Compruébese que, para todo valor positivo del parámetro real λ, la siguiente función es la de probabilidad de una variable aleatoria "X":

$$f(x) = e^{-\lambda}.\lambda^x / x!, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

2.2.16: Se sabe que en un grupo de 200 estudiantes de bachiller la proporción de pardillos matemáticos es del 90 % y se seleccionan 18 estudiantes. Calcúlese la probabilidad de que entre los 18 seleccionados haya 16 pardillos matemáticos. Determínese la función de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de pardillos matemáticos entre los 18 seleccionados. Calcúlese la probabilidad de que el número de pardillos sea superior a 16.

2.2.17: De una baraja española de 40 cartas se seleccionan al azar 5 cartas. Determínese la función de probabilidad de la variable que expresa el aleatorio número de oros entre las 5 cartas, tanto si la selección se hace sin reposición como si se hace con reposición.

2.2.18: Estúdiese si son independientes dos sucesos "A" y "B" tales que $A \cup B = \Omega$, $P(A) = 0'7$ y $P(B) = 0'5$.

Sean I_A e I_B funciones indicadoras asociadas a esos sucesos:

$$I_A = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \; ; \; I_B = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Determínense la función de distribución de la variable $Z = I_A + I_B$.

2.2.19: Determínense los posibles valores de "p" y "c" para que la siguiente función pueda ser la de cuantía de una variable aleatoria "X".

$$f(x) = P(X = x) = c.(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, ...$$

Calcúlese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 2.

2.2.20: Sea "X" una v.a tal que $P(X=x)=1/2^x$, $x=1,2,3,\ldots..$

1) Pruébese que es una distribución de probabilidad.
2) Determínese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 2.
3) Determínese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 3 y $P(X>4)$.

2.2.21: Si una moneda se lanza "k" veces $(k\geq 2)$ y se ha obtenido al menos una cara, calcúlese la probabilidad de haber obtenido al menos una cruz.

2.2.22: Un artículo fabricado por una empresa está formado por dos piezas, y cada pieza puede presentar, independientemente de las demás, defecto tipo "A" o tipo "B", o no presentar defecto, con probabilidades respectivas "p", "q" y "r". Al final de cada mes se extrae una muestra y en función de los defectos se clasifican los productos en cuatro categorías: "excelente", si el producto no presenta ningún defecto; "bueno", si presenta sólo defecto "A"; "regular", si presenta sólo defecto "B", y "malo" si aparecen los dos defectos. Determínese la distribución de probabilidad de la variable "calidad del producto".

2.2.23: La función de cuantía de la variable que expresa el aleatorio número de piezas que produce una máquina es

$$P(X=0)=\frac{1}{3}\,;\; P(X=x)=\frac{1}{3.2^{x-1}}\,,\; x=1,2,3,\ldots\ldots$$

La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es $1/5$, y las piezas se fabrican de modo independiente. Calcúlese la probabilidad de que no se produzca ninguna pieza defectuosa. Calcúlese la probabilidad de producir dos o más piezas defectuosas sabiendo que se ha producido al menos una pieza defectuosa. Calcúlese la probabilidad de producir dos piezas sabiendo que se ha producido al menos una pieza defectuosa.

VARIABLES CONTINUAS

2.4.1: La función de densidad de probabilidad de la variable "X" que expresa la aleatoria renta de los funcionarios públicos es:

$$f(x)=\begin{cases} k.x^2 & \text{si } x\in[2;5] \\ 0 & \text{si } x\notin[2;5]\end{cases}$$

Determínese "k" y la función de distribución. Calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos $X\geq 3$, $X\geq 4$, $3\leq X\leq 4$ y $X\geq 3\,/\,X\leq 4$.

2.4.2: La función de densidad de probabilidad de la variable "X" que expresa el beneficio diario de una empresa es:

$$f(x)=\begin{cases} k.(4+x) & \text{si } x\in[-4;0] \\ k.(4-x) & \text{si } x\in(0;4] \\ 0 & \text{si } x\notin[-4;4]\end{cases}$$

Determínese "k" y la función de distribución. Calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos $X\geq 3$, $X\leq 2$, $-1\leq X\leq 2$ y $X\leq 3\,/\,X\geq -1$.

2.4.3: La función de densidad de la variable "X" que expresa el tiempo (en segundos) que dura una tarta a la puerta de un colegio es $f(x)=0'2.e^{-x/5}$, $x>0$. Determínese la función de distribución y la probabilidad de que la tarta dure más de 3 segundos. Si la tarta ya ha durado más de 6 segundos, calcúlese la probabilidad de que dure más de 9 segundos.

2.4.4: La resistencia de un tipo de vigas es una variable con densidad

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)/8 & \text{si } x\in[1;5]\\ 0 & \text{si } x\notin[1;5]\end{cases}$$

1) Calcúlese la probabilidad de que la resistencia de un viga sea superior a 4.
2) Si se seleccionan seis vigas al azar, calcúlese la probabilidad de que la resistencia de al menos tres de ellas sea superior a 4.
3) Una viga es defectuosa si tiene resistencia inferior a 2. Si en un control de calidad se inspeccionan vigas al azar hasta encontrar la primera defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 3 vigas.
4) Si se inspeccionan vigas al azar hasta encontrar la cuarta defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 10 vigas.

2.4.5: La función de densidad de probabilidad de la variable "X" que expresa el peso de un tipo de piezas es $f(x)=k$, $x\in[1;5]$. Calcúlese "k", la función de distribución y la probabilidad de que el peso de una pieza sea no superior a 4. Si se seleccionan ocho piezas al azar, calcúlese la probabilidad de haya alguna con peso no inferior a $2'5$. Una pieza se considera defectuosa si su peso es superior a $4'5$. Si se eligen piezas al azar hasta encontrar la primera defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 5 piezas. Si se inspeccionan piezas al azar hasta encontrar la sexta defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen menos de 10 piezas.

2.4.6: La función de densidad de la v.a "X" es $f(x)=k/(1+x^2)$, $x\in\Re$. Determínense "k", la función de distribución de "X" y $P\left(\frac{1}{3}<X^2<1\right)$.

2.4.7: La función de densidad de probabilidad de la v.a "X" es

$$f(x)=\begin{cases}k.x.e^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

Determínense "k", la función de distribución de "X" y $P(2<X<3)$.

2.4.8: La función de densidad de probabilidad de la v.a "X" es

$$f(x)=\begin{cases}k.x^2.(1-x) & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Determínense "k", la función de distribución de "X" y $P(X>0'7)$.

2.4.9: Sea $F:\Re \mapsto \Re$ tal que $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2.x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\le 0\end{cases}$

1) Estudie si "F" es una función de distribución y analice a qué tipo de variable aleatoria "X" corresponde. Determínese la densidad correspondiente a "F".
2) Calcúlense $P(X>2)$ y $P(-3<X<4)$.

2.4.10: Sea la función de distribución $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0 \\ (4+x)/8 & \text{si } 0\le x<3 \\ 1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

Estúdiese a qué tipo de variable corresponde.

2.4.11: Sea "X" la v.a con densidad $f(x)=\frac{1}{a}.\left(1-\frac{|x|}{a}\right)$, $-a<x<a,\ a>0$

Determínese su función de distribución, calculando $P(X>0)$ y $P(X<a/2)$.

2.4.12: Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases}x/25 & \text{si } 0<x\le 5 \\ (10-x)/25 & \text{si } 5<x\le 10 \\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Determínese su función de distribución. Calcúlense $P(X>5)$ y $P(5<X\le 7)$.

2.4.13: Una empresa cervecera ha estimado que la demanda diaria de sus clientes está expresada por la variable "X". ¿Qué cantidad deberá tener disponible cada día para satisfacer la demanda con probabilidad 0'9 si la densidad de "X" es $f(x)=x/2,\ 0\le x\le 2$

2.4.14: Sea "X" una variable aleatoria con densidad $f(x)=b.e^{-a.x}$, $x>0$.

1) Determínese la relación entre "a" y "b".
2) Si $a=3$, calcúlense $P(X>3)$, $P(1<X<2)$ y $P(X<1)$.
3) Si $a=3$, determínese "c" de modo que $P(X>c)=0'9$.

2.4.15: Sea la función $f(x)=e^{-x}/(1+e^{-x})^2$. Demuéstrese que cumple todas las condiciones para ser una función de densidad de probabilidad. Calcúlese su función de distribución asociada.

2.4.16: Sea la función $F(x)=1-(1/x)$ si $x>1$ (0 en el resto). ¿Puede ser "F" la función de distribución de una variable aleatoria?

MOMENTOS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

2.7.1: La función de probabilidad de la variable "X" que expresa el ingreso (en miles de dólares) diario de una empresa es

x	-1	2	4
$f(x)=P(X=x)$	0'3	0'5	0'2

Calcúlense los tres primeros momentos de "X" respecto al origen. Si el beneficio diario de la empresa es $Y=-0'5+(X/4)$, calcúlese el beneficio medio diario.

2.7.2: La función de densidad de probabilidad de la variable "X" que expresa la renta de los ciudadanos de un país es $f(x)=2.x,\ x\in[0;1]$. Calcúlense los tres primeros momentos de "X" respecto al origen. Si el ahorro es $Y=X/5$, calcule el ahorro medio y la probabilidad de que el ahorro de un ciudadano supere el ahorro medio.

2.7.3: Calcúlese la varianza de las variables aleatorias "X" y "Z" cuyas respectivas funciones de probabilidad son

x	1	2	3	4	5
$f(x)=P(X=x)$	0'1	0'2	0'4	0'2	0'1

z	1	2	3	4	5
$f(z)=P(Z=z)$	0'2	0'2	0'2	0'2	0'2

Calcúlese la varianza de las variables aleatorias $U=3-4.X$ y $W=5+6.Z$

2.7.4: Calcúlese la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es $f(x)=6.x.(1-x),\ x\in[0;1]$. Calcúlese la varianza de las variables aleatorias $U=-7-9.X$ y $W=5-3.X$

2.7.5: Calcúlese la varianza de la v.a "X" cuya función de densidad es

$$f(x)=\begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x\in[a;b] \\ 0 & \text{si } x\notin[a;b] \end{cases}$$

2.7.6: Un individuo va tres veces al día a una oficina ubicada en una zona en que no se puede aparcar. Puede elegir entre las siguientes normas de conducta:

a) Aparcar en sitio prohibido, en cuyo caso le pueden multar con 50 $.
b) Llevar el coche a un aparcamiento que le cuesta 35 $ cada vez.

Si la probabilidad de ser multado es 0'5, ¿cuál es la conducta con menor coste esperado? Determínese la cuantía de la multa para que el coste esperado sea el mismo tanto si se aparca en sitio prohibido como si se usa el aparcamiento.

2.7.7: Sea "X" una v.a cuya función de distribución es

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x/4 & \text{si } 0\le x<1 \\ (4+x^2)/8 & \text{si } 1\le x<2 \\ 1 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Represéntese $F(x)$ y coméntese. Determínese la media de "X".

2.7.8: Una v.a "X" está definida en los intervalos $(0;1)$ y $(3;4)$ así como en el punto $x = 2$, siendo $P(0 < X \le 1) = 0'2$ y $P(X = 2) = 0'1$. En el intervalo $(0;1)$ la densidad es constante, y en el intervalo $(3;4)$ es una recta de pendiente positiva. Determine la función de distribución de "X" si $E(X) = 1157/420$.

2.7.9: Siendo los costes fijos igual a la unidad, la función de distribución de la variavble aleatoria "X" que expresa el coste total de una empresa es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine la función de densidad de los costes variables. Determine el coste variable esperado. Determine la probabilidad de que el coste variable sea superior a 1'3. Determine la probabilidad de que el coste variable esté entre 0'3 y 0'7.

2.7.10: Sea "X" una v.a con densidad $f(x) = \begin{cases} 0'4 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0'05 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ k & \text{si } 8 \le x \le 12 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Determínese la función de distribución. Calcúlese $P(3 < X \le 10)$ utilizando la función de densidad. Determínese $E(X^{2'5})$.

2.7.11: Calcúlense $E(X)$ y $V(X)$ si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-x^2/2}, \quad x \in \Re$$

2.7.12: Calcúlense $E(X)$ y $V(X)$ si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{1}{b.\sqrt{2.\pi}}.e^{-(x-a)^2/2.b^2}, \quad x \in \Re,\ b > 0$$

2.7.13: Calcúlense $E(X)$ y $V(X)$ si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{a^n}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-a.x}, \quad x > 0,\ a > 0,\ n > 0$$

2.7.14: Calcúlense $E(X)$ y $V(X)$ si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p;q)}.x^{p-1}.(1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1,\ p > 0,\ q > 0$$

2.7.15: La función de densidad de la variable "X que expresa el gasto mensual (en millones de euros) de una empresa es

$$f(x) = k.(x - x^2), \quad 0 < x < 1$$

1) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea superior al gasto medio.
2) Calcúlese la varianza del gasto.
3) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea de 400000 euros.
4) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea superior a 700000 euros.
5) Calcúlense la media y la varianza de $Z = 9 - 3.X$

2.7.16: La función de densidad de la variable "X" que expresa la demanda mensual de ilusiones es $f(x) = k.x, 0 \le x \le 4$. Determínense el cuantil de orden 0'9, el primer cuartil, la mediana y la moda.

2.7.17: La función de cuantía de la variable "X" es

x	-1	2	4	7	11	15	20
$f(x) = P(X = x)$	$0'05$	$0'2$	$0'2$	$0'15$	$0'1$	$0'1$	$0'2$

Determínense el cuantil de orden 0'9, el primer cuartil, la mediana y la moda.

2.7.18: La función de densidad de probabilidad de la v.a "X" que expresa la renta de los ciudadanos (en decenas de miles de dólares) es

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in [1;2] \\ 3-x & \text{si } x \in [2;3] \end{cases}$$

Calcúlese la probabilidad de que la renta no sea inferior a 25000 \$. Determínese la renta que no superan el 35 % de los ciudadanos, y la que no superan el 65 %.

2.7.19: La función de densidad de la demanda "X" de vino es

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } x \in [0;4] \\ (12-x)/64 & \text{si } x \in (4;12] \end{cases}$$

El beneficio "U" depende de la demanda: $U = \begin{cases} -5 & \text{si } X < 2 \\ 5 & \text{si } 2 \le X < 4 \\ 10 & \text{si } 4 \le X < 8 \\ 15 & \text{si } 8 \le X \le 12 \end{cases}$

Determine la demanda esperada, el beneficio esperado y la varianza del beneficio.

2.7.20: El momento factorial de una variable aleatoria "X" se denota $m(k)$, siendo $m(k) = E\big(X.(X-1).(X-2).....(X-k+1)\big)$. Determine la varianza de "X" en función de los momentos factoriales. Si $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ y $m(3) = 1$, determínese el coeficiente de asimetría de la variable "X".

2.7.21: Determínese el momento de orden 4 de la variable aleatoria "X" respecto de su media si $E(X^k) = 2.k$, $k = 1,2,3,4$.

2.7.22: Determínense $E(X)$ y $V(X)$ si la función de cuantía de "X" es

$$P(X = x) = p.q^{x-1};\ p > 0, q > 0, p+q = 1, x = 1,2,3,....$$

2.7.23: La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria "X" que sólo toma valores en el intervalo $[0;1]$ es proporcional a $m.x + n$; determínense "m" y "n" sabiendo que $E(X) = 4/7$ y $E(X^2) = 17/42$.

2.7.24: Siendo "X" y "Z" variables tales que $Z = a + b.X$, demuéstrese que tienen los mismos coeficientes de asimetría y de curtosis.

ACOTACIÓN DE TCHEBYCHEF

2.10.1: Si de la variable aleatoria "X" que expresa el número mensual de bostezos de un bípedo implume se sabe que tiene media 80 y varianza 25, determínese la probabilidad de los siguientes sucesos:

01) $76 < X < 84$	02) $X \notin (77;83)$	03) $65 < X < 95$
04) $X \notin (70;90)$	05) $55 < X < 98$	06) $70 < X < 95$
07) $X < 97$	08) $X > 90$	09) $X > 65$
10) $X < 69$	11) $66 \le X \le 94$	12) $57 \le X \le 99$
13) $65 \le X \le 99$	14) $\lvert X - 80 \rvert \ge 20$	15) $X \notin (50;99)$
16) $66 < X \le 94$	17) $60 < X < 70$	18) $86 < X < 95$

2.10.2: El número de clientes que entran al día en un bar tiene media 20 y varianza 4. Determine una cota inferior para la probabilidad de que:

1) El número de clientes esté entre 16 y 24, ambos exclusive.
2) El número de clientes esté entre 17 y 24, ambos inclusive.
3) Entren menos de 25 clientes.

2.10.3: Sea "X" una variable aleatoria con media 0 y varianza σ^2. Sea $Y = a.X$, siendo $a > 0$. Pruébese que $P(\lvert Y \rvert > h) \le a^2.\sigma^2/h^2$. Imponiendo las condiciones que considere oportunas, demuéstrese que dadas las variables "X" y g(X), es $P(g(X) < k) \ge 1 - E(g(X))$. Sean μ y σ^2 las respectivas media y varianza de la variable "X" cuya densidad es $f(x) = x^2/243,\ x \in [0;9]$. Determínese $P(\mu - 2.\sigma \le X \le \mu + 2.\sigma)$ y compárese el resultado con la cota de Tchebychef.

2.10.4: En una Universidad donde sólo hay estudiantes de Derecho y de Economía, se sabe que el 60 % estudian Economía. Se sabe que el 25 % de los estudiantes de Derecho terminan la Carrera. Sabiendo que la probabilidad de terminar una Carrera en esa Universaidad es 0'19. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha terminado sea de Economía? Si el número medio de estudiantes que acuden a un examen es 300, con varianza 100, ¿cuál es el número de sillas necesario para poder asegurar que todos los asistentes podrán sentarse con una probabilidad no menor de 0'75?

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

2.11.1: Si en una moneda la probabilidad de obtener cara es "p", determínese la distribución de probabilidad de la variable "X" que expresa el número de veces que debe lanzarse una moneda hasta obtener una cara. Utilícese la función generatriz de momentos para calcular la media y la varianza de "X". Determínese la distribución de probabilidad de la variable "Z" que expresa el número cruces que se obtienen hasta obtener una cara. Calcúlense la media y la varianza de "Z". Determínese la función generatriz de momentos de $U = a + b.X$.

2.11.2: Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es $f(x) = x/2,\ 0 \leq x \leq 2$. Determínese el k-ésimo momento respecto al origen. A partir de la función generatriz de momentos, determínese el k-ésimo momento respecto al origen.

2.11.3: Sea "X" la v.a cuya densidad es $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

1) Determínese el k-ésimo momento respecto al origen.
2) Determínese $E(X^k)$ a partir de la función generatriz de momentos.

2.11.4: Sea "X" la v.a tal que

$$P(X = 0) = 1/3 \text{ y } P(X = 1) = 2/3$$

Determínese $E(X^k)$ a partir de la función generatriz de momentos.

2.11.5: Determínese la función generatriz de momentos de la variable "X" cuya función de densidad es $f(x) = 2.\cos 2.x,\ x \in [0;\pi/4]$.

2.11.6: Sea "X" la variable aleatoria cuya densidad es $f(x) = \frac{1}{2}.e^{-|x|},\ x \in \Re$. Determínense la función generatriz de momentos, la media y la varianza.

2.11.7: Sea la v.a con densidad $f(x) = \frac{\theta}{2}.e^{-\theta.|x-k|},\ x \in \Re,\ \theta > 0$. Calcúlense su función generatriz de momentos, su media y el coeficiente de asimetría.

2.11.8: Sea "X" la variable aleatoria cuya densidad es $f(x) = e^{-x},\ x > 0$. Determínese la función generatriz de momentos de $Z = X - E(X)$.

2.11.9: Calcúlese la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función generatriz de momentos es $\Phi_X(t) = (0'8 + 0'2.e^t)^4$. Determínese la función generatriz de momentos de $Z = a + b.X$.

2.11.10: Determínese la función generatriz de momentos de la variable "X" que tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = 0) = 0'2\ ;\ P(X = 1) = 0'3\ ;\ f(x) = 0'1,\ x \in [2;7]$$

2.11.11: Una empresa fabrica un producto que comercializa sólo en España. La función de densidad de la variable "X" que expresa la aleatoria demanda mensual (en miles de unidades) es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

¿Cuál ha de ser la cantidad producida para que se satisfaga la demanda con probabilidad 0'9? Si un mes la demanda ha sido superior a 800 unidades, calcúlese la probabilidad de haya sido superior a 1500 unidades. Determínese la función generatriz de momentos de "X". Determínese la probabilidad de que la demanda difiera de su media es más de 200 unidades; compárese el resultado con el obtenido mediante la acotación de Tchebychef. Determínese el valor esperado de la demanda total si la empresa decide exportar y la función generatriz de momentos de la demanda en el extranjero (también mensual y en miles de unidades) es

$$\Phi(t) = \frac{1}{6}.e^{t} + \frac{1}{3}.e^{2.t} + \frac{1}{2}.e^{3.t}$$

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

2.12.1: Siendo $0 < p < 1$, sea "X" la variable cuya función de cuantía es

x	0	1
P(X = x)	1 − p	p

Determínese la función característica de "X", empleándola para calcular la media y la varianza de "X". Determínese la función característica de $U = a + b.X$.

2.12.2: Siendo $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$, sea "X" la v.a cuya función de cuantía es

$$P(X = x) = \binom{n}{x}.p^{x}.q^{n-x} \quad ; x = 0,1, \ldots ,n$$

Determínese la función característica de "X", empleándola para calcular $E(X)$.

2.12.3: Sea $\theta > 0$ y "X" tal que $P(X = x) = \dfrac{e^{-\theta}.\theta^{x}}{x!}$; $x = 0,1,2, \ldots$

Determínese la función característica de "X", empleándola para calcular $E(X)$.

2.12.4: Siendo $f(x)$ la densidad de "X", determínese la función característica en los siguientes casos:

$$1)\ f(x) = \frac{1}{b - a},\ a < x < b$$

$$2)\ f(x) = \frac{a^{k}}{\Gamma(k)}.x^{k-1}.e^{-a.x},\ x > 0, k > 0$$

2.12.5: Siendo $f(x)$ la densidad de "X", determínese la función característica:

$$1)\ f(x) = x/2\ \ 0 \le x \le 2\ ;\ 2)\ f(x) = e^{-x},\ x > 0$$

2.12.6: Determínese la función característica de la variable "X" tal que

$$P(X = 0) = 0'2\ ;\ P(X = 1) = 0'3\ ;\ f(x) = 0'1,\ x \in [2;7]$$

CAMBIOS DE VARIABLE

2.13.1: Determínese la función de probabilidad de $Z=3+2.X$ si la función de probabilidad de "X" es $P(X=x)=e^{-\lambda}.\lambda^x/x!,\ x=0,1,2,.....$

2.13.2: Determínese la función de probabilidad de la variable $Z=X^2$ si la función de probabilidad de la variable "X" es

x	−2	−1	0	1	2
P(X = x)	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

2.13.3: Determine la función de cuantía de la variable $Z=\text{sen}(\pi.X/2)$ y su esperanza si la función de cuantía de la variable "X" es

$$P(X=x)=2^{-(x+1)},\ x=0,1,2,......$$

2.13.4: Si la densidad de la variable aleatoria "X" es $f(x)=1,\ x\in(0;1)$, determínese la densidad de $Z=e^X$ y la de $U=\text{Ln}\,X$.

2.13.5: Si la densidad de la variable "X" es $f(x)=2-2.x,\ x\in(0;1)$, determínese la densidad de las variables $Z=1-X$ y $U=1/X$.

2.13.6: Determínese la función de densidad de la variable $Z=X^2$ si la variable "X" tiene distribución N(0;1); es decir, si la densidad de "X" es

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-x^2/2},\ x\in\Re$$

2.13.7: Determínese la función de distribución de la variable $U=(3.X-1)^2$ si la función de densidad de la variable "X" es $f(x)=2.x,\ x\in[0;1]$.

2.13.8: Determine la función de densidad de la variable aleatoria $Z=|X|$ si la función de densidad de la variable "X" es $f(x)=1/3,\ x\in(-1;:2)$.

2.13.9: Supuesta conocida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "X", determine la distribución de probabilidad de "Z":

$$1)\ Z=\begin{cases}-1 & \text{si } X\le 0\\ 1 & \text{si } X>0\end{cases};\ 2)\ Z=\begin{cases}X & \text{si } X\ge 3\\ 0 & \text{si } X<3\end{cases};\ 3)\ Z=\begin{cases}X & \text{si } X\ge -1\\ 0 & \text{si } X<-10\end{cases}$$

2.13.10: Determínese la función de densidad de la variable $Z=e^{-X}$ si la función de densidad de "X" es

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 3.x^2/14 & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$$

2.13.11: La función de cuantía de la variable "X" que expresa el aleatorio número de obreros necesarios para concluir un cierto trabajo es

x	10	11	12	13	14
P(X = x)	0'2	0'3	0'3	0'1	0'1

El beneficio obtenido es $Z=1000.(12-X)$. Determínese la distribución de probabilidad de "Z". Determínense la media y la varianza de "X" y de "Z".

2.13.12: La concentración de un reactivo empleado en un proceso químico es una v.a "X" con densidad es $f(x) = 6.x.(1-x)$, $0 < x < 1$. El beneficio asociado al proceso es $Z = 1 + 3.X$. Determínese $E(Z)$ y la densidad de "Z".

2.13.13: La proporción de alcohol en un cierto compuesto es una variable aleatoria "X" cuya función de densidad es $f(x) = 20.x^3.(1-x)$, $0 < x < 1$. El precio "Z" de venta (por litro) y la demanda "Q" (expresada en litros) son respectivamente $Z = 500 + 1000.X$ y $Q = 5000/X$. Determínese la densidad de la demanda. Determínese el valor esperado de la venta total del compuesto.

2.13.14: Determínese la función de densidad de $Z = X^2$ si la función de densidad de "X" es $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

2.13.15: Sea "X" una v.a cuya función de densidad es $f(x) = 0'5$, $x \in [-1;1]$. Determínese la función de densidad de $Z = 3.X^2 - 2$ y la de $U = 1 + X^3$.

2.13.16: Sea "X" una v.a con densidad $f(x) = x^2/81$, $x \in [-3;6]$. Determínese la función de densidad de $U = X^2$.

2.13.17: Si la densidad de "X" es $f(x) = 2 - 2.x$, $x \in (0;1)$, determínese la densidad $Z = 2.X + 3$ y la de $U = +\sqrt{X}$.

VARIABLE TRUNCADA

2.14.1: Siendo "X" una v.a continua, determínense las funciones de distribución y de densidad de la variable truncada de "X" en el intervalo $(a;b)$.

2.14.2: La renta de los ciudadanos está expresada por la variable "X" cuya función de densidad es $f(x) = x/8$, $x \in [0;4]$. Una empresa considera que sólo son clientes potenciales los de renta comprendida entre 1 y 3. Determínese la media y la varianza de la renta de los clientes potenciales. Calcúlese la probabilidad de que un cliente potencial tenga renta superior a 2.