

Tema 3:

VARIABLES BIDIMENSIONALES

BIDIMENSIONALES DISCRETAS

3.9.1: En un cierto tipo de familias, las variables "X" e "Y" expresan respectivamente el aleatorio número cuartos de baño en su vivienda y el aleatorio número de hijos. **Radiografiese** el fenómeno si la función de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional discreta (X;Y) es

$$f(x;y) = k \cdot x \cdot y ; x = 1,2 ; y = 1,2,3.$$

3.9.2: La función de probabilidad de la variable aleatoria (X;Y) es:

$$f(x;y) = k \cdot x \cdot y ; x = 1,2,3 ; y = 1,2,3$$

Determinése "k". Determinése $P(1 \leq X \leq 2; Y \leq 2)$ y $F(2;4)$, siendo "F" la función de distribución de la variable (X;Y). Determinése las distribuciones marginales y las condicionadas. ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.3: La función de probabilidad de la variable aleatoria (X;Y) es

Y / X	-1	0	1	2
0	k	3.k	k	2.k
1	2.k	2.k	3.k	k
2	k	k	k	2.k

Determinése "k". Calcule $P(0 \leq X < 2; 0 < Y < 2)$, $P(0 \leq X < 2; Y = 0)$, $P(X \leq 0)$ y $F(1;5;1)$, siendo "F" la función de distribución de la variable (X;Y).

- 1) Determine las distribuciones marginales y las condicionadas.
- 2) Determine la varianza de "X", la de "Y" y la de $X / Y = 2$.
- 3) Determine el coeficiente de correlación entre "X" e "Y".
- 4) Determine el coeficiente de correlación entre "Z" y "T", siendo

$$Z = 2 \cdot X - 3 \cdot Y \text{ y } T = 4 \cdot X + 5 \cdot Y$$

3.9.4: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes cuyas respectivas funciones de probabilidad son

$\frac{x}{f_1(x) = P(X = x)}$		0	1	2
		0'16	0'48	0'36
$\frac{y}{f_2(y) = P(Y = x)}$		3	4	5
		1/3	1/3	1/3

- 1) Determinése la función de distribución de $Z = X + Y$.
- 2) Calcúlense $E(Z)$ y $V(Z)$.
- 3) Determinése la función de probabilidad de la variable (X;Z).

3.9.5: Sea "Y" una variable aleatoria que puede tomar los valores 0 y -1, y "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

$$\frac{x}{f(x) = P(X = x)} \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0'3 & 0'3 & 0'4 \end{array} \right.$$

Siendo $Z = X - Y$, se sabe que:

$$P(Z = 2 / X = 1) = P(Z = 2 / X = 2) = 2/3 ; P(X = 3 / Y = 0) = 1/4$$

Determine la función de probabilidad de la variable $(X;Z)$. Determine la función de probabilidad de la variable $(X;Y)$. Determine la media y la varianza de la variable $Z / X = 1$.

3.9.6: Sea $(X;Z)$ una v.a bidimensional cuya función de probabilidad es:

Z / X	0	1
0	a	b
1	c	d

Demuéstrese que si "X" y "Z" son incorreladas son independientes.

3.9.7: Sean "X" y "Z" las variables que expresan respectivamente el aleatorio número de bolas rojas y bolas blancas que se obtienen al seleccionar dos bolas de una urna que contiene 2 bolas rojas, 2 blancas y 2 negras. Determine la distribución de probabilidad de la variable $(X;Z)$.

3.9.8: Se extraen 7 cartas de una baraja española de 40 cartas. Sean "X", "Y", "Z" y "T" las variables que expresan respectivamente el aleatorio número espadas, bastos, figuras y cartas inferiores a 5 entre las siete cartas seleccionadas. Determine la distribución de probabilidad de la variable $(X;Y)$. Determine la distribución de probabilidad de la variable $(Z;T)$.

3.9.9: Se seleccionan al azar 13 individuos de un colectivo formado por 19 elefantes, 2 pulgas, 40 helicópteros, 32 ladrillos y 7 ferrines. Determine la distribución de probabilidad de la variable que expresa el aleatorio número de elefantes, ladrillos y ferrines entre los 13 individuos seleccionados.

3.9.10: La función de probabilidad de la variable bidimensional $(X;Z)$ es $f(x;z) = k \cdot (x + z)$, $x = 1,2,3,4$, $z = 1,2,3$. Calcule "k", las distribuciones marginales y las distribuciones condicionadas. ¿Son independientes "X" y "Z"?

3.9.11: La variable "X" toma los valores -1, 0 y 1 de modo equiprobable, y $Z = X^2$. ¿Son independientes "X" y "Z"? Calcúlese el coeficiente de correlación.

3.9.12: La variable "X" toma los valores 0 y 1 de modo equiprobable, y la variable "Y" toma los valores 0 y 2 con probabilidades respectivas $1/3$ y $2/3$. Sabiendo que $P(X = 0; Y = 0) = a$, determine la distribución de probabilidad de la variable bidimensional $(X;Y)$ en función de los valores de "a". ¿Entre qué valores puede variar "a"?

3.9.13: Las variables independientes "X" e "Y" toman los valores -1 y 1 de modo equiprobable. Estúdiese la independencia de "X" y "Z", siendo $Z = X \cdot Y$.

3.9.14: De las variables aleatorias discretas "X" e "Y" se sabe que

$$P(X = 1) = 0'5 ; P(Y = -1) = 0'4$$

$$P(X = 3; Y = 1) = 0'03 ; P(X \leq 2; Y = -1) = 0'21$$

y	-1	0	1
$P(Y = y / X \leq 2)$	0'28	0'40	0'32

Si la variable "X" sólo puede tomar los valores 1, 2 y 3, determina las distribuciones de probabilidad de "X" e "Y". Determinése la función de distribución de la variable $Y / X > 2$. Determinése $P(X \leq 2; Y > 0)$ y $P(X \leq 2; Y \geq 0)$.

3.9.15: Sean "X", "Y" y "Z" tres variables aleatorias, siendo independientes "X" y "Z". De la función de probabilidad de la variable $(X; Y)$ se sabe que:

Y/X	1	3	5	7
2			0'1	
4	0'1			0'06
6		0'025	0'05	0'1
	0'3	0'1	0'3	0'3

1) Calcúlese $P(X = 1; Y = 2)$ sabiendo que:

$$P((Y = 2) \cup (Z = 0) / X = 1) = 0'32 ; P(Z = 0) = 0'15$$

$$P(Y = 2 / (X = 1; Z = 0)) = 0'2$$

2) Sabiendo que $P(X + Y = 5) = 0'15$, determinése la distribución de "Y".

3.9.16: Siendo "Y" una v.a que toma valores 0 y 1, sea "X" una v.a tal que:

x	0	1	2
$P(X = x)$	0'3	0'3	0'4

Si $Z = X - Y$, determinése la distribución de probabilidad de "Z" sabiendo que:

$$P(Z = 0 / X = 0) = P(Z = 0 / X = 1) = 2/3$$

$$P(X = 2; Y = 1) = 0'25$$

3.9.17: Considérese que se lanzan dos dados una vez y que la variable "X" expresa el resultado obtenido en el primer dado y la variable "Y" expresa el máximo de los dos resultados. Determinése la distribución de probabilidad de $(X; Y)$ y el valor esperado de "Y".

3.9.18: La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X; Z)$ es

$$f(x; z) = \frac{k}{2^{x+z}} ; x = 0, 1, 2, \dots ; z = 0, 1, 2, \dots$$

Determinése "k". Determinése las distribuciones marginales y las condicionadas.

BIDIMENSIONALES CONTINUAS

3.9.19: Considérese que las variables "X" e "Y" expresan respectivamente la aleatoria renta y el aleatorio ahorro de los ciudadanos. **Radiografíese** el fenómeno si la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional continua (X;Y) es $f(x;y) = k \cdot x \cdot y$; $y \leq x$, $x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

3.9.20: La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria (X;Y) es $f(x;y) = k \cdot x$; $y \leq x \leq 1$, $x + y \geq 1$. Determínese $P(X \geq 3/4)$.

3.9.21: Siendo "X" e "Y" las variables que respectivamente expresan el aleatorio consumo y el aleatorio ahorro de las familias, la función de densidad de la variable (X;Y) es $f(x;y) = e^{-(x+y)}$, $x > 0$, $y > 0$. Determínese la probabilidad de que en una familia el consumo y el ahorro sean inferiores a 1. Elegidas tres familias al azar, determínese la probabilidad de que en al menos una de ellas el consumo y el ahorro sean inferiores a 1.

3.9.22: La función de densidad de probabilidad de la variable (X;Y) es:

$$f(x;y) = k \cdot (x^2 + y^2) ; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

Determínese "k". Calcúlense $P(X \geq Y)$, $P(X^2 + Y^2 \leq 2)$ y $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

3.9.23: La función de densidad de probabilidad de la variable (X;Y) es:

$$f(x;y) = k \cdot x \cdot y ; 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1$$

Determínense las distribuciones marginales. ¿Son independientes X" e "Y"?

3.9.24: La función de distribución de la variable (X;Y) es:

$$F(x;y) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+x+y} ; x \geq 0, y \geq 0$$

Calcúlense $P(X \leq 2; Y \leq 1)$ y las funciones de distribución marginales. ¿Son independientes "X" e "Y"? Calcúlense $E(X)$ y $E(Y)$.

3.9.25: Siendo "X" e "Y" las variables que respectivamente expresan la aleatoria producción de escabondrios y de ferritos de una empresa, la función de densidad de la variable (X;Y) es $f(x;y) = 2 \cdot x \cdot y$, $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq x/2$. ¿Son independientes "X" e "Y"? Calcúlese $P(X < 1)$. Si la producción de escabondrios es $1/2$, determínese la probabilidad de que la producción de ferritos sea inferior a $0'2$. Si la producción de escabondrios es 1, ¿cuál es la producción esperada de ferritos? Calcúlese la probabilidad de que la producción total sea inferior a 1.

3.9.26: La función de densidad de probabilidad de la variable (X;Y) es:

$$f(x;y) = \begin{cases} k_1 \cdot x \cdot y & \text{si } 0 < x \leq 1, 1 < y \leq 2 \\ k_2 \cdot x & \text{si } 0 < x \leq 1, 2 < y \leq 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Además, se sabe que $F(2;2) = 3/4$. Determínense k_1 y k_2 . Determínense la función de distribución de "Y", $E(Y)$ y $V(Y)$. ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.27: Una empresa produce dos tipos de compuestos químicos, y en un estudio se ha llegado a la conclusión de que las cantidades producidas (en toneladas) en un día de cada compuesto son variables aleatorias cuya densidad es:

$$f(x; y) = \begin{cases} (x + 2 \cdot y)/8 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 < 2 \cdot y \leq x + 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde "X" expresa el número de toneladas producidas en un día del primer compuesto, e "Y" lo mismo para el segundo compuesto.

- 1) Determínese la producción diaria media del segundo compuesto.
- 2) Halle la probabilidad de no producir más de 1'5 toneladas de cada compuesto.
- 3) Si por problemas técnicos no se pudiese producir más de una tonelada al día del segundo compuesto, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad producida del primer compuesto sea superior a la del segundo compuesto?

3.9.28: Sea (X; Y) una v.a bidimensional cuya función densidad es

$$f(x; y) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{si } 0 < x \leq 1/2, 0 < y < 1 \\ (4 - 2 \cdot x)/3 & \text{si } 1/2 < x \leq 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- 1) Calcúlese el valor de la función de distribución en el punto (1; 1/2).
- 2) Determínese la función de densidad de "X" y su esperanza.
- 3) Calcúlese la mediana de "X".
- 4) Calcúlese la covarianza entre "X" e "Y".
- 5) Calcúlese la distribución de $Y / X = x$. ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.29: La función de densidad de probabilidad de la variable (X; Y) es:

$$f(x; y) = 3 \cdot (x^2 + y^2)/8 ; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

¿Son independientes "X" e "Y"? Calcúlese $V(X + Y)$ y $P(X > 0'5 / Y \leq 0)$.

3.9.30: Sea "X" el tiempo total (en horas) que un camión permanece en una estación de descarga e "Y" la parte de ese tiempo que permanece esperando en la cola antes de empezar a ser descargado. La función de densidad de (X; Y) es:

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot e^{-x/2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Determínense las densidades marginales de "X" e "Y". Demuéstrese que la covarianza entre "X" e "Y" es 4. Si "Z" es el tiempo (en horas) que dura la operación de descarga en sí, ¿qué relación mantienen "Z", "X" e "Y"? Determínense la media y la varianza de "Z".

3.9.31: Determínese la función de distribución de la variable (X; Y) cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x; y) = k \cdot (6 - x - y) ; x \in [0; 2], y \in [2; 4]$$

3.9.32: Sea $(X; Y)$ una v.a bidimensional cuya función densidad es:

$$f(x; y) = \begin{cases} k & \text{si } |x| < 2, y, 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Determinense las funciones de densidad de las distribuciones marginales, la función de distribución de "Y" y $P(X < 1; Y \leq 2)$.

3.9.33: Sean "X" e "Y" tales que $E(X) = 3, E(Y) = 1, V(X) = 4$ y $V(Y) = 9$. Siendo $Z = 5.X - 4.Y + 15$, calcúlense $E(Z)$ y $V(Z)$ en los siguientes casos:

- 1) Las variables "X" e "Y" son independientes.
- 2) Las variables "X" e "Y" son incorreladas.
- 3) El coeficiente de correlación entre "X" e "Y" es 0'25.

3.9.34: Sean "X", "Y" y "Z" variables aleatorias tales que:

$$\begin{aligned} V(X) &= 1 ; V(Y) = 4 ; V(Z) = 8 \\ \text{COV}(X; Y) &= 1 ; \text{COV}(X; Z) = -1 ; \text{COV}(Y; Z) = 2 \end{aligned}$$

Calcúlense $V(X + Y + Z)$ y $V(3.X - Y - 2.Z + 1)$.

3.9.35: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes, con varianzas finitas y ambas con la misma media.

- 1) Demuéstrese que $E((X - Y)^2) = V(X) + V(Y)$.
- 2) Calcúlense $V(X - Y)$ y $V(2.X - 3.Y + 1)$ si $V(X) = V(Y) = 3$.

3.9.36: Sean "X" e "Y" variables aleatorias.

- 1) Determinense una condición para que las variables $Z = X + Y$ y $T = X - Y$ sean incorreladas.
- 2) Demuéstrese que si $V(X) = V(Y)$, es $\rho(X; Z) = \sqrt{(1 + \rho(X; Y))/2}$.

3.9.37: Siendo "X" e "Y" variables aleatorias y "a", "b", "c" y "d" constantes, sean las variables $Z = b + a.X$ y $T = d + c.Y$.

- 1) Exprese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T" en función del coeficiente de correlación entre "X" e "Y".
- 2) Compruébese que $\text{COV}(U; W) = \rho(X; Y)$, siendo "U" y "W" las respectivas variables tipificadas de "X" e "Y".

3.9.38: Sean "X" e "Y" variables con igual media y varianza. Si "a" y "b" son constante y $Z = a.X + b.Y$ y $T = a.X - b.Y$. Exprese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T" en función del coeficiente de correlación entre "X" e "Y".

3.9.39: Siendo "X" e "Y" variables aleatorias independientes, demuéstrese que $V(X.Y) = V(X).V(Y) + V(X).(E(Y))^2 + V(Y).(E(X))^2$.

3.9.40: Sea $F: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ una función de distribución.

- 1) ¿Es $G(x; y) = F(x) + F(y)$ una función de distribución?
- 2) ¿Es $G(x; y) = \max.\{F(x), F(y)\}$ una función de distribución?
- 3) ¿Es $G(x; y) = F(x).F(y)$ una función de distribución?

REGRESIÓN

3.10.1: La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = k$, $0 < y \leq x < 1$.

Determinense las distribuciones marginales. Determinense las curvas de regresión $E(X / Y = y)$ y $E(Y / X = x)$.

3.10.2: La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = k$, $|y| < x$, $0 < x < 1$.

Determina las marginales y comprueba que "X" e "Y" son incorreladas sin ser independientes. Determina las curvas de regresión $E(X / Y = y)$ y $E(Y / X = x)$.
Calcula $P(0 < Y < 0'3 / X = 0'5)$ y $P(X > 0'7 / Y = 0'2)$.

3.10.3: La densidad de la v.a $(X;Y)$ es $f(x;y) = k \cdot e^{-x}$, $x > 0$, $2 \cdot x < y < 4 \cdot x$
Analícese la independencia de "X" e "Y" y determínese $E(Y / X = x)$.

3.10.4: La densidad de la v.a $(X;Y)$ es $f(x;y) = y$, $y \in [0;1]$, $x \in [0;2]$.

- 1) Determinense las distribuciones marginales.
- 2) Determinense las curvas de regresión $E(X / Y = y)$ y $E(Y / X = x)$.

3.10.5: La función de densidad de la variable $(X;Y)$ es

$$f(x;y) = x \cdot y / 2; 0 < y \leq x < 2.$$

- 1) Determinense las curvas de regresión $E(X / Y = y)$ y $E(Y / X = x)$.
- 2) Determinense las rectas de regresión mínimo cuadrática.
- 3) Determinense las varianzas residuales de "X" y de "Y".

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

3.12.1: La función de probabilidad la variable $(X;Y)$ es:

X/Y	0	1	2
0	0'1	0'2	0'2
1	0'2	0'2	0'1

- 1) Determinense la función generatriz de momentos de $(X;Y)$.
- 2) Determinense las funciones generatrices de momentos de "X" e "Y".
- 3) Calcúlese $COV.(X;Y)$ utilizando los resultados anteriores.
- 4) Calcúlese la función generatriz de momentos de la variable $(Z;U)$, siendo:

$$Z = 2 \cdot X + 3 \cdot Y ; U = 4 \cdot X + 5 \cdot Y$$

3.12.2: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes tales que

$$P(X = x) = \frac{e^{-a} \cdot a^x}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots ; P(Y = y) = \frac{e^{-b} \cdot b^y}{y!} ; y = 0, 1, 2, \dots$$

- 1) Determinense las funciones generatrices de momentos de "X" y de "Y".
- 2) Determinense la esperanza y la varianza de "X" y de "Y".
- 3) Determinense la función generatriz de momentos de $Z = X + Y$.

3.12.3: Sea $\Phi_X(t) = (1 + e^{t^2/2})/2$ la función generatriz de momentos de una variable aleatoria "X". Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad que "X". Determínese la función generatriz de momentos de la variable $Z = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$, que es la media aritmética de las variables X_1, X_2, \dots, X_n .

3.12.4: La función de densidad de probabilidad de la variable (X;Y) es:

$$f(x; y) = 1 ; 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

- 1) Determínese la f.g.m de (X;Y).
- 2) Calcúlese la f.g.m de la variable (Z;U), si $Z = X + Y ; U = X - Y$.

3.12.5: La función de probabilidad de la variable aleatoria (X;Z) es:

$$f(x; z) = 1/2^{x+z} ; x = 1, 2, \dots ; z = 1, 2, \dots$$

- 1) Determínese las funciones generatrices de momentos de "X" y "Z".
- 2) Determínese la función generatriz de momentos de (X;Z).
- 3) Determínese la función generatriz de momentos de $U = X + Z$.

3.12.6: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes y $Z = a.X + b.Y$, siendo constantes "a" y "b". Usando sólo el concepto de función generatriz de momentos y sus propiedades, determínense los tres primeros momentos de la variable "Z" respecto al origen en función de los correspondientes momentos de las variables "X" e "Y".

3.12.7: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes cuyas respectivas funciones generatrices de momentos son:

$$\Phi_X(t) = 1 + t + \frac{3}{2}.t^2 + \dots ; \Phi_Y(t) = 1 - t + \frac{5}{2}.t^2 + \dots$$

- 1) Obténgase la matriz de covarianzas de la variable (X;Y).
- 2) Calcúlese la varianza de $Z = 2.X - 3.Y + 5$
- 3) Hasta los términos de orden 2 inclusive, determínese la función generatriz de momentos de la variable $W = X + Y$
- 4) ¿Puede ser $\Phi(t) = 1 + 8.t - \frac{1}{2}.t^2 + \dots$ una función generatriz de momentos?

CAMBIO DE VARIABLE

3.13.1: La función de probabilidad de la variable aleatoria (X;Y) es

Y / X	-1	0	1
-2	1/6	1/12	1/6
1	1/6	1/12	1/6
2	1/12	0	1/12

- 1) Siendo $Z = |X|$ y $U = Y^2$, determínense la distribución de probabilidad de la variable (Z;U) y las distribuciones marginales de "Z" y "U".
- 2) Determínense $P(Z = 1 / U = 1)$ y $P(U = 1 / Z = 1)$.

3.13.2: Sea $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = 2 \cdot x + y ; 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1$$

Determinése la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X + Y$ y $T = X + 2 \cdot Y$.

3.13.3: Sea $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = 1 ; 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1$$

1) Calcúlese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.

2) Calcúlense las distribuciones marginales de "Z" y "T".

3.13.4: Sean "X" e "Y" dos variables aleatorias que representan respectivamente el precio de compra y el de venta de un determinado artículo. La función de densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = x/36$ si $0 < x < y < 6$. Determinése la esperanza del beneficio y la función de densidad de $X + Y$.

3.13.5: Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de densidad $s(w) = e^{-w}$, $w > 0$. Calcúlese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X/Y$ y $T = X + Y$. Calcúlense las distribuciones de "Z" y "T".

3.13.6: Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de probabilidad $P(X = k) = P(Y = k) = e^{-a} \cdot a^k / k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Calcúlese la distribución de probabilidad de $Z = X + Y$.

3.13.7: Sean $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = \frac{3}{2} \cdot x \cdot y^2 ; 0 < x < 2 , 0 < y < 1$$

Determinése la función de densidad de probabilidad de $W = X \cdot Y$.

3.13.8: Sean $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = 1/4 ; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

Determinése la función de densidad de probabilidad de $W = X + Y$.

3.13.9: Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas.

1) Determinése la función de distribución de $Z = \max.\{X, Y\}$.

2) Determinése la función de distribución de $T = \min.\{X, Y\}$.

3) Determinése las densidades de "Z" y "T" si la de "X" es $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

3.13.10: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

1) Determine las funciones de distribución de las variables $Z = \max.\{2 \cdot X; 3 \cdot Y\}$ y $T = \min.\{2 \cdot X; 3 \cdot Y\}$.

2) Determinése las funciones de densidad de "Z" y "T" si la densidad de "X" es $f(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x}$, $x > 0$.

DISTRIBUCIÓN DE $Z = G(X;Y)$

3.14.1: Siendo "X" el tiempo total que emplea un cliente de un banco en ser atendido, e "Y" la variable que expresa el tiempo que debe esperar para ser atendido (tiempo de espera en cola), la función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = e^{-x}$, $0 < y < x$. Determina la función de distribución de $(X;Y)$ y la distribución de probabilidad del tiempo que el cliente está siendo atendido (tiempo de servicio). ¿Son independientes el tiempo de espera en cola y el tiempo de servicio?

3.14.2: Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas. Determinéense las distribuciones de probabilidad de $Z = \min.\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $T = \max.\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ y $R = T - Z$. Particularícese los resultados si $n = 3$ y las variables X_i tienen distribución exponencial de parámetro "a"; o sea, si su función de densidad es $f(x) = a \cdot e^{-a \cdot x}$; $x > 0$, $a > 0$.

3.14.3: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es

$$f(x;y) = 3 \cdot x ; 0 < x < 1, y < x, y > 0$$

Determinéense la distribución de probabilidad de la variable $Z = (X + Y)/2$ y su primer cuartil.

3.14.4: Siendo X_1, \dots, X_n variables aleatorias (no necesariamente independientes ni con la misma distribución de probabilidad) cuyas respectivas funciones de cuantía/densidad dependen de un parámetro desconocido θ que toma valores en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$, considérese que $T = T(X_1; \dots; X_n)$ es una variable aleatoria unidimensional tal que $E(T) = h(\theta)$.

1) Supuesto que los campos de variación de X_1, \dots, X_n no dependen de θ y que son legítimas todas las operaciones que deban hacerse, demuéstrese que

$$a) E\left(\frac{\partial \text{Ln } \varphi}{\partial \theta}\right) = 0 ; b) V(T) \geq \frac{(h'(\theta))^2}{E\left(\left(\frac{\partial \text{Ln } \varphi}{\partial \theta}\right)^2\right)}$$

siendo φ la función de cuantía/densidad de la variable $(X_1; \dots; X_n)$.

2) Particularícese b) al caso en que X_1, \dots, X_n son variables independientes con la misma función de cuantía/densidad "f".