Tema 3:

VARIABLES BIDIMENSIONALES

BIDIMENSIONALES DISCRETAS

3.9.1: En un cierto tipo de familias, las variables "X" e "Y" expresan respectivamente el aleatorio número cuartos de baño en su vivienda y el aleatorio número de hijos. **Radiografíese** el fenómeno si la función de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional discreta $(X;Y)$ es

$$f(x;y) = k.x.y \ ; \ x = 1,2 \ ; \ y = 1,2,3.$$

3.9.2: La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = k.x.y \ ; \ x = 1,2,3 \ ; \ y = 1,2,3$$

Determínese "k". Determínense $P(1 \leq X \leq 2; Y \leq 2)$ y $F(2;4)$, siendo "F" la función de distribución de la variable $(X;Y)$. Determínense las distribuciones marginales y las condicionadas. ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.3: La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es

Y / X	−1	0	1	2
0	k	3.k	k	2.k
1	2.k	2.k	3.k	k
2	k	k	k	2.k

Determínese "k". Calcule $P(0 \leq X < 2; 0 < Y < 2)$, $P(0 \leq X < 2; Y = 0)$, $P(X \leq 0)$ y $F(1'5;1)$, siendo "F" la función de distribución de la variable $(X;Y)$.

1) Determine las distribuciones marginales y las condicionadas.
2) Determine la varianza de "X", la de "Y" y la de $X / Y = 2$.
3) Determine el coeficiente de correlación entre "X" e "Y".
4) Determine el coeficiente de correlación entre "Z" y "T", siendo

$$Z = 2.X - 3.Y \ \text{ y } \ T = 4.X + 5.Y$$

3.9.4: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes cuyas respectivas funciones de probabilidad son

x	0	1	2
$f_1(x) = P(X = x)$	0'16	0'48	0'36

y	3	4	5
$f_2(y) = P(Y = x)$	1/3	1/3	1/3

1) Determínese la función de distribución de $Z = X + Y$.
2) Calcúlense $E(Z)$ y $V(Z)$.
3) Determínese la función de probabilidad de la variable $(X;Z)$.

3.9.5: Sea "Y" una variable aleatoria que puede tomar los valores 0 y -1, y "X" una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

x	1	2	3
$f(x)=P(X=x)$	0'3	0'3	0'4

Siendo $Z=X-Y$, se sabe que:

$$P(Z=2/X=1)=P(Z=2/X=2)=2/3 \; ; \; P(X=3/Y=0)=1/4$$

Determine la función de probabilidad de la variable $(X;Z)$. Determínese la función de probabilidad de la variable $(X;Y)$. Determine la media y la varianza de la variable $Z/X=1$.

3.9.6: Sea $(X;Z)$ una v.a bidimensional cuya función de probabilidad es:

Z / X	0	1
0	a	b
1	c	d

Demuéstrese que si "X" y "Z" son incorreladas son independientes.

3.9.7: Sean "X" y "Z" las variables que expresan respectivamente el aleatorio número de bolas rojas y bolas blancas que se obtienen al seleccionar dos bolas de una urna que contiene 2 bolas rojas, 2 blancas y 2 negras. Determínese la distribución de probabilidad de la variable $(X;Z)$.

3.9.8: Se extraen 7 cartas de una baraja española de 40 cartas. Sean "X", "Y", "Z" y "T" las variables que expresan respectivamente el aleatorio número espadas, bastos, figuras y cartas inferiores a 5 entre las siete cartas seleccionadas. Determínese la distribución de probabilidad de la variable $(X;Y)$. Determínese la distribución de probabilidad de la variable $(Z;T)$.

3.9.9: Se seleccionan al azar 13 individuos de un colectivo formado por 19 elefantes, 2 pulgas, 40 helicópteros, 32 ladrillos y 7 ferrines. Determínese la distribución de probabilidad de la variable que expresa el aleatorio número de elefantes, ladrillos y ferrines entre los 13 individuos seleccionados.

3.9.10: La función de probabilidad de la variable bidimensional $(X;Z)$ es $f(x;z)=k.(x+z)$, $x=1,2,3,4$, $z=1,2,3$. Calcula "k", las distribuciones marginales y las distribuciones condicionadas. ¿Son independientes "X" y "Z"?

3.9.11: La variable "X" toma los valores -1, 0 y 1 de modo equiprobable, y $Z=X^2$. ¿Son independientes "X" y "Z"? Calcúlese el coeficiente de correlación.

3.9.12: La variable "X" toma los valores 0 y 1 de modo equiprobable, y la variable "Y" toma los valores 0 y 2 con probabilidades respectivas $1/3$ y $2/3$. Sabiendo que $P(X=0;Y=0)=a$, determínese la distribución de probabilidad de la variable bidimensional $(X;Y)$ en función de los valores de "a". ¿Entre qué valores puede variar "a"?

3.9.13: La variables independientes "X" e "Y" toman los valores -1 y 1 de modo equiprobable. Estúdiese la independencia de "X" y "Z", siendo $Z = X.Y$.

3.9.14: De las variables aleatorias discretas "X" e "Y" se sabe que

$$P(X=1)=0'5 \;;\; P(Y=-1)=0'4$$
$$P(X=3;Y=1)=0'03 \;;\; P(X\le 2;Y=-1)=0'21$$

y	-1	0	1
$P(Y=y/X\le 2)$	0'28	0'40	0'32

Si la variable "X" sólo puede tomar los valores 1, 2 y 3, determina las distribuciones de probabilidad de "X" e "Y". Determínese la función de distribución de la variable $Y/X>2$. Determínense $P(X\le 2;Y>0)$ y $P(X\le 2;Y\ge 0)$.

3.9.15: Sean "X", "Y" y "Z" tres variables aleatorias, siendo independientes "X" y "Z". De la función de probabilidad de la variable $(X;Y)$ se sabe que:

Y/X	1	3	5	7
2			0'1	
4	0'1			0'06
6		0'025	0'05	0'1
	0'3	0'1	0'3	0'3

1) Calcúlese $P(X=1;Y=2)$ sabiendo que:

$$P\big((Y=2)\cup(Z=0)/X=1\big)=0'32 \;;\; P(Z=0)=0'15$$
$$P\big(Y=2/(X=1;Z=0)\big)=0'2$$

2) Sabiendo que $P(X+Y=5)=0'15$, determínese la distribución de "Y".

3.9.16: Siendo "Y" una v.a que toma valores 0 y 1, sea X" una v.a tal que:

x	0	1	2
$P(X=x)$	0'3	0'3	0'4

Si $Z=X-Y$, determínese la distribución de probabilidad de "Z" sabiendo que:

$$P(Z=0/X=0)=P(Z=0/X=1)=2/3$$
$$P(X=2;Y=1)=0'25$$

3.9.17: Considérese que se lanzan dos dados una vez y que la variable "X" expresa el resultado obtenido en el primer dado y la variable "Y" expresa el máximo de los dos resultados. Determínese la distribución de probabilidad de $(X;Y)$ y el valor esperado de "Y".

3.9.18: La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Z)$ es

$$f(x;z)=\frac{k}{2^{x+z}} \;;\; x=0,1,2,\ldots\ldots \;;\; z=0,1,2,\ldots\ldots$$

Determínese "k". Determínense las distribuciones marginales y las condicionadas.

BIDIMENSIONALES CONTINUAS

3.9.19: Considérese que las variables "X" e "Y" expresan respectivamente la aleatoria renta y el aleatorio ahorro de los ciudadanos. **Radiografíese** el fenómeno si la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional continua $(X;Y)$ es $f(x;y)=k.x.y\ ;\ y\le x,\ x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

3.9.20: La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es $f(x;y)=k.x\ ;\ y\le x\le 1,\ x+y\ge 1$. Determínese $P(X\ge 3/4)$.

3.9.21: Siendo "X" e "Y" las variables que respectivamente expresan el aleatorio consumo y el aleatorio ahorro de las familias, la función de densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=e^{-(x+y)},\ x>0,\ y>0$. Determínese la probabilidad de que en una familia el consumo y el ahorro sean inferiores a 1. Elegidas tres familias al azar, determínese la probabilidad de que en al menos una de ellas el consumo y el ahorro sean inferiores a 1.

3.9.22: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=k.(x^2+y^2)\ ;\ -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$$

Determínese "k". Calcúlense $P(X\ge Y), P(X^2+Y^2\le 2)$ y $P(X^2+Y^2\le 1)$.

3.9.23: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=k.x.y\ ;\ 0\le x^2\le y\le x\le 1$$

Determínense las distribuciones marginales. ¿Son independientes X" e "Y"?

3.9.24: La función de distribución de la variable $(X;Y)$ es:

$$F(x;y)=1-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+x+y}\ ;\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

Calcúlense $P(X\le 2;Y\le 1)$ y las funciones de distribución marginales. ¿Son independientes "X" e "Y"? Calcúlense E(X) y E(Y).

3.9.25: Siendo "X" e "Y" las variables que respectivamente expresan la aleatoria producción de escabondrios y de ferritos de una empresa, la función de densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=2.x.y,\ 0<x\le 2,\ 0<y\le x/2$. ¿Son independientes "X" e "Y"? Calcúlese $P(X<1)$. Si la producción de escabondrios es $1/2$, determínese la probabilidad de que la producción de ferritos sea inferior a 0'2. Si la producción de escabondrios es 1, ¿cuál es la producción esperada de ferritos? Calcúlese la probabilidad de que la producción total sea inferior a 1.

3.9.26: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=\begin{cases} k_1.x.y & \text{si } 0<x\le 1, 1<y\le 2 \\ k_2.x & \text{si } 0<x\le 1, 2<y\le 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Además, se sabe que $F(2;2)=3/4$. Determínense k_1 y k_2. Determínense la función de distribución de "Y", E(Y) y V(Y). ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.27: Una empresa produce dos tipos de compuestos químicos, y en un estudio se ha llegado a la conclusión de que las cantidades producidas (en toneladas) en un día de cada compuesto son variables aleatorias cuya densidad es:

$$f(x;y) = \begin{cases} (x+2.y)/8 & \text{si } 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 < 2.y \le x+2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

donde "X" expresa el número de toneladas producidas en un día del primer compuesto, e "Y" lo mismo para el segundo compuesto.

1) Determínese la producción diaria media del segundo compuesto.
2) Halle la probabilidad de no producir más de 1'5 toneladas de cada compuesto.
3) Si por problemas técnicos no se pudiese producir más de una tonelada al día del segundo compuesto, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad producida del primer compuesto sea superior a la del segundo compuesto?

3.9.28: Sea $(X;Y)$ una v.a bidimensional cuya función densidad es

$$f(x;y) = \begin{cases} 2.x & \text{si } 0 < x \le 1/2,\ 0 < y < 1 \\ (4-2.x)/3 & \text{si } 1/2 < x \le 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Calcúlese el valor de la función de distribución en el punto $(1;1/2)$.
2) Determínese la función de densidad de "X" y su esperanza.
3) Calcúlese la mediana de "X".
4) Calcúlese la covarianza entre "X" e "Y".
5) Calcúlese la distribución de $Y / X = x$. ¿Son independientes "X" e "Y"?

3.9.29: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = 3.(x^2+y^2)/8 \ ; \ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1$$

¿Son independientes "X" e "Y"? Calcúlense $V(X+Y)$ y $P(X > 0'5 / Y \le 0)$.

3.9.30: Sea "X" el tiempo total (en horas) que un camión permanece en una estación de descarga e "Y" la parte de ese tiempo que permanece esperando en la cola antes de empezar a ser descargado. La función de densidad de $(X;Y)$ es:

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{4}.e^{-x/2} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Determínense las densidades marginales de "X" e "Y". Demuéstrese que la covarianza entre "X" e "Y" es 4. Si "Z" es el tiempo (en horas) que dura la operación de descarga en sí, ¿qué relación mantienen "Z", "X" e "Y"? Determínense la media y la varianza de "Z".

3.9.31: Determínese la función de distribución de la variable $(X;Y)$ cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = k.(6-x-y) \ ; \ x \in [0;2],\ y \in [2;4]$$

3.9.32: Sea $(X;Y)$ una v.a bidimensional cuya función densidad es:

$$f(x;y)=\begin{cases} k \text{ si } |x|<2.y,\ 0\le y<1 \\ 0 \qquad \text{resto} \end{cases}$$

Determínense las funciones de densidad de las distribuciones marginales, la función de distribución de "Y" y $P(X<1;Y\le 2)$.

3.9.33: Sean "X" e "Y" tales que $E(X)=3$, $E(Y)=1$, $V(X)=4$ y $V(Y)=9$. Siendo $Z=5.X-4.Y+15$, calcúlense $E(Z)$ y $V(Z)$ en los siguientes casos:

1) Las variables "X" e "Y" son independientes.
2) Las variables "X" e "Y" son incorreladas.
3) El coeficiente de correlación entre "X" e "Y" es 0'25.

3.9.34: Sean "X", "Y" y "Z" variables aleatorias tales que:

$$V(X)=1\ ;\ V(Y)=4\ ;\ V(Z)=8$$
$$COV(X;Y)=1\ ;\ COV(X;Z)=-1\ ;\ COV(Y;Z)=2$$

Calcúlense $V(X+Y+Z)$ y $V(3.X-Y-2.Z+1)$.

3.9.35: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes, con varianzas finitas y ambas con la misma media.

1) Demuéstrese que $E\left((X-Y)^2\right)=V(X)+V(Y)$.
2) Calcúlense $V(X-Y)$ y $V(2.X-3.Y+1)$ si $V(X)=V(Y)=3$.

3.9.36: Sean "X" e "Y" variables aleatorias.

1) Determínese una condición para que las variables $Z=X+Y$ y $T=X-Y$ sean incorreladas.
2) Demuéstrese que si $V(X)=V(Y)$, es $\rho(X;Z)=\sqrt{(1+\rho(X;Y))/2}$.

3.9.37: Siendo "X" e "Y" variables aleatorias y "a", "b", "c" y "d" constantes, sean las variables $Z=b+a.X$ y $T=d+c.Y$.

1) Exprese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T" en función del coeficiente de correlación entre "X" e "Y".
2) Compruébese que $COV.(U;W)=\rho(X;Y)$, siendo "U" y "W" las respectivas variables tipificadas de "X" e "Y".

3.9.38: Sean "X" e "Y" variables con igual media y varianza. Si "a" y "b" son constante y $Z=a.X+b.Y$ y $T=a.X-b.Y$. Exprese el coeficiente de correlación entre "Z" y "T" en función del coeficiente de correlación entre "X" e "Y".

3.9.39: Siendo "X" e "Y" variables aleatorias independientes, demuéstrese que $V(X.Y)=V(X).V(Y)+V(X).(E(Y))^2+V(Y).(E(X))^2$.

3.9.40: Sea $F:\Re\mapsto\Re$ una función de distribución.

1) ¿Es $G(x;y)=F(x)+F(y)$ una función de distribución?
2) ¿Es $G(x;y)=\text{máx.}\{F(x),F(y)\}$ una función de distribución?
3) ¿Es $G(x;y)=F(x).F(y)$ una función de distribución?

REGRESIÓN

3.10.1: La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=k,\ 0<y\le x<1$. Determínense las distribuciones marginales. Determínense las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$.

3.10.2: La densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=k,\ |y|<x,\ 0<x<1$. Determina las marginales y comprueba que "X" e "Y" son incorreladas sin ser independientes. Determina las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$. Calcula $P(0<Y<0'3/X=0'5)$ y $P(X>0'7/Y=0'2)$.

3.10.3: La densidad de la v.a $(X;Y)$ es $f(x;y)=k.e^{-x},\ x>0,\ 2.x<y<4.x$ Analícese la independencia de "X" e "Y" y determínese $E(Y/X=x)$.

3.10.4: La densidad de la v.a $(X;Y)$ es $f(x;y)=y,\ y\in[0;1],\ x\in[0;2]$.

1) Determínense las distribuciones marginales.
2) Determínense las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$.

3.10.5: La función de densidad de la variable $(X;Y)$ es

$$f(x;y)=x.y/2;\ 0<y\le x<2.$$

1) Determínense las curvas de regresión $E(X/Y=y)$ y $E(Y/X=x)$.
2) Determínense las rectas de regresión mínimo cuadrática.
3) Determínense las varianzas residuales de "X" y de "Y".

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

3.12.1: La función de probabilidad la variable $(X;Y)$ es:

X / Y	0	1	2
0	0'1	0'2	0'2
1	0'2	0'2	0'1

1) Determínese la función generatriz de momentos de $(X;Y)$.
2) Determínense las funciones generatrices de momentos de "X" e "Y".
3) Calcúlese $COV.(X;Y)$ utilizando los resultados anteriores.
4) Calcúlese la función generatriz de momentos de la variable $(Z;U)$, siendo:

$$Z=2.X+3.Y\ ;\ U=4.X+5.Y$$

3.12.2: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes tales que

$$P(X=x)=\frac{e^{-a}.a^{x}}{x!}\ ;\ x=0,1,2,....\ ;\ P(Y=y)=\frac{e^{-b}.b^{y}}{y!}\ ;\ y=0,1,2,....$$

1) Determínense las funciones generatrices de momentos de "X" y de "Y".
2) Determínense la esperanza y la varianza de "X" y de "Y".
3) Determínese la función generatriz de momentos de $Z=X+Y$.

3.12.3: Sea $\Phi_X(t)=(1+e^{t^2/2})/2$ la función generatriz de momentos de una variable aleatoria "X". Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad que "X". Determínese la función generatriz de momentos de la variable $Z=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n$, que es la media aritmética de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

3.12.4: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es:

$$f(x;y)=1\ ;\ 0<x<1,\ 0<y<1$$

1) Determínese la f.g.m de $(X;Y)$.
2) Calcúlese la f.g.m de la variable (Z;U), si $Z=X+Y\ ;\ U=X-Y$.

3.12.5: La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Z)$ es:

$$f(x;z)=1/2^{x+z}\ ;\ x=1,2,\ldots..\ ;\ z=1,2,\ldots..$$

1) Determínense las funciones generatrices de momentos de "X" y "Z".
2) Determínese la función generatriz de momentos de $(X;Z)$.
3) Determínese la función generatriz de momentos de $U=X+Z$.

3.12.6: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes y $Z=a.X+b.Y$, siendo constantes "a" y "b". Usando sólo el concepto de función generatriz de momentos y sus propiedades, determínense los tres primeros momentos de la variable "Z" respecto al origen en función de los correspondientes momentos de las variables "X" e "Y".

3.12.7: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes cuyas respectivas funciones generatrices de momentos son:

$$\Phi_X(t)=1+t+\frac{3}{2}.t^2+\ldots\ ;\ \Phi_Y(t)=1-t+\frac{5}{2}.t^2+\ldots$$

1) Obténgase la matriz de covarianzas de la variable $(X;Y)$.
2) Calcúlese la varianza de $Z=2.X-3.Y+5$
3) Hasta los términos de orden 2 inclusive, determínese la función generatriz de momentos de la variable $W=X+Y$
4) ¿Puede ser $\Phi(t)=1+8.t-\frac{1}{2}.t^2+\ldots$ una función generatriz de momentos?

CAMBIO DE VARIABLE

3.13.1: La función de probabilidad de la variable aleatoria $(X;Y)$ es

Y / X	−1	0	1
−2	1/6	1/12	1/6
1	1/6	1/12	1/6
2	1/12	0	1/12

1) Siendo $Z=|X|$ y $U=Y^2$, determínense la distribución de probabilidad de la variable $(Z;U)$ y las distribuciones marginales de "Z" y "U".
2) Determínense $P(Z=1/U=1)$ y $P(U=1/Z=1)$.

3.13.2: Sea $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = 2.x + y \ ; \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1$$

Determínese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X + Y$ y $T = X + 2.Y$.

3.13.3: Sea $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = 1 \ ; \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1$$

1) Calcúlese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.

2) Calcúlense las distribuciones marginales de "Z" y "T".

3.13.4: Sean "X" e "Y" dos variables aleatorias que representan respectivamente el precio de compra y el de venta de un determinado artículo. La función de densidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y) = x/36$ si $0 < x < y < 6$. Determínese la esperanza del beneficio y la función de densidad de $X + Y$.

3.13.5: Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de densidad $s(w) = e^{-w}$, $w > 0$. Calcúlese la densidad de la variable $(Z;T)$, siendo $Z = X/Y$ y $T = X + Y$. Calcúlense las distribuciones de "Z" y "T".

3.13.6: Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas, con función de probabilidad $P(X = k) = P(Y = k) = e^{-a}.a^k/k!$, $k = 0,1,2,\ldots$. Calcúlese la distribución de probabilidad de $Z = X + Y$.

3.13.7: Sean $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = \frac{3}{2}.x.y^2 \ ; \ 0 < x < 2 \ , \ 0 < y < 1$$

Determínese la función de densidad de probabilidad de $W = X.Y$.

3.13.8: Sean $(X;Y)$ una v.a cuya función de densidad de probabilidad es:

$$f(x;y) = 1/4 \ ; \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1$$

Determínese la función de densidad de probabilidad de $W = X + Y$.

3.13.9: Sean "X" e "Y" variables independientes e idénticamente distribuidas.

1) Determínese la función de distribución de $Z = \text{máx.}\{X, Y\}$.
2) Determínese la función de distribución de $T = \text{mín.}\{X, Y\}$.
3) Determínense las densidades de "Z" y "T" si la de "X" es $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

3.13.10: Sean "X" e "Y" variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

1) Determine las funciones de distribución de las variables $Z = \text{máx.}\{2.X; 3.Y\}$ y $T = \text{mín.}\{2.X; 3.Y\}$.
2) Determínense las funciones de densidad de "Z" y "T" si la densidad de "X" es $f(x) = 2.e^{-2.x}$, $x > 0$.

DISTRIBUCIÓN DE Z = G(X;Y)

3.14.1: Siendo "X" el tiempo total que emplea un cliente de un banco en ser atendido, e "Y" la variable que expresa el tiempo que debe esperar para ser atendido (tiempo de espera en cola), la función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es $f(x;y)=e^{-x}$, $0<y<x$. Determina la función de distribución de $(X;Y)$ y la distribución de probabilidad del tiempo que el cliente está siendo atendido (tiempo de servicio). ¿Son independientes el tiempo de espera en cola y el tiempo de servicio?

3.14.2: Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas. Determínense las distribuciones de probabilidad de $Z=\text{mín.}\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$, $T=\text{máx.}\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ y $R=T-Z$. Particularícense los resultados si $n=3$ y las variables X_i tienen distribución exponencial de parámetro "a"; o sea, si su función de densidad es $f(x)=a.e^{-a.x}$; $x>0, a>0$.

3.14.3: La función de densidad de probabilidad de la variable $(X;Y)$ es

$$f(x;y)=3.x\ ;\ 0<x<1,\ y<x,\ y>0$$

Determínese la distribución de probabilidad de la variable $Z=(X+Y)/2$ y su primer cuartil.

3.14.4: Siendo $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias (no necesariamente independientes ni con la misma distribución de probabilidad) cuyas respectivas funciones de cuantía/densidad dependen de un parámetro desconocido θ que toma valores en un conjunto abierto $\Omega\subseteq\Re$, considérese que $T=T(X_1;\dots;X_n)$ es una variable aleatoria unidimensional tal que $E(T)=h(\theta)$.

1) Supuesto que los campos de variación de $X_1,\dots,X_n$ no dependen de θ y que son legítimas todas las operaciones que deban hacerse, demuéstrese que

$$\text{a) } E\left(\frac{\partial \text{Ln}\varphi}{\partial\theta}\right)=0\ ;\ \text{b) } V(T)\geq\frac{(h'(\theta))^2}{E\left(\left(\frac{\partial \text{Ln}\,\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right)}$$

siendo φ la función de cuantía/densidad de la variable $(X_1;\dots;X_n)$.

2) Particularícese b) al caso en que $X_1,\dots,X_n$ son variables independientes con la misma función de cuantía/densidad "f".