Inferencia Estadística

Tema 1:

24 EJERCICIOS RESUELTOS

Sucesiones de variables aleatorias

El verbo "inferir"

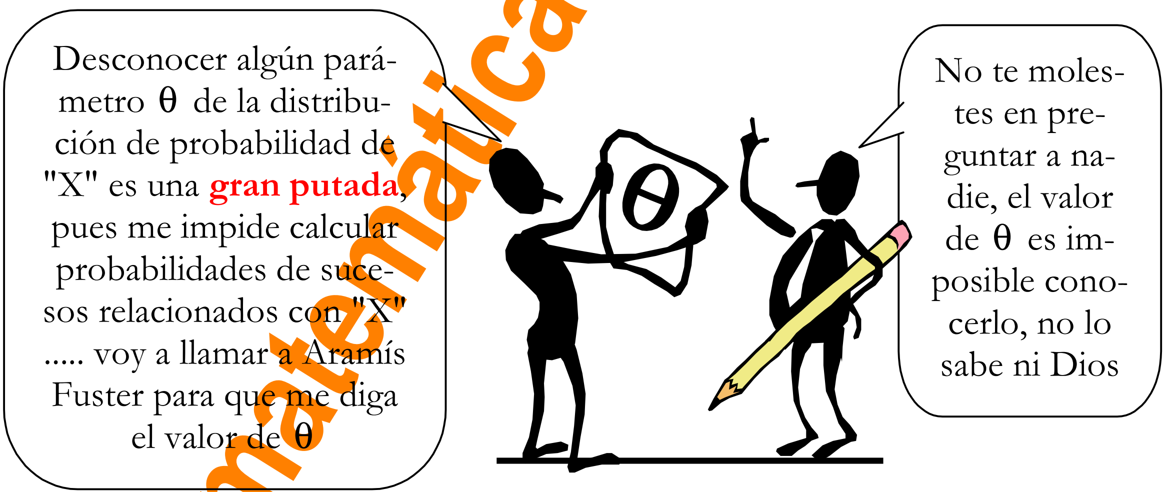
Como en las próximas 500 páginas estudiaremos la llamada Inferencia Estadística, conviene empezar leyendo lo que dice el diccionario sobre el verbo "inferir", pues lo que a nosotros nos interesa es la primera acepción.

Inferir. (Del latín *infere*, llevar a):
Sacar una consecuencia o deducir una cosa de otra ‖ Llevar consigo, ocasionar, conducir a un resultado ‖ Tratándose de ofensas, agravios, heridas, etc., producirlos o causarlos.

Inferencia paramétrica

Como la vida es muy dura, con frecuencia **se está analizando una variable aleatoria "X" asociada a una cierta "población"** (imagina que "X" expresa la aleatoria altura de los ciudadanos) **y se conoce "X" sólo de forma parcial, pues aunque se sabe a qué "familia" pertenece "X", se desconocen algunos de los parámetros que identifican a "X".** ***Por ejemplo:***

- Se sabe que "X" es normal de media 7, pero se desconoce la varianza.
- Se sabe que "X" es normal de varianza 13, pero se desconoce la media.
- Se sabe que "X" es exponencial, pero se desconoce el parámetro.
- Se sabe que "X" es normal, pero se desconocen la media y la varianza.



Ante tan dramática situación sólo tenemos dos opciones:

1) Suicidarnos
2) Buscarnos la vida para "decir algo" sobre θ

Si no eliges la primera opción, de inmediato te planteas la pregunta del millón:

¿Qué hago para decir algo sobre θ?

Detallada respuesta:

Lo que haría cualquiera: **observar el valor que toma "X" en "n" individuos de la población** (o sea, "muestrear" la población) **y sacar jugo a la información que sobre el parámetro θ contienen los "n" valores observados de la variable "X".** Así nace la estrella de la Inferencia Estadística: la variable aleatoria n-dimensional $(X_1;....;X_n)$ que expresa los resultados que pueden presentarse al seleccionar una muestra de tamaño "n"; de ella diremos que es la **variable muestral.**

El **muestreo aleatorio simple** considera que las variables $X_1,....,X_n$ que forman la variable muestral $(X_1;....;X_n)$ son independientes y tienen la misma distribución de probabilidad que la variable "X". ***Por ejemplo,*** si $X \approx N(170;\sigma)$ expresa la aleatoria altura de los ciudadanos y para "decir algo" sobre σ tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 3, entonces, siendo X_i la variable que expresa la aleatoria altura del i-ésimo ciudadano seleccionado $(i=1,2,3)$, la estrella de la película será la variable muestral $(X_1;X_2;X_3)$ que expresa los resultados que pueden presentarse, y admitiremos que X_1, X_2 y X_3 son independientes y todas tienen distribución $N(170;\sigma)$.

A continuación comentamos grosso modo la que se nos viene encima.

Tema 1: Sucesiones de variables aleatorias

Como la estrella de la historia es la variable muestral $(X_1;....;X_n)$ y "n" puede ser todo lo grande que queramos, dedicaremos el Tema 1 a estudiar los intríngulis de una sucesión $X_1,X_2,....,X_n,.....$ de infinitas variables aleatorias (independientes o no, con la misma distribución de probabilidad o no).

Tema 2: Estadísticos

Para "sacar jugo" a la "información" que sobre el desconocido θ contienen los "n" valores observados de la variable "X" utilizaremos **estadísticos.** Nada de asustarse, un "estadístico" es una función de la variable muestral $(X_1;....;X_n)$, y por tanto es una variable aleatoria unidimensional corriente y moliente. Los estadísticos más famosos son la **media muestral** y la **varianza muestral:**

$$T_1 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv \text{aleatoria media muestral}$$

$$T_2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} (X_i - T_1)^2 \equiv \text{aleatoria varianza muestral}$$

Observa: a cada muestra le corresponde un valor del estadístico. ***Por ejemplo,*** si la muestra seleccionada es la $(4;6;11)$, en ella el estadístico T_1 se concreta en el número 7, y el estadístico T_2 se concreta en el número 26/3:

$$T_1 = (4+6+11)/3 = 7$$

$$T_2 = \left((4-7)^2 + (6-7)^2 + (11-7)^2\right)/3 = 26/3$$

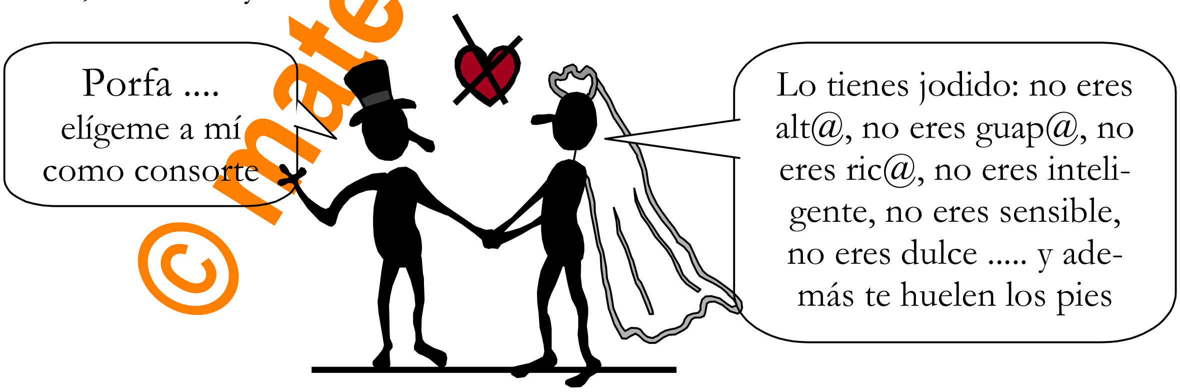
Tema 3: Estimación puntual

Hacer una estimación puntual del parámetro θ consiste en asignarle un valor concreto. Para ello se elige un estadístico "T" y se asigna a θ el valor que toma "T" en la muestra seleccionada.

Por ejemplo, considera que la variable "X" tiene distribución de Poisson de parámetro θ y que para hacer una estimación puntual de θ se toma una muestra de tamaño 4 y se obtiene la (5;6;1;6); así:

- Si como "estimador puntual" del parámetro θ elegimos el estadístico media muestral $T_1 = (X_1+X_2+X_3+X_4)/4$, como el valor que toma T_1 en la muestra (5;6;1;6) es 4'5, diremos que la estimación puntual de θ que para esa muestra proporciona el estadístico T_1 es $\theta = 4'5$.
- Si como "estimador puntual" del parámetro θ elegimos el estadístico "máximo muestral" $T_3 = \text{máx.}\{X_1; X_2; X_3; X_4\}$, como el valor que toma T_3 en la muestra (5;6;1;6) es 6, diremos que la estimación puntual de θ que para esa muestra proporciona el estadístico T_3 es $\theta = 6$.
- Si como "estimador puntual" del parámetro θ elegimos el estadístico "mínimo muestral" $T_4 = \text{mín.}\{X_1; X_2; X_3; X_4\}$, como el valor que toma T_4 en la muestra (5;6;1;6) es 1, diremos que la estimación puntual de θ que para esa muestra proporciona el estadístico T_4 es $\theta = 1$.

Naturalmente, una vez seleccionada la muestra, la "calidad" de la estimación puntual de θ dependerá de qué estadístico usemos como "estimador puntual"; por eso se hace necesario establecer características "deseables" **(insesgadez, consistencia, eficiencia y suficiencia)** que nos permitan decidir si un cierto estadístico "Pepe" es interesante para hacer una "estimación puntual" del desconocido valor de θ. La idea es sencilla: cuando el estadístico "Pepe" nos suplique por sus muertos que lo elijamos a él como "estimador puntual" de θ, analizaremos si "Pepe" posee esas características "deseables" de insesgadez, consistencia, eficiencia y suficiencia.



Como no podemos pasarnos la vida haciendo casting con la infinidad de estadísticos que hay, se hará necesario inventar métodos de "construcción" de estimadores **(método de la máxima verosimilitud y método de los momentos).**

Tema 4: Estimación con intervalo de confianza

Abordaremos el problema de "decir algo" sobre el parámetro θ desde otro punto de vista, pues en vez de utilizar un estadístico y los "n" números que forman la muestra seleccionada para hacer una "estimación puntual" de θ, **utilizaremos un estadístico y los "n" números de la muestra para determinar un intervalo en el que con una confianza fijada de antemano está el desconocido valor del parámetro θ.**

Tema 5: Contraste de hipótesis paramétricas

Por razones de elemental prudencia, una vez se ha estimado θ (y por tanto se ha establecido una **hipótesis** sobre θ), se plantea el problema de **contrastar** si la estimación realizada tiene mucho o poco que ver con la realidad. Y de inmediato se plantea la pregunta del millón:

¿Qué hago para "contrastar" una "hipótesis" establecida sobre θ?

Respuesta:

Lo que haría cualquiera: "observar" el valor que toma "X" en "k" individuos de la "población" y "sacar jugo" a la "información" que sobre el parámetro θ contienen los "k" valores observados de la variable "X"; en concreto, utilizando un estadístico y los "k" números que forman la muestra seleccionada, obtendremos un número mágico que nos permitirá decidir si nos creemos la hipótesis establecida o no.

Inferencia no paramétrica

Siempre hay quien lo tiene más jodido: **se está analizando una variable aleatoria "X" asociada a una cierta "población" y no se tiene ni idea de la distribución de probabilidad de "X".**

En tal situación, la única alternativa al suicidio es emplear el olfato para establecer una **hipótesis sobre el tipo de distribución de "X"** y "observar" el valor que toma "X" en "r" individuos de la "población", sacando jugo a la "información" que contienen los "r" valores observados de la variable "X"; en concreto, utilizando un estadístico y los "r" números que forman la muestra seleccionada, obtendremos un número mágico que nos permitirá decidir si nos creemos la hipótesis establecida o no. A tan divertido asunto dedicaremos el Tema 6.

1.2 SUCESIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

Una sucesión de variables aleatorias es una ley o criterio que a cada número natural le asocia una variable aleatoria. Denotando X_n a la variable aleatoria que la ley en cuestión asocia al número natural "n", para referirnos a la sucesión escribiremos $\{X_n\}$; es decir: $\{X_n\}=\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots\ldots\}$

1.3 CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

Sea "U" una variable aleatoria con función de distribución $F(x)$ y generatriz de momentos $\Phi(t)$. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio probabilístico que "U", siendo $F_n(x)$ y $\Phi_n(t)$ las respectivas funciones de distribución y generatriz de momentos de la variable X_n.

Convergencia en ley

Diremos que la sucesión $\{X_n\}$ **converge en ley** a la variable "U", y escribiremos $\{X_n\}\xrightarrow{L}U$, si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones, que son equivalentes:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x),\ \forall$ x tal que $F(x)$ sea continua en "x"

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(t)=\Phi(t),\ \forall\ t$

3 $\lim\limits_{n\to\infty} P(a<X_n\leq b)=P(a<U\leq b), \forall\ (a;b]$

Propiedades

1) Si $\{X_n\}\xrightarrow{L}U$ y "C" es una constante, sucede que:

$$\{X_n+C\}\xrightarrow{L}U+C\ ;\ \{C.X_n\}\xrightarrow{L}C.U$$

2) Si $\{X_n\}\xrightarrow{L}U$ y "g" es una función continua, sucede que:

$$\{g(X_n)\}\xrightarrow{L}g(U)$$

Convergencia en probabilidad

Diremos que la sucesión $\{X_n\}$ **converge en probabilidad** a la variable "U", y escribiremos $\{X_n\}\xrightarrow{P}U$, si para todo valor positivo de ε sucede que:

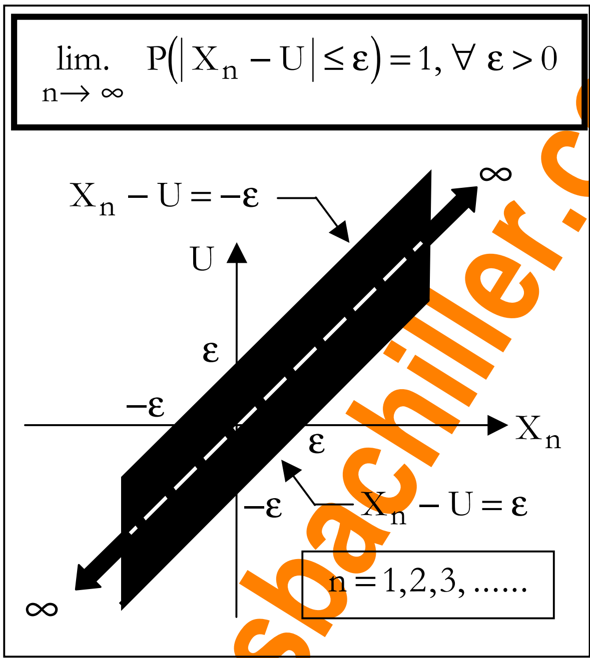
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-U|>\varepsilon)=0$$

o lo que es igual, pero dando el protagonismo al suceso $|X_n-U|\leq\varepsilon$ complementario de $|X_n-U|>\varepsilon$, sucede que:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-U|\leq\varepsilon)=1$$

Interpretación bidimensional

En la distribución bidimensional de masa de probabilidad correspondiente a la variable bidimensional $(X_n; U)$, la probabilidad del suceso $|X_n - U| \leq \varepsilon$ es la masa que hay en el "tubo" sombreado en la figura. El "eje" de ese "tubo" es la bisectriz del primer cuadrante, formada por los puntos que tienen iguales sus dos coordenadas; obviamente, el "tubo" es más "delgado" cuanto más próximo a 0 sea el valor elegido para $\varepsilon > 0$.

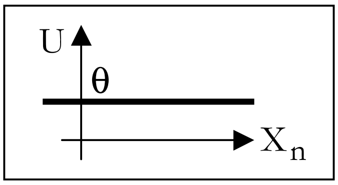


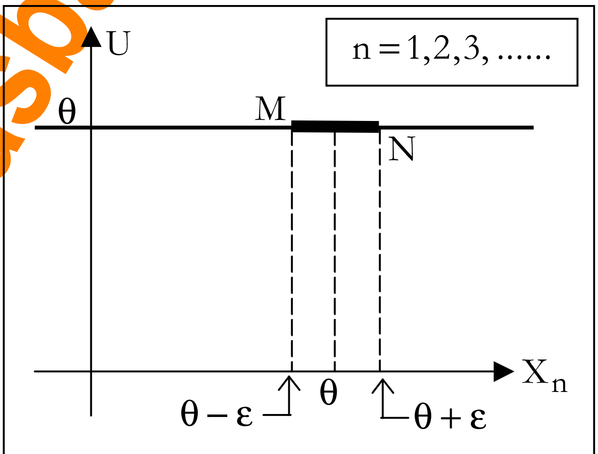
Así, .al afirmar que $\{X_n\} \xrightarrow{P} U$ se afirma que la sucesión $\{X_n\}$ es tal que, sea cual sea el valor elegido para $\varepsilon > 0$ (o sea, con independencia de la "delgadez" del "tubo" que elijamos), la masa que hay en el tubo, que es la probabilidad del suceso $|X_n - U| \leq \varepsilon$, se aproxima a 1 tanto como se quiera sin más que elegir "n" suficientemente grande.

Por ejemplo:

- Si $\varepsilon = 10^{-100}$, la probabilidad del suceso $|X_n - U| \leq 10^{-100}$ se aproxima a 1 tanto como se quiera sin más que elegir "n" suficientemente grande; es decir, fijada una probabilidad α tan próxima a 0 como se quiera, hay un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ ocurre que $P(|X_n - U| \leq 10^{-100}) > 1 - \alpha$.
- Si $\varepsilon = 10^{-1000000000}$, la probabilidad del suceso $|X_n - U| \leq 10^{-1000000000}$ se aproxima a 1 tanto como se quiera sin más que elegir "n" lo bastante grande; es decir, fijada una probabilidad α tan próxima a 0 como se quiera, hay un natural n_1 tal que si $n \geq n_1$ ocurre que $P(|X_n - U| \leq 10^{-1000000000}) > 1 - \alpha$.

Observa: si la variable "U" toma el valor θ con probabilidad 1 (o sea, "U" es degenerada), la unidad de masa de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria bidimensional $(X_n;U)$ está en la recta $U=\theta$; así, la probabilidad del suceso $|X_n - U| \equiv |X_n - \theta| \le \varepsilon$ es la masa que hay en el segmento de amplitud $2.\varepsilon$ que une los puntos "M" y "N" de la figura. Así, al decir que $\{X_n\} \xrightarrow{P} \theta$ se afirma que la sucesión $\{X_n\}$ es tal que, sea cual sea el valor elegido para $\varepsilon > 0$ (o sea, con independencia de la amplitud del segmento MN que elijamos), la masa que hay en el segmento MN, que es la probabilidad del suceso $|X_n - \theta| \le \varepsilon$, se aproxima a 1 tanto como se quiera sin más que elegir "n" bastante grande. O sea, la distribución bidimensional de masa asociada a la variable $(X_n;U)$ tiende a concentrase en el punto $(\theta;\theta)$ de la bisectriz del primer cuadrante.

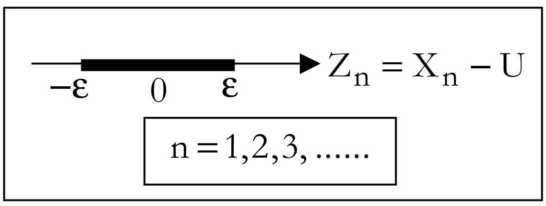




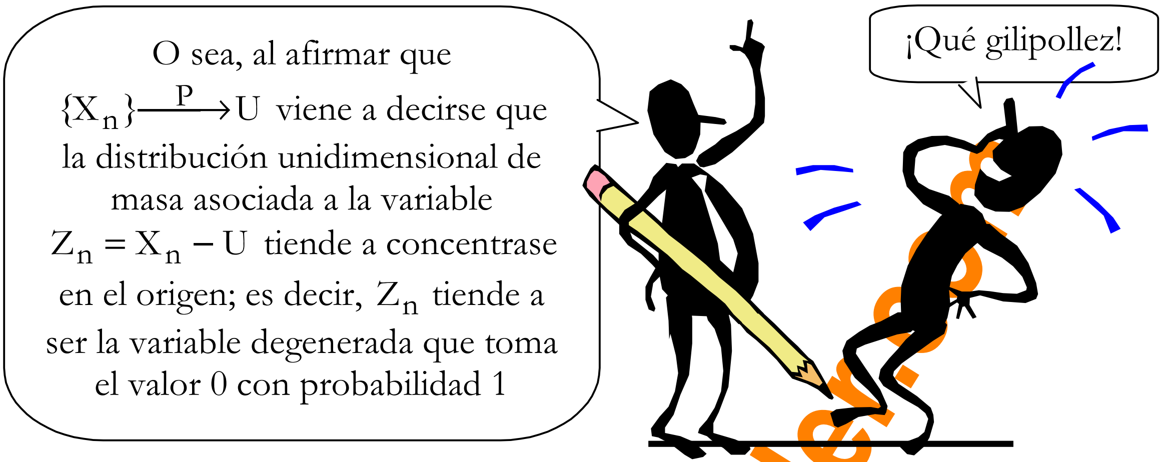
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - \theta| \le \varepsilon\right) = 1, \forall\, \varepsilon > 0}$$

Interpretación unidimensional

En la distribución unidimensional de masa de probabilidad asociada a la variable $Z_n = X_n - U$, la probabilidad del suceso $|Z_n| \equiv |X_n - U| \le \varepsilon$ es la masa que hay en el intervalo $[-\varepsilon;\varepsilon]$, cuya amplitud $2.\varepsilon$ es más pequeña cuanto más próximo a 0 sea el valor elegido para $\varepsilon > 0$. Por tanto, al afirmar que $\{X_n\} \xrightarrow{P} U$ se afirma que la sucesión $\{X_n\}$ es tal que,



sea cual sea el valor elegido para $\varepsilon > 0$ (o sea, con independencia de la amplitud del intervalo $[-\varepsilon;\varepsilon]$ que elijamos), la masa que en la distribución de probabilidad de $Z_n = X_n - U$ hay en $[-\varepsilon;\varepsilon]$, que es la probabilidad del suceso $|Z_n| \leq \varepsilon$, se aproxima a 1 tanto como se quiera sin más que elegir "n" suficientemente grande.



Propiedades

1) Si $\{X_n\} \xrightarrow{P} U \Leftrightarrow \{X_n - U\} \xrightarrow{P} 0$. En efecto:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\{X_n\} \xrightarrow{P} U$ es $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|X_n - U| > \varepsilon\right) = 0,\ \forall\ \varepsilon > 0$; así:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - U - 0| > \varepsilon\right) = 0,\ \forall\ \varepsilon > 0$$

lo que demuestra que $\{X_n - U\} \xrightarrow{P} 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\{X_n - U\} \xrightarrow{P} 0$ es $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|X_n - U - 0| > \varepsilon\right) = 0,\ \forall\ \varepsilon > 0$; así:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - U| > \varepsilon\right) = 0,\ \forall\ \varepsilon > 0$$

lo que demuestra que $\{X_n\} \xrightarrow{P} U$.

2) Si $\{X_n\} \xrightarrow{P} U$ y "g" es una función continua, entonces $\{g(X_n)\} \xrightarrow{P} g(U)$

3) Estando definidas las sucesiones $\{X_n\}$ y $\{T_n\}$ sobre el mismo espacio probabilístico, si $\{X_n\} \xrightarrow{P} U$ y $\{T_n\} \xrightarrow{P} T$, entonces:

$$\{X_n + T_n\} \xrightarrow{P} U + T \ ;\ \{X_n . T_n\} \xrightarrow{P} U.T$$

Si la sucesión $\{X_n / T_n\}$ tiene sentido, entonces $\{X_n / T_n\} \xrightarrow{P} U/T$, siempre que $P(T = 0) \neq 0$.

4) Si todas las variables que forman la sucesión $\{X_n\}$ tienen media finita y $\lim\limits_{n\to\infty} V(X_n) = 0$, entonces $\{X_n - E(X_n)\} \xrightarrow{P} 0$, pues $\forall\ \varepsilon > 0$ sucede que

$$P\left(|X_n - E(X_n) - 0| > \varepsilon\right) = P\left(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon\right) \underbrace{\leq}_{\text{Tchebychef}} \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

Así: $$0 \le \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - E(X_n) - 0| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = 0$$

lo que demuestra que $\{X_n - E(X_n)\} \xrightarrow{P} 0$.

5) Si todas las variables que forman la sucesión $\{X_n\}$ tienen la misma media "m" finita y $\lim\limits_{n\to\infty} V(X_n) = 0$, entonces $\{X_n\} \xrightarrow{P} m$, pues $\forall\ \varepsilon > 0$ sucede que

$$P\left(|X_n - m| > \varepsilon\right) \underset{\boxed{E(X_n) = m}}{=} P\left(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon\right) \underset{\boxed{\text{Tchebychef}}}{\le} \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

Así: $$0 \le \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - m| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = 0$$

lo que demuestra que $\{X_n\} \xrightarrow{P} m$.

6) Siendo "C" una constante, para que $\{X_n\} \xrightarrow{P} C$ es suficiente (no necesario) que $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = C$ y $\lim\limits_{n\to\infty} V(X_n) = 0$. En efecto, $\forall\ \varepsilon > 0$, es:

$$P\left(|X_n - C| > \varepsilon\right) = P\left((X_n - C)^2 > \varepsilon^2\right) \underset{\boxed{\text{según el teorema de Markov}}}{\le} \frac{E\left((X_n - C)^2\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$E\left((X_n - C)^2\right) = E\left(\left((X_n - E(X_n)) + (E(X_n) - C)\right)^2\right) =$$

$$= E\left((X_n - E(X_n))^2 + \underbrace{(E(X_n) - C)^2}_{\text{no aleatorio}} + 2.(X_n - E(X_n)).\underbrace{(E(X_n) - C)}_{\text{no aleatorio}}\right) =$$

$$= E\left((X_n - E(X_n))^2\right) + (E(X_n) - C)^2 + 2.E\left(X_n - E(X_n)\right).(E(X_n) - C) =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} E\left((X_n - E(X_n))^2\right) = V(X_n) \\ E\left(X_n - E(X_n)\right) = E(X_n) - E\left(E(X_n)\right) = E(X_n) - E(X_n) = 0 \end{array}}$$

$$= V(X_n) + \left(E(X_n) - C\right)^2$$

$$= \frac{V(X_n) + \left(E(X_n) - C\right)^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - C| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{V(X_n) + \left(E(X_n) - C\right)^2}{\varepsilon^2} \underset{\boxed{\text{si } \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = C \text{ y } \lim\limits_{n\to\infty} V(X_n) = 0}}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} C$$

Convergencia en media cuadrática

Diremos que la sucesión $\{X_n\}$ **converge en media de orden "r"** a la variable "U", y escribiremos $\{X_n\} \xrightarrow{r} U$, si $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(|X_n - U|^r\right) = 0$.

Diremos que $\{X_n\}$ converge a "U" en **media cuadrática** en el caso $r = 2$; es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} E((X_n - U)^2) = 0$, y escribiremos $\{X_n\} \xrightarrow{2} U$.

> Una mierdecilla de masa muy alejada del punto "Pepe" produce mucha "dispersión" respecto a "Pepe": si en el origen hay una masa 0'9999999 y la masa restante, 10^{-7}, está en el punto 10^{1000}, el momento de orden 2 de esta distribución respecto al origen (que es una medida de la dispersión de la distribución respecto al origen) es brutal, nada menos que $10^{-7}.10^{2000}$

Siendo $E((X_n - U)^2)$ el momento de orden dos de la variable $X_n - U$ respecto al origen, el valor de $E((X_n - U)^2)$ es una medida de la dispersión de la distribución de probabilidad de $X_n - U$ respecto al origen. Por tanto, al decir que $\{X_n\} \xrightarrow{2} U$ se dice que la medida de la dispersión de $X_n - U$ respecto al origen tiende a 0 si $n \to \infty$; o sea, la inmensa mayoría de la masa de la distribución de $X_n - U$ está muy próxima al origen y no hay masas (aunque sean irrelevantes) muy alejadas de él.

Relación entre las convergencias

- Si $\{X_n\} \xrightarrow{P} U \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{L} U$. El recíproco no es cierto, salvo si "X" es una variable degenerada (toma un único valor "C" con probabilidad 1).
- Si $\{X_n\} \xrightarrow{2} U \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} U$. En efecto:

$$P(|X_n - U| > \varepsilon) = P\left((X_n - U)^2 > \varepsilon^2\right) \le \frac{E\left((X_n - U)^2\right)}{\varepsilon^2} \Rightarrow$$

según el teorema de Markov

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} P(|X_n - U| > \varepsilon) \le \lim_{n\to\infty} \frac{E\left((X_n - U)^2\right)}{\varepsilon^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} E\left((X_n - U)^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} U$$

FONEMATO 1.3.1

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0;a)$. Utilizando la acotación de Tchebychef, demuéstrese que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} a$, siendo:

$$Z_n = \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv 2.(\text{Media aritmética de } X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

SOLUCIÓN

Demostraremos que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} a$ si demostramos que $\forall\, \varepsilon > 0$ sucede que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - a\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Es:

$$\boxed{E(Z_n) = E\left(\frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2} = \frac{2}{n}.n.\frac{a}{2} = a}$$

$$\boxed{X_i \approx U(0;a) \Rightarrow E(X_i) = (0+a)/2 = a/2}$$

$$P\left(\left|Z_n - a\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|Z_n - E(Z_n)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{a^2}{3.n.\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{Tchebychef}}$$

$$\boxed{\text{pues } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ son independientes}}$$

$$\boxed{V(Z_n) = V\left(\frac{2}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{4}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} \frac{a^2}{12} = \frac{4}{n^2}.n.\frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3.n}}$$

$$\boxed{X_i \approx U(0;a) \Rightarrow V(X_i) = (a-0)^2/12 = a^2/12}$$

Por tanto $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - a\right| > \varepsilon\right) \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^2}{3.n.\varepsilon^2} = 0$, lo que demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - a\right| > \varepsilon\right) = 0$$

FONEMATO 1.3.2

1) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con las misma distribución de probabilidad, con media μ y varianza σ^2, ambas finitas. Utilizando la acotación de Tchebychef, demuéstrese que $\{Z_n\}\xrightarrow{P}\mu$, siendo Z_n la media aritmética de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
2) Razónese si la anterior demostración es cierta si sólo exigimos que las variables de la sucesión $\{X_n\}$ sean incorreladas, no necesariamente igualmente distribuidas, aunque todas con la misma media y la misma varianza finitas.

SOLUCIÓN

1) Sea $Z_n = \frac{1}{n}.\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \equiv$ Media aritmética de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Demostraremos que $\{Z_n\}\xrightarrow{P}\mu$ si demostramos que $\forall\, \varepsilon > 0$ sucede que

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|Z_n - \mu| > \varepsilon\big) = 0$$

Es:

$$\boxed{E(Z_n) = E\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{\boxed{E(X_i)=\mu,\ \forall\, i=1,2,\ldots,n}}{=} \frac{1}{n}.n.\mu = \mu}$$

$$P\big(|Z_n - \mu| > \varepsilon\big) = P\big(|Z_n - E(Z_n)| > \varepsilon\big) \underset{\boxed{\text{Techebychef}}}{\leq} \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n.\varepsilon^2}$$

$$\boxed{V(Z_n) = V\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{\boxed{\text{pues } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ son independientes}}}{=} \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \underset{\boxed{V(X_i)=\sigma^2,\ \forall\, i=1,2,\ldots,n}}{=} \frac{1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$$

Por tanto, es $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} P\big(|Z_n - \mu| > \varepsilon\big) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n.\varepsilon^2} = 0$, lo que demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(|Z_n - \mu| > \varepsilon\big) = 0$.

2) Si las variables de la sucesión $\{X_n\}$ son incorreladas, aunque no tengan la misma distribución de probabilidad, si todas tienen la misma media μ y la misma varianza σ^2 (ambas finitas), es:

$$E(Z_n) = \mu \;;\; V(Z_n) \underset{\boxed{\text{pues } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ son incorreladas}}}{=} \sigma^2/n$$

Así, la demostración hecha en 1) sigue siendo válida.

FONEMATO 1.3.3

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas densidad

$$f(x) = e^{-(x-\lambda)},\ x > \lambda$$

Demuéstrese que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} \lambda$, siendo $Z_n = \text{mín.}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

SOLUCIÓN

Demostraremos que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} \lambda$ demostrando que $\forall\ \varepsilon > 0$ sucede que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - \lambda\right| > \varepsilon\right) = 0$$

En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|Z_n - \lambda\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \left(P(Z_n < \lambda - \varepsilon) + P(Z_n > \lambda + \varepsilon)\right) =$$

$P(Z_n < \lambda - \varepsilon) = 0$, pues como $X_1, X_2, \ldots, X_n$ no toman valores inferiores a λ, entonces $Z_n = \text{mín.}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ no toma valores inferiores a λ

$$= \lim_{n\to\infty} P(Z_n > \lambda + \varepsilon) =$$

como $Z_n = \text{mín.}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, será $Z_n > \lambda + \varepsilon$ sólo si $X_i > \lambda + \varepsilon,\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X_1 > \lambda + \varepsilon; X_2 > \lambda + \varepsilon; \ldots; X_n > \lambda + \varepsilon) =$$

pues $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes y todas tienen la misma distribución de probabilidad

$$= \lim_{n\to\infty} \left(P(X_i > \lambda + \varepsilon)\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\lambda+\varepsilon}^{+\infty} e^{-(x-\lambda)}.dx\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(-e^{-(x-\lambda)}\right)_{\lambda+\varepsilon}^{+\infty}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-\varepsilon} - e^{-\infty}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{-n.\varepsilon} = 0$$

FONEMATO 1.3.4

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores 1 y 0 con probabilidades respectivas $1/n$ y $1 - 1/n$. Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$. ¿Qué ocurre con la convergencia de la funciones de distribución de las variables que forman la sucesión?

SOLUCIÓN

- Demostraremos que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$ si demostramos que $\forall\ \varepsilon > 0$ sucede que

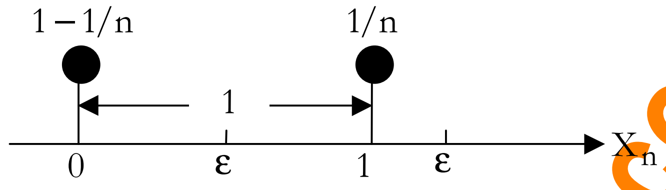
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - 0\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Es:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \left(P(X_n < -\varepsilon) + P(X_n > \varepsilon)\right) =$$

$\boxed{P(X_n < -\varepsilon) = 0, \text{ pues } X_n \text{ no toma valores negativos}}$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) = \begin{cases} \boxed{\text{si } \varepsilon < 1} = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \\ \boxed{\text{si } \varepsilon \geq 1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \end{cases}$$



Si $\varepsilon < 1$, la probabilidad del suceso $X_n > \varepsilon$ es $1/n$

Si $\varepsilon \geq 1$, la probabilidad del suceso $X_n > \varepsilon$ es 0

- También puedes lidiar teniendo en cuenta que, si "C" es una constante, para que $\{X_n\} \xrightarrow{P} C$ es suficiente (no necesario) que:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = C \ ; \ \lim_{n\to\infty} V(X_n) = 0$$

En nuestro caso $C = 0$, siendo:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

$$\boxed{E(X_n) = 0.P(X_n = 0) + 1.P(X_n = 1) = 1/n}$$

$$\lim_{n\to\infty} V(X_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = \\ = \left(0^2.P(X_n = 0) + 1^2.P(X_n = 1)\right) - (1/n)^2 = (1/n) - (1/n)^2 \end{gathered}}$$

- La función de distribución de X_n es $F_n(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - 1/n & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Por tanto: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \begin{Bmatrix} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - 1/n & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{Bmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

que es la función de distribución de una variable degenerada que concentra toda la masa de probabilidad en el punto $x = 0$.

FONEMATO 1.3.5

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores 0 y n^2 con probabilidades respectivas $1 - 1/n$ y $1/n$. Demuéstrese que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$.

SOLUCIÓN

Demostraremos que $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$ si demostramos que $\forall\ \varepsilon > 0$ sucede que

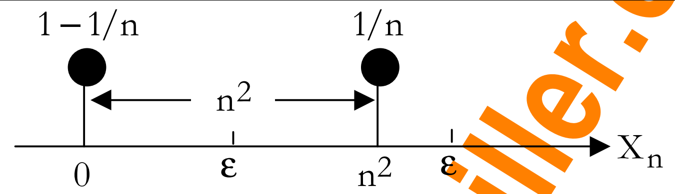
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - 0\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Es:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - 0\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \left(P(X_n < -\varepsilon) + P(X_n > \varepsilon)\right) =$$

$\boxed{P(X_n < -\varepsilon) = 0, \text{ pues } X_n \text{ no toma valores negativos}}$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) = \begin{cases} \boxed{\text{si } \varepsilon < n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0 \\ \boxed{\text{si } \varepsilon \geq n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 \end{cases}$$



Si $\varepsilon < n^2$, la probabilidad del suceso $X_n > \varepsilon$ es $1/n$

Si $\varepsilon \geq n^2$, la probabilidad del suceso $X_n > \varepsilon$ es 0

Observa: sabemos que si "C" es una constante, para que $\{X_n\} \xrightarrow{P} C$ es suficiente que:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = C \ ; \ \lim_{n\to\infty} V(X_n) = 0$$

La sucesión dada $\{X_n\}$ demuestra que las anteriores condiciones **no son necesarias,** pues $\{X_n\} \xrightarrow{P} 0$ y sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \neq 0$$

$\boxed{E(X_n) = 0.P(X_n = 0) + n^2.P(X_n = n^2) = n^2.(1/n) = n}$

FONEMATO 1.3.6

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, tomando X_n valores "a" y $a+n.b$ $(b\neq 0)$ con probabilidades respectivas $1-1/n$ y $1/n$.

1) Demuéstrese que $\{X_n\}\xrightarrow{P} a$.

2) Estúdiese si $\{X_n\}\xrightarrow{2} a$.

SOLUCIÓN

1) Demostraremos que $\{X_n\}\xrightarrow{P} a$ si demostramos que $\forall\ \varepsilon>0$ sucede que

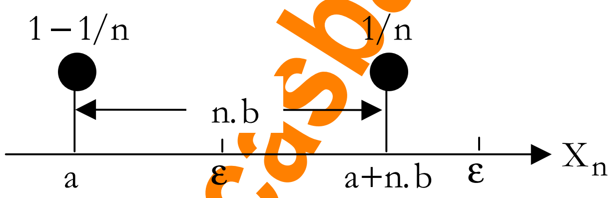
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-a|>\varepsilon)=0$$

Es:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-a|>\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\left(P(X_n<a-\varepsilon)+P(X_n>a+\varepsilon)\right)=$$

$\boxed{P(X_n<a-\varepsilon)=0\text{, pues la variable } X_n \text{ no toma valores menores que "a"}}$

$$=\lim_{n\to\infty} P(X_n>\varepsilon)=\begin{cases}\boxed{\text{si } \varepsilon<n.b} = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n=0\\ \boxed{\text{si } \varepsilon\geq n.b} = \lim\limits_{n\to\infty} 0=0\end{cases}$$



Si $\varepsilon<n.b$, la probabilidad del suceso $X_n>\varepsilon$ es $1/n$

Si $\varepsilon\geq n.b$, la probabilidad del suceso $X_n>\varepsilon$ es 0

Observa: sabemos que si "a" es una constante, para que $\{X_n\}\xrightarrow{P} a$ es suficiente que:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n)=a\ ;\ \lim_{n\to\infty} V(X_n)=0$$

La sucesión dada $\{X_n\}$ demuestra que las anteriores condiciones **no son necesarias,** pues $\{X_n\}\xrightarrow{P} a$ y sin embargo $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)\neq a$:

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n)=\lim_{n\to\infty}(a+b)=a+b\neq a$$

$$\boxed{\begin{aligned}E(X_n)&=a.P(X_n=a)+(a+n.b).P(X_n=a+n.b)=\\&=a.(1-\frac{1}{n})+(a+n.b).\frac{1}{n}=a+b\end{aligned}}$$

2) $\{X_n\} \xrightarrow{\;2\;} a$ si $\lim\limits_{n\to\infty} E\big((X_n-a)^2\big)=0$. Es:

$$\lim_{n\to\infty} E\big((X_n-a)^2\big)=\lim_{n\to\infty} E\big(X_n^2-2.a.X_n+a^2\big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\big(E(X_n^2)-2.a.E(X_n)+a^2\big)=$$

$$\boxed{\begin{array}{c} * \; E(X_n)=a+b \\ * \; E(X_n^2)=a^2.P(X_n=a)+(a+n.b)^2.P(X_n=a+n.b)= \\ =a^2.(1-\frac{1}{n})+(a+n.b)^2.\frac{1}{n}=a^2+2.a.b+n.b^2 \end{array}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\big(a^2+2.a.b+n.b^2-2.a.(a+b)+a^2\big)=\lim_{n\to\infty} n.b^2=\infty$$

Por tanto, la sucesión $\{X_n\}$ no converge a "a" en media cuadrática.

FONEMATO 1.3.7

Siendo $Z \approx U(-1;1)$, sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$X_n = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < Z < -1/n \\ 0 & \text{si } -1/n < Z < 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n < Z < 1 \end{cases}$$

1) Calcúlese la función de distribución de X_n. A partir de ella, demuestre que la sucesión dada converge en ley a cualquier variable aleatoria que tome los valores -1 y 1 de modo equiprobable.

2) Sea "W" la variable aleatoria tal que $W = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < Z < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < Z < 1 \end{cases}$

Pruébese que $\{X_n\} \xrightarrow{L} W$ y que $\{X_n\} \xrightarrow{2} W$ -

SOLUCIÓN

1) Siendo $Z \approx U(-1;1)$, su función de densidad es

$$f(z) = 1/2, \; -1 < z < 1$$

Por tanto:

$$P(X_n = -1) = P(-1 < Z < -1/n) = \int_{-1}^{-1/n} f(z).dz = \dots = (n-1)/2.n$$

$$P(X_n = 0) = P(-1/n < Z < 1/n) = \int_{-1/n}^{1/n} f(z).dz = \dots = 1/n$$

$$P(X_n = 1) = P(1/n < Z < 1) = \int_{1/n}^{1} f(z).dz = \dots = (n-1)/2.n$$

Así, la función de cuantía de la variable X_n es:

x	-1	0	1
$P(X_n = x)$	$(n-1)/2.n$	$1/n$	$(n-1)/2.n$

La función de distribución de X_n es:

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (n-1)/2.n & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ (n+1)/2.n & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Es:

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < -1 \\ (n-1)/2.n & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ (n+1)/2.n & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

que es la función de distribución de una variable aleatoria que toma los valores -1 y 1 de modo equiprobable.

2) Para probar que $\{X_n\} \xrightarrow{L} W$ basta probar que "W" es una variable que toma los valores -1 y 1 de modo equiprobable. Es:

$$P(W=-1)=P(-1<Z<0)=\int_{-1}^{0} f(z).dz = ... = 1/2$$
$$P(W=1)=P(0<Z<1)=\int_{0}^{2} f(z).dz = ... = 1/2$$

- Probaremos que $\{X_n\} \xrightarrow{2} W$ probando que $\lim\limits_{n\to\infty} E\left((X_n - W)^2\right) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} E\left((X_n - W)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$E\left((X_n - W)^2\right) = (-1-(-1))^2.P(X_n=-1; W=-1) +$$

W/X_n	-1	0	1
-1 1	"W" y X_n no son independientes, pues ambas están determinadas por el valor de "Z"		

$$+(-1-1)^2.P(X_n=-1; W=1) + (0-(-1))^2.P(X_n=0; W=-1) +$$
$$+(0-1)^2.P(X_n=0; W=1) + (1-(-1))^2.P(X_n=1; W=-1) +$$
$$+(1-1)^2.P(X_n=1; W=1) =$$
$$= 4.P(X_n=-1; W=1) + P(X_n=0; W=-1) +$$
$$+P(X_n=0; W=1) + 4.P(X_n=1; W=-1) =$$
$$= 4.P(-1<Z<-1/n\,;\,0<Z<1) + P(-1/n<Z<1/n\,;\,-1<Z<0) +$$
$$+P(-1/n<Z<1/n\,;\,0<Z<1) + 4.P(1/n<Z<1\,;\,-1<Z<0) =$$

el primer sumanando es 0, pues los sucesos $-1<Z<-1/n$ y $0<Z<1$ son incompatibles; el cuarto sumando es 0, pues los sucesos $1/n<Z<1$ y $-1<Z<0$ son incompatibles

$$= P(-1/n<Z<1/n\,;\,-1<Z<0) + P(-1/n<Z<1/n\,;\,0<Z<1) =$$

la intersección de los sucesos $-1/n<Z<1/n$ y $-1<Z<0$ es el suceso $-1/n<Z<0$; la intersección de los sucesos $-1/n<Z<1/n$ y $0<Z<1$ es el suceso $0<Z<1/n$

$$= P(-1/n<Z<0) + P(0<Z<1/n) =$$
$$= \int_{-1/n}^{0} \frac{1}{2}.dz + \int_{0}^{1/n} \frac{1}{2}.dz = ... = \frac{1}{n}$$

1.4 TEOREMA DE BERNOUILLI

La frecuencia relativa de un suceso converge en probabilidad a la probabilidad del suceso.

En efecto, llamando "éxito" al suceso de que como resultado del experimento ocurra el suceso "A", si $P(A)=p$, la variable T_n que expresa el aleatorio número de "éxitos" al repetir el experimento "n" veces tiene distribución $B(n;p)$, y la variable $Z_n = T_n/n$ expresa la aleatoria frecuencia relativa del suceso "A" al repetir el experimento "n" veces.

Así, $\forall\ \varepsilon > 0$, es:

$$\boxed{T_n \approx B(n;p) \Rightarrow E(T_n) = n.p \Rightarrow E(Z_n) = E(T_n/n) = E(T_n)/n = p}$$

$$P\big(|Z_n - p| > \varepsilon\big) = P\big(|Z_n - E(Z_n)| > \varepsilon\big) \le \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p.(1-p)}{n.\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{Tchebychef}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} T_n \approx B(n;p) \Rightarrow V(T_n) = n.p.(1-p) \Rightarrow \\ \Rightarrow V(Z_n) = V(T_n/n) = V(T_n)/n^2 = p.(1-p)/n \end{array}}$$

Por tanto:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} P\big(|Z_n - p| > \varepsilon\big) \le \lim_{n\to\infty} \frac{p.(1-p)}{n.\varepsilon^2} = 0$$

lo que demuestra que $\{Z_n\} \xrightarrow{P} p$.

Utilidad del teorema de Bernouilli

En un experimento aleatorio, siendo "A" un suceso tal que $P(A)=p$, queremos determinar el número "n" de veces que debe repetirse el experimento para que no sea superior a α la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "A" se diferencie de "p" en un cantidad superior a ε; es decir, buscamos "n" tal que $P\big(|Z_n - p| > \varepsilon\big) \le \alpha$.

Obviamente, como $P\big(|Z_n - p| > \varepsilon\big) \le p.(1-p)/(n.\varepsilon^2)$, será

$$P\big(|Z_n - p| > \varepsilon\big) \le p.(1-p)/(n.\varepsilon^2) \le \alpha$$

siempre que $n \ge p.(1-p)/\alpha.\varepsilon^2$.

Por ejemplo, si $p = 0'2, \varepsilon = 0'1$ y $\alpha = 0'01$, será $P\big(|Z_n - 0'2| > 0'1\big) \le 0'01$ siempre que $n \ge 0'2.(1-0'2)/(0'01.0'1^2) = 1600$.

Si desconocemos el valor de "p" acotaremos el producto $p.(1-p)$ con la menor de sus cotas superiores, que es $1/4$; por tanto, será $P\big(|Z_n - p| > \varepsilon\big) \le \alpha$ siempre que $n \ge 1/(4.\alpha.\varepsilon^2) \ge p.(1-p)/(\alpha.\varepsilon^2)$.

Por ejemplo, si $\varepsilon = 0'1$ y $\alpha = 0'01$, será

$$P\left(\left|Z_n - p\right| > 0'1\right) \leq 0'01$$

si $n \geq 1/(4.0'01.0'1^2) \geq p.(1-p)/(0'01.0'1^2)$, es decir, si $n \geq 2500$.

> Si $g(p) = p.(1-p) \Rightarrow g'(p) = 1 - 2.p$ es nula si $p = 1/2$, y como $g''(1/2) = -2 < 0$, el valor de $g(p) = p.(1-p)$ es máximo si $p = 1/2$, siendo $g(1/2) = 1/4$.

FONEMATO 1.4.1

Determínese el número "n" de veces que debe lanzarse una moneda para que no sea inferior a 0'8 la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "cara" esté comprendida entre 0'45 y 0'55. ¿Cuántas veces debe lanzarse la moneda para que no sea inferior a 0'9 la probabilidad de que la frecuencia relativa del suceso "cara" esté comprendida entre 0'49 y 0'51?

SOLUCIÓN

- Llamando "éxito" al suceso "obtener cara", si $P(\text{éxito}) = 0'5$, la variable X_i que expresa el número de "éxitos" (0 ó 1) en el i-ésimo lanzamiento tiene distribución de Bernouilli de parámetro 0'5, y la variable $T_n = X_1 + ... + X_n$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en "n" lanzamientos tiene distribución $B(n;0'5)$, supuesto que $X_1, ..., X_n$ son independientes. Obviamente, la variable $Z_n = X_n/n$ expresa la aleatoria frecuencia relativa del suceso "cara" en "n" lanzamientos la moneda, y se nos pide que determinemos "n" de modo que $P(0'45 < Z_n < 0'55) \geq 0'8$; es:

$$P(0'45 < Z_n < 0'55) = P(|Z_n - 0'5| < 0'05) =$$

$$\boxed{T_n \approx B(n;0'5) \Rightarrow E(T_n) = 0'5.n \Rightarrow E(Z_n) = E(T_n/n) = E(T_n)/n = 0'5}$$

$$= P(|Z_n - E(Z_n)| < 0'05) \underset{\boxed{\text{Tchebychef}}}{\geq} 1 - \frac{V(Z_n)}{0'05^2} = 1 - \frac{0'5^2/n}{0'05^2} \geq 0'8 \Rightarrow$$

$$\boxed{T_n \approx B(n;0'5) \Rightarrow V(T_n) = 0'5^2.n \Rightarrow V(Z_n) = V(T_n/n) = V(T_n)/n^2 = 0'5^2/n}$$

$$\Rightarrow \frac{0'5^2/n}{0'05^2} \leq 0'2 \Rightarrow n \geq \frac{0'5^2}{0'05^2.0'2} = 500$$

Aunque es menos elegante, puedes aplicar la receta del teorema de Bernouilli: si Z_n expresa la aleatoria frecuencia relativa del suceso "éxito" en "n" experimentos de Bernouilli independientes y todos con probabilidad "p" de "éxito" conocida, es $P(|Z_n - p| > \varepsilon) \leq p.(1-p)/n.\varepsilon^2$.

Por tanto, ocurre que $P(|Z_n - p| > \varepsilon) \leq p.(1-p)/n.\varepsilon^2 \leq \alpha$ si $n \geq p.(1-p)/\alpha.\varepsilon^2$. En nuestro caso es $p = 0'5$, $\varepsilon = 0'05$ y $\alpha = 0'2$.

- Determinemos "n" de modo que $P(0'49 < Z_n < 0'51) \geq 0'9$:

$$P(0'49 < Z_n < 0'51) = P(|Z_n - 0'5| < 0'01) =$$

$$= P(|Z_n - E(Z_n)| < 0'01) \geq 1 - \frac{V(Z_n)}{0'01^2} = 1 - \frac{0'5^2/n}{0'01^2} \geq 0'9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0'5^2/n}{0'01^2} \leq 0'1 \Rightarrow n \geq \frac{0'5^2}{0'01^2.0'1} = 2500$$

FONEMATO 1.4.2

La probabilidad de tránsitos en un aeropuerto se desconoce. Para estudiar la rentabilidad de una instalación hotelera en el aeropuerto, se estima dicha probabilidad mediante la frecuencia relativa de tránsitos respecto al total de viajeros del aeropuerto. Determínese el número "n" de pasajeros que deben observarse si se quiere que no sea mayor que 0'05 la probabilidad de que la desviación entre la frecuencia relativa de tránsitos y la probabilidad desconocida sea superior a 0'06.

SOLUCIÓN

Llamando "éxito" al suceso de que un pasajero esté en tránsito, si $P(\text{éxito}) = p$, la variable X_i que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) con el i-ésimo pasajero tiene distribución de Bernouilli de parámetro "p", y la variable $T_n = X_1 + ... + X_n$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" entre "n" pasajeros tiene distribución $B(n;p)$, supuesto que $X_1, ... , X_n$ son independientes.

Obviamente, la variable $Z_n = X_n/n$ expresa la aleatoria frecuencia relativa de pasajeros en tránsito entre "n" pasajeros, y se nos pide que determinemos "n" de modo que $P\left(|Z_n - p| > 0'06\right) \le 0'05$; es:

$$\boxed{T_n \approx B(n;p) \Rightarrow E(T_n) = n.p \Rightarrow E(Z_n) = E(T_n/n) = E(T_n)/n = p}$$

$$P\left(|Z_n - p| > 0'06\right) = P\left(|Z_n - E(Z_n)| > 0'06\right) \le \frac{V(Z_n)}{0'06^2} =$$

$$\boxed{\text{Tchebychef}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} T_n \approx B(n;p) \Rightarrow V(T_n) = n.p.(1-p) \Rightarrow \\ \Rightarrow V(Z_n) = V(T_n/n) = V(T_n)/n^2 = p.(1-p)/n \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{p.(1-p)/n}{0'06^2} \le 0'05 \Rightarrow n \ge \frac{p.(1-p)}{0'06^2.0'05} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{como desconocemos "p", no hay más remedio que acotar} \\ \text{el producto } p.(1-p) \text{ mediante la menor de sus cotas superiores,} \\ \text{que es } 1/4 \text{, pues } \forall\ p \in (0;1) \text{ es } p.(1-p) \le 1/4 \end{array}}$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{1/4}{0'06^2.0'05} \ge \frac{p.(1-p)}{0'06^2.0'05} \Rightarrow n \ge 1389 \ge \frac{p.(1-p)}{0'06^2.0'05}$$

Aunque es menos elegante, puedes aplicar la receta del teorema de Bernouilli: si Z_n expresa la aleatoria frecuencia relativa del suceso "éxito" en "n" experimentos de Bernouilli independientes y todos con probabilidad "p" de "éxito" desconocida, es $P\left(|Z_n - p| > \varepsilon\right) \le p.(1-p)/n.\varepsilon^2$.

Por tanto, ocurre que $P\left(|Z_n - p| > \varepsilon\right) \le p.(1-p)/n.\varepsilon^2 \le \alpha$ si $n \ge 1/(4.\alpha.\varepsilon^2) \ge p.(1-p)/\alpha.\varepsilon^2$. En nuestro caso es $\varepsilon = 0'06$ y $\alpha = 0'05$.

1.5 TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Se dice que la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ verifica el teorema Central del Límite si la correspondiente sucesión de variables tipificadas converge en ley a la variable N(0;1), o lo que es igual, la sucesión $\{X_n\}$ converge en ley a la normal con media y varianza las de X_n.

1.6 TEOREMA DE LINDEBERG-LEVY

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media μ y la misma varianza σ^2 (ambas finitas). Sea $\{S_n\}$ la sucesión de variables aleatorias tales que

$$S_1 = X_1 \;;\; S_2 = X_1 + X_2 \;;\; \ldots.. \;;\; S_n = X_1 + X_2 + \ldots. + X_n \;;\; \ldots..$$

- Lindeberg-Levy demostraron que la sucesión $\{S_n\}$ verifica el teorema Central del Límite; es decir: $\left\{(S_n - E(S_n))/\sqrt{V(S_n)}\right\} \xrightarrow{L} N(0;1)$, o lo que es igual:

  $$\{S_n\} \xrightarrow{L} N(E(S_n);\sqrt{V(S_n)})$$

  Esto significa que cuando "n" es grande (≥ 30), la distribución de probabilidad de la variable $S_n = X_1 + X_2 + \ldots. + X_n$ puede aproximarse mediante la normal con media y varianza las de S_n, que son:

  $$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n.\mu \;;\; V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n.\sigma^2$$

  $$\boxed{E(X_i) = \mu, \forall\, i = 1,2, \ldots. ,n} \quad \boxed{V(X_i) = \sigma^2, \forall\, i = 1,2, \ldots. ,n}$$

  Por tanto, si "n" es grande (≥ 30), la distribución de probabilidad de la variable $S_n = X_1 + X_2 + \ldots. + X_n$ puede aproximarse mediante la $N(n.\mu;\sigma.\sqrt{n})$.

- También verifica el teorema Central del Límite la sucesión $\{\overline{X}_n\}$, siendo

  $$\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \ldots. + X_n)/n \equiv \text{Media aritmética de } X_1, \ldots. ,X_n$$

  o sea:

  $$\{\overline{X}_n\} \xrightarrow{L} N(E(\overline{X}_n);\sqrt{V(\overline{X}_n)}) = N(\mu;\sigma/\sqrt{n})$$

  $$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mu \;;\; V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

  $$\boxed{E(X_i) = \mu, \forall\, i = 1,2, \ldots. ,n} \quad \boxed{V(X_i) = \sigma^2, \forall\, i = 1,2, \ldots. ,n}$$

El que así sean las cosas es un estupendo chollo, pues a partir de ahora serán incontables las veces que trabajaremos con la suma o la media aritmética de un elevado número de variables independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, la misma media y la misma varianza

FONEMATO 1.6.1

El número de muertos cada minuto a causa del hambre en una región alejada de nuestro idílico primer mundo tiene distribución de Poisson de parámetro 40, con independencia unos minutos de otros. Calcúlese la probabilidad de que durante el día de Nochebuena mueran de hambre no menos de 28800 personas en esa región. ¿Qué cota de muertos se superará ese día con probabilidad 0'95?

SOLUCIÓN

Si $X_i \approx P(40)$ expresa el aleatorio número muertos durante el i-ésimo minuto del día de Nochebuena, la variable aleatoria $X = X_1 + ... + X_{1440}$ expresa el número de muertos en los 1440 minutos de ese día, y $X = X_1 + ... + X_{1440} \approx P(57600)$, pues si las variables independientes $X_1, ... , X_k$ tienen distribución de Poisson de parámetros respectivos $\lambda_1, ... , \lambda_k$, la suma de ellas tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 + ... + \lambda_k$. La función de probabilidad de $X \approx P(57600)$ es:

$$P(X = x) = e^{-57600}.57600^x / x!,\ x = 0,1,2 ......$$

Así, la probabilidad de que el día de Nochebuena mueran de hambre no menos de 28800 personas en esa región, es:

$$P(X \geq 28800) = 1 - P(X \leq 28799) = 1 - \sum_{x=0}^{28799} \frac{e^{-57600}.57600^x}{x!}$$

Naturalmente, a cualquiera se le hiela la sangre al pensar en calcular tan espantosa suma, por ello estamos enormemente agradecidos a Lindeberg-Levy: **como "X" es suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X",** que son $E(X) = 57600$ y $V(X) = 57600$ (si $X \approx P(\theta)$ es $E(X) = V(X) = \theta$). Así:

$$P(X \geq 28800) \cong P\left(N(57600;\sqrt{57600}) \geq 28799'5\right) = ...$$

CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD
Al aproximar la distribución discreta $X \approx P(57600)$ mediante la $N(57600;\sqrt{57600})$, consideramos que la "masa puntual" que tiene $X \approx P(57600)$ en el punto 28800 se corresponde con la "masa continua" que tiene la $N(57600;\sqrt{57600})$ en el intervalo $(28799'5;28800'5)$. Como la probabilidad del suceso $X = 28800$ debe sumarse, al trabajar con la normal consideramos la masa de probabilidad que hay a la derecha del punto 28799'5

- Hay que determinar "c" de modo que $P(X \geq c) = 0'95$:

$$P(X \geq c) \cong P\left(N(57600;\sqrt{57600}) \geq c - 0'5\right) =$$

$$= P\left(N(0;1) \geq \frac{c - 0'5 - 57600}{\sqrt{57600}}\right) = 0'95 \Rightarrow \frac{c - 0'5 - 57600}{\sqrt{57600}} = -1'645$$

FONEMATO 1.6.2

Con independencia unos días de otros, la aleatoria demanda diaria de vino (en litros) en un bar tiene distribución uniforme en el intervalo $(20;40)$. Calcúlese la probabilidad de que en 182 días se vendan más de 6370 litros de vino.

SOLUCIÓN

Si $X_i \approx U(20;40)$ expresa la aleatoria demanda de vino el i-ésimo día, la variable $X = X_1 + X_2 + ... + X_{182}$ expresa la aleatoria venta total durante 182 días.

Se nos pide la probabilidad del suceso $X > 6370$, lo que es bastante imposible si se desconoce la distribución de probabilidad de "X". Por eso firmamos con gusto para que a **Lindeberg-Levy** les hagan un monumento en su pueblo: **como "X" es suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con igual distribución de probabilidad, con igual media** $(E(X_i) = (20+40)/2 = 30)$ **y la misma varianza** $(V(X_i) = (40-20)^2/12 = 100/3)$, **podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X",** que son:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{182} X_i\right) = \sum_{i=1}^{182} E(X_i) = 182.E(X_i) = 5460$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{182} X_i\right) = \sum_{i=1}^{182} V(X_i) = 182.V(X_i) = 18200/3$$

Así:

$$P(X > 6370) \cong P\left(N(5460;\sqrt{18200/3}) > 6370\right) = P\left(N(0;1) > \frac{6370-5460}{\sqrt{18200/3}}\right) = ...$$

FONEMATO 1.6.3

Al lanzar un dado 500 veces ganamos 100 \$ por punto si sale cara par, y perdemos 100 \$ por punto si sale cara impar. Calcúlese la probabilidad de ganar menos de 23000 \$.

SOLUCIÓN

La función de probabilidad o cuantía de la variable X_i que expresa el aleatorio resultado del i-ésimo lanzamiento del dado es:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X_i = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Si ganamos 100 \$ por punto si sale cara par y perdemos 100 \$ por punto si sale cara impar, siendo Z_i la variable que expresa el aleatorio beneficio obtenido en el i-ésimo lanzamiento, es claro que

X_i	1 $\Downarrow$	2 $\Downarrow$	3 $\Downarrow$	4 $\Downarrow$	5 $\Downarrow$	6 $\Downarrow$
Z_i	−100	200	−300	400	−500	600

Por tanto, la función de cuantía de la variable Z_i es:

z	-500	-300	-100	200	400	600
$P(Z_i = z)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Obviamente, el aleatorio beneficio obtenido tras lanzar el dado 500 veces está expresado por la variable $Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_{500}$.

Se nos pide la probabilidad del suceso $Z > 23000$, lo que es bastante imposible sin calcular previamente la distribución de probabilidad de la variable "Z". Por eso, como es de bien nacidos ser agradecidos, postulamos para que **Lindeberg-Levy** sean elevados a los altares: **como "Z" es suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "Z" mediante la normal con media y varianza las de "Z",** que son:

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^{500} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{500} E(Z_i) = 500.E(Z_i) = 25000$$

$$\boxed{E(Z_i) = -\frac{500}{6} - \frac{300}{6} - \frac{100}{6} + \frac{200}{6} + \frac{400}{6} + \frac{600}{6} = 50}$$

$$V(Z) = V\left(\sum_{i=1}^{500} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{500} V(Z_i) = 500.V(Z_i) = 500.149167$$

$$V(Z_i) = E(Z_i^2) - (E(Z_i))^2 = \frac{910000}{6} - 50^2 = 149167$$

$$\boxed{E(Z_i^2) = \frac{500^2}{6} + \frac{300^2}{6} + \frac{100^2}{6} + \frac{200^2}{6} + \frac{400^2}{6} + \frac{600^2}{6} = 910000/6}$$

Por tanto:

$$P(Z < 23000) \cong P\left(N(25000;\sqrt{500.149167}) < \underbrace{22950}\right) =$$

CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

Siendo 22900 y 23100 los valores anterior y posterior a 23000 que puede tomar "Z", consideramos que la "masa puntual" que tiene "Z" en el punto 23000 se corresponde con la "masa continua" que tiene la $N(25000;\sqrt{500.149167})$ en el intervalo $(22950;23050)$. Por tanto, como la probabilidad del suceso $Z = 23000$ no debe sumarse, al trabajar con la normal sólo consideramos la masa de probabilidad que hay a la izquierda del punto 22950

$$= P\left(N(0;1) < \frac{22950 - 25000}{\sqrt{500.149167}}\right) = ...$$

FONEMATO 1.6.4

Con independencia unos de otros, el tiempo de espera de un cliente en la cola de un banco tiene distribución exponencial de parámetro 0'05. Calcúlese la probabilidad de que el tiempo medio de espera de 2 clientes sea superior a 21, y la probabilidad de que el tiempo medio de espera de 100 clientes sea superior a 21.

SOLUCIÓN

- Si $X_i \approx \text{Exp.}(0'05)$ expresa el aleatorio tiempo de espera del i-ésimo cliente, el aleatorio tiempo medio de espera de 2 clientes está expresado por la variable $W = Z/2$, siendo $Z = X_1 + X_2$. Es:

$$P(W > 21) = P(Z/2 > 21) = P(Z > 42) =$$

$$= \int_{42}^{+\infty} \frac{0'05^2}{\Gamma(2)}.z^{2-1}.e^{-0'05.z}.dz = ... = 0'3796$$

Como $X_1 \approx \text{Exp.}(0'05) = G(1;0'05)$ y $X_2 \approx \text{Exp.}(0'05) = G(1;0'05)$ son independientes, entonces $Z = X_1 + X_2 \approx G(1+1;0'05) = G(2;0'05)$; así, la densidad de "Z" es $f(z) = \frac{0'05^2}{\Gamma(2)}.z^{2-1}.e^{-0'05.z}$, $z > 0$

- El aleatorio tiempo medio de espera de 100 clientes está expresado por la variable $X = T/100$, siendo $T = X_1 + ... + X_{100}$. Es:

$$P(X > 21) = P(T/100 > 21) = P(T > 2100) =$$

$$= \int_{2100}^{+\infty} \frac{0'05^{100}}{\Gamma(100)}.t^{100-1}.e^{-0'05.t}.dz = \text{inf umable}$$

$T = X_1 + ... + X_{100} \approx G(100;0'05)$; así, la densidad de "T" es $g(t) = \frac{0'05^{100}}{\Gamma(100)}.t^{100-1}.e^{-0'05.t}$, $t > 0$

Como "X" es la media aritmética de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son:

$$E(X) = E\left(\frac{1}{100}.\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100}.\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \frac{1}{100}.100.20 = 20$$

$$\boxed{E(X_i) = 20 \ ; \ V(X_i) = 400}$$

$$V(X) = V\left(\frac{1}{100}.\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100^2}.\sum_{i=1}^{100} V(X_i) = \frac{1}{100^2}.100.400 = 4$$

Por tanto:

$$P(X > 21) \cong P\left(N(20;\sqrt{4}) > 21\right) = P\left(N(0;1) > \frac{21-20}{2}\right) = 0'3085$$

FONEMATO 1.6.5

Con independencia unos días de otros, el aleatorio número de casos de corrupción que se descubren cada día tiene distribución de Poisson de parámetro 4. Calcúlese la probabilidad de que el número medio de casos de corrupción en dos días sea superior a 4'5, y la probabilidad de que el número medio de casos de corrupción en 100 días sea superior a 4'5,

SOLUCIÓN

- Si $X_i \approx P(4)$ expresa el aleatorio número de casos de corrupción que se descubren el i-ésimo día, el aleatorio número medio de casos en 2 días está expresado por la variable $W = Z/2$, siendo $Z = X_1 + X_2$. Es:

$$P(W > 4'5) = P(Z/2 > 4'5) = P(Z > 9) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 9) = 1 - \sum_{z=0}^{9} \frac{e^{-8}.8^z}{z!} = \ldots = 0'2834$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Como } X_1 \approx P(4) \text{ y } X_2 \approx P(4) \text{ son independientes, entonces} \\ Z = X_1 + X_2 \approx P(4+4) = P(8);\ \text{por tanto: } P(Z = z) = \dfrac{e^{-8}.8^z}{z!},\ z = 0,1,\ldots.\end{array}}$$

- El aleatorio número medio de casos en 100 días está expresado por la variable $X = T/100$, siendo $T = X_1 + \ldots. + X_{100}$. Es:

$$P(X > 4'5) = P(T/100 > 4'5) = P(T > 450) =$$

$$= 1 - P(T \leq 450) = 1 - \sum_{t=0}^{450} \frac{e^{-400}.400^t}{t!} = \inf umable$$

$$\boxed{T = X_1 + \ldots. + X_{100} \approx P(400);\ \text{así: } P(T = t) = \frac{e^{-400}.400^t}{t!},\ t = 0,1,\ldots.}$$

Como "X" es la media aritmética de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son:

$$E(X) = E\left(\frac{1}{100}.\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100}.\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \frac{1}{100}.100.4 = 4$$

$$\boxed{X_i \approx P(4) \Rightarrow E(X_i) = 4 \ \text{ y } \ V(X_i) = 4}$$

$$V(X) = V\left(\frac{1}{100}.\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100^2}.\sum_{i=1}^{100} V(X_i) = \frac{1}{100^2}.100.4 = 0'04$$

Por tanto:

$$P(X > 4'5) \cong P\left(N(4;\sqrt{0'04}) > 4'5\right) = P\left(N(0;1) > \frac{4'5 - 4}{0'2}\right) = \ldots..$$

FONEMATO 1.6.6

Una máquina necesita para su funcionamiento una determinada válvula de la que hay en stock dos tipos A y B, en cantidades respectivas 220 y 300. Sin embargo, si empezamos a utilizar un tipo de válvula, ya no se puede mezclar ninguna del otro a no ser que paremos la máquina. La duración (en minutos) de cada válvula de tipo A es exponencial de media 5, mientras que la duración de cada válvula del tipo B tiene se distribuye (también minutos) de modo uniforme en el intervalo $(0;6)$. Además, se considera que la duración de cada válvula es independiente de la duración de las demás. Una vez averiada la válvula que hace funcionar la máquina, ésta es sustituida inmediatamente por otra del mismo tipo modo automático. ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina funcione ininterrumpidamente al menos 14'5 horas si trabaja con válvulas de tipo A? ¿Y si trabaja con válvulas tipo B?

SOLUCIÓN

- Si hay 220 válvulas del tipo A y $X_i \approx \text{Exp.}(0'2)$ expresa la aleatoria duración de la i-ésima, el aleatorio tiempo de funcionamiento ininterrumpido de la máquina está expresado por la variable $X = X_1 + ... + X_{220}$, siendo:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{220} X_i\right) = \sum_{i=1}^{220} E(X_i) = 220.5 = 1100$$

$$\boxed{X_i \approx \text{Exp.P}(0'2) \Rightarrow E(X_i) = 5 \text{ y } V(X_i) = 25}$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{220} X_i\right) = \sum_{i=1}^{220} V(X_i) = 220.25 = 5500$$

- Si hay 300 válvulas del tipo B y $Z_k \approx U(0;6)$ expresa la aleatoria duración de la k-ésima, el aleatorio tiempo de funcionamiento ininterrumpido de la máquina está expresado por la variable $Z = Z_1 + ... + Z_{300}$, siendo:

$$E(Z) = E\left(\sum_{k=1}^{300} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{300} E(Z_k) = 300.3 = 900$$

$$\boxed{Z_k \approx U(0;6) \Rightarrow E(Z_k) = (0+6)/2 = 3 \text{ y } V(Z_k) = (6-0)^2/12 = 3}$$

$$V(Z) = V\left(\sum_{k=1}^{300} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{300} V(Z_k) = 300.3 = 900$$

- Tanto "X" como "Z" son suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza; en consecuencia, según Lindeberg-Levy, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", y la distribución de probabilidad de "Z" podemos aproximarla mediante la normal con media y varianza las de "Z". Así:

$$P(X > 14'5.60) \cong P\left(N(1100;\sqrt{5500}) > 14'5.60\right) = ...$$

$$P(Z > 14'5.60) \cong P\left(N(900;\sqrt{900}) > 14'5.60\right) = ...$$

FONEMATO 1.6.7

El tiempo (en horas) que tarda una máquina en realizar un ciclo de trabajo tiene densidad $f(x) = 2.x$, $0 < x < 1$. Calcúlese la probabilidad de que la máquina tarde mas de 40 horas en realizar 45 ciclos.

SOLUCIÓN

Si X_i expresa el aleatorio tiempo empleado en el i-ésimo ciclo, es:

$$E(X_i) = \int_0^1 x.f(x).dx = 2.\int_0^1 x^2.dx = \frac{2}{3}$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\boxed{E(X_i^2) = \int_0^1 x^2.f(x).dx = 2.\int_0^1 x^3.dx = \frac{1}{2}}$$

El tiempo en realizar 45 ciclos está expresado por $X = X_1 + ... + X_{45}$, siendo:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{45} X_i\right) = \sum_{i=1}^{45} E(X_i) = 45.\frac{2}{3} = 30$$

$$\boxed{E(X_i) = 2/3 \ ; \ V(X_i) = 1/18}$$

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{45} X_i\right) = \sum_{i=1}^{45} V(X_i) = 45.\frac{1}{18} = \frac{5}{2}$$

Como "X" es suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, según Lindeberg-Levy, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X". Por tanto:

$$P(X > 40) \cong P\left(N(30;\sqrt{5/2}) \geq 40\right) = ...$$

FONEMATO 1.6.8

Determine el percentil 90 de la variable $X \approx \chi_{30}^2$ y compare el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.

SOLUCIÓN

La tabla de la función de distribución de la variable χ_{30}^2 indica que el punto "c" tal que $P(\chi_{30}^2 \leq c) = 0'9$ es $c = 40'3$. Si $X_i \approx \chi_1^2$ y las variables $X_1, ... ,X_{30}$ son independientes, sabemos que $X = X_1 + ... + X_{30} \approx \chi_{30}^2$, siendo $E(X) = 30$ y $V(X) = 60$, pues $E(\chi_n^2) = n$ y $V(\chi_n^2) = 2.n$. Según Lindeberg-Levy, podemos aproximar la distribución de probabilidad de $X \approx \chi_{30}^2$ mediante la normal con media y varianza las de "X". Por tanto:

$$P(\chi_{30}^2 \leq c) \approx P\left(N(30;\sqrt{60}) \leq c\right) = 0'9 \Rightarrow P\left(N(0;1) \leq \frac{c-30}{\sqrt{06}}\right) = 0'9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c-30}{\sqrt{06}} = 1'28 \Rightarrow c = 39'91$$

FONEMATO 1.6.9

Sean $X_1, \dots, X_{100}$ variables independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con media 75 y varianza 225.

1) Utilícese la desigualdad de Tchebychef para acotar la probabilidad de que su media aritmética no difiera de 75 en más de 6. Compárese el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.
2) Mediante la desigualdad de Tchebychef, determínese la cota que con probabilidad no inferior a 0'75 no es superada por la desviación de la media aritmética respecto a 75. Compárese el resultado con el obtenido mediante la aproximación de Lindeberg-Levy.

SOLUCIÓN

1) Siendo $X = (X_1, \dots, X_{100})/100$, es:

$$E(X) = E\left(\frac{1}{100}\cdot\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100}\cdot\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \frac{1}{100}.100.75 = 75$$

$$\boxed{E(X_i) = 75 \ \text{y} \ V(X_i) = 225}$$

$$V(X) = V\left(\frac{1}{100}\cdot\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \frac{1}{100^2}\cdot\sum_{i=1}^{100} V(X_i) = \frac{1}{100^2}.100.225 = 2'25$$

Según Tchebychef, es:

$$P(|X-75|<6) = P(|X-E(X)|<6) \geq 1 - \frac{V(X)}{6^2} = 1 - \frac{2'25}{6^2} = 0'9375$$

Según Lindeberg-Levy, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X". Por tanto:

$$P(|X-75|<6) \cong P(|N(75;\sqrt{2'25})-75|<6) = P\left(|N(0;1)| < \frac{6}{\sqrt{2'25}}\right) = 1$$

2) Debemos determinar "c" de modo que $P(|X-75| \leq c) \geq 0'75$.

$$P(|X-75|\leq c) = P(|X-E(X)|\leq c) \underset{\boxed{\text{Tchebychef}}}{\geq} 1 - \frac{V(X)}{c^2} = 1 - \frac{2'25}{c^2} \geq 0'75 \Rightarrow c \geq 3$$

Aproximando la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X":

$$P(|X-75|\leq c) \cong P(|N(75;\sqrt{2'25})-75|\leq c) =$$

$$= P\left(|N(0;1)| \leq \frac{c}{\sqrt{2'25}}\right) \geq 0'75 \Rightarrow P\left(N(0;1) \leq \frac{c}{\sqrt{2'25}}\right) \geq 0'875 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt{2'25}} \geq 1'15 \Rightarrow c \geq 1'725$$

FONEMATO 1.6.10

El número de clientes que entran cada día a la farmacia "A" tiene distribución de Poisson de parámetro 20, y para la farmacia "B" tiene distribución $B(30;0'7)$.

1) Calcúlese la probabilidad de que el número medio diario de clientes de "A" durante 100 días se desvíe del número medio diario de clientes de "B" durante 200 días en menos de dos.
2) ¿Qué cota no superará dicha desviación con probabilidad 0'95?

SOLUCIÓN

1) Si $X_i \approx P(20)$ expresa el aleatorio número de clientes de "A" el i-ésimo día, el aleatorio número medio de clientes diarios durante 100 días está expresado por $X = (X_1 + ... + X_{100})/100$. Supuesto que las variables $X_1, ... , X_{100}$ son independientes, podemos aproximar (Lindeberg-Levy) la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son:

$$E(X) = E(X_i) = 20 \ ; \ V(X) = V(X_i)/100 = 0'2$$

$$\boxed{X_i \approx P(20) \Rightarrow E(X_i) = 20 \text{ y } V(X_i) = 20}$$

- Si $Z_k \approx B(30;0'7)$ expresa el número de clientes de "B" el k-ésimo día, el aleatorio número medio de clientes diarios durante 200 días está expresado por $Z = (Z_1 + ... + Z_{200})/200$. Supuesto que las variables $Z_1, ... , Z_{200}$ son independientes, podemos aproximar (Lindeberg-Levy) la distribución de probabilidad de "Z" mediante la normal con media y varianza las de "Z", que son:

$$E(Z) = E(Z_k) = 21 \ ; \ V(Z) = V(Z_k)/200 = 6'3$$

$$\boxed{Z_k \approx B(30;0'7) \Rightarrow E(Z_k) = 30.0'7 = 21 \text{ y } V(Z_k) = 30.0'7.0'3 = 6'3}$$

- El número medio diario de clientes de "A" durante 100 días se desviará del número medio diario de clientes de "B" durante 200 días en menos de dos si ocurre el suceso $|X - Z| < 2$, siendo:

$$P\left(|X - Z| < 2\right) = P\left(\left|N(-1;\sqrt{6'5})\right| < 2\right) =$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{supuesto que } X \approx N(20;\sqrt{0'2}) \text{ y } Z \approx N(21;\sqrt{6'3}) \text{ son independientes,} \\ \text{la distibución de probabilidad de } X - Z \text{ es normal, siendo:} \\ E(X - Z) = E(X) - E(Z) = 20 - 21 = -1 \\ V(X - Z) = V(X) - E(Z) = 0'2 + 6'3 = 6'5 \end{array}}$$

$$= P\left(|N(0;1)| < \frac{2-(-1)}{\sqrt{6'5}}\right) = 2.P\left(N(0;1) < \frac{2-(-1)}{\sqrt{6'5}}\right) - 1 = ...$$

2) Debemos calcular "c" de modo que $P\left(|X - Z| \leq c\right) = 0'95$:

$$P\left(|X - Z| \leq c\right) = P\left(|N(0;1)| \leq \frac{c-(-1)}{\sqrt{6'5}}\right) = 0'95 \Rightarrow \frac{c-(-1)}{\sqrt{6'5}} = 1'96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 1'96.\sqrt{6'5} - 1$$

1.7 TEOREMA DE MOIVRE

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución de Bernouilli de parámetro "p". Si $\{S_n\}$ es la sucesión de variables aleatorias tales que $S_1 = X_1$; $S_2 = X_1 + X_2$; ..... ; $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$; ..... es claro que $S_1 \approx B(1;p)$, $S_2 \approx B(2;p)$, ... , $S_n \approx B(n;p)$, ...

Así, como $E(S_n) = n.p$ y $V(S_n) = n.p.q$ (siendo $q = 1 - p$), la sucesión $\{Z_n\}$ de variables tipificadas correspondiente a $\{S_n\}$ es tal que $Z_n = (S_n - n.p)/\sqrt{n.p.q}$, y Moivre demostró que $\{Z_n\} \xrightarrow{L} N(0;1)$, demostrando que la f.g.m de Z_n tiende a la f.g.m de la variable $N(0;1)$. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t^2/2}{n} + \frac{\text{lo que sea}}{n^{3/2}} + \frac{\text{lo que sea}}{n^{5/2}} + ...\right)^n = \left(1^\infty\right) =$$

$$\Phi_{Z_n}(t) = E\left(e^{t.Z_n}\right) = E\left(e^{t.(S_n - n.p)/\sqrt{n.p.q}}\right) =$$

$$= e^{-t.n.p/\sqrt{n.p.q}}.E\left(e^{t.S_n/\sqrt{n.p.q}}\right) = e^{-t.n.p/\sqrt{n.p.q}}.\Phi_{S_n}(t/\sqrt{n.p.q}) =$$

$$\boxed{E\left(e^{Pepe.S_n}\right) = \Phi_{S_n}(Pepe)} \qquad \boxed{S_n \approx B(n;p) \Rightarrow \Phi_{S_n}(\theta) = (q + p.e^{\theta})^n}$$

$$= e^{-t.n.p/\sqrt{n.p.q}}.\left(q + p.e^{t/\sqrt{n.p.q}}\right)^n =$$

$$= \left(q.e^{-t.p/\sqrt{n.p.q}} + p.e^{t.(1-p)/\sqrt{n.p.q}}\right)^n = \left(q.e^{-t.p/\sqrt{n.p.q}} + p.e^{t.q/\sqrt{n.p.q}}\right)^n =$$

$$\boxed{\text{desarrollamos } e^{-t.p/\sqrt{n.p.q}} \text{ y } e^{t.q/\sqrt{n.p.q}} \text{ en serie de potencias}}$$

$$= \left(q.\left(1 - \frac{t.p}{\sqrt{n.p.q}} + \frac{(t.p)^2}{2.n.p.q} - ....\right) + p.\left(1 + \frac{t.q}{\sqrt{n.p.q}} + \frac{(t.q)^2}{2.n.p.q} + ...\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{t^2/2}{n} + \frac{\text{lo que sea}}{n^{3/2}} + \frac{\text{lo que sea}}{n^{5/2}} + ...\right)^n$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n.(a_n - 1)}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\text{lo que sea}}{n^{1/2}} + \frac{\text{lo que sea}}{n^{3/2}} + ...\right)} = \underbrace{e^{t^2/2}}$$

$$\boxed{\text{f.g.m. de la variable } N(0;1)}$$

Obviamente, si $\{Z_n\} \xrightarrow{L} N(0;1)$ entonces $\{S_n\} \xrightarrow{L} N(n.p;\sqrt{n.p.q})$. La aproximación de la distribución $B(n;p)$ mediante la $N(n.p;\sqrt{n.p.q})$ no debe emplearse si "p" es próximo a 0 o a 1; en otros casos la aproximación es buena si "$n.p$" y "$n.q$" son superiores a 5.

FONEMATO 1.7.1

El 20 % de las ventas de una empresa son al contado. Si en un mes se realizan 1000 ventas, determínese la probabilidad de que como máximo 250 hayan sido al contado?

SOLUCIÓN

Llamando "éxito" al suceso de que una venta sea al contado, si $P(\text{éxito}) = 0'2$, la variable X_i que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) en la i-ésima venta tiene distribución de Bernouilli de parámetro 0'2; en consecuencia, la variable $X = X_1 + ... + X_{1000}$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en 1000 ventas tiene distribución $B(1000;0'2)$, supuesto que $X_1, ..., X_{1000}$ son independientes. La función de cuantía de "X" es:

$$P(X = x) = \binom{1000}{x} . 0'2^x . (1 - 0'2)^{1000-x} \ , \ x = 0, 1, ... , 1000$$

Por tanto:

$$P(X \leq 250) = \sum_{x=0}^{250} \binom{1000}{x} . 0'2^x . (1 - 0'2)^{1000-x}$$

Como se nos hiela la sangre al pensar en el coñazo de calcular tan espantosa suma, bendecimos a Lindeberg-Levy (versión Moivre): siendo "X" la suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son:

$$E(X) = 1000 . 0'2 = 200 \ ; \ V(X) = 1000 . 0'2 . (1 - 0'2) = 160$$

$$\boxed{\text{Si } X \approx B(n;p) \text{ es } E(X) = n.p \text{ y } V(X) = n.p.(1-p)}$$

Por tanto:

$$P(X \leq 250) \cong P\left(N(200;\sqrt{160}) \leq \underbrace{250'5} \right) =$$

CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

Al aproximar la distribución discreta $X \approx B(1000;0'2)$ mediante la $N(200;\sqrt{160})$, consideramos que la "masa puntual" que tiene $X \approx B(1000;0'2)$ en el punto 250 se corresponde con la "masa continua" que tiene la $N(200;\sqrt{160})$ en el intervalo $(249'5;250'5)$.

Por tanto, como la probabilidad del suceso $X = 250$ debe sumarse, al trabajar con la normal consideramos la masa de probabilidad que hay a la izquierda del punto 250'5

$$= P\left(N(200;\sqrt{160}) \leq \frac{250'5 - 200}{\sqrt{160}} \right) = ...$$

FONEMATO 1.7.2

La probabilidad de que en una ciudad y durante un año en un parto nazca un varón es 0'48. Si la probabilidad de que nazcan 1000 o más varones es 0'1711, determínese el número "n" de nacimientos que se han producido en esa ciudad durante el año en cuestión.

SOLUCIÓN

Llamando "éxito" al suceso de que nazca un varón, si $P(\text{éxito}) = 0'48$, la variable X_i que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) en el i-ésimo nacimiento tiene distribución de Bernouilli de parámetro 0'48; en consecuencia, la variable $X = X_1 + ... + X_n$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en los "n" nacimientos del año tiene distribución $B(n;0'48)$, supuesto que $X_1, ... ,X_n$ son independientes. La función de cuantía de "X" es:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}.0'48^x.(1-0'48)^{n-x}, \; x = 0,1, ... ,n$$

Para calcular "n" basta exigir que $P(X \geq 1000) = 0'1711$, o lo que es igual, exigir que $P(X < 1000) = 0'8289$; es decir:

$$\sum_{x=0}^{999} \binom{n}{x}.0'48^x.(1-0'48)^{n-x} = 0'8289$$

Como se nos hiela el alma al pensar en el coñazo de resolver tan espantosa ecuación, glorificamos a Lindeberg-Levy (versión Moivre): como "X" es suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son $E(X) = 0'48.n$ y $V(X) = n.0'48.(1-0'48) = 0'2496.n$, pues si $X \approx B(n;p)$ es $E(X) = n.p$ y $V(X) = n.p.(1-p)$.

Por tanto:

$$P(X < 1000) \cong P\left(N(0'48.n;\sqrt{0'2496.n}) < \underbrace{999'5} \right) = 0'8289 \Rightarrow$$

Corrección por continuidad: la "masa puntual" que tiene $X \approx B(n;0'48)$ en el punto 1000 se corresponde con la "masa continua" que tiene la $N(0'48.n;\sqrt{0'2496.n})$ en el intervalo (999'5;1000'5). Por tanto, como la probabilidad del suceso $X = 1000$ no debe sumarse, al trabajar con la normal consideramos la masa de probabilidad que hay a la izquierda del punto 999'5

$$\Rightarrow P\left(N(0;1) \leq \frac{999'5 - 0'48.n}{\sqrt{0'2496.n}} \right) = 0'8289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{999'5 - 0'48.n}{\sqrt{0'2496.n}} = 0'95 \Rightarrow n = ...$$

FONEMATO 1.7.3

Con independencia unos días de otros, la aleatoria venta diaria de vino (en miles de litros) de una bodega tiene distribución $U(0;2)$, obteniendo beneficio la empresa sólo si la venta es superior a 1'5. Si se consideran 200 días, determínese el 60 percentil del número de días en que no se obtiene beneficio.

SOLUCIÓN

Llamando "éxito" al suceso de que un día la empresa no obtenga beneficio, es:

$$P(\text{éxito}) = P\big(U(0;2) \le 1'5\big) = \int_0^{1'5} \frac{1}{2}.dx = 0'75$$

Así, la variable X_i que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) el i-ésimo día venta tiene distribución de Bernouilli de parámetro 0'75; en consecuencia, la variable $X = X_1 + ... + X_{200}$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en 200 días B(200;0'75), supuesto que $X_1, ... , X_{200}$ son independientes.

La función de cuantía de "X" es:

$$P(X = x) = \binom{200}{x}.0'75^x.(1-0'75)^{200-x}, \quad x = 0,1, ... ,200$$

Debemos determinar "c" de modo que $P(X \le c) \ge 0'6$, y al exigir que se satisfaga dicha condición, resulta:

$$P(X \le c) = \sum_{x=0}^{c-1} \binom{200}{x}.0'75^x.(1-0'75)^{200-x} \le 0'6 \Rightarrow \text{inf umable}$$

Gracias a Lindeberg-Levy (versión Moivre), como "X" es la suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son $E(X) = 200.0'75 = 150$ y $V(X) = 200.0'75.(1-0'75) = 37'5$, pues si $X \approx B(n;p)$ es $E(X) = n.p$ y $V(X) = n.p.(1-p)$.

Por tanto:

$$P(X \le c) \cong P\left(N(150;\sqrt{37'5}) \le \underbrace{c + 0'5}\right) = 0'6 \Rightarrow$$

Corrección por continuidad: como la probabilidad del suceso $X = c$ debe sumarse, al trabajar con la normal consideramos la masa de probabilidad que hay a la izquierda del punto $c + 0'5$

$$\Rightarrow P\left(N(0;1) \le \frac{c + 0'5 - 150}{\sqrt{37'5}}\right) = 0'6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c + 0'5 - 150}{\sqrt{37'5}} = 0'36 \Rightarrow c = ...$$

FONEMATO 1.7.4

La probabilidad de que un estudiante se chupe el dedo hasta el codo es 0'7. Observados 300 estudiantes, determínese la probabilidad de que entre 230 y 250 contesten afirmativamente.

SOLUCIÓN

Llamando "éxito" al suceso de chuparse el dedo, si $P(\text{éxito}) = 0'7$, la variable X_i que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) con el i-ésimo estudiante tiene distribución de Bernouilli de parámetro 0'7, y la variable $X = X_1 + \ldots + X_{300}$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en 300 estudiantes tiene distribución $B(300;0'7)$, supuesto que $X_1, \ldots, X_{300}$ son independientes. La función de cuantía de "X" es:

$$P(X = x) = \binom{300}{x}.0'7^x.(1-0'7)^{300-x}, \; x = 0,1,\ldots,300$$

Es: $$P(230 < X < 250) = \sum_{x=231}^{249}\binom{300}{x}.0'7^x.(1-0'7)^{300-x}$$

Como nos desagrada hacer sumas petardas, recurrimos a Lindeberg-Levy (versión Moivre): siendo "X" la suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "X" mediante la normal con media y varianza las de "X", que son:

$$E(X) = 300.0'7 = 210 \; ; \; V(X) = 300.0'7.(1-0'7) = 63$$

$$\boxed{X \approx B(n;p) \Rightarrow E(X) = n.p \text{ y } V(X) = n.p.(1-p)}$$

Por tanto:

$$P(230 < X < 250) \cong P\left(\underbrace{230'5} < N(210;\sqrt{63}) < \underbrace{249'5}\right) =$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Corrección por continuidad: como la probabilidad de los sucesos}\\ X = 230 \text{ y } X = 250 \text{ no debe sumarse, al trabajar con la normal}\\ \text{consideramos la masa de probabilidad que en el intervalo } (230'5;249'5)\end{array}}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{230'5-210}{\sqrt{63}} < N(0;1) < \frac{249'5-210}{\sqrt{63}}\right) = \ldots.$$

FONEMATO 1.7.5

La duración (en horas) de un tipo de fusible tiene distribución $N(2000;200)$. Los fusibles se empaquetan en lotes de 10, y se considera que un lote es defectuoso si contiene dos o más fusibles que duran menos de 1790 horas. Determínese la probabilidad de rechazar un embarque de 1000 lotes si se acepta cuando contiene menos de 150 lotes defectuosos.

SOLUCIÓN

Llamando "éxito" al suceso de que un fusible dure menos de 1790 horas, es:

$$P(\text{éxito}) = P\big(N(2000;200) < 1790\big) = P\left(N(0;1) < \frac{1790-2000}{200}\right) = 0'1469$$

Así, la variable X_i que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) con el i-ésimo fusible tiene distribución de Bernouilli de parámetro $0'1469$; en consecuencia, la variable $X = X_1 + ... + X_{10}$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en un lote de 10 fusibles tiene distribución $B(10;0'1469)$, supuesto que $X_1, ... ,X_{10}$ son independientes. La función de cuantía de "X" es:

$$P(X = x) = \binom{10}{x}.0'1469^{x}.(1-0'1469)^{10-x}\ ,\ x = 0,1, ... ,10$$

Siendo "A" el suceso de que un lote sea defectuoso, es:

$$P(A) = P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = ... = 0'1238$$

Llamando ahora "éxito" al suceso de que un lote sea defectuoso (ocurre "A"), si $P(\text{éxito}) = 0'1238$, la variable Z_k que expresa el aleatorio número de "éxitos" (0 ó 1) con el k-ésimo lote tiene distribución de Bernouilli de parámetro $0'1238$, y la variable $Z = Z_1 + ... + Z_{1000}$ que expresa el aleatorio número de "éxitos" en 1000 lotes tiene distribución $B(1000;0'1238)$, supuesto que $Z_1, ... ,Z_{1000}$ son independientes. La función de cuantía de "Z" es:

$$P(Z = z) = \binom{1000}{z}.0'1238^{z}.(1-0'1238)^{1000-z}\ ,\ z = 0,1, ... ,1000$$

Siendo "B" el suceso de rechazar el embarque, es:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(Z < 150) = 1 - \sum_{z=0}^{149}\binom{1000}{z}.0'1238^{z}.(1-0'1238)^{1000-z}$$

Como nos desagrada hacer sumas petardas, recurrimos a Lindeberg-Levy (versión Moivre): siendo "Z" la suma de un elevado número de variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución de probabilidad, con la misma media y la misma varianza, podemos aproximar la distribución de probabilidad de "Z" mediante la normal con media y varianza las de "Z", que son:

$$E(X) = 1000.0'1238 = 123'8\ ;\ V(X) = 1000.0'1238.(1-0'1238) = 108'47$$

$$\boxed{X \approx B(n;p) \Rightarrow E(X) = n.p \text{ y } V(X) = n.p.(1-p)}$$

Por tanto:

$$P(B) = 1 - P(Z < 150) \cong 1 - P\left(N(123'8;\sqrt{108'47}) < \underbrace{149'5}\right) =$$

Corrección por continuidad: como la probabilidad de suceso $Z = 150$ no debe sumarse, al trabajar con la normal consideramos la masa de probabilidad a la izquierda de 149'5

$$= 1 - P\left(N(0;1) < \frac{149'5 - 123'8}{\sqrt{108'47}}\right) = ...$$