

# Introducción a la Estadística

## Tema 5

# Números índice

5.01	Números índice .....	2
5.02	Índices simples .....	2
5.03	Índices complejos sin ponderar .....	3
5.04	Índices complejos ponderados .....	5
5.05	Índices de precios y de cantidades .....	7
5.06	Índice de valor .....	12
5.07	Operaciones con números índice .....	15
5.08	Participación y repercusión .....	17

## 5.1 NÚMEROS ÍNDICE

Un **número índice** es una medida estadística que permite caracterizar la evolución de una magnitud (simple, como el precio del pan, o compuesta, como el PIB) en dos instantes o periodos de tiempo distintos "0" y "t". Se suelen representar mediante una letra afectada por un subíndice (que indica el instante o periodo que se toma como base o referencia) y un superíndice (que indica el otro instante o periodo de tiempo al que se refiere el número índice).

## 5.2 ÍNDICES SIMPLES

**Se refieren a una magnitud simple:** si  $X_t$  es el valor de dicha magnitud en el periodo "t" y  $X_0$  es su valor en el periodo base o de referencia, el **índice simple del periodo "t" respecto al periodo base** se denota  $I_0^t$ , siendo:

$$I_0^t = \frac{X_t}{X_0}$$

Así,  $I_0^t$  es un número adimensional que indica la variación (en tanto por uno) que ha sufrido la variable entre uno y otro periodo de tiempo .... y se suele expresar en porcentaje, multiplicándolo por 100.

La **tasa de variación**  $TVP_0^t$  de la magnitud en cuestión en el periodo 0 – t puede expresarse en función de  $I_0^t$ :

$$TVP_0^t = \frac{X_t - X_0}{X_0} = \frac{X_t}{X_0} - 1 = I_0^t - 1$$

Si el periodo es anual, se habla de la **tasa de variación anual**  $TVA_0^t$ .

### Índices simples más famosos

- **Índice de precio relativo:** es la razón  $I_{P_0}^t = P_t/P_0$  entre el precio  $P_t$  de un bien en el periodo "t" y su precio  $P_0$  en el periodo base.
- **Índice de cantidad relativa:** es la razón  $I_{Q_0}^t = Q_t/Q_0$  entre la cantidad  $Q_t$  producida (vendida) de un bien en el periodo "t" y la cantidad  $Q_0$  producida (vendida) en el periodo base.
- **Índice de valor relativo:** es la razón  $I_{V_0}^t$  entre el valor  $P_t \cdot Q_t$  de un bien en el periodo "t" y su valor  $P_0 \cdot Q_0$  en el periodo base:

$$I_{V_0}^t = \frac{P_t \cdot Q_t}{P_0 \cdot Q_0} = \left( \frac{P_t}{P_0} \right) \cdot \left( \frac{Q_t}{Q_0} \right) = I_{P_0}^t \cdot I_{Q_0}^t$$

### Ejemplo

Año	Precio	Cantidad
2004	30	50
2005	32	60

$$I_{P,04}^{05} = \frac{32}{30} \cdot 100 = 106'6 \quad ; \quad I_{Q,04}^{05} = \frac{60}{50} \cdot 100 = 120$$

$$I_{V,04}^{05} = \frac{32 \cdot 60}{30 \cdot 50} \cdot 100 = P_{04}^{05} \cdot Q_{04}^{05}$$

## 5.3 ÍNDICES COMPLEJOS SIN PONDERAR

Se refieren a una **magnitud compleja** "X" formada por "n" magnitudes simples  $X_1, \dots, X_n$ :

Periodo base	Periodo "t"	Índice simple
$x_{10}$	$x_{1t}$	$I_{1,0}^t = x_{1t}/x_{10}$
⋮	⋮	⋮
$x_{n0}$	$x_{nt}$	$I_{n,0}^t = x_{nt}/x_{n0}$

Para **resumir** en un único índice la información que contienen los índices simples  $I_1, \dots, I_n$  cabe plantear diversos criterios para **promediar**  $I_1, \dots, I_n$ .

### CRITERIO DE LA MEDIA SIMPLE

- **Índice de media aritmética:**

$$I_0^t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I_{i,0}^t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_{it}}{x_{i0}}$$

- **Índice de media geométrica:**

$$I_0^t = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n I_{i,0}^t} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{x_{it}}{x_{i0}}}$$

- **Índice de media armónica:**

$$I_0^t = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{i,0}^t}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{x_{i0}}{x_{it}}}$$

### CRITERIO DE LA MEDIA AGREGATIVA SIMPLE

**Se suman las magnitudes simples en cada periodo y se calculan índices simples con las sumas obtenidas:**

$$I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n x_{it}}{\sum_{i=1}^n x_{i0}}$$

Todos asignan igual importancia a cada una de las magnitudes simples  $X_1, \dots, X_n$ ; o sea, **no son ponderados**, y las unidades de medida de las magnitudes simples no son homogéneas.

## Ejemplo

	2004	2005	2006		$I_{i,04}^{04}$	$I_{i,04}^{05}$	$I_{i,04}^{06}$
Pan	30	32	35	⇒	100	106'6	116'6
Vino	80	84	89		100	105'0	111'2
Tocino	200	220	235		100	110'0	117'5
Aceite	900	1100	1250		100	122'2	138'8
	1210	1436	1609			443'8	484'1

Tomando 2004 como año base

- Índice  $I_0^t = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n I_{i,0}^t$  de **media aritmética**:

$$I_{04}^{05} = \frac{106'6 + 105 + 110 + 122'2}{4} = \frac{443'8}{4} = 110'97$$

$$I_{04}^{06} = \frac{116'6 + 111'2 + 117'5 + 138'8}{4} = \frac{484'1}{4} = 121'07$$

- Índice  $I_0^t = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n I_{i,0}^t}$  de **media geométrica**:

$$I_{04}^{05} = \sqrt[4]{106'6 \cdot 105 \cdot 110 \cdot 122'2} = 110'75$$

$$I_{04}^{06} = \sqrt[4]{116'6 \cdot 111'25 \cdot 117'5 \cdot 138'8} = 120'6$$

- Índice  $I_0^t = \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/I_{i,0}^t}$  de **media armónica**:

$$I_{04}^{05} = \frac{4}{\frac{1}{106'6} + \frac{1}{105} + \frac{1}{110} + \frac{1}{122'2}} = 110'56$$

$$I_{04}^{06} = \frac{4}{\frac{1}{116'6} + \frac{1}{111'2} + \frac{1}{117'5} + \frac{1}{138'8}} = 120'17$$

- Índice  $I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n x_{it}}{\sum_{i=1}^n x_{i0}}$  de **media agregativa**:

$$I_{04}^{05} = \frac{32 + 84 + 220 + 1100}{30 + 80 + 200 + 900} = \frac{1436}{1210} = 118'68$$

$$I_{04}^{06} = \frac{32 + 84 + 220 + 1100}{30 + 80 + 200 + 900} = \frac{1609}{1210} = 132'98$$

## 5.4 ÍNDICES COMPLEJOS PONDERADOS

Los índices complejos ponderados tienen en cuenta la diferente importancia o **peso relativo** que puede tener cada una de las magnitudes simples  $X_1, \dots, X_n$  dentro del conjunto de todas ellas.

Periodo base	Periodo "t"	Índice simple	Ponderación
$x_{10}$	$x_{1t}$	$I_{1,0}^t = x_{1t}/x_{10}$	$w_1$
⋮	⋮	⋮	⋮
$x_{n0}$	$x_{nt}$	$I_{n,0}^t = x_{nt}/x_{n0}$	$w_n$

Para **resumir** en un único índice la información que contienen los índices simples  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  cabe plantear diversos criterios para **promediar**  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$ .

### CRITERIO DE LA MEDIA PONDERADA

- **Índice de media aritmética ponderado**

$$I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{I_{1,0}^t \cdot w_1 + \dots + I_{n,0}^t \cdot w_n}{w_1 + \dots + w_n}$$

- **Índice de media geométrica ponderado**

$$I_0^t = \sqrt[\sum w_i]{\prod_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i} = \sqrt[\sum w_i]{I_{1,0}^t \cdot w_1 \cdot \dots \cdot I_{n,0}^t \cdot w_n}$$

- **Índice de media armónica ponderado**

$$I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{I_{i,0}^t} \cdot w_i} = \frac{w_1 + \dots + w_n}{\frac{1}{I_{1,0}^t} \cdot w_1 + \dots + \frac{1}{I_{n,0}^t} \cdot w_n}$$

### CRITERIO DE LA MEDIA AGREGATIVA PONDERADA

En cada periodo se multiplica cada magnitud por su correspondiente ponderación, sumando después los productos realizados, y se calculan índices simples con las sumas obtenidas:

$$I_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n x_{it} \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n x_{i0} \cdot w_i}$$

## Ejemplo

	2004	2005	Ponderación	$I_{i,04}^{05}$
Pan	30	32	2	106'6
Vino	80	84	3	105'0
Tocino	200	220	5	110'0
Aceite	900	1100	4	122'2

- Índice de **media aritmética ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \frac{106'6 \cdot 2 + 105 \cdot 3 + 110 \cdot 5 + 122'2 \cdot 4}{2 + 3 + 5 + 4}$$

- Índice de **media geométrica ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \sqrt[4]{106'6^2 \cdot 105^3 \cdot 110^5 \cdot 122'2^4}$$

- Índice de **media armónica ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \frac{2 + 3 + 5 + 4}{\frac{1}{106'6} \cdot 2 + \frac{1}{105} \cdot 3 + \frac{1}{110} \cdot 5 + \frac{1}{122'2} \cdot 4}$$

- Índice de **media agregativa ponderado:**

$$I_{04}^{05} = \frac{32 \cdot 2 + 84 \cdot 3 + 220 \cdot 5 + 1100 \cdot 4}{30 \cdot 2 + 80 \cdot 3 + 200 \cdot 5 + 900 \cdot 4}$$

## 5.5 ÍNDICES DE PRECIOS Y DE CANTIDADES

	Precio en periodo base	Precio en periodo "t"	Cantidad en periodo base	Cantidad en periodo "t"
Artículo "1"	$P_{10}$	$P_{1t}$	$Q_{10}$	$Q_{1t}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Artículo "n"	$P_{n0}$	$P_{nt}$	$Q_{n0}$	$Q_{nt}$

### • Sauerbeck

Es la **media aritmética no ponderada** de los índices simples:

$$S_P = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}}}{n} ; S_Q = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}}{n}$$

### • Bradstreet-Dutot

Es la **media agregativa no ponderada** de los precios o de las cantidades:

$$BD_P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0}} ; BD_Q = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{it}}{\sum_{i=1}^n Q_{i0}}$$

### • Laspeyres

En el de precios, se **ponderan** éstos con las cantidades del año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año base.

$$L_P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año base a precios del año "t"}}{\text{Valor del consumo del año base a precios del año base}}$$

$$L_Q = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año base}}{\text{Valor del consumo del año base a precios del año base}}$$

Así,  $L_P$  es la **media agregativa ponderada** de precios, siendo  $Q_{i0}$  la ponderación de los precios  $P_{i0}$  y  $P_{it}$  .... y  $L_Q$  es la **media agregativa ponderada** de las cantidades, siendo  $P_{i0}$  la ponderación de las cantidades  $Q_{i0}$  y  $Q_{it}$ .

Es el más empleado, porque las ponderaciones del año base son las que se emplean para todos los periodos. Pierde representatividad a medida que nos alejamos del periodo base.

## Laspeyres de otro modo

- **Para el de precios:**

Si el  $i$ -ésimo índice simple de precios  $I_{i,0}^t = P_{it}/P_{i0}$  lo ponderamos con  $w_i = P_{i0} \cdot Q_{i0}$ , la **media aritmética ponderada** de  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}} \cdot P_{i0} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}} = L_P$$

- **Para el de cantidades:**

Si el  $i$ -ésimo índice simple de cantidades  $I_{i,0}^t = Q_{it}/Q_{i0}$  lo ponderamos con  $w_i = P_{i0} \cdot Q_{i0}$ , la **media aritmética ponderada** de  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Q_{it}}{Q_{i0}} \cdot P_{i0} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}} = L_Q$$

- **Paasche**

En el de precios se **ponderan** éstos con las cantidades del año "t" ..... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año "t".

$$P_P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{it}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año "t"}}{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año base}}$$

$$P_Q = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{i0}} \equiv \frac{\text{Valor del consumo del año "t" a precios del año "t"}}{\text{Valor del consumo del año base a precios del año "t"}}$$

Así,  $P_P$  es la **media agregativa ponderada** de precios, siendo  $Q_{it}$  la ponderación de los precios  $P_{i0}$  y  $P_{it}$  .... y  $P_Q$  es la **media agregativa ponderada** de las cantidades, siendo  $P_{it}$  la ponderación de las cantidades  $Q_{i0}$  y  $Q_{it}$ .

La ponderación empleada en cada periodo depende del propio periodo. Pierde representatividad a medida que nos alejamos del periodo base, aunque menos que el de Laspeyres.

## Paasche de otro modo

- **Para el de precios:**

Si el  $i$ -ésimo índice simple de precios  $I_{i,0}^t = P_{it}/P_{i0}$  lo ponderamos con  $w_i = P_{i0} \cdot Q_{it}$ , la **media aritmética ponderada** de  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}} \cdot P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{it}} = P_p$$

- **Para el de cantidades:**

Si el  $i$ -ésimo índice simple de cantidades  $I_{i,0}^t = Q_{it}/Q_{i0}$  lo ponderamos con  $w_i = P_{it} \cdot Q_{i0}$ , la **media aritmética ponderada** de  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Q_{it}}{Q_{i0}} \cdot P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{i0}} = P_Q$$

- **Fisher**

Media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche

$$F_P = \sqrt{L_P \cdot P_P} ; F_Q = \sqrt{L_Q \cdot P_Q}$$

Por ser una media geométrica, el índice de Fisher está comprendido entre los índices de Laspeyres y Paasche.

- **Edgeworth**

En el de precios se **ponderan** éstos con suma de las cantidades del año "t" y el año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con la suma de los precios del año "t" y el año base.

$$E_P = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})} ; E_Q = \frac{\sum_{i=1}^n (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{i0}}$$

Como vemos,  $E_P$  es la **media agregativa ponderada** de precios, siendo  $Q_{i0} + Q_{it}$  la ponderación de los precios  $P_{i0}$  y  $P_{it}$  ... y  $E_Q$  es la **media agregativa ponderada** de las cantidades, siendo  $P_{i0} + P_{it}$  la ponderación de las cantidades  $Q_{i0}$  y  $Q_{it}$ .

## Edgeworth de otro modo

- Para el de precios:

Si el  $i$ -ésimo índice simple de precios  $I_{i,0}^t = P_{it}/P_{i0}$  lo ponderamos con  $w_i = P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})$ , la **media aritmética ponderada** de  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}} \cdot P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})} = E_P$$

- Para el de cantidades:

Si el  $i$ -ésimo índice simple de cantidades  $I_{i,0}^t = Q_{it}/Q_{i0}$  lo ponderamos con  $w_i = (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{i0}$ , la **media aritmética ponderada** de  $I_{1,0}^t, \dots, I_{n,0}^t$  es:

$$\frac{\sum_{i=1}^n I_{i,0}^t \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Q_{it}}{Q_{i0}} \cdot (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{i0}}{\sum_{i=1}^n (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^n (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{i0}} = E_Q$$

## Ejemplo

	PRECIOS		CANTIDADES	
	2006	2007	2006	2007
Tocino	50	55	100	110
Pan	40	45	400	450
Vino	80	86	200	210

- **Sauerbeck:** es la media aritmética **no ponderada** de los índices simples:

$$S_P = \frac{\sum \frac{P_{it}}{P_{i0}}}{n} = \frac{\frac{55}{50} + \frac{45}{40} + \frac{86}{80}}{3} ; S_Q = \frac{\sum \frac{Q_{it}}{Q_{i0}}}{n} = \frac{\frac{110}{100} + \frac{450}{400} + \frac{210}{200}}{3}$$

- **Bradstreet-Dutot:** es la media agregativa **no ponderada** de los precios o de las cantidades:

$$BD_P = \frac{\sum P_{it}}{\sum P_{i0}} = \frac{55 + 45 + 86}{50 + 40 + 80} ; BD_Q = \frac{\sum Q_{it}}{\sum Q_{i0}} = \frac{110 + 450 + 210}{100 + 400 + 200}$$

- **Laspeyres:** en el de precios, se **ponderan** éstos con las cantidades del año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año base.

$$L_P = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{55 \cdot 100 + 45 \cdot 400 + 86 \cdot 200}{50 \cdot 100 + 40 \cdot 400 + 80 \cdot 200}$$

$$L_Q = \frac{\sum P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{50 \cdot 110 + 40 \cdot 450 + 80 \cdot 210}{50 \cdot 100 + 40 \cdot 400 + 80 \cdot 200}$$

- **Paasche:** en el de precios se **ponderan** éstos con las cantidades del año "t" .... y en el de cantidades, se ponderan éstas con los precios del año "t".

$$P_P = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{it}} = \frac{55 \cdot 110 + 45 \cdot 450 + 86 \cdot 210}{50 \cdot 110 + 40 \cdot 450 + 80 \cdot 210}$$

$$P_Q = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}} = \frac{55 \cdot 110 + 45 \cdot 450 + 86 \cdot 210}{55 \cdot 100 + 45 \cdot 400 + 86 \cdot 200}$$

- **Fisher:** media geométrica de los índices de Laspeyres y Paasche

$$F_P = \sqrt{L_P \cdot P_P} ; F_Q = \sqrt{L_Q \cdot P_Q}$$

- **Edgeworth:** en el de precios se **ponderan** éstos con suma de las cantidades del año "t" y el año base ... y en el de cantidades, se ponderan éstas con la suma de los precios del año "t" y el año base.

$$E_P = \frac{\sum P_{it} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})}{\sum P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})} = \frac{55 \cdot (100 + 110) + 45 \cdot (400 + 450) + 86 \cdot (200 + 210)}{50 \cdot (100 + 110) + 40 \cdot (400 + 450) + 80 \cdot (200 + 210)}$$

$$E_Q = \frac{\sum (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{it}}{\sum (P_{i0} + P_{it}) \cdot Q_{i0}} = \frac{110 \cdot (50 + 55) + 450 \cdot (40 + 45) + 210 \cdot (80 + 86)}{100 \cdot (50 + 55) + 400 \cdot (40 + 45) + 200 \cdot (80 + 86)}$$

## 5.6 ÍNDICE DE VALOR

Se valoran las cantidades de cada periodo con los precios de ese periodo.

$$V_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{i0}}$$

**Obvio:**

$$V_0^t = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} \uparrow \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} \cdot \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}} = L_P \cdot P_Q$$

multiplicamos y dividimos por  $\sum_{i=1}^n P_{it} \cdot Q_{i0}$

$$V_0^t = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} \uparrow \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{it}} \cdot \frac{\sum P_{i0} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = P_P \cdot L_Q$$

multiplicamos y dividimos por  $\sum_{i=1}^n P_{i0} \cdot Q_{it}$

Siendo  $\sqrt{V_0^t} = \sqrt{L_P \cdot P_Q}$  y  $\sqrt{V_0^t} = \sqrt{P_P \cdot L_Q}$ , al multiplicar miembro a miembro éstas, resulta:

$$\begin{aligned} V_0^t &= \sqrt{L_P \cdot P_Q} \cdot \sqrt{P_P \cdot L_Q} = \\ &= \underbrace{\sqrt{L_P \cdot P_P}}_{F_P} \cdot \underbrace{\sqrt{L_Q \cdot P_Q}}_{F_Q} = F_P \cdot F_Q \end{aligned}$$

## 5.6 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

Las siguientes propiedades, que son **deseables** en los números índices, las verifican los índices simples, pero no siempre los complejos.

### 1) **Existencia**

El número índice debe existir; o sea, ha de tener un valor finito no nulo, lo que no siempre sucede con los índices de la media geométrica y de la media armónica. La verifican los seis índices complejos definidos.

### 2) **Identidad**

Si el periodo base coincide con el "t", el número índice ha de ser 1 (100). La verifican los seis índices complejos definidos.

### 3) **Inversión:** $I_t^0 = 1/I_0^t$ , o lo que es igual: $I_0^t \cdot I_t^0 = 1$ .

Sólo la cumplen los índices de Bradstreet-Dutot, Fisher y Edgeworth.

### 4) **Circular**

Es una generalización de la propiedad de inversión:  $I_0^{t1} \cdot I_{t1}^{t2} \cdot I_{t2}^{t3} \cdot I_{t3}^0 = 1$

Propiedad circular modificada:

$$I_0^{t1} \cdot I_{t1}^{t2} \cdot I_{t2}^{t3} \cdot I_{t3}^0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{I_{t3}^0} = I_0^{t3} = I_0^{t1} \cdot I_{t1}^{t2} \cdot I_{t2}^{t3}$$

### 5) **Homogeneidad**

Un número índice no debe modificarse si se cambian las unidades de medida. No la cumple ninguno de los seis índices complejos definidos.

### 6) **Proporcionalidad**

Si todas las magnitudes (precios o cantidades) varían en la misma proporción, el número índice debe variar en esa misma proporción.

#### • **Sauerbeck**

$$S_P^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(1+k) \cdot P_{it}}{P_{i0}} = (1+k) \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{i0}} = (1+k) \cdot S_P$$

#### • **Bradstreet-Dutot**

$$BD_P^* = \frac{\sum (1+k) \cdot P_{it}}{\sum P_{i0}} = (1+k) \cdot \frac{\sum P_{it}}{\sum P_{i0}} = (1+k) \cdot BD_P$$

#### • **Laspeyres**

$$L_P^* = \frac{\sum (1+k) \cdot P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = (1+k) \cdot \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = (1+k) \cdot L_P$$

#### • **Paasche**

$$P_P^* = \frac{\sum (1+k) \cdot P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{it}} = (1+k) \cdot \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{it}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{it}} = (1+k) \cdot P_P$$

- **Fisher**

$$\begin{aligned} F_P^* &= \sqrt{L_P^* \cdot P_P^*} = \sqrt{((1+k) \cdot L_P) \cdot ((1+k) \cdot P_P)} = \\ &= (1+k) \cdot \sqrt{L_P \cdot P_P} = (1+k) \cdot F_P \end{aligned}$$

- **Edgeworth**

$$\begin{aligned} E_P^* &= \frac{\sum (1+k) \cdot P_{it} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})}{\sum P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})} = \\ &= (1+k) \cdot \frac{\sum P_{it} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})}{\sum P_{i0} \cdot (Q_{i0} + Q_{it})} = (1+k) \cdot E_P \end{aligned}$$

Como vemos, los seis índices complejos definidos satisfacen la propiedad de proporcionalidad, pero desde el punto de vista económico se puede objetar que, en los casos de Paasche, Fisher y Edgeworth, que ponderan con cantidades  $Q_{it}$ , es difícil sostener el supuesto de que dichas cantidades permanecen constantes si sus precios respectivos se multiplican por  $(1+k)$ .

## 5.7 OPERACIONES CON NÚMEROS INDICE

### • Renovación

Para calcular un número índice lo primero es seleccionar los artículos más representativos del grupo y asignar a cada uno su correspondiente peso o ponderación. Pero debido a los cambios sociales (gustos, tecnológicos), las ponderaciones han de renovarse periódicamente.

### • Empalme

La renovación da lugar a la existencia de dos series de índices para un mismo grupo. El empalme es la unificación de dichas series; para ello basta tomar como nuevo año base (o sea, el valor 100) el correspondiente al primero (o cualquiera) de los índice renovados, aplicando el criterio de proporcionalidad a la serie de índices con ponderaciones antiguas.

### • Cambio de base

Debido a la pérdida de representatividad de los números índice a medida que nos alejamos del año base, resulta conveniente expresar los índice calculados con base en un periodo "0" en otra base "h".

Como  $I_0^t = \frac{x_t}{x_0}$  e  $I_0^h = \frac{x_h}{x_0}$ , es claro que  $I_h^t = \frac{x_t}{x_h} = \frac{I_0^t \cdot x_0}{I_0^h \cdot x_0} = \frac{I_0^t}{I_0^h}$ .

#### Ejemplo

Año	$I_0^t = \frac{x_t}{x_0}$	$I_3^t = \frac{x_t}{x_3}$	⇒	Año	$I_0^t = \frac{x_t}{x_0}$	$I_3^t = \frac{x_t}{x_3} = \frac{I_0^t}{I_0^3}$
0	1	—		0	1	1/1'35 = 0'74
1	1'2	—		1	1'2	1'2/1'35 = 0'88
2	1'35	—		2	1'35	1'35/1'4 = 0'96
3	1'4	1		3	1'4	1
4	—	1'09		4	—	1'09
5	—	1'18		5	—	1'18

Tomando el año "3" como nueva base

### • Deflación

Al emplear el dinero como unidad de cuenta común se resuelve el problema de la disparidad de unidades de medida de los diferentes bienes ..... pero como el dinero cambia de **valor** con el paso del tiempo, aumentando si hay deflación (bajada de precios) o disminuyendo (si hay inflación), **el valor de una variable expresada en euros no puede compararse sin más en dos instantes distintos**, hay que introducir que tenga en cuenta las variaciones del **valor** del euro entre uno y otro instante.

La serie estadística de los valores de una variable durante un periodo de tiempo, sin introducir ningún factor corrector, se llama **serie a precios o euros corrientes de cada año** ..... y la correspondiente serie corregida o ajustada que tiene en cuenta la variación del valor del euro con el tiempo, se llama **serie a precios o euros constantes del año que se tome como base**.

El proceso de corrección o ajuste se llama **deflación**, y consiste en **valorar las cantidades a los precios de una año de referencia**, para lo que se divide la serie original por un índice de precios adecuado llamado **deflactor**.

$$\text{Euros periodo base} = \frac{\text{Euros periodo "t"}}{\text{Índice unitario de precios de consumo}}$$

El índice que debería emplearse es de Paasche de precios, pero debido a lo costoso de su cálculo, se emplea el de Laspeyres de precios.

**Observa:**

Si el periodo base es "0" y  $\begin{Bmatrix} S_k \\ S_r \end{Bmatrix}$  es el salario en **euros corrientes** del periodo

$\begin{Bmatrix} k \\ r \end{Bmatrix}$ , el salario  $\begin{Bmatrix} S_k^* \\ S_r^* \end{Bmatrix}$  en **euros constantes** del periodo base es  $\begin{Bmatrix} S_k^* = S_k / I_0^k \\ S_r^* = S_r / I_0^r \end{Bmatrix}$ ;

así:

$$\frac{S_r^*}{S_k^*} = \frac{S_r / I_0^r}{S_k / I_0^k} \Rightarrow \frac{S_r}{S_k} = \frac{S_r^*}{S_k^*} \cdot \frac{I_0^r}{I_0^k}$$

donde:

$$\frac{S_r}{S_k} \equiv 1 + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de variación de los} \\ \text{salarios nominales entre "k" y "r"} \end{array} \right\}$$

$$\frac{S_r^*}{S_k^*} \equiv 1 + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de variación de los} \\ \text{salarios reales entre "k" y "r"} \end{array} \right\}$$

$$\frac{I_0^r}{I_0^k} \equiv 1 + \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de variación del} \\ \text{índice entre "k" y "r"} \end{array} \right\}$$

## 5.8 PARTICIPACIÓN Y REPERCUSIÓN

Nos referiremos al índice de Laspeyres  $L_{P_0}^t = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}$ .

Si las magnitudes simples que forman el grupo sufren variaciones respectivas  $\Delta P_{it}, \dots, \Delta P_{nt}$ , la variación  $\Delta L_{P_0}^t$  del índice de Laspeyres es:

$$\Delta L_P = \frac{\sum (P_{it} + \Delta P_{it}) \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} - \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{\sum \Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}$$

- El porcentaje de variación del índice de Laspeyres es:

$$\frac{\Delta L_{P_0}^t}{L_{P_0}^t} \cdot 100 = \frac{\frac{\sum \Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}}{\frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}} \cdot 100 = \frac{\sum \Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}} \cdot 100$$

- De  $R_i = \frac{\Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}$  se dice que es la **repercusión** de la variación del i-ésimo componente en la variación del índice general.

Naturalmente, la suma  $R_1 + \dots + R_n$  de los diversas repercusiones coincide con la variación  $\Delta L_{P_0}^t$  del índice de Laspeyres.

- La **repercusión en porcentaje** de la variación del i-ésimo componente en la variación del índice de Laspeyres es

$$\frac{R_i}{L_{P_0}^t} \cdot 100 = \frac{\frac{\Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}}{\frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}}} \cdot 100 = \frac{\Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}} \cdot 100$$

Naturalmente, la suma de las repercusiones porcentuales de las diversas magnitudes simples coincide con la variación porcentual (tasa de variación) del índice de Laspeyres.

- La **participación** en porcentaje de la variación del i-ésimo componente en el índice de Laspeyres es el cociente entre la repercusión en porcentaje de dicho componente y la suma de las repercusiones en porcentaje de todos los componentes:

$$\frac{\frac{\Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}} \cdot 100}{\frac{\sum \Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}} \cdot 100} \cdot 100 = \frac{\Delta P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum \Delta P_{it} \cdot Q_{i0}} \cdot 100$$

## Ejemplo 1: Se conocen los índices simples

Considera que los índices de precios de dos bienes "A" y "B" en el año 2005, con base 2004, y las respectivas ponderaciones de ambos en 2004 son los siguientes:

	$I_{04}^{05}$	Ponderación en 2004
A	110	$w_A = 40$
B	105	$w_B = 60$

Siendo  $L_{P04}^{04} = 100$ , es  $L_{P04}^{05} = 107$ :

$$\begin{aligned}
 L_{P04}^{05} &= \frac{I_A \cdot w_A + I_B \cdot w_B}{w_A + w_B} = \frac{110 \cdot 40 + 105 \cdot 60}{40 + 60} = \\
 &= \frac{(100 + 10) \cdot 40 + (100 + 5) \cdot 60}{40 + 60} = \frac{100 \cdot 40 + 100 \cdot 60}{40 + 60} + \frac{10 \cdot 40 + 5 \cdot 60}{40 + 60} = \\
 &= \underbrace{100}_{L_{P04}^{04}} + \underbrace{\frac{10 \cdot 40}{40 + 60}}_{R_A} + \underbrace{\frac{5 \cdot 60}{40 + 60}}_{R_B} = 100 + 4 + 3 = 107 \equiv \\
 &\equiv L_{P04}^{04} + \frac{\Delta I_A \cdot w_A + \Delta I_B \cdot w_B}{w_A + w_B}
 \end{aligned}$$

**De otro modo:** si consideramos que el precio de  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$  en el año base 2004 es  $\begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix}$ , y que el precio en 2005 es  $\begin{Bmatrix} 110 \\ 105 \end{Bmatrix}$ , como  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$  pondera  $\begin{Bmatrix} 40 \\ 60 \end{Bmatrix}$ , de las  $\begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix}$  unidades que aumenta el precio en 2005, la **repercusión** que en el índice general  $L_{P04}^{04} = 100$  tiene la variación del precio de  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$  es  $\begin{Bmatrix} R_A = 10 \cdot 40 / (40 + 60) = 4 \\ R_B = 5 \cdot 60 / (40 + 60) = 3 \end{Bmatrix}$  puntos ... y la suma  $R_A + R_B = 4 + 3 = 7$  de ambas repercusiones coincide con la variación  $L_{P04}^{05} - L_{P04}^{04} = 7$  del índice de Laspeyres.

La **repercusión porcentual** de la variación del precio de  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$  en la variación del índice general es  $\begin{Bmatrix} (4/L_{P04}^{04}) \cdot 100 = 4 \% \\ (3/L_{P04}^{04}) \cdot 100 = 3 \% \end{Bmatrix}$  ..... y la suma de ambas repercusiones porcentuales coincide con la variación porcentual (tasa de variación) del índice de Laspeyres:

$$\frac{L_{P04}^{05} - L_{P04}^{04}}{L_{P04}^{04}} \cdot 100 = \frac{107 - 100}{100} \cdot 100 = 7 \%$$

La **participación** (tanto por uno) de la variación del precio de  $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$  en la subida del índice es  $\begin{Bmatrix} 4/(4 + 3) \\ 3/(4 + 3) \end{Bmatrix}$ .

## Ejemplo 2: Se conocen precios y cantidades

### • Sin llevar el agua al molino de los índices

Si

	P <sub>04</sub>	Q <sub>04</sub>	P <sub>05</sub>
A	40	20	45
B	50	30	60

es  $L_{P04}^{04} = 1$ , siendo  $L_{P04}^{05} = 1 + \frac{400}{2300}$ :

$$L_{P04}^{05} = \frac{\sum P_{it} \cdot Q_{i0}}{\sum P_{i0} \cdot Q_{i0}} = \frac{45 \cdot 20 + 60 \cdot 30}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30} = \frac{(40 + 5) \cdot 20 + (50 + 10) \cdot 30}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30} =$$

$$= \frac{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30} + \underbrace{\frac{5 \cdot 20}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30}}_{R_A} + \underbrace{\frac{10 \cdot 30}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30}}_{R_B} = 1 + \frac{400}{2300}$$

Como  $\sum P_{i0} \cdot Q_{i0} = 40 \cdot 20 + 50 \cdot 30 = 2300$ , si el precio de  $\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}$  sube  $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 10 \end{matrix} \right\}$  unidades, la **repercusión** en la subida del índice general es  $\left\{ \begin{matrix} 5 \cdot 20 / 2300 \\ 10 \cdot 30 / 2300 \end{matrix} \right\}$ . La **participación** (tanto por uno) de  $\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}$  en la subida del índice es  $\left\{ \begin{matrix} 5 \cdot 20 / 400 \\ 10 \cdot 30 / 400 \end{matrix} \right\}$

### • Llevando el agua al molino de los índices

	P <sub>04</sub>	Q <sub>04</sub>	P <sub>05</sub>
A	40	20	45
B	50	30	60

⇒

	$I_{04}^{05}$	Ponderación en 2004
⇒ A	$\frac{45}{40} \cdot 100 = 112'5$	$\frac{40 \cdot 20}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30} = \frac{800}{2300}$
B	$\frac{60}{50} \cdot 100 = 120$	$\frac{50 \cdot 30}{40 \cdot 20 + 50 \cdot 30} = \frac{1500}{2300}$

Así, es:

$$L_{P04}^{05} = \frac{I_A \cdot w_A + I_B \cdot w_B}{w_A + w_B} = \frac{112'5 \cdot \frac{800}{2300} + 120 \cdot \frac{1500}{2300}}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}} =$$

$$= \frac{(100 + 12'5) \cdot \frac{800}{2300} + (100 + 20) \cdot \frac{1500}{2300}}{\frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300}} =$$

$$= \underbrace{100 \cdot \left( \frac{800}{2300} + \frac{1500}{2300} \right)}_{100} + \underbrace{\frac{12'5 \cdot 800}{2300 + 2300}}_{R_A} + \underbrace{\frac{20 \cdot 1500}{2300 + 2300}}_{R_B}$$