

# OPTIMIZACIÓN

Tema 1	CONJUNTOS CONVEXOS
Tema 2	FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS
Tema 3	CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA OPTIMIZACIÓN
Tema 4	OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES
Tema 5	LAGRANGE Y KHUN TUCKER
Tema 6	PROGRAMACIÓN LINEAL

## Tema 1

# Conjuntos convexos

1.01	Conjuntos convexos .....	2
1.02	Combinación lineal convexa .....	3
1.03	Propiedades de los conjuntos convexos .....	4
1.04	Hiperplanos .....	6
1.05	Semiespacios .....	7
1.06	Puntos extremos de un conjunto convexo .....	7
1.07	Envolvente convexa .....	8
1.08	Poliedro convexo .....	9
	Test .....	10

## 1.1 CONJUNTOS CONVEXOS

- Si  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  son puntos de  $\mathfrak{R}^n$ , la **recta** que pasa por dichos puntos es el subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$  que forman los puntos  $\bar{z}$  tales que:

$$\bar{z} = \lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2 ; \lambda \in \mathfrak{R}$$

Por ejemplo, en  $\mathfrak{R}^3$ , la recta "r" que pasa por los puntos  $\bar{x}_1 = (2;1;0)$  y  $\bar{x}_2 = (1;0;4)$  es el subconjunto de  $\mathfrak{R}^3$  que forman los puntos  $z = (z_1; z_2; z_3)$  tales que:

$$(z_1; z_2; z_3) = \lambda \bullet (2;1;0) + (1 - \lambda) \bullet (1;0;4) ; \lambda \in \mathfrak{R}$$

O sea:  $(z_1; z_2; z_3) = (1 + \lambda; \lambda; 4 - 4 \cdot \lambda) ; \lambda \in \mathfrak{R}$

Para cada valor concreto que se asigne a  $\lambda$  se obtiene un punto de la recta:

- \* Si  $\lambda = 2 \Rightarrow (1 + 2; 2; 4 - 4 \cdot 2) \equiv (3; 2; -4)$  es un punto de "r"
- \* Si  $\lambda = -3 \Rightarrow (1 - 3; -3; 4 - 4 \cdot (-3)) \equiv (-2; -3; 16)$  es un punto de "r"
- \* Si  $\lambda = \dots$

- Si  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  son puntos de  $\mathfrak{R}^n$ , el **segmento lineal cerrado** que los une es el subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$  que forman los puntos "z" tales que:

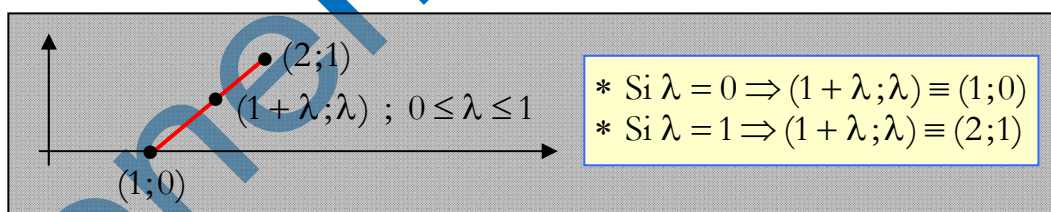
$$\bar{z} = \lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2 ; 0 \leq \lambda \leq 1$$

O así:  $z = \lambda_1 \bullet \bar{x}_1 + \lambda_2 \bullet \bar{x}_2 ; \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Por ejemplo, en  $\mathfrak{R}^2$ , el segmento lineal cerrado que une  $\bar{x}_1 = (2;1)$  y  $\bar{x}_2 = (1;0)$  es el subconjunto de  $\mathfrak{R}^2$  que forman los puntos  $z = (z_1; z_2)$  tales que:

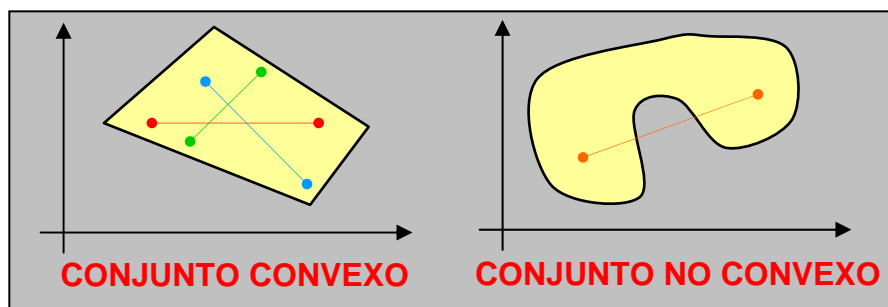
$$(z_1; z_2) = \lambda \bullet (2;1) + (1 - \lambda) \bullet (1;0) ; 0 \leq \lambda \leq 1$$

O sea:  $(z_1; z_2) = (1 + \lambda; \lambda) ; 0 \leq \lambda \leq 1$



- Si  $A \subset \mathfrak{R}^n$ , se dice que "**A**" es **convexo** si el **segmento lineal cerrado** que une **cualquier par de puntos de "A"** está contenido en "**A**"; o sea:

$$\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in A, \forall \lambda \in [0;1] \text{ sucede que } \lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2 \in A$$



Convenimos que **el conjunto vacío es convexo**.

## 1.2 COMBINACIÓN LINEAL CONVEXA

- Decimos que el punto  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$  es **combinación lineal convexa** (CLC) de los puntos  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ , si  $\bar{x} = \lambda_1 \cdot \bar{x}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \bar{x}_k$ , siendo

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k &= 1 \end{aligned}$$

En el caso  $k = 1$ , resulta obvio que  $\bar{x}$  es CLC de  $\bar{x}_1$  sólo si  $\bar{x} = 1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1$ .

De la definición se deduce de forma inmediata que, en el caso  $k = 2$ , el punto  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$  es CLC de los puntos  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  sólo si  $\bar{x}$  es un punto del segmento lineal cerrado que une  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ .

- Teorema de caracterización de los conjuntos convexos**: el conjunto no vacío  $A \subset \mathfrak{R}^n$  es convexo si y sólo si toda CLC de puntos de "A" es punto de "A".

$\Rightarrow$  (Por inducción)

Sea  $A \subset \mathfrak{R}^n$  un conjunto convexo.

Si  $\bar{x}_1 \in A$ , las CLC que pueden hacerse con  $\bar{x}_1$  son  $\bar{x} = 1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{x}_1 \in A$ .

Si  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in A$ , las CLC que pueden hacerse con  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  son los puntos  $\bar{x}$  del segmento lineal cerrado que une  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ ; y por ser "A" convexo, está garantizado que  $\bar{x} \in A$ .

Supongamos que  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1} \in A$  y que toda CLC de  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}$  es un punto de "A".

Demostremos que si  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k \in A$ , toda CLC de ellos es un punto de "A". En efecto, sea  $\bar{x} = \lambda_1 \cdot \bar{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \cdot \bar{x}_{k-1} + \lambda_k \cdot \bar{x}_k$ , siendo

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k = 1; \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

Así:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda_1 \cdot \bar{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \cdot \bar{x}_{k-1} + \lambda_k \cdot \bar{x}_k = \\ &\quad \underbrace{\left( \lambda_1 \cdot \bar{x}_1 + \dots + \lambda_{k-1} \cdot \bar{x}_{k-1} \right)}_{\substack{\text{elemento de "A", por ser CLC} \\ \text{de } \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}}} + \lambda_k \cdot \bar{x}_k \\ &\quad \underbrace{\left( \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \bar{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda} \cdot \bar{x}_{k-1} \right)}_{\substack{\text{elemento de "A" por ser CLC de dos elementos} \\ \text{de "A", el } \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \bar{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda} \cdot \bar{x}_{k-1} \text{ y el } \bar{x}_k}} + \lambda_k \cdot \bar{x}_k \end{aligned}$$

Observa que  $\lambda + \lambda_k = (\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}) + \lambda_k = 1$ .

$\Leftarrow$

Si toda CLC de puntos de "A" es un punto de "A", toda CLC de dos puntos de "A" es un punto de "A"; por tanto, el segmento lineal cerrado que une cualquier par de puntos de "A" está contenido en "A", por lo que "A" es convexo.

## 1.3 PROPIEDADES DE LOS CONVEXOS

- 1) La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.
- 2) Si  $A_1$  y  $A_2$  son subconjuntos de  $\mathfrak{R}^n$ , su suma  $A_1 + A_2$  se define
 
$$A_1 + A_2 = \{\bar{x} \in \mathfrak{R}^n / \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{x}_1 \in A_1, \bar{x}_2 \in A_2\}$$
 Así, si  $A_1$  y  $A_2$  son convexos, su suma  $A_1 + A_2$  es un conjunto convexo.
- 3) Si  $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^m$  es una aplicación lineal y  $S \subset \mathfrak{R}^n$  es un conjunto convexo, el conjunto  $f(S) = \{\bar{z} \in \mathfrak{R}^m / \exists \bar{x} \in S / f(\bar{x}) = \bar{z}\}$  es convexo.
- 4) El conjunto "S" de las soluciones no negativas de un sistema lineal de ecuaciones (soluciones con todos los componentes no negativos), es convexo.

### En efecto:

- 1) Siendo "I" un conjunto de índices (un subconjunto de los naturales, incluso el conjunto de los naturales), sea  $A_i \subset \mathfrak{R}^n$  un conjunto convexo,  $\forall i \in I$ .

Si  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$ , está demostrado que  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es convexo, pues el conjunto vacío es convexo.

Si  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , para demostrar que  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es convexo, debemos demostrar que

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in \bigcap_{i \in I} A_i, \forall \lambda \in [0;1] \text{ sucede que } \lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in \bigcap_{i \in I} A_i$$

Vamos al tajo: si  $\bar{u}, \bar{v} \in \bigcap_{i \in I} A_i$ , es  $\bar{u} \in A_i$  y  $\bar{v} \in A_i$ ,  $\forall i \in I$ .

Por ser convexos los  $A_i$ , si  $\lambda \in [0;1]$ , es  $\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in A_i$ ,  $\forall i \in I$ ; en consecuencia:

$$\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in \bigcap_{i \in I} A_i$$

- 2) Para demostrar que  $A_1 + A_2$  es convexo, debemos demostrar que:

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in A_1 + A_2, \forall \lambda \in [0;1] \text{ sucede que } \lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in A_1 + A_2$$

Si  $\lambda \in [0;1]$ , es:

$$\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} = \lambda \bullet (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + (1 - \lambda) \bullet (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) =$$

$* \text{ Si } \bar{u} \in A_1 + A_2 \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2, \text{ siendo } \bar{u}_1 \in A_1 \text{ y } \bar{u}_2 \in A_2$

$* \text{ Si } \bar{v} \in A_1 + A_2 \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \text{ siendo } \bar{v}_1 \in A_1 \text{ y } \bar{v}_2 \in A_2$

$$= (\lambda \bullet \bar{u}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1) + (\lambda \bullet \bar{u}_2 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_2) \in A_1 + A_2$$

Pues  $\begin{cases} \lambda \bullet \bar{u}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1 \in A_1, \text{ ya que } \bar{u}_1, \bar{v}_1 \in A_1 \text{ y } A_1 \text{ es convexo} \\ \lambda \bullet \bar{u}_2 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_2 \in A_2, \text{ ya que } \bar{u}_2, \bar{v}_2 \in A_2 \text{ y } A_2 \text{ es convexo} \end{cases}$

3) Para demostrar que el conjunto  $f(S)$  es convexo, debemos demostrar que:

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in f(S), \forall \lambda \in [0;1] \text{ sucede que } \lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in f(S)$$

Si  $\lambda \in [0;1]$ , es:

$$\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} = \lambda \bullet f(\bar{u}_1) + (1 - \lambda) \bullet f(\bar{v}_1) =$$

$\begin{aligned} * \text{ Si } \bar{u} \in f(S) &\Rightarrow \exists \bar{u}_1 \in S / f(\bar{u}_1) = \bar{u} \\ * \text{ Si } \bar{v} \in f(S) &\Rightarrow \exists \bar{v}_1 \in S / f(\bar{v}_1) = \bar{v} \end{aligned}$
--

Siendo "f" aplicación lineal, si $\mu \in \mathfrak{R}$ y $\bar{w} \in \mathfrak{R}^n$ , es $\mu \bullet f(\bar{w}) = f(\mu \bullet \bar{w})$
---

$$= f(\lambda \bullet \bar{u}_1) + f((1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1) =$$

Siendo "f" aplicación lineal, es $f(\text{Pepe}) + f(\text{Juan}) = f(\text{Pepe} + \text{Juan})$
---

$$= f(\lambda \bullet \bar{u}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1) \in f(S)$$

Pues $\lambda \bullet \bar{u}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1 \in S$ , ya que $\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in S$ y "S" es convexo
---

4) Consideremos un sistema lineal de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ \dots &\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b \Rightarrow A \bullet \bar{x} = \bar{b}$$

Sea "S" el conjunto de las soluciones no negativas del sistema:

$$S = \{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n / A \bullet \bar{x} = \bar{b}, \bar{x} \geq \bar{0} \}$$

Para demostrar que "S" es convexo, debemos demostrar que:

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in S, \forall \lambda \in [0;1] \text{ sucede que } \lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in S$$

Para demostrar que  $\bar{z} = \lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in S$  debemos demostrar que  $\bar{z}$  es una solución no negativa del sistema lineal dado, lo que es trivial, pues

$$A \bullet \bar{z} = A \bullet (\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}) = \lambda \bullet (A \bullet \bar{u}) + (1 - \lambda) \bullet (A \bullet \bar{v}) =$$

$\begin{aligned} * \bar{u} \in S &\Rightarrow A \bullet \bar{u} = \bar{b} \\ * \bar{v} \in S &\Rightarrow A \bullet \bar{v} = \bar{b} \end{aligned}$
--

$$= \lambda \bullet \bar{b} + (1 - \lambda) \bullet \bar{b} = \bar{b}$$

Además, como  $\bar{u}, \bar{v} \in S$ , es  $\bar{u} \geq \bar{0}$  y  $\bar{v} \geq \bar{0}$ ; y como  $\lambda \in [0;1]$  y  $1 - \lambda \in [0;1]$ , es:

$$\lambda \bullet \bar{u} \geq \bar{0} ; (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \geq \bar{0}$$

por lo que  $\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \geq \bar{0}$ .

Si  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  son convexos,  $C = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{x} = \bar{a} - \bar{b}, \bar{a} \in A, \bar{b} \in B\}$  también lo es, pues si  $\lambda \in [0;1]$  y  $\bar{u}, \bar{v} \in C$ , es:

$$\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} = \lambda \bullet (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + (1 - \lambda) \bullet (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) =$$

$$* \text{ Si } \bar{u} \in C \Rightarrow \bar{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2, \text{ siendo } \bar{u}_1 \in A \text{ y } \bar{u}_2 \in B$$

$$* \text{ Si } \bar{v} \in C \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \text{ siendo } \bar{v}_1 \in A \text{ y } \bar{v}_2 \in B$$

$$= (\lambda \bullet \bar{u}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1) - (\lambda \bullet \bar{u}_2 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_2) \in C$$

$$\text{Pues } \begin{cases} \lambda \bullet \bar{u}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_1 \in A, \text{ ya que } \bar{u}_1, \bar{v}_1 \in A \text{ y } A \text{ es convexo} \\ \lambda \bullet \bar{u}_2 + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}_2 \in B, \text{ ya que } \bar{u}_2, \bar{v}_2 \in B \text{ y } B \text{ es convexo} \end{cases}$$

## 1.4 HIPERPLANO

Si  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  es un vector de constantes ( $\bar{c} \neq \bar{0}$ ) y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , llamamos **hiperplano** de  $\mathbb{R}^n$  al conjunto  $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c}^t \bullet \bar{x} = \alpha\}$ .

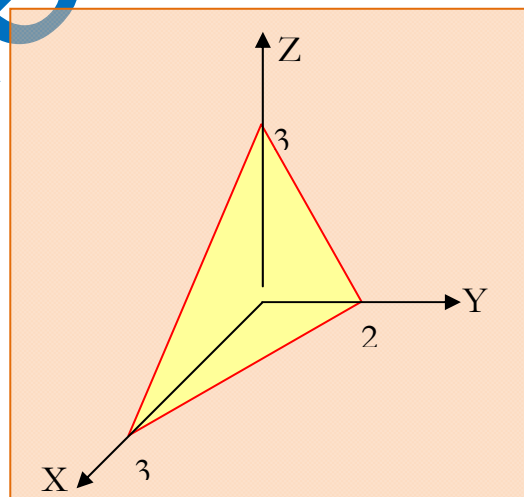
**Todo hiperplano es un conjunto convexo**, pues si  $\forall \bar{u}, \bar{v} \in H$  y  $\lambda \in [0;1]$ , sucede que  $\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v} \in H$ , ya que  $\bar{c}^t \bullet (\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}) = \alpha$ . En efecto:

$$\bar{c}^t \bullet (\lambda \bullet \bar{u} + (1 - \lambda) \bullet \bar{v}) = \lambda \bullet (\bar{c}^t \bullet \bar{u}) + (1 - \lambda) \bullet (\bar{c}^t \bullet \bar{v}) = \lambda \bullet \alpha + (1 - \lambda) \bullet \alpha = \alpha$$

$$\bar{u} \in H \Rightarrow \bar{c}^t \bullet \bar{u} = \alpha ; \bar{v} \in H \Rightarrow \bar{c}^t \bullet \bar{v} = \alpha$$

**Por ejemplo**, un hiperplano de  $\mathbb{R}^2$  es  $H = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \cdot x + 3 \cdot y = 6\}$ , que es la recta que corta al eje OX en el punto (3;0) y al eje OY en el punto (0;2).

**Por ejemplo**, un hiperplano de  $\mathbb{R}^3$  es  $H = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / 2 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 6\}$ , que es el plano que corta al eje OX en el punto (3;0;0), al eje OY en el punto (0;2;0) y al eje OZ en el punto (0;0;3).



**Por ejemplo**, un hiperplano de  $\mathbb{R}^4$  es el conjunto

$$H = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 / 2 \cdot x - 3 \cdot y + 5 \cdot z - t = 7\}$$

Naturalmente, es imposible visualizar "H", pues no es posible dibujar con 4 ejes.

## 1.5 SEMIESPACIOS

Sea  $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c}^t \cdot \bar{x} = \alpha\}$  un hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ .

El **semiespacio cerrado positivo** asociado a "H" es  $H^+ = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c}^t \cdot \bar{x} \geq \alpha\}$ .

El **semiespacio cerrado negativo** asociado a "H" es  $H^- = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c}^t \cdot \bar{x} \leq \alpha\}$ .

El **semiespacio**  $H^+$  es un conjunto convexo, pues si  $\forall \bar{u}, \bar{v} \in H^+$  y  $\lambda \in [0;1]$ , sucede que  $\lambda \cdot \bar{u} + (1-\lambda) \cdot \bar{v} \in H^+$ , ya que  $\bar{c}^t \cdot (\lambda \cdot \bar{u} + (1-\lambda) \cdot \bar{v}) \geq \alpha$ .

En efecto:

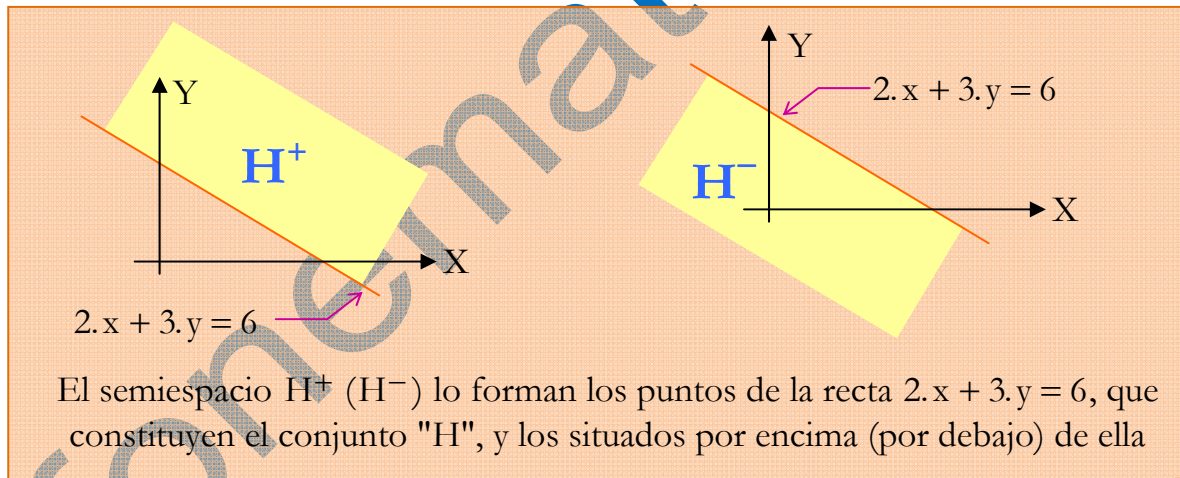
$$\bar{c}^t \cdot (\lambda \cdot \bar{u} + (1-\lambda) \cdot \bar{v}) = \lambda \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{u}) + (1-\lambda) \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{v}) \geq \lambda \cdot \alpha + (1-\lambda) \cdot \alpha = \alpha$$

$$\boxed{\bar{u} \in H^+ \Rightarrow \bar{c}^t \cdot \bar{u} \geq \alpha ; \bar{v} \in H^+ \Rightarrow \bar{c}^t \cdot \bar{v} \geq \alpha}$$

Análogamente se demuestra que el semiespacio  $H^-$  es un conjunto convexo.

**Por ejemplo**, los semiespacios cerrados positivo  $H^+$  y negativo  $H^-$  asociados al hiperplano  $H = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \cdot x + 3 \cdot y = 6\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , son:

$$H^+ = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \cdot x + 3 \cdot y \geq 6\} ; H^- = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 6\}$$



- Del conjunto  $H_0^+ = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c}^t \cdot \bar{x} > \alpha\}$  se dice que es el **semiespacio abierto positivo** asociado a "H", y de  $H_0^- = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / \bar{c}^t \cdot \bar{x} < \alpha\}$  se dice que es el **semiespacio abierto negativo** asociado a "H".

## 1.6 PUNTOS EXTREMOS DE UN CONJUNTO CONVEXO

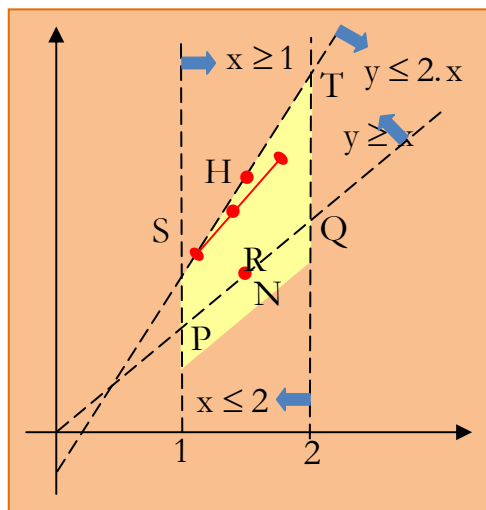
Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto convexo, se dice que  $\bar{u} \in A$  es un **punto extremo o vértice** de "A" si no es posible expresar  $\bar{u}$  como CLC de otros puntos de "A" distintos del propio  $\bar{u}$ ; o sea, si  $\bar{u}$  **no es interior a ningún segmento lineal cerrado contenido en "A"**.

El conjunto formado por los puntos extremos de "A" se denota  $\text{Extr.}(A)$ .

**Por ejemplo,** si

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 2x, y \geq x, x \geq 1, x \leq 2\}$$

el punto "H" no es punto extremo de "A", pues "H" es interior al segmento lineal cerrado que une los puntos "S" y "T"; el punto "N" no es punto extremo de "A", pues "N" es interior al segmento lineal cerrado que une los puntos "P" y "Q"; el punto "R" no es punto extremo de "A", pues "R" es interior a "A". Los únicos puntos extremos de "A" son "S", "P", "Q" y "T": ninguno de ellos es interior a ningún segmento lineal cerrado contenido en "A".



**Observa:** el conjunto "A" es la intersección de los siguientes semiespacios cerrados:

$$H_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y - 2x \leq 0\}$$

$$H_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y - x \geq 0\}$$

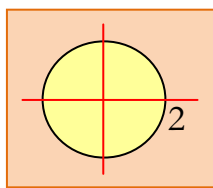
$$H_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1\}$$

$$H_4 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 2\}$$

**Por ejemplo,** los puntos extremos del círculo

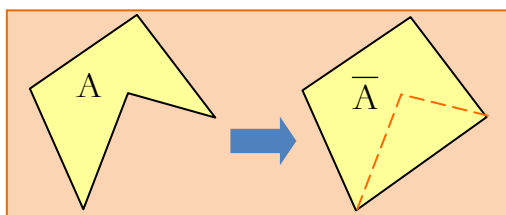
$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

son los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ , que no son interiores a ningún segmento lineal cerrado contenido en "A".



## 1.7 ENVOLVENTE CONVEXA

Siendo "A" un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , la **envolvente convexa o cierre** de "A" se denota  $\bar{A}$ , y es la **intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a "A"**; o sea, el "menor" conjunto convexo que contiene a "A".

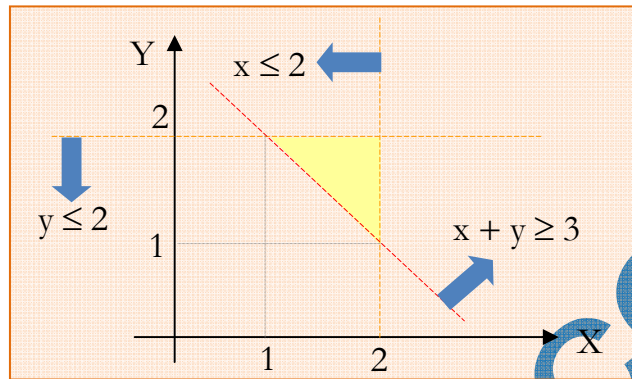


Naturalmente, si "A" es convexo, entonces  $\bar{A} = A$ .

**Por ejemplo,** si "A" es el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por los puntos (0;0) y (1;2), su envolvente convexa  $\bar{A}$ , el menor conjunto convexo que contiene a "A", es el segmento lineal cerrado que une dichos puntos.

**Por ejemplo,** si "A" es el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado por los puntos no alineados (2;1), (1;2) y (2;2), su envolvente convexa  $\bar{A}$ , el menor conjunto convexo que contiene a "A", es el triángulo cuyos vértices son dichos puntos:

$$\bar{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2\}$$



Observa: que el conjunto  $\bar{A}$  es la intersección de los siguientes semiespacios cerrados:

$$H_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 3\}; H_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 2\}$$

$$H_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 2\}$$

**Por ejemplo,** si  $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 9\}$ , su envolvente convexa  $\bar{A}$ , es:

$$\bar{A} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$$

## 1.8 POLIEDRO CONVEXO

Se llama **poliedro convexo** a la envolvente convexa de un número finito de puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

## TEST 1: CONJUNTOS CONVEXOS

01) Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  convexos y  $X = \{x \in \mathbb{R}^n / x = a - b, \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}$

a)  $X$  es convexo ; b)  $X$  es convexo si  $b = 0$  ; c)  $X$  es cóncavo

02) El conjunto  $\{(x; y; z) / 2.x + 3.y + 4.z = 12\}$  es convexo porque

a) Es un hiperplano ; b) Es una recta ; c) Es un semiespacio

03) La envolvente convexa de los puntos  $(0;0)$ ,  $(0;2)$ ,  $(1;1)$  y  $(2;0)$  es:

a)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$

b)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 2\}$

c)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2\}$

04) Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  conjuntos convexos y

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \alpha a + \beta b, \text{ con } a \in A, b \in B \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

a)  $X$  es convexo ; b)  $X$  es convexo sólo si  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos

c)  $X$  es cóncavo

05) La envolvente convexa de los puntos  $(0;2)$ ,  $(1;1)$  y  $(2;0)$  es:

a)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$

b)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x \leq 2, y \leq 2\}$

c)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x \geq 1, y \geq 1\}$

06) El conjunto  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2.x + 3.y = 6\}$  es:

a) Convexo ; b) Abierto ; c) Acotado

07) Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $C = \{x \in \mathbb{R}^n / x = a - b, \text{ con } a \in A \text{ y } b \in B\}$ :

a)  $C$  es convexo ; b)  $C$  es convexo si " $A$ " y " $B$ " son convexos

c)  $C$  no es convexo aunque " $A$ " y " $B$ " sean convexos

08) El conjunto de combinaciones convexas de los puntos  $(0;0)$ ,  $(1;2)$  y  $(2;2)$  es:

a)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y \leq 2.x, y \leq 2\}$

b)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, 0 \leq y \leq 2, y = x, y = 2.x\}$

c)  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, y \leq x, y \leq 2.x\}$

09) El conjunto  $Y = \{y \in \mathbb{R}^n / y = \alpha x, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}, x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$

a) Es convexo ; b) Es convexo si lo es " $X$ "

c) Es convexo si  $\alpha \in [0;1]$

## SOLUCIÓN

- 01) La correcta es a), famosa propiedad de los conjuntos convexos.  
02) La correcta es a).  
03) La correcta es c): los tres puntos están alineados.  
04) Entendiendo que  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes, la correcta es a), ya que si  $u, v \in X$  y  $\lambda \in [0;1]$ , sucede que  $\lambda u + (1 - \lambda)v \in X$ :

$$\lambda u + (1 - \lambda)v = \lambda(\alpha u_1 + \beta u_2) + (1 - \lambda)(\alpha v_1 + \beta v_2) =$$

\* Si  $u \in X \Rightarrow u = \alpha u_1 + \beta u_2$ , siendo  $u_1 \in A$  y  $u_2 \in B$

\* Si  $v \in X \Rightarrow v = \alpha v_1 + \beta v_2$ , siendo  $v_1 \in A$  y  $v_2 \in B$

$$= \alpha(\lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1) + \beta(\lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2) \in X$$

Pues  $\begin{cases} \lambda u_1 + (1 - \lambda)v_1 \in A, \text{ ya que } u_1, v_1 \in A \text{ y } A \text{ es convexo} \\ \lambda u_2 + (1 - \lambda)v_2 \in B, \text{ ya que } u_2, v_2 \in B \text{ y } B \text{ es convexo} \end{cases}$

- 05) La correcta es a).  
06) La correcta es a).  
07) La correcta es b).  
08) La correcta es a), el triángulo de vértices  $(0;0)$ ,  $(1;2)$  y  $(2;2)$  y sus puntos interiores.  
09) La correcta es a): el conjunto "Y" lo forman los puntos de la recta que determinan el punto "x" y el origen de coordenadas.

