OPTIMIZACIÓN

www.fonemato.com

Tema 2

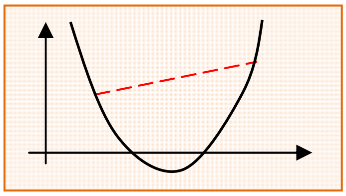
Funciones convexas y cóncavas

2.1 FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS

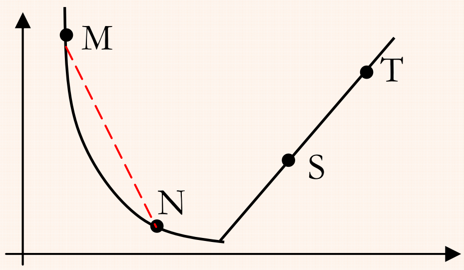
- Sea $f:S \subseteq \Re^n \mapsto \Re$, siendo convexo "S". Se dice que la función "f" es **estrictamente convexa** en "S" si $\forall\ \overline{u},\overline{v} \in S$ y $\forall \lambda \in (0;1)$ sucede que

  $$f\left(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}\right) < \lambda.f\left(\overline{u}\right) + (1-\lambda).f\left(\overline{v}\right)$$

  En términos geométricos significa que la cuerda que une cualquier par de puntos de la gráfica de "f" está por encima de dicha gráfica.

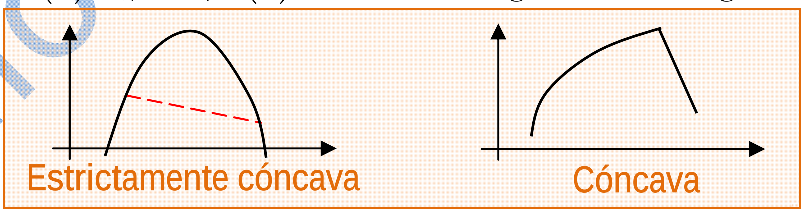
- Se dice que la función "f" es **convexa** en "S" si $\forall\ \overline{u},\overline{v} \in S$ y $\forall \lambda \in [0;1]$ sucede que $f\left(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}\right) \leq \lambda.f\left(\overline{u}\right) + (1-\lambda).f\left(\overline{v}\right)$. En términos geométricos significa que la cuerda que une cualquier par de puntos de la gráfica de "f" no está por debajo de dicha gráfica.

  La cuerda que une los puntos "M" y "N" está por encima de la gráfica de "f", pero no así cuerda que une los puntos "S" y "T", que coincide con la gráfica de "f"

- Se dice que "f" es **estrictamente cóncava** en "S" si $\forall\ \overline{u},\overline{v} \in S$ y $\forall \lambda \in (0;1)$ sucede que $f\left(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}\right) > \lambda.f\left(\overline{u}\right) + (1-\lambda).f\left(\overline{v}\right)$. En términos geométricos significa que la cuerda que une cualquier par de puntos de la gráfica de "f" está por debajo de dicha gráfica.

- Se dice que "f" es **cóncava** en "S" si $\forall\ \overline{u},\overline{v} \in S$ y $\forall \lambda \in [0;1]$ sucede que $f\left(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}\right) \geq \lambda.f\left(\overline{u}\right) + (1-\lambda).f\left(\overline{v}\right)$. En términos geométricos significa que la cuerda que une cualquier par de puntos de la gráfica de "f" no está por en-cima de la gráfica.

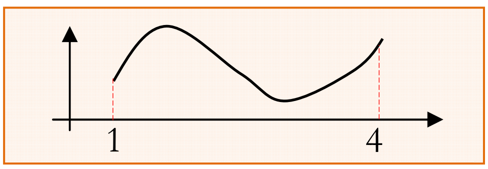
  

- **Obvio:** toda función estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en el conjunto convexo "S", es convexa (cóncava) en "S". El recíproco no es cierto.

- **Obvio:** si la función "f" es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) en el conjunto convexo "S", su función opuesta $-f$ es estrictamente cóncava (estrictamente convexa) en "S".

- **Obvio:** si la función "f" es convexa (cóncava) en el conjunto convexo "S", su función opuesta $-f$ es cóncava (convexa) en "S".

- **Obvio:** puede ocurrir que "f" no sea cóncava ni convexa en el conjunto convexo "S"; tal es el caso de la $f:[1;4] \mapsto \Re$ cuya gráfica es la de la siguiente figura.

- **Toda función lineal es a la vez convexa y cóncava, pero no estrictamente convexa ni estrictamente cóncava.**

En efecto, sin pérdida de generalidad, si $f(x_1;x_2)=a_1.x_1+a_2.x_2+a_3$, es:

$$
\begin{gathered}
f(\lambda\bullet(u_1;u_2)+(1-\lambda)\bullet(v_1;v_2))=\\
=f(\lambda.u_1+(1-\lambda).v_1;\lambda.u_2+(1-\lambda).v_2)=\\
=a_1.(\lambda.u_1+(1-\lambda).v_1)+a_2.(\lambda.u_2+(1-\lambda).v_2)+a_3=\\
=a_1.(\lambda.u_1+(1-\lambda).v_1)+a_2.(\lambda.u_2+(1-\lambda).v_2)+(\lambda+1-\lambda).a_3=\\
=\lambda.\underbrace{(a_1.u_1+a_2.u_2+a_3)}_{f(u_1;u_2)}+(1-\lambda).\underbrace{(a_1.v_1+a_2.v_2+a_3)}_{f(v_1;v_2)}=\\
=\lambda.f(u_1;u_2)+(1-\lambda).f(v_1;v_2)
\end{gathered}
$$

FONEMATO 2.1.1

Analícese si $f(x;y)=x^2-y$ es convexa o cóncava en $\Re^2$.

SOLUCIÓN

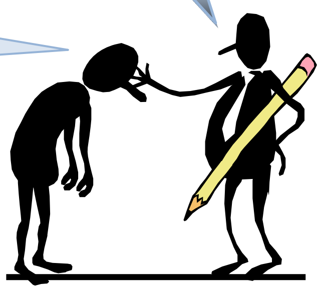
Debemos **estudiar el signo** de $f(\lambda\bullet\bar{u}+(1-\lambda)\bullet\bar{v})-\lambda.f(\bar{u})-(1-\lambda).f(\bar{v})$, que resulta ser no positivo, por lo que "f" es convexa en $\Re^2$:

$$
\begin{gathered}
f(\lambda\bullet\bar{u}+(1-\lambda)\bullet\bar{v})-\lambda.f(\bar{u})-(1-\lambda).f(\bar{v})=\\
=f(\lambda\bullet(u_1;u_2)+(1-\lambda)\bullet(v_1;v_2))-\lambda.f(u_1;u_2)-(1-\lambda).f(v_1;v_2)=\\
=f(\lambda.u_1+(1-\lambda).v_1;\lambda.u_2+(1-\lambda).v_2)-\lambda.f(u_1;u_2)-(1-\lambda).f(v_1;v_2)=\\
=(\lambda.u_1+(1-\lambda).v_1)^2-(\lambda.u_2+(1-\lambda).v_2)-\lambda.(u_1^2-u_2)-(1-\lambda).(v_1^2-v_2)=\\
=\lambda^2.u_1^2+(1-\lambda)^2.v_1^2+2.\lambda.(1-\lambda).u_1.v_1-\lambda.u_2-(1-\lambda).v_2-\lambda.u_1^2+\lambda.u_2-\\
-(1-\lambda).v_1^2+(1-\lambda).v_2=\\
=\lambda^2.u_1^2+(1-\lambda)^2.v_1^2+2.\lambda.(1-\lambda).u_1.v_1-\lambda.u_1^2-(1-\lambda).v_1^2=\\
=\lambda.u_1^2.(\lambda-1)+(1-\lambda).v_1^2.((1-\lambda)-1)+2.\lambda.(1-\lambda).u_1.v_1=\\
=\lambda.u_1^2.(\lambda-1)-\lambda.(1-\lambda).v_1^2+2.\lambda.(1-\lambda).u_1.v_1=\\
=\lambda.(1-\lambda).(-u_1^2-v_1^2+2.u_1.v_1)=-\lambda.(1-\lambda).(u_1^2+v_1^2-2.u_1.v_1)=\\
=-\lambda.(1-\lambda).(u_1-v_1)^2\leq 0
\end{gathered}
$$

pues $\lambda\geq 0,\ 1-\lambda\geq 0$ y $(u_1-v_1)^2\geq 0$

Espero que haya **otra forma** de analizar la concavidad/convexidad de una función "f" en un conjunto convexo "S", porque hacerlo a lo bestia, estudiando el signo de $f(\lambda\bullet\bar{u}+(1-\lambda)\bullet\bar{v})-\lambda.f(\bar{u})-(1-\lambda).f(\bar{v})$, como acabamos de ver, es espantoso, a pesar de que $f(x;y)=x^2-y$ es un triste polinomio de grado 2

Esperas bien



FONEMATO 2.1.2

Demuestre que una forma cuadrática semidefinida positiva es convexa.

SOLUCIÓN

Sea $A_{n\times n}$ una matriz simétrica con elementos reales tal que la forma cuadrática $f:\mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$ asociada a ella es semidefinida positiva; o sea:

$$f(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{x} \geq 0,\ \forall \bar{x} \in \mathfrak{R}^n$$

Demostraremos que "f" es convexa demostrando que si $\bar{u},\bar{v} \in \mathfrak{R}^n$ y $\lambda \in [0;1]$, sucede que $f\big(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\big) \leq \lambda . f(\bar{u}) + (1-\lambda). f(\bar{v})$.

En efecto:

$$f\big(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\big) = \big(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\big)^t \bullet A \bullet \big(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\big) =$$

$$= \big(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big)^t \bullet A \bullet \big(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \big(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) + \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \big(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big)\big) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + \lambda . \big(\bar{v}^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) +$$

$$+ \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) + \lambda^2 . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) =$$

$$\boxed{\text{"A" simétrica } \Rightarrow \bar{v}^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v}) = (\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}}$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + 2.\lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) + \lambda^2 . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) \leq$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{siendo "f" semidefinida positiva, es } (\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v}) \geq 0, \\ \text{y como } \lambda \in [0;1], \text{ es } 0 \leq \lambda^2 \leq \lambda \leq 1; \text{ por tanto:} \\ \lambda^2 . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) \leq \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big)\end{array}}$$

$$\leq \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + 2.\lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) + \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\big) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + 2.\lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) +$$

$$+ \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{u}\big) - \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) + \lambda . \big((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{u}\big) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + \lambda . \big(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) - \lambda . \big(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) + \lambda . \big(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{u}\big) - \lambda . \big(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{u}\big) =$$

$$\boxed{\text{"A" simétrica } \Rightarrow \bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{v} = \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{u}}$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} - \lambda . \big(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}\big) + \lambda . \big(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{u}\big) =$$

$$= \lambda . \underbrace{\big(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{u}\big)}_{f(\bar{u})} + (1-\lambda) . \underbrace{\big(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}\big)}_{f(\bar{v})} =$$

$$= \lambda . f(\bar{u}) + (1-\lambda) . f(\bar{v})$$

Análogamente se demuestra que **toda forma cuadrática semidefinida negativa es una función cóncava.**

FONEMATO 2.1.3

Demuestre que toda forma cuadrática definida positiva es una función estrictamente convexa.

SOLUCIÓN

Sea $A_{n\times n}$ una matriz simétrica con elementos reales tal que la forma cuadrática $f:\Re^n \mapsto \Re$ asociada a ella es definida positiva; o sea:

$$f(\bar{x}) = \bar{x}^t \bullet A \bullet \bar{x} > 0,\ \forall \bar{x} \neq \bar{0} \in \Re^n$$

Demostraremos que "f" es estrictamente convexa demostrando que si $\bar{u}, \bar{v} \in \Re^n$ y $\lambda \in (0;1)$, sucede que $f\left(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\right) < \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v})$. En efecto:

$$f\left(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\right) = \left(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\right)^t \bullet A \bullet \left(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}\right) =$$

$$= \left(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right)^t \bullet A \bullet \left(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \left(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) + \lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \left(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right)\right) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + \lambda.\left(\bar{v}^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) +$$

$$+\lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) + \lambda^2.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) =$$

$$\boxed{\text{"A" simétrica } \Rightarrow \bar{v}^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v}) = (\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}}$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + 2.\lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) + \lambda^2.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) <$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{siendo "f" definida positiva, es } (\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v}) > 0, \\ \text{y como } \lambda \in (0;1), \text{ es } 0 < \lambda^2 < \lambda < 1; \text{ por tanto:} \\ \lambda^2.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) < \lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right)\end{array}}$$

$$< \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + 2.\lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) + \lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet (\bar{u}-\bar{v})\right) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + 2.\lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) +$$

$$+\lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{u}\right) - \lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + \lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) + \lambda.\left((\bar{u}-\bar{v})^t \bullet A \bullet \bar{u}\right) =$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} + \lambda.\left(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) - \lambda.\left(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) + \lambda.\left(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{u}\right) - \lambda.\left(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{u}\right) =$$

$$\boxed{\text{"A" simétrica } \Rightarrow \bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{v} = \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{u}}$$

$$= \bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v} - \lambda.\left(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}\right) + \lambda.\left(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{u}\right) =$$

$$= \lambda.\underbrace{\left(\bar{u}^t \bullet A \bullet \bar{u}\right)}_{f(\bar{u})} + (1-\lambda).\underbrace{\left(\bar{v}^t \bullet A \bullet \bar{v}\right)}_{f(\bar{v})} =$$

$$= \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v})$$

Análogamente se demuestra que **toda forma cuadrática definida negativa es una función estrictamente cóncava.**

FONEMATO 2.1.4

Sea $f:[0;+\infty) \mapsto \Re$ una función estrictamente convexa tal que $f(0) = f(1) = 0$. Demuestre que $f(x) < 0,\ \forall x \in (0;1)$.

SOLUCIÓN

Si $f:[0;+\infty) \mapsto \Re$ es estrictamente convexa, $\forall\, u,v \in [0;+\infty)$ y $\forall x \in (0;1)$ sucede que

$$f(x.u + (1-x).v) < x.f(u) + (1-x).f(v)$$

Así, si $u = 1$ y $v = 0$, $\forall x \in (0;1)$ sucede que:

$$f(x.1 + (1-x).0) < x.f(0) + (1-x).f(1)$$

O sea:

$$f(x) < x.f(0) + (1-x).f(1) = 0$$

$$\boxed{\text{pues } f(0) = f(1) = 0}$$

FONEMATO 2.1.5

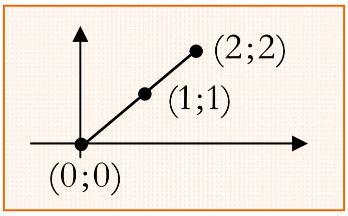
Sea $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $f(0;0) = -1$, $f(1;1) = 1$ y $f(2;2) = -1$.
Demuestre que "f" no es convexa.

SOLUCIÓN

$f:S \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ es **convexa** en "S" si $\forall\, \overline{u},\overline{v} \in S$ y $\forall \lambda \in [0;1]$ sucede que

$$f\left(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}\right) \leq \lambda.f(\overline{u}) + (1-\lambda).f(\overline{v})$$

El punto $\overline{w} = (1;1)$ pertenece al segmento lineal cerrado cuyos extremos son los puntos $\overline{u} = (0;0)$ y $\overline{v} = (2;2)$; o sea, $\overline{w} = (1;1)$ es CLC de $\overline{u} = (0;0)$ y $\overline{v} = (2;2)$:



$$\exists\, \lambda \in [0;1] \,/\, \overline{w} = \lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}$$

En efecto:

$$\overline{w} = \lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 2.(1-\lambda) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{w} = \frac{1}{2} \bullet \overline{u} + \frac{1}{2} \bullet \overline{v}$$

La función "f" no es convexa, pues:

$$f(\overline{w}) \equiv \underbrace{f\left(\frac{1}{2} \bullet \overline{u} + \frac{1}{2} \bullet \overline{v}\right)}_{=1} > \underbrace{\frac{1}{2}.f(\overline{u}) + \frac{1}{2}.f(\overline{v})}_{-1}$$

2.2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONVEXAS

1) Si $S \subseteq \Re^n$ es un conjunto convexo y no vacío, la función $f: S \mapsto \Re$ es convexa en "S" si y sólo si $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, sucede que:

$$f\left(\sum_{i=i}^{m} \lambda_i . \overline{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . f(\overline{x}_i)$$

La función "f" es cóncava en "S" si y sólo si $f\left(\sum_{i=i}^{m} \lambda_i . \overline{x}_i\right) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . f(\overline{x}_i)$.

2) Si $S \subseteq \Re^n$ es un conjunto convexo no vacío y $f: S \mapsto \Re$ es una función convexa en "S", la función $h = c.f$ es convexa en "S" si $c \geq 0$, pues si $c = 0$, la función $h = c.f$ es la función nula que, como todas las funciones constantes, es convexa; y si $c > 0$, siendo $\overline{u}, \overline{v} \in S$ y $\lambda \in [0;1]$, resulta ser:

$$h(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}) = c.f(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}) =$$

según la definición de "h", es h(Pepe) = c.f(Pepe)

$$= c.\left(f(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v})\right) \leq c.(\lambda.f(\overline{u}) + (1-\lambda).f(\overline{v})) =$$

por ser convexa "f"

$$= \lambda.c.f(\overline{u}) + (1-\lambda).c.f(\overline{v}) = \lambda.h(\overline{u}) + (1-\lambda).h(\overline{v})$$

Obvio: si $c \geq 0$ y "f" es cóncava en "S", la función $h = c.f$ es cóncava en "S".

3) Si "S" es un subconjunto convexo no vacío de $\Re^n$ y las funciones $f_i: S \mapsto \Re$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ son convexas en "S", su suma "f" también es convexa en "S", pues siendo $h(\overline{x}) = f_1(\overline{x}) + \ldots + f_k(\overline{x})$, si $\overline{u}, \overline{v} \in S$ y $\lambda \in [0;1]$, resulta ser:

por la definición de "h"

$$h(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}) = \sum_{i=1}^{k} f_i(\lambda \bullet \overline{u} + (1-\lambda) \bullet \overline{v}) \leq$$

por ser convexas las funciones f_i

$$\leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda.f_i(\overline{u}) + (1-\lambda).f_i(\overline{v})) =$$

$$= \left(\lambda.\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{u})\right) + \left((1-\lambda).\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{v})\right) = \lambda.h(\overline{u}) + (1-\lambda).h(\overline{v})$$

por la definición de "h"

Obvio: si las funciones $f_i: S \mapsto \Re$ son cóncavas en "S", su suma también es cóncava en "S".

4) Si "S" es un subconjunto convexo no vacío de $\Re^n$ y las funciones $f_i : S \mapsto \Re$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ son convexas en "S", toda combinación lineal no negativa (de coeficientes no negativos) de dichas funciones es una función convexa en "S", pues si $c_1 \geq 0, \ldots, c_k \geq 0$, está garantizado que las funciones $c_1.f_1, \ldots, c_k.f_k$ son convexas en "S"; así, su suma $c_1.f_1 + \ldots + c_k.f_k$ es convexa en "S".

Obvio: si las funciones $f_i : S \mapsto \Re$ son cóncavas en "S", toda combinación lineal no negativa de ellas es una función cóncava en "S".

5) Sea $S \subset \Re^n$ convexo y no vacío y $f : S \mapsto \Re$ convexa en "S". Si $k \in \Re$, el conjunto $A = \{\bar{x} \in S \,/\, f(\bar{x}) \leq k\}$ es convexo, pues si $\bar{u}, \bar{v} \in S$ y $\lambda \in [0;1]$, es:

$$f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \underbrace{\leq}_{\boxed{\text{pues "f" es convexa en "S"}}} \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v}) \underbrace{\leq}_{\boxed{\bar{u} \in A \Rightarrow f(\bar{u}) \leq k \,;\, \bar{v} \in A \Rightarrow f(\bar{v}) \leq k}} \lambda.k + (1-\lambda).k = k$$

Obvio: si $f : S \mapsto \Re$ es cóncava en "S", el conjunto $A = \{\bar{x} \in S \,/\, f(\bar{x}) \geq k\}$ es convexo.

Por ejemplo, en el ejercicio 2.1.1 hemos visto que $f(x;y) = x^2 - y$ es convexa en $\Re^2$; así, apoyándonos en la propiedad 5), podemos garantizar que los siguientes subconjuntos de $\Re^2$ son convexos:

$$S_0 = \{(x;y) \,/\, x^2 - y \leq 7\} = \{(x;y) \,/\, f(x;y) \leq 7\}$$
$$S_1 = \{(x;y) \,/\, x^2 - y \leq -4\} = \{(x;y) \,/\, f(x;y) \leq -4\}$$
$$S_2 = \{(x;y) \,/\, x^2 \leq y\} = \{(x;y) \,/\, x^2 - y \leq 0\} = \{(x;y) \,/\, f(x;y) \leq 0\}$$
$$S_3 = \{(x;y) \,/\, y \geq x^2 + 3\} = \{(x;y) \,/\, x^2 - y \leq -3\} = \{(x;y) \,/\, f(x;y) \leq -3\}$$

No es convexo el conjunto S_4:

$$S_4 = \{(x;y) \,/\, y \leq x^2 + 9\} = \{(x;y) \,/\, x^2 - y \geq -9\} = \{(x;y) \,/\, f(x;y) \geq -9\}$$

La función $g(x;y) = -f(x;y) = y - x^2$ es cóncava en $\Re^2$, pues $f(x;y) = x^2 - y$ es convexa en $\Re^2$, así, según la propiedad 5), podemos garantizar que los siguientes subconjuntos de $\Re^2$ son convexos:

$$S_5 = \{(x;y) \,/\, y - x^2 \geq 2\} = \{(x;y) \,/\, g(x;y) \geq 2\}$$
$$S_6 = \{(x;y) \,/\, y - x^2 \geq -5\} = \{(x;y) \,/\, g(x;y) \geq -5\}$$
$$S_7 = \{(x;y) \,/\, y \geq x^2 + 7\} = \{(x;y) \,/\, y - x^2 \geq 7\} = \{(x;y) \,/\, g(x;y) \geq 7\}$$
$$S_8 = \{(x;y) \,/\, x^2 \leq y + 4\} = \{(x;y) \,/\, y - x^2 \geq -4\} = \{(x;y) \,/\, g(x;y) \geq -4\}$$

No es convexo el conjunto S_9:

$$S_9 = \{(x;y) \,/\, y \leq x^2 + 5\} = \{(x;y) \,/\, y - x^2 \leq 5\} = \{(x;y) \,/\, g(x;y) \leq 5\}$$

2.3 HIPÓGRAFO. EPÍGRAFE

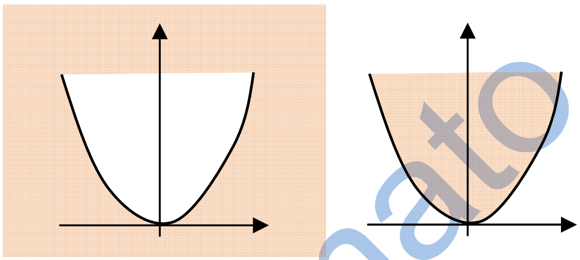
- Se llama **hipógrafo** de la función $f : \Re^n \mapsto \Re$ al conjunto

$$\text{Hip.}(f) = \{(\bar{x}; y) \in \Re^n \times \Re \; / \; y \le f(\bar{x})\}$$

- Se llama **epígrafe** de "f" al conjunto $\text{Epi.}(f) = \{(\bar{x}; y) \in \Re^n \times \Re \; / \; y \ge f(\bar{x})\}$.

- Puede demostrase que "f" es convexa (cóncava) si y sólo si su epígrafe (hipógrafo) es un conjunto convexo.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, es $\text{Epi.}(f) = \{(x; y) \in \Re \times \Re \; / \; y \ge x^2\}$, que viene a ser el subconjunto de $\Re^2$ formado por los puntos de la parábola $f(x) = x^2$ y los ubicados entre los dos brazos de ella. Es $\text{Hip.}(f) = \{(x; y) \in \Re \times \Re \; / \; y \le x^2\}$, que viene a ser el subconjunto de $\Re^2$ formado por los puntos de la parábola $f(x) = x^2$ y los no ubicados entre los dos brazos de ella.



Por ejemplo, si $f(x_1; x_2) = 2.x_1 + 3.x_2$, es:

$$\text{Hip.}(f) = \{(x_1; x_2; y) \in \Re^2 \times \Re \; / \; y \le 2.x_1 + 3.x_2\}$$
$$\text{Epi.}(f) = \{(x_1; x_2; y) \in \Re^2 \times \Re \; / \; y \ge 2.x_1 + 3.x_2\}$$

2.4 FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS DIFERENCIABLES UNA VEZ

Sea $S \subseteq \Re^n$ convexo, abierto y no vacío. Sea $f : S \mapsto \Re$ diferenciable en "S".

Recuerda: si te desplazas desde el punto $\bar{v} \in S$ hasta el punto $\bar{u} \in S$, el número real $f(\bar{u}) - f(\bar{v})$ expresa la variación que sufre "f" .... y el número real $\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t$, que es la diferencial total primera de "f" en el punto $\bar{v} \in S$ si te desplazas desde $\bar{v} \in S$ hasta $\bar{u} \in S$, expresa la variación que sufriría "f" si se comportase como su **elemento tangente** (recta tangente si $n = 1$, plano tangente si $n = 2$, hiperplano tangente si $n = 3$) en el punto de partida $\bar{v} \in S$.

a) "f" es convexa en "S" $\Leftrightarrow \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t \le f(\bar{u}) - f(\bar{v}), \; \forall \; \bar{u}, \bar{v} \in S$

b) "f" es cóncava en "S" $\Leftrightarrow \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t \ge f(\bar{u}) - f(\bar{v}), \; \forall \; \bar{u}, \bar{v} \in S$

c) "f" es estrict. convexa en "S" $\Leftrightarrow \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t < f(\bar{u}) - f(\bar{v}), \; \forall \; \bar{u}, \bar{v} \in S$

d) "f" es estrict. cóncava en "S" $\Leftrightarrow \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t > f(\bar{u}) - f(\bar{v}), \; \forall \; \bar{u}, \bar{v} \in S$

$\boxed{\text{Demostración de a)}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si "f" es convexa en "S", sucede que:

$$f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \le \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v}),\ \forall\ \bar{u},\bar{v} \in S,\ \forall \lambda \in [0;1]$$

Como $f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) = f(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u} - \bar{v}))$, también es:

$$f(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u} - \bar{v})) \le \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v})$$

O sea, $f(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u} - \bar{v})) - f(\bar{v}) \le \lambda.\big(f(\bar{u}) - f(\bar{v})\big)$. Por tanto, si $\lambda \ne 0$:

$$\frac{f(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u} - \bar{v})) - f(\bar{v})}{\lambda} \le f(\bar{u}) - f(\bar{v}) \Rightarrow$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{f(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u} - \bar{v})) - f(\bar{v})}{\lambda} \right) \le \lim_{\lambda \to 0} \big(f(\bar{u}) - f(\bar{v})\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t \le f(\bar{u}) - f(\bar{v})$$

- Como "f" es diferenciable en todo punto de "S", tiene derivada en todo punto "Pepe" de "S" según cualquier vector "Juan", siendo:

$$\underbrace{\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{f(\text{Pepe} + \lambda \bullet \text{Juan}) - f(\text{Pepe})}{\lambda} \right)}_{\text{derivada de "f" en Pepe" según el vector "Juan"}} = \nabla f(\text{Pepe}) \bullet (\text{Juan})^t$$

Por tanto, si $\text{Pepe} \equiv \bar{v}$ y $\text{Juan} \equiv \bar{u} - \bar{v}$, es:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{f(\bar{v} + \lambda \bullet (\bar{u} - \bar{v})) - f(\bar{v})}{\lambda} \right) = \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t$$

- Es $\lim\limits_{\lambda \to 0} \big(f(\bar{u}) - f(\bar{v})\big) = f(\bar{u}) - f(\bar{v})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t \le f(\bar{u}) - f(\bar{v}),\ \forall\ \bar{u},\bar{v} \in S$, entonces, si $\lambda \in [0;1]$, es:

$$\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \bullet \big(\bar{u} - (\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v})\big)^t \le f(\bar{u}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v})$$

$$\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \bullet \big(\bar{v} - (\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v})\big)^t \le f(\bar{v}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v})$$

O sea:

$$(1-\lambda).\Big(\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t\Big) \le f(\bar{u}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \quad \text{(I)}$$

$$\lambda.\Big(\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \bullet (\bar{v} - \bar{u})^t\Big) \le f(\bar{v}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) + \quad \text{(II)}$$

Multiplicando (I) y (II) respectivamente por λ y $1-\lambda$, sumando después miembro a miembro, se obtiene:

$$f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda)\bullet \bar{v}) \le \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v})$$

lo que demuestra que "f" es convexa en "S".

$\boxed{\text{Demostración de c)}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si "f" es estrictamente convexa en "S", es convexa en "S"; así, según a), $\forall\ \bar{u},\bar{v} \in S,\ \forall \lambda \in (0;1)$, es:

$$\nabla f(\bar{v}) \bullet (\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v} - \bar{v})^t \leq f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) - f(\bar{v}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \geq f(\bar{v}) + \lambda.\left(\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t\right) \quad \text{(III)}$$

También es:

$$\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t \leq f(\bar{u}) - f(\bar{v}) \quad \text{(IV)}$$

Si $\bar{u} \neq \bar{v}$, la inecuación (IV) no puede satisfacerse con el signo "=", pues si $\bar{u} \neq \bar{v}$ y $\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t = f(\bar{u}) - f(\bar{v})$, por ser "f" estrictamente convexa en "S", $\forall\ \bar{u},\bar{v} \in S,\ \forall \lambda \in (0;1)$, sería:

$$f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) < \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v}) =$$

$$\boxed{\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t = f(\bar{u}) - f(\bar{v}) \Rightarrow f(\bar{u}) = f(\bar{v}) + \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t}$$

$$= \lambda.\left(f(\bar{v}) + \nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t\right) + (1-\lambda).f(\bar{v}) =$$

$$= f(\bar{v}) + \lambda.\left(\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t\right)$$

Como el resultado $f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) < f(\bar{v}) + \lambda.\left(\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t\right)$ contradice a (III), en (IV) no puede darse la igualdad; en consecuencia:

$$\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t < f(\bar{u}) - f(\bar{v}) \quad \text{(IV)}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\nabla f(\bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t < f(\bar{u}) - f(\bar{v}),\ \forall\ \bar{u},\bar{v} \in S$, entonces si $\lambda \in (0;1)$ y $\bar{u} \neq \bar{v}$, es:

$$\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \bullet \left(\bar{u} - (\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v})\right)^t < f(\bar{u}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v})$$

$$\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \bullet \left(\bar{v} - (\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v})\right)^t < f(\bar{v}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v})$$

O sea:

$$(1-\lambda).\left(\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \bullet (\bar{u} - \bar{v})^t\right) < f(\bar{u}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \quad \text{(V)}$$

$$\lambda.\left(\nabla f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \bullet (\bar{v} - \bar{u})^t\right) < f(\bar{v}) - f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) \quad \text{(VI)}$$

Multiplicando (V) y (VI) respectivamente por λ y $1-\lambda$, sumando después miembro a miembro, se obtiene:

$$f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) < \lambda.f(\bar{u}) + (1-\lambda).f(\bar{v})$$

lo que demuestra que "f" es estrictamente convexa en "S".

2.5 FUNCIONES CONVEXAS Y CÓNCAVAS DIFERENCIABLES DOS VECES

Sea $S \subseteq \Re^n$ convexo, abierto y no vacío. Sea $f: S \mapsto \Re$ de clase C^2 en "S"; o sea, "f" y sus funciones derivadas primeras y segundas son continuas en "S".

- Puede demostrarse que "f" es $\begin{Bmatrix} \text{convexa} \\ \text{cóncava} \end{Bmatrix}$ en "S" si y sólo si la matriz hessiana de "f" es semidefinida $\begin{Bmatrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{Bmatrix}$ en todo punto de "S".
- Si la matriz hessiana de "f" es definida $\begin{Bmatrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{Bmatrix}$ en todo punto de "S", la función "f" es estrictamente $\begin{Bmatrix} \text{convexa} \\ \text{cóncava} \end{Bmatrix}$ en "S" ..... pero **el recíproco no es cierto,** como lo prueba $f(x;y) = x^4 + y^4$, que es estrictamente convexa en $\Re^2$ sin que su matriz hessiana sea definida positiva en todo punto de $\Re^2$, pues no es definida positiva en (0;0):

$$Hf(0;0) = \begin{bmatrix} 12.x^2 & 0 \\ 0 & 12.y^2 \end{bmatrix}_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TOMA BUENA NOTA 1:

Estas propiedades son un chollo, pues abren una nueva vía para analizar la convexidad/concavidad de una función "f" en un conjunto convexo "S": en adelante, salvo que nos exijan emplear la definición de función convexa/cóncava, no estudiaremos el signo de $f(\lambda \bullet \bar{u} + (1-\lambda) \bullet \bar{v}) - \lambda.f(\bar{u}) - (1-\lambda).f(\bar{v})$, como en el ejercicio 2.1.1, pues bastará **clasificar** la forma cuadrática correspondiente a la matriz hessiana de "f".

Por ejemplo, si $f(x;y) = x^2 - y$, es $\nabla f(x;y) = (2.x;-1)$ y $Hf(x;y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como la matriz $Hf(x;y)$ es **semidefinida positiva en todo punto** de $\Re^2$, la función "f" es **convexa** en $\Re^2$.

Por ejemplo, si $f(x;y) = y^2 + e^x$, es $\nabla f(x;y) = (e^x;2.y)$ y $Hf(x;y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Como la matriz $Hf(x;y)$ es **definida positiva en todo punto** de $\Re^2$, la función "f" es **estrictamente convexa** en $\Re^2$.

Por ejemplo, si $f(x;y) = 5.x - 3.y^2$, es $\nabla f(x;y) = (5;-6.y)$ y $Hf(x;y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$.

Como la matriz $Hf(x;y)$ es **semidefinida negativa en todo punto** de $\Re^2$, la función "f" es **cóncava** en $\Re^2$.

Por ejemplo, si $f(x;y) = 5.x - y^3$, es $\nabla f(x;y) = (5;-3.y^2)$ y $Hf(x;y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6.y \end{bmatrix}$.

La función "f" no es cóncava ni convexa en $\Re^2$, pues la matriz $Hf(x;y)$ es semidefinida negativa si $y > 0$ y semidefinida positiva si $y < 0$.

TOMA BUENA NOTA 2:

Estas propiedades permiten analizar la convexidad de un conjunto "A" sin emplear la definición de "conjunto convexo"; es decir, sin necesidad de comprobar que:

$$\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1-\lambda) \bullet \bar{x}_2 \in A,\ \forall\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in A,\ \forall\ \lambda \in [0;1]$$

> **Recuerda:**
>
> Siendo $S \subset \Re^n$ convexo y no vacío, si $f: S \mapsto \Re$ es convexa en "S" y $k \in \Re$, el conjunto $A = \{\bar{x} \in S \,/\, f(\bar{x}) \le k\}$ es convexo .... y si $f: S \mapsto \Re$ es cóncava en "S", el conjunto $A = \{\bar{x} \in S \,/\, f(\bar{x}) \ge k\}$ es convexo.

Por ejemplo, al estudiar la convexidad del siguiente subconjunto de $\Re^2$:

$$S = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \middle/ \begin{array}{l} x^2 + e^y \le 7 \\ 3.x - y^2 \ge 2 \\ 3.x + 4.y \ge 9 \end{array} \right\}$$

es claro que "S" es la intersección de los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \left\{(x;y) \in \Re^2 / x^2 + e^y \le 7\right\}$$
$$S_2 = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 3.x - y^2 \ge 2\right\}$$
$$S_3 = \left\{(x;y) \in \Re^2 / 3.x + 4.y \ge 9\right\}$$

Así las cosas:

- Como $f_1(x;y) = x^2 + e^y$ es convexa (compruébalo tú), podemos garantizar que el conjunto $S_1 = \left\{(x;y)/x^2 + e^y \le 7\right\} = \{(x;y)/f_1(x;y) \le 7\}$ es convexo.
- Como $f_2(x;y) = 3.x - y^2$ es cóncava (compruébalo tú), podemos garantizar que el conjunto $S_2 = \left\{(x;y)/3.x - y^2 \ge 2\right\} = \{(x;y)/f_2(x;y) \ge 2\}$ es convexo.
- Como S_3 es un semiespacio cerrado, es convexo.

En definitiva, como "S" es la intersección de conjuntos convexos, podemos garantizar que "S" es convexo.

TEST 2: FUNCIONES CONVEXAS/CÓNCAVAS

01) La función $f(x;y) = y^3 - x^3 + 3.x^2 - 3.y^2$ es cóncava

a) En el conjunto $X = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x < 1,\ y < 1\}$; b) En $\Re^2$
c) En el conjunto $X = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x > 1,\ y < 1\}$

02) Sea $f: \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $\forall \alpha \in \Re$ el conjunto $\{(x;y) \in \Re^2 \ / \ f(x;y) \leq \alpha\}$ es convexo:

a) "f" es convexa ; b) "f" es cóncava
c) Nada puede afirmarse sobre la convexidad de "f"

03) Sea $f: S \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ una función lineal:

a) $\forall x \in S$, la FC de matriz adociada $Hf(x)$ es definida positiva
b) Si $x, y \in S$ es $(x - y)^t \nabla f(y) = f(x) - f(y)$
c) $\forall \alpha > 0$, la función αf es estrictamente convexa y cóncava

04) Sea $f: \Re^n \mapsto \Re$ una función cóncava:

a) El conjunto $A = \{(x;y) \in \Re^{n+1} \ / \ y \leq f(x)\}$ es cóncavo
b) El conjunto $A = \{(x;y) \in \Re^{n+1} \ / \ y \geq f(x)\}$ es convexo
c) El conjunto $A = \{(x;y) \in \Re^{n+1} \ / \ y \leq f(x)\}$ es convexo

05) Sea "f" función convexa y "g" función cóncava. Si $\alpha \in \Re^-$ y $\beta \in \Re^+$, la función $\alpha f + \beta g$:

a) Es convexa ; b) Es cóncava ; c) No es cóncava ni convexa

06) Sea $f: \Re^n \mapsto \Re$ una función de clase C^2 y "S" un conjunto convexo. La condición necesaria y suficiente para que "f" sea cóncava es que:

a) Su hessiana corresponda a un a FC semidefinida negativa en "S"
b) Su hessiana corresponda a un a FC semidefinida positiva en "S"
c) Su hessiana corresponda a un a FC indefinida en "S"

07) La función $f(x;y;z) = e^x + 2.y + 3.z$:

a) Es convexa ; b) Es cóncava ; c) No es cóncava ni convexa

08) Si $S \subseteq \Re^n$ es convexo, la función diferenciable $f: S \mapsto \Re$ es convexa si y sólo si:

a) $\forall x \in S$, la FC de matriz adociada $Hf(x)$ es definida negativa
b) $\forall x, y \in S$ es $(x - y)^t \nabla f(y) \geq f(x) - f(y)$
c) $\forall x, y \in S$ es $(x - y)^t \nabla f(x) \geq f(x) - f(y)$

09) Si $S \subseteq \Re^n$ es convexo, la función diferenciable $f: S \mapsto \Re$ es estrictamente convexa si y sólo si:

a) Es continua en "S"
b) $\forall u, v \in S$ es $(v - u)^t \nabla f(v) < f(v) - f(u)$
c) $\forall u, v \in S$ es $(u - v)^t \nabla f(u) > f(u) - f(v)$

SOLUCIÓN

01) La correcta es c): $Hf(x;y)=\begin{bmatrix} 6-6.x & 0 \\ 0 & 6.y-6 \end{bmatrix}$ es definida "−" si $x>1$ e $y<1$.

02) La correcta es c).

03) La correcta es b).

04) La correcta es b).

05) La correcta es b).

06) La correcta es a).

07) La correcta es a), pues $Hf(x;y;z)=\begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva en todo punto.

08) La a) es una tontería. La b) es falsa, pues $(x-y)^t\nabla f(y)\geq f(x)-f(y)$ expresa que la aproximación lineal $(x-y)^t\nabla f(y)$ al incremento $f(x)-f(y)$ que sufre "f" al desplazarnos desde el punto de partida "y" hasta el punto de llegada "x" **no es inferior** al valor de $f(x)-f(y)\Rightarrow$ "f" es cóncava.

La c) es verdadera, pues $(x-y)^t\nabla f(x)\geq f(x)-f(y)$ expresa que la aproximación lineal $(y-x)^t\nabla f(x)$ al incremento $f(y)-f(x)$ que sufre "f" al desplazarnos desde el punto de partida "x" hasta el punto de llegada "y" **no es superior** el valor de $f(y)-f(x)$:

$$\begin{gathered}(x-y)^t\nabla f(x)\geq f(x)-f(y)\Rightarrow \\ :\Rightarrow -(x-y)^t\nabla f(x)\leq -(f(x)-f(y))\Rightarrow \\ \Rightarrow (y-x)^t\nabla f(x)\leq f(y)-f(x)\end{gathered}$$

09) La a) es una tontería. La b) es falsa, pues $(v-u)^t\nabla f(v)<f(v)-f(u)$ expresa que la aproximación lineal $(u-v)^t\nabla f(v)$ al incremento $f(u)-f(v)$ que sufre "f" al desplazarnos desde el punto de partida "v" hasta el punto de llegada "u" **es superior** al valor de $f(u)-f(v)\Rightarrow$ "f" es estrictamente cóncava.

$$\begin{gathered}(v-u)^t\nabla f(v)<f(v)-f(u)\Rightarrow \\ \Rightarrow -(v-u)^t\nabla f(v)>-(f(v)-f(u))\Rightarrow \\ \Rightarrow (u-v)^t\nabla f(v)>f(u)-f(v)\end{gathered}$$

La c) es verdadera, pues $(u-v)^t\nabla f(u)>f(u)-f(v)$ expresa que la aproximación lineal $(v-u)^t\nabla f(u)$ al incremento $f(v)-f(u)$ que sufre "f" al desplazarnos desde el punto de partida "u" hasta el punto de llegada "v" es **inferior** al valor de $f(v)-f(u)\Rightarrow$ "f" es estrictamente convexa.

$$\begin{gathered}(u-v)^t\nabla f(u)>f(u)-f(v)\Rightarrow \\ \Rightarrow -(u-v)^t\nabla f(u)<-(f(u)-f(v))\Rightarrow \\ \Rightarrow (v-u)^t\nabla f(u)<f(v)-f(u)\end{gathered}$$