

OPTIMIZACIÓN

Tema 1	CONJUNTOS CONVEXOS
Tema 2	FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS
Tema 3	CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA OPTIMIZACIÓN
Tema 4	OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES
Tema 5	LAGRANGE Y KHUN TUCKER
Tema 6	PROGRAMACIÓN LINEAL

Tema 3

Consideraciones generales sobre La optimización

3.01 El verbo optimizar	28
3.02 Planteamiento de un problema de programación matemática	28
3.03 Programas convexos	28
3.04 Óptimos de una función en un conjunto	29
3.05 Teorema de de Wierstrass	31
3.06 Propiedades de optimización de funciones convexas/cóncavas	31
3.07 Resolución gráfica de problemas con dos variables	32
Test	48

3.1 EL VERBO "OPTIMIZAR"

El diccionario de la Real Academia dice que **optimizar es buscar la mejor manera de realizar una actividad**, lo que viene a ser como decir que **optimizar es elegir, entre diversas opciones, la que más conviene a nuestros intereses**.

El verbo optimizar vale para los rotos y para los descosidos: una empresa que optimiza sus costes, los minimiza y si optimiza sus beneficios, los maximiza.

3.2 PLANTEAMIENTO FORMAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Llamamos **problema de programación (optimización) matemática** al problema de determinar el valor máximo o mínimo de una función de una o más variables que se encuentran sometidas a un conjunto de restricciones, ya sean conjuntistas o funcionales.

De forma general, lo formulamos así:

$$\text{Opt. } f(\bar{x}) \text{ sujeto a } \begin{cases} g(\bar{x}) \leq \bar{b} \\ \bar{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

siendo $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$

De $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es el vector de **variables de decisión** o elección.

De "f", la función a optimizar, se dice que es la **función objetivo**.

Del conjunto $X = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n / g(\bar{x}) \leq \bar{b}, \bar{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^n\}$ se dice que es el **conjunto de soluciones factibles (CSF)** del problema, y de cada elemento de "X" se dice que es una **solución factible**.

Si $X = \emptyset$ se dice que el problema es **no factible (infactible)**.

Si $X \neq \emptyset$, puede ser acotado o no.

3.3 PROGRAMAS CONVEXOS

Diremos que un programa de $\begin{cases} \text{minimización} \\ \text{maximización} \end{cases}$ es **convexo** si la función objetivo es $\begin{cases} \text{convexa} \\ \text{cóncava} \end{cases}$ y el conjunto de soluciones factibles es convexo.

Para que el CSF sea convexo es suficiente (no necesario) que las funciones $g(\bar{x})$

que definen restricciones de la forma $\begin{cases} g(\bar{x}) \leq 0 \\ g(\bar{x}) \geq 0 \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases}$ sean $\begin{cases} \text{convexas} \\ \text{cóncavas} \\ \text{lineales} \end{cases}$.

Como veremos más adelante **los programas convexos gozan de espectaculares propiedades**.

3.4 ÓPTIMOS DE UNA FUNCIÓN EN UN CONJUNTO

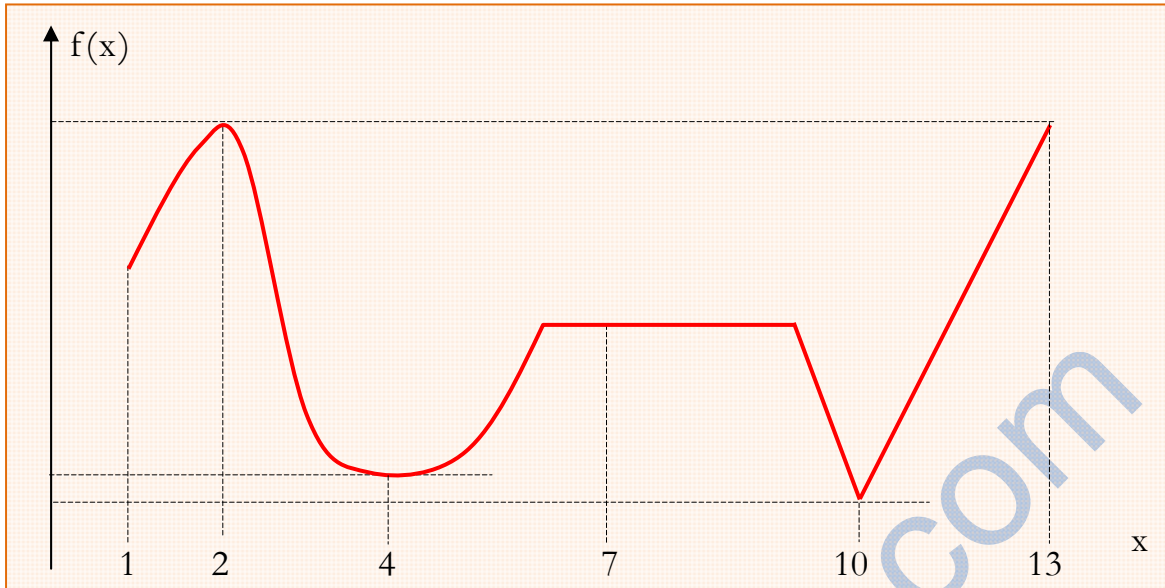
Siendo "X" un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n , diremos que en el punto $\bar{x}_0 \in X$ la función $f: X \mapsto \mathbb{R}$ presenta un:

- 1) **Máximo local (o relativo) estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es mayor que el valor de "f" en todo punto $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ de un entorno de \bar{x}_0 .
- 2) **Mínimo local (o relativo) estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es menor que el valor de "f" en todo punto $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ de un entorno de \bar{x}_0 .
- 3) **Máximo local (o relativo) no estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es mayor o igual que el valor de "f" en todo punto de un entorno de \bar{x}_0 .
- 4) **Mínimo local (o relativo) no estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es menor o igual que el valor de "f" en todo punto de un entorno de \bar{x}_0 .
- 5) **Máximo global (o absoluto) estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es mayor que el valor de "f" en cualquier otro punto de "A".
- 6) **Mínimo global (o absoluto) estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es menor que el valor de "f" en cualquier otro punto de "A".
- 7) **Máximo global (o absoluto) no estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es mayor o igual que el valor de "f" en cualquier otro punto de "A".
- 8) **Mínimo global (o absoluto) no estricto** si el valor de "f" en \bar{x}_0 es menor o igual que el valor de "f" en cualquier otro punto de "A".

Como el más listo (tonto) del planeta es el más listo (tonto) de su pueblo, deduzco que **todo óptimo (máximo o mínimo) global también es óptimo local pero no al revés:** el más listo (tonto) de Villaconejos no necesariamente es el más listo (tonto) del planeta



Por ejemplo, considera que $X = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 13\} \subset \mathbb{R}$ y que la gráfica de $f: X \mapsto \mathbb{R}$ es la siguiente.



- La función "f" presenta un máximo local (relativo) estricto en el punto "2", pues el valor de "f" en "2" es mayor que el valor de "f" en todo punto $x \neq 2$ de un entorno de "2". También presenta "f" un máximo global (absoluto) no estricto en "2", pues el valor de "f" en "2" es mayor o igual que el valor de "f" en cualquier otro punto de "X". Observa que $f(2) = f(13)$, y por eso el máximo global es no estricto.
- La función "f" presenta un mínimo local (relativo) estricto en el punto "4", pues el valor de "f" en "4" es menor que el valor de "f" en todo punto $x \neq 4$ de un entorno de "4". Dicho mínimo local no es global, pues en "X" hay puntos donde "f" toma un valor inferior al que toma en "4".
- La función "f" presenta un mínimo local (relativo) estricto en el punto "10", pues el valor de "f" en "10" es menor que el valor de "f" en todo punto $x \neq 10$ de un entorno de "10". También presenta "f" un mínimo global (absoluto) estricto en "10", pues el valor de "f" en "10" es menor que el valor de "f" en cualquier otro punto de "X".
- La función "f" presenta un mínimo local (relativo) no estricto en el punto "7", pues el valor de "f" en "7" es menor o igual que el valor de "f" en todo punto de un entorno de "7" y dicho mínimo local no es global, pues en "X" hay puntos donde "f" toma un valor inferior al que toma en "7". En "7" también presenta "f" un máximo local (relativo) no estricto, pues el valor de "f" en "7" es mayor o igual que el valor de "f" en todo punto de un entorno de "7"... . y dicho máximo local no es global, pues en "X" hay puntos donde "f" toma un valor superior al que toma en "7".
- La función "f" presenta un máximo global (absoluto) no estricto en el punto "13", pues el valor de "f" en "13" es mayor o igual que el valor de "f" en cualquier otro punto de "X".

3.5 TEOREMA DE WIERSTRASS

Si $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ es compacto (cerrado y acotado) y $f:A \mapsto \mathfrak{R}$ es continua en "A", presenta un máximo y un mínimo globales en "A", pues por ser continua "f" en el compacto "A", el conjunto $f(A) \subset \mathfrak{R}$ también es compacto. Así, si "m" y "M" son los respectivos extremos inferior y superior de $f(A)$, ambos pertenecen a $f(A)$, pues $f(A)$ es cerrado; por tanto, existen $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in A$ tales que $f(\bar{x}_0) = m$ y $f(\bar{x}_1) = M$, siendo $f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_1), \forall \bar{x} \in A$.

3.6 PROPIEDADES DE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES CONVEXAS/CÓNCAVAS

- 1) Sea $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ convexo no vacío y $f:A \mapsto \mathfrak{R}$ estrictamente cóncava (convexa) en "A". Si "f" tiene máximo (mínimo) global en "A", es único.

Por reducción al absurdo: si la función estrictamente cóncava "f" presenta máximo global en el punto $\bar{x}_1 \in A$ y existe $\bar{x}_2 \in A$ tal que $f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1)$, entonces, por ser convexo "A", si $\lambda \in [0;1]$, el punto $\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2$ es de "A", y el valor de "f" en él es mayor que $f(\bar{x}_1)$, lo que contradice la hipótesis de que "f" presenta máximo global en \bar{x}_1 :

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{por ser "f" estrictamente cóncava}} \\
 \downarrow \\
 f(\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2) > \lambda \cdot f(\bar{x}_1) + (1 - \lambda) \cdot f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) \\
 \uparrow \\
 \boxed{\text{pues } f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2)}
 \end{array}$$

Por tanto, no puede existir $\bar{x}_2 \in A$ tal que $f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1)$.

- 2) **Teorema local-global:** Sea $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ convexo no vacío y $f:A \mapsto \mathfrak{R}$ cóncava (convexa) en "A". Si "f" presenta un máximo (mínimo) local en el punto $\bar{x}_0 \in A$, dicho máximo (mínimo) también es global.

Por reducción al absurdo:

Si el máximo no es global, existe $\bar{x}_1 \in A$ tal que $f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_0)$.

Por ser "A" convexo, si $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in A$, es $\lambda \bullet \bar{x}_0 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_1 \in A, \forall \lambda \in [0;1]$.

Es:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{pues "f" es cóncava en "A"}} \\
 \downarrow \\
 f(\lambda \bullet \bar{x}_0 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_1) \geq \lambda \cdot f(\bar{x}_0) + (1 - \lambda) \cdot f(\bar{x}_1) > \\
 \uparrow \\
 \boxed{\text{pues } f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_0)} \\
 > \lambda \cdot f(\bar{x}_0) + (1 - \lambda) \cdot f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0)
 \end{array}$$

Si $\lambda \rightarrow 1$, el punto $\lambda \bullet \bar{x}_0 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_1$ está tan próximo a \bar{x}_0 como queramos, siendo $f(\lambda \bullet \bar{x}_0 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_1) > f(\bar{x}_0)$, lo que va contra la hipótesis de que "f" presenta máximo local en \bar{x}_0 . Así, no pudiendo existir $\bar{x}_1 \in A$ tal que $f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_0)$, el valor de "f" en \bar{x}_0 es mayor o igual que el valor de "f" en cualquier otro punto de "A".

- 3) Si $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ es convexo no vacío y $f: A \mapsto \mathfrak{R}$ es cóncava (convexa) en "A", el conjunto "H" formado por los puntos en que "f" presenta máximo (mínimo) global es convexo.

En efecto, si "f" es cóncava y presenta máximo global en $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in H \subseteq A$, por ser convexo "A", si $\lambda \in [0;1]$, es $\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2 \in A$; además:

por ser cóncava "f"

$$f(\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2) \geq \lambda \cdot f(\bar{x}_1) + (1 - \lambda) \cdot f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_1)$$

pues $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2)$

Si la desigualdad $f(\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2) \geq f(\bar{x}_1)$ se verificase con el signo ">", habría puntos $\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2 \in A$ en que "f" toma un valor mayor que $f(\bar{x}_1)$, lo que contradice que "f" presenta máximo global en \bar{x}_1 . Así, la desigualdad $f(\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2) \geq f(\bar{x}_1)$ debe verificarse con el signo "=":

$$f(\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) \geq f(\bar{x}), \forall \bar{x} \in A$$

pues "f" presenta máximo global en \bar{x}_1

Por tanto, "f" presenta máximo global en todo punto $\lambda \bullet \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bullet \bar{x}_2$ que sea CLC de $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in H$, lo que garantiza que "H" es convexo.

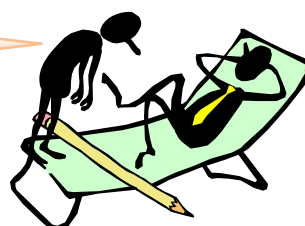
- 4) Sea $A \subseteq \mathfrak{R}^n$ convexo no vacío y compacto (cerrado y acotado) tal que su conjunto de puntos extremos (puntos que no son interiores a ningún segmento lineal cerrado contenido en "A") es finito. Si $f: A \mapsto \mathfrak{R}$ es cóncava (convexa) en "A", presenta al menos un máximo (mínimo) global en "A", y se encuentra en uno de sus puntos extremos.

3.7 RESOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON DOS VARIABLES

Siendo "X" un subconjunto de \mathfrak{R}^2 , podremos determinar los óptimos de la función $f: X \mapsto \mathfrak{R}$ en el conjunto "X" trabajando así:

- 1) Visualizamos el conjunto "X" de soluciones factibles, para lo cual hay que estar familiarizado con las ecuaciones de las curvas planas más famosas.
- 2) Visualizamos el mapa de curvas de nivel de "f"; es decir, visualizamos el conjunto $S_k = \{(x; y) \in \mathfrak{R}^2 / f(x; y) = k\}$ para diversos valores de "k".
- 3) Como la función objetivo "f" toma el mismo valor en todos los puntos (x;y) situados en una misma curva de nivel, la solución al problema de maximizar (minimizar) "f" corresponde al punto (o puntos) del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" con mayor (menor) valor de "k".

No distingo una parábola de un trasatlántico de cinco chimeneas



¡No te privas de nada!

FONEMATO 3.7.1

Optimícese $f(x;y) = x^2 + y^2$ sujeto a $\begin{cases} 2 \cdot x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

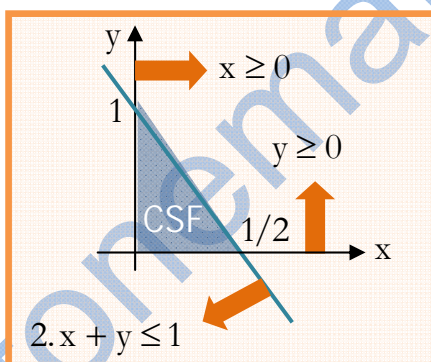
Siendo $f: \mathcal{R}^2 \mapsto \mathcal{R}$ tal que $f(x;y) = x^2 + y^2$, entre los puntos $(x;y) \in \mathcal{R}^2$ que satisfacen las **restricciones o condiciones** $2 \cdot x + y \leq 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, debemos encontrar aquéllos en que "f" presenta un óptimo.

De la función "f" se dice que es la **función objetivo** del problema.

Del subconjunto de \mathcal{R}^2 formado por los puntos que satisfacen todas las restricciones, se dice que es el **conjunto de soluciones factibles** (posibles), y escribiremos CSF para referirnos a él. De cada punto del CSF se dice que es una **solución factible** (posible).

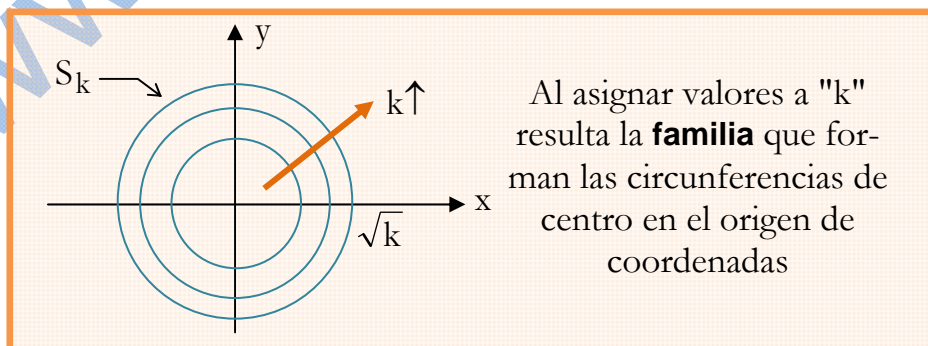
Si el CSF es el conjunto vacío (o sea, no hay ningún punto que cumpla todas las restricciones), se dice que el problema es **infactible**.

Naturalmente, si el CSF no es el vacío, puede ser acotado o no; en nuestro caso, como vemos en la siguiente figura, **es acotado**.



La curva S_k de nivel "k" de la función "f" es:

$$S_k = \{(x;y) \in \mathcal{R}^2 / f(x;y) = k\} = \{(x;y) \in \mathcal{R}^2 / x^2 + y^2 = k\} \equiv \\ \equiv \text{circunferencia de centro en } (0;0) \text{ y radio } \sqrt{k}$$

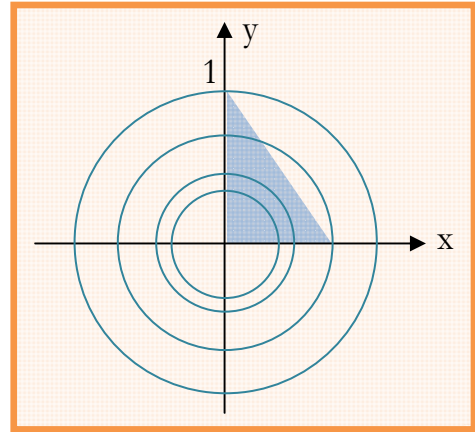


Al asignar valores a "k" resulta la **familia** que forman las circunferencias de centro en el origen de coordenadas

Como la función objetivo "f" toma igual valor en todos los puntos $(x;y)$ de una misma curva de nivel, la solución al problema de maximizar (minimizar) "f" corresponde al punto o puntos del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" con mayor (menor) valor de "k".

Al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que:

- 1) El punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con mayor valor de "k" es el (0;1); así, "f" presenta un máximo global estricto en (0;1), siendo $f(0;1) = 1$ dicho valor máximo.
- 2) El punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con menor valor de "k" es el (0;0); así, "f" presenta un mínimo global estricto en (0;0), siendo $f(0;0) = 0$ dicho valor mínimo.



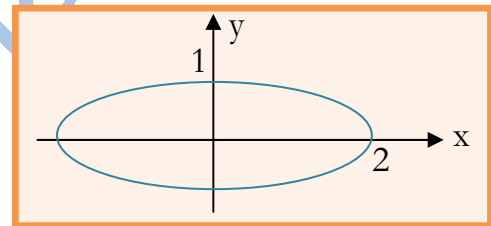
Obvio: como **todo óptimo** (máximo o mínimo) **global también es óptimo local**, la función "f" presenta un máximo local estricto en (0;1) y un mínimo local estricto en (0;0).

FONEMATO 3.7.2

Optimícese $f(x;y) = x + y$ sujeto a $x^2 + 4.y^2 = 4$.

SOLUCIÓN

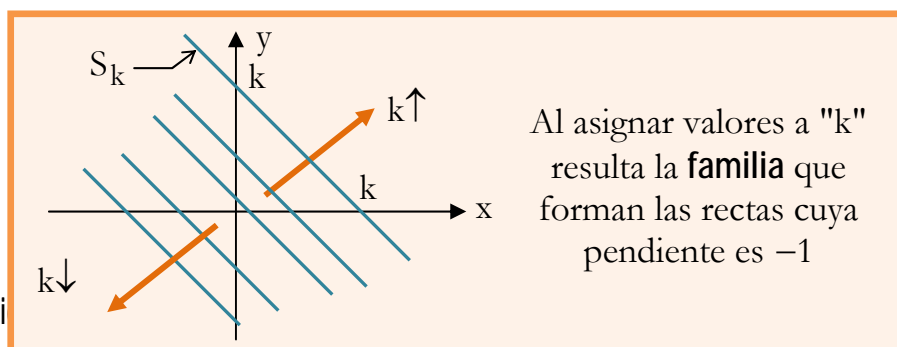
Siendo $f: \mathcal{R}^2 \mapsto \mathcal{R}$ tal que $f(x;y) = x + y$, entre los puntos $(x;y) \in \mathcal{R}^2$ que satisfacen la **restricción o condición** $x^2 + 4.y^2 = 4$, debemos encontrar aquéllos en que la **función objetivo** "f" presenta un óptimo.



Del subconjunto de \mathcal{R}^2 formado por los puntos que satisfacen la restricción $x^2 + 4.y^2 = 4$, se dice que es el **conjunto de soluciones factibles** (posibles), y escribiremos CSF para referirnos a él. De cada punto del CSF se dice que es una **solución factible** (posible). Si el CSF es el vacío (o sea, no hay ningún punto que cumpla todas las restricciones), se dice que el problema de optimización es **infactible**. Si el CSF no es el vacío, puede ser acotado o no; en nuestro caso, **es acotado**, pues está formado por los puntos de la elipse $x^2 + 4.y^2 = 4$, cuyos semiejes son "2" y "1". Recuerda: $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es la ecuación de la elipse de semiejes "a" y "b".

La curva S_k de nivel "k" de la función "f" es:

$$S_k = \{(x;y) \in \mathcal{R}^2 / f(x;y) = k\} = \{(x;y) \in \mathcal{R}^2 / x + y = k\} \equiv \equiv \text{recta con pendiente } -1$$



Al asignar valores a "k" resulta la **familia** que forman las rectas cuya pendiente es -1

Como la función objetivo "f" toma igual valor en todos los puntos (x;y) de una misma curva de nivel, la solución al problema de maximizar (minimizar) "f" corresponde al punto (o puntos) del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" con mayor (menor) valor de "k"

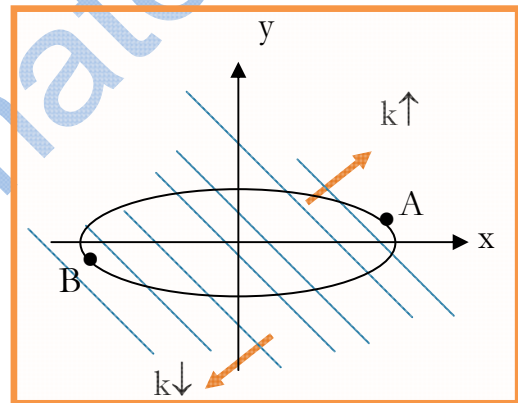
Al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que:

- 1) El punto del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" de mayor valor de "k" es "A"; así, la función "f" presenta un **máximo** global estricto en dicho punto.
- 2) El punto del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" de menor valor de "k" es "B"; así, la función "f" presenta un **mínimo** global estricto en dicho punto.

Para hallar "A" y "B" basta observar que ambos están en la elipse $x^2 + 4.y^2 = 4$ y que, en ellos, la pendiente de la elipse es -1 , por ser tangente a la curva de nivel, que tiene pendiente -1 . Para calcular la pendiente de la elipse, debes saber que si la ecuación $F(x;y) = 0$ define a la variable "y" como función de la variable "x", es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{x}{4.y}$$

si $F(x;y) = x^2 + 4.y^2 - 4$



Así, las coordenadas de "A" y "B" corresponden a la solución del sistema

$$x^2 + 4.y^2 = 4 ; -x/(4.y) = -1$$

De la 2ª ecuación resulta $x = 4.y$, que sustituido en la 1ª, da:

$$20.y^2 = 4 \Rightarrow y = \begin{cases} +1/\sqrt{5} \Rightarrow x = +4/\sqrt{5} \Rightarrow A = (4/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5}) \\ -1/\sqrt{5} \Rightarrow x = -4/\sqrt{5} \Rightarrow B = (-4/\sqrt{5}; -1/\sqrt{5}) \end{cases}$$

siendo:

$$f(4/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5}) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$f(-4/\sqrt{5}; -1/\sqrt{5}) = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}}$$

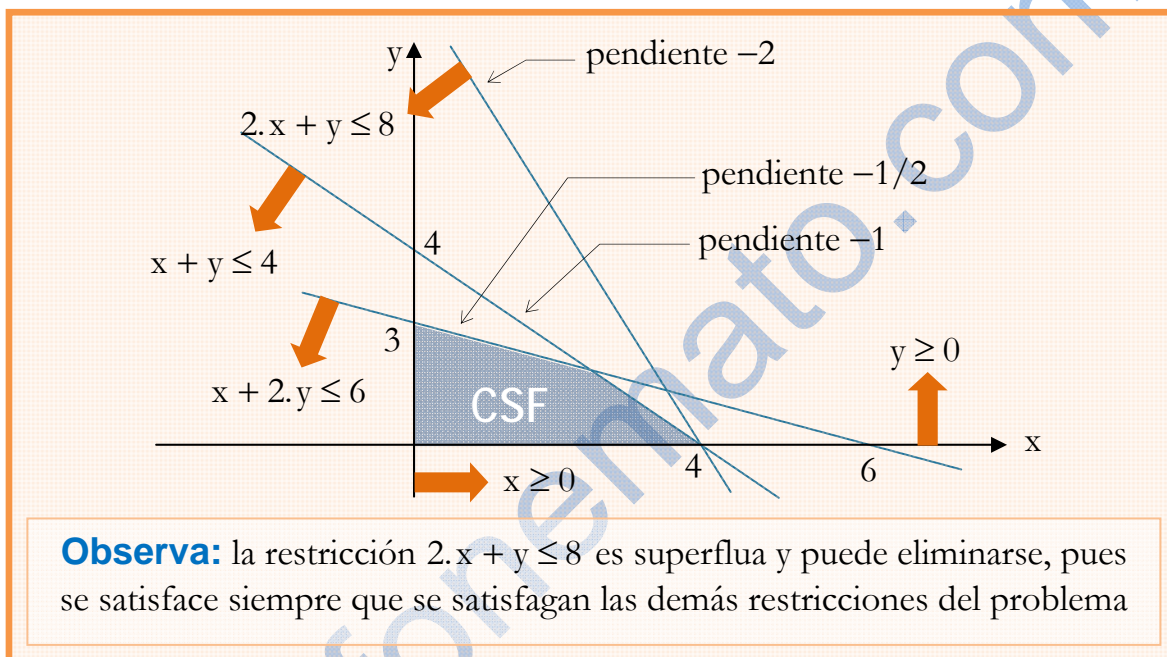
FONEMATO 3.7.3

Optimícese $f(x;y) = 2.x + 3.y$ sujeto a $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2.x + y \leq 8 \\ x + 2.y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

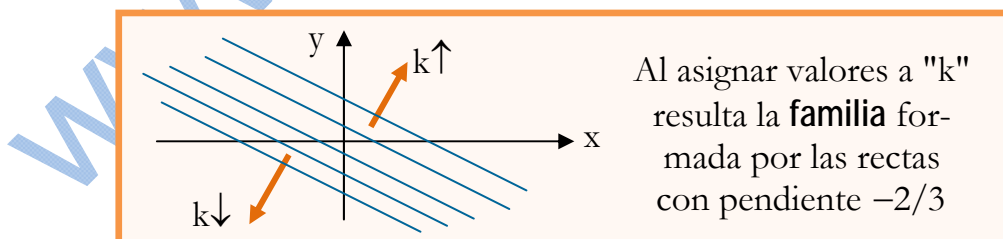
Siendo $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x; y) = 2 \cdot x + 3 \cdot y$, entre los puntos $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen las **restricciones** $x + y \leq 4$, $2 \cdot x + y \leq 8$, $x + 2 \cdot y \leq 6$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, debemos encontrar aquéllos en que la **función objetivo** "f" presenta un óptimo.

Del subconjunto de \mathbb{R}^2 formado por los puntos que satisfacen todas las restricciones, se dice que es el **conjunto de soluciones factibles** (posibles), y escribiremos CSF para referirnos a él. De cada punto del CSF se dice que es una **solución factible** (posible). Si el CSF es el conjunto vacío (o sea, no hay ningún punto que cumpla todas las restricciones), se dice que el problema de optimización es **infactible**. Si el CSF no es el vacío, puede ser acotado o no; en nuestro caso, como vemos en la siguiente figura, **es acotado**.



La curva S_k de nivel "k" de la función de beneficio "f" es:

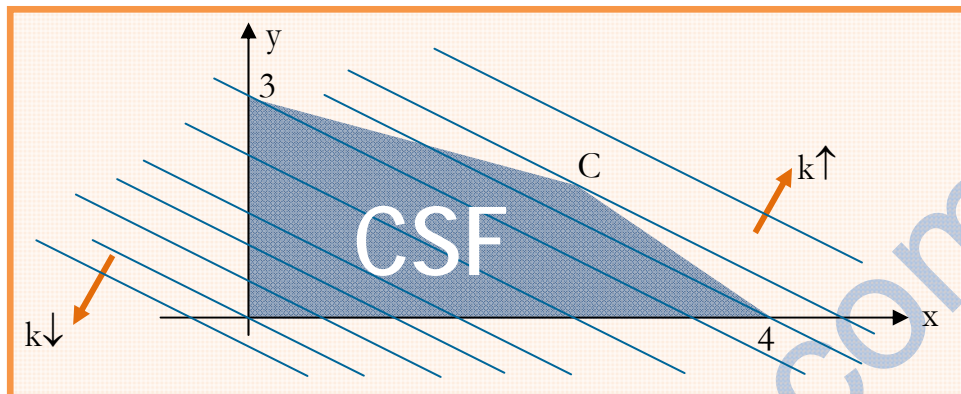
$$S_k = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / f(x; y) = k\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \cdot x + 3 \cdot y = k\} \equiv \\ \equiv \text{recta con pendiente } -2/3$$



Como la función objetivo "f" toma igual valor en todos los puntos $(x; y)$ de una misma curva de nivel, la solución del problema de máximo (mínimo) corresponde al punto (o puntos) del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" con mayor (menor) valor de "k".

Al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que:

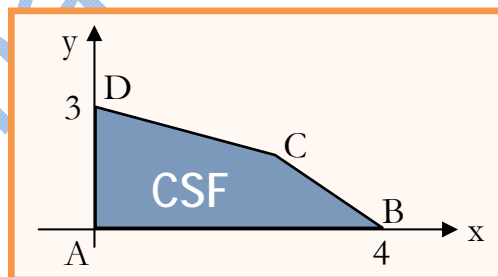
- 1) El punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con mayor valor de "k" es $C = (2;2)$, intersección de $x + y = 4$ y $x + 2.y = 6$; así, la función "f" presenta un **máximo global estricto** en "C", y $f(2;2) = 10$ es dicho valor máximo.
- 2) El punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con menor valor de "k" es $A = (0;0)$; así, la función "f" presenta un **mínimo global estricto** en "A", y dicho valor mínimo es $f(0;0) = 0$.



Obvio: como **todo óptimo** (máximo o mínimo) **global también es óptimo local**, la función "f" un máximo (mínimo) local estricto en "C" (en "A").

NOTA 1:

¡Hemos hecho el gilipollas!: podríamos haber ahorrado el trabajo de visualizar el **mapa** de curvas de nivel de la función objetivo "f" y la superposición del CSF y dicho mapa, pues el problema de optimización planteado es **lineal** (problema en que la función objetivo y todas las restricciones son lineales) y todo el mundo sabe que **si el CSF de un problema lineal es acotado, puedes apostar tranquilamente la vida a que tanto el problema de máximo como el de mínimo tienen solución, que se encuentra en la frontera del CSF y si la solución al problema de máximo (mínimo) es única, corresponde al vértice del CSF en que la función objetivo toma el mayor (menor) valor; si el mayor (menor) valor de "f" se presenta en varios vértices, el problema de máximo (mínimo) tiene infinitas soluciones, que corresponden a dichos vértices y a todos los puntos que son combinación lineal convexa de ellos. Si el CSF de un problema lineal no es acotado, puede ocurrir que el problema de máximo, el de mínimo, o ambos, carezcan de solución finita.** Como el CSF de nuestro problema es acotado, para lidiarlo basta determinar el valor del "f" en cada vértice de CSF:



$$f(A) = f(0;0) = 2.0 + 3.0 = 0 ; f(B) = f(4;0) = 2.4 + 3.0 = 8$$

$$f(C) = f(2;2) = 2.2 + 3.2 = 10 ; f(D) = f(0;3) = 2.0 + 3.3 = 9$$

Por tanto, resulta obvio que, en lo que a máximo (mínimo) se refiere, el vértice óptimo es el "C" (el "A").

NOTA 2:

Con las mismas restricciones dadas, si la función objetivo del problema es $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x;y) = 2.x + 4.y$, entonces:

$$f(A) = f(0;0) = 0 ; f(B) = f(4;0) = 8$$

$$f(C) = f(2;2) = 12 ; f(D) = f(0;3) = 12$$

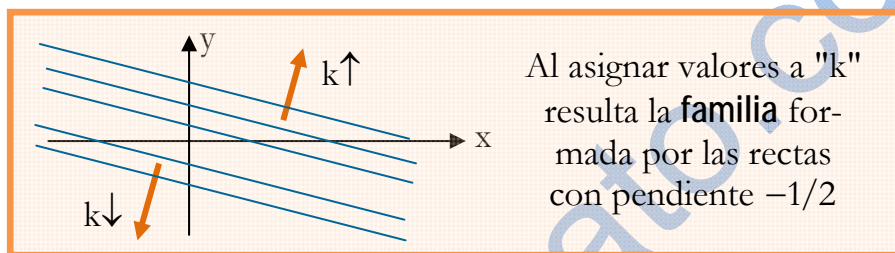
En este nuevo problema lineal, el valor máximo se presenta en los vértices "C" y "D", y eso indica que el problema de maximizar "f" tiene infinitas soluciones: el punto C = (2;2), el punto D = (0;3) y cada punto "E" del segmento que los une, pues si $E = \lambda \bullet (2;2) + (1 - \lambda) \bullet (0;3) = (2.\lambda; 3 - \lambda)$, $\lambda \in [0;1]$, es:

$$f(E) = f(2.\lambda; 3 - \lambda) = 2.(2.\lambda) + 4.(3 - \lambda) = 12, \forall \lambda \in [0;1]$$

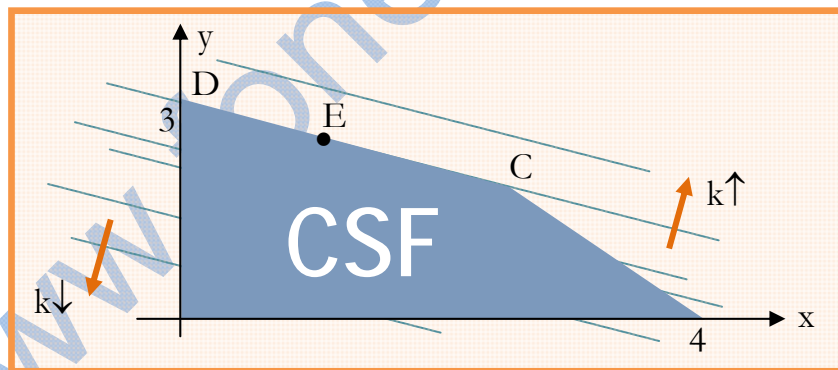
Sucede tan mágico evento porque las curvas de nivel de "f" son las rectas de pendiente $-1/2$, y da la casualidad de que la recta $x + 2.y = 6$ que pasa por los puntos C = (2;2) y D = (0;3) también tiene pendiente $-1/2$; es decir, dicha recta es una curva de nivel de "f" (la que corresponde a $k = 12$):

$$S_k = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / f(x; y) = k\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2.x + 4.y = k\} \equiv$$

$$\equiv \text{recta con pendiente } -1/2$$



Así las cosas, al **superponer** el CSF y el **mapa** de curvas de nivel de "f", resulta obvio que los puntos del segmento que une "C" y "D" son aquéllos por los que pasa la curva de nivel de "f" con mayor valor de "k". Naturalmente, la función "f" presenta un **máximo global no estricto** en cada uno de dichos puntos.



NOTA 3:

Con las mismas restricciones dadas, si la función objetivo del problema es $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x; y) = 3.x + 3.y$, entonces:

$$f(A) = f(0;0) = 0 ; f(B) = f(4;0) = 12$$

$$f(C) = f(2;2) = 12 ; f(D) = f(0;3) = 9$$

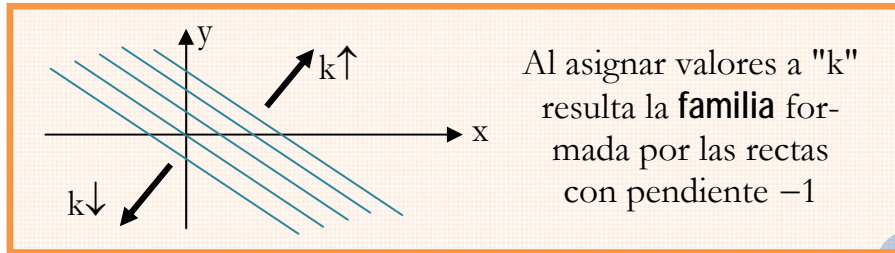
En este nuevo problema lineal, el valor máximo se presenta en los vértices "C" y "B", y eso indica que el problema de maximizar "f" tiene infinitas soluciones: el punto C = (2;2), el punto B = (4;0) y cada punto "T" del segmento que los une, pues si $T = \lambda \bullet (2;2) + (1 - \lambda) \bullet (4;0) = (4 - 2.\lambda; 2.\lambda)$, $\lambda \in [0;1]$, es:

$$f(T) = f(4 - 2.\lambda; 2.\lambda) = 3.(4 - 2.\lambda) + 3.(2.\lambda) = 12, \forall \lambda \in [0;1]$$

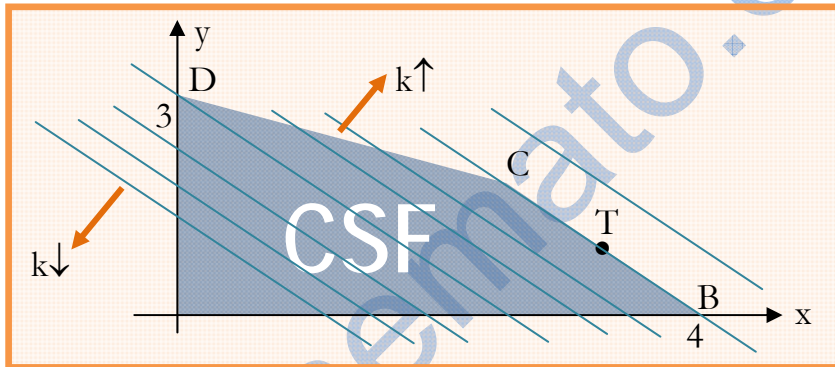
Sucede tan mágico evento porque las curvas de nivel de "f" son las rectas de

pendiente -1 , y da la casualidad de que la recta $x + y = 4$ que pasa por los puntos $C = (2;2)$ y $B = (4;0)$ también tiene pendiente -1 ; es decir, dicha recta es una curva de nivel de "f" (la que corresponde a $k = 12$):

$$S_k = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / f(x; y) = k\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 3 \cdot x + 3 \cdot y = k\} \equiv \\ \equiv \text{recta con pendiente } -1$$



Así las cosas, al "superponer" el CSF y el mapa de curvas de nivel de "f", resulta obvio que los puntos del segmento que une "C" y "B" son aquéllos por los que pasa la curva de nivel de "f" con mayor valor de "k". Naturalmente, la función "f" presenta un **máximo global no estricto** en cada uno de dichos puntos.



FONEMATO 3.7.4

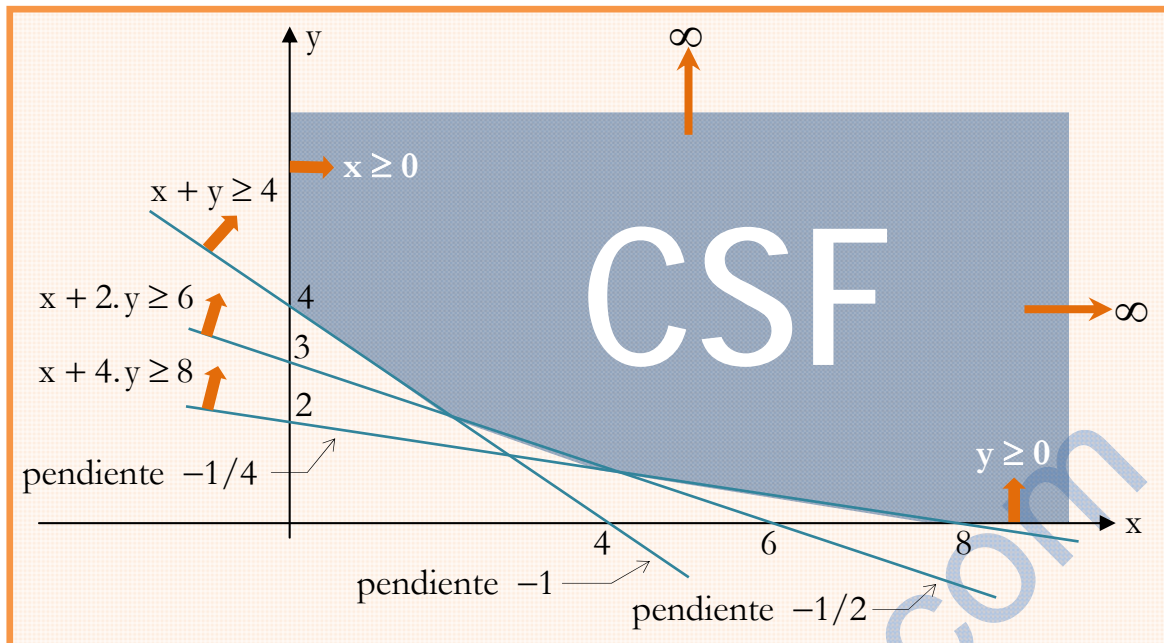
Optimícese $f(x; y) = y - x$ sujeto a

$$\begin{cases} x + 4 \cdot y \geq 8 \\ x + 2 \cdot y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

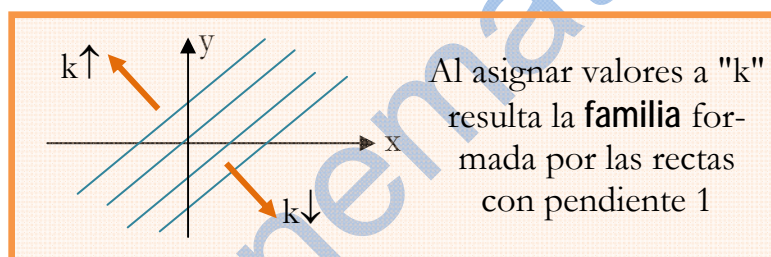
Siendo $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x; y) = y - x$, entre los puntos $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen las **restricciones** $x + 4 \cdot y \geq 8$, $x + 2 \cdot y \geq 6$, $x + y \geq 4$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, debemos encontrar aquéllos en que la **función objetivo** "f" presenta un óptimo.

El problema es **lineal**, pues la función objetivo y todas las restricciones son lineales, pero como el CSF no es acotado, el problema de máximo, el de mínimo, o ambos, pueden no tener solución finita, lo que jamás ocurre si el CSF es acotado: en tal caso es seguro que tanto el problema de máximo como el de mínimo tienen solución, que se encuentra en la frontera del CSF... y si la solución al problema de máximo (mínimo) es única, corresponde al vértice del CSF en que la función objetivo toma el mayor (menor) valor ... y si dicho mayor (menor) valor de "f" se presenta en varios vértices, el problema de máximo (mínimo) tiene infinitas soluciones (óptimos globales no estrictos), que corresponden a dichos vértices y a todos los puntos que son combinación lineal convexa de ellos.

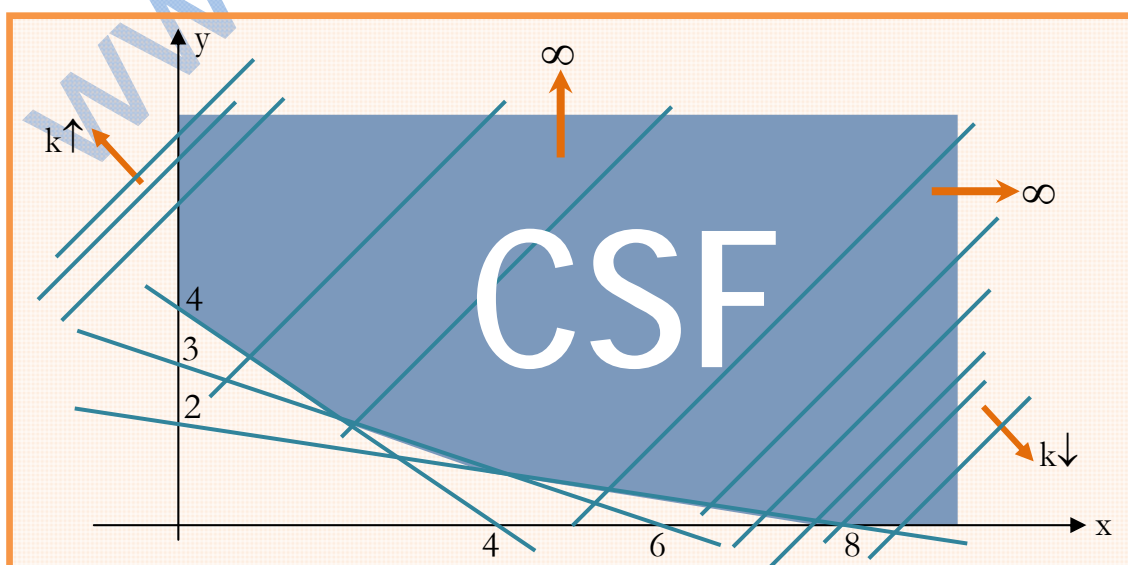


La curva S_k de nivel "k" de la función "f" es:

$$S_k = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / f(x;y) = k\} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / y - x = k\} \equiv \text{recta con pendiente 1}$$



Como la función objetivo "f" toma igual valor en todos los puntos (x;y) de una misma curva de nivel, la solución del problema de máximo (mínimo) corresponde al punto (o puntos) del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" con mayor (menor) valor de "k" ... y al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que tanto el problema de máximo como el de mínimo carecen de solución óptima finita.



FONEMATO 3.7.5

Una empresa produce dos tipos de aceites "A" y "B", y para ello dispone de 6 Tm de aceituna picual, 4 Tm de hojiblanca y 3 Tm de arbequina. Para producir una tonelada de "A" se necesitan 3 Tm de picual, 2 Tm de hojiblanca y 1 Tm de arbequina, y para producir una tonelada de "B" se necesitan 4 Tm de picual, 1 Tm de hojiblanca y 3 Tm de arbequina. Determinése la producción óptima si los respectivos beneficios obtenidos por tonelada de "A" y "B" son 20 y 40 €.

SOLUCIÓN

Siendo "x" e "y" las respectivas producciones de "A" y "B" (en Tm), si el respectivo beneficio por tonelada de "A" y "B" es de 20 y 40 €, la función que determina el beneficio total de la empresa es la $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x; y) = 20 \cdot x + 40 \cdot y$.

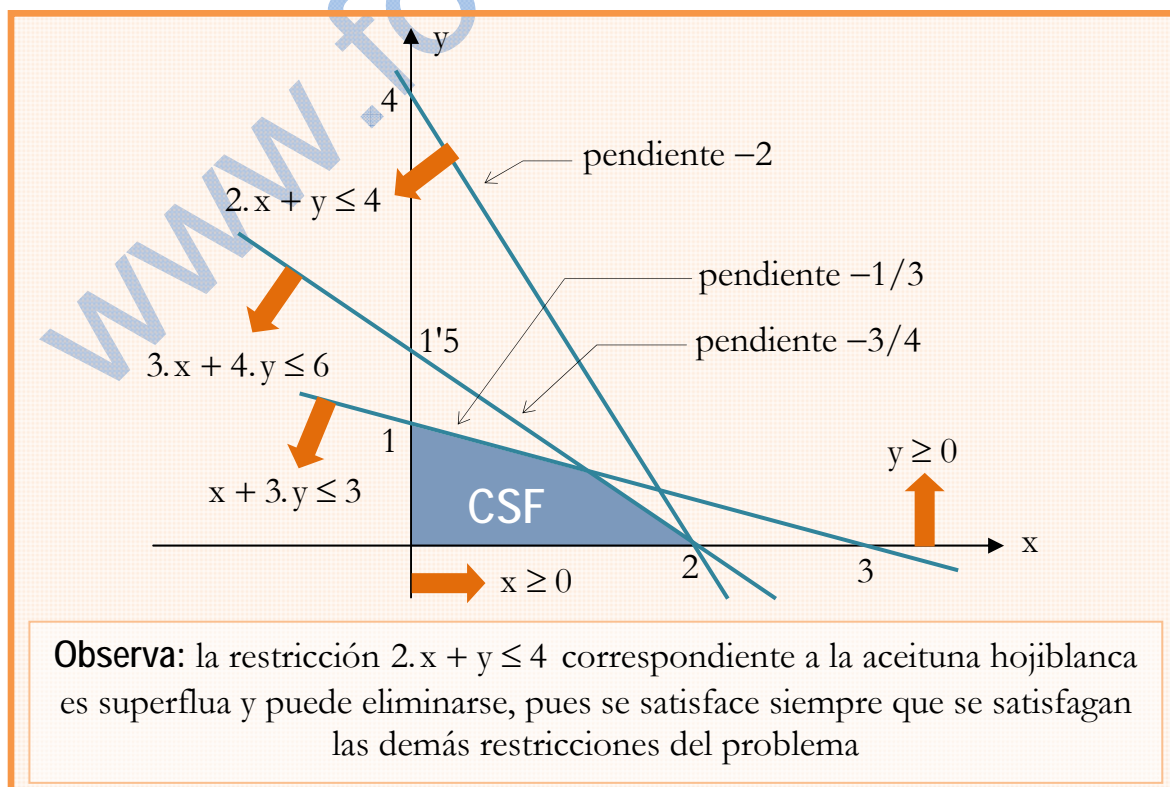
Como para producir una tonelada de "A" (de "B") se necesitan 3 Tm (4 Tm) de picual, 2 Tm (1 Tm) de hojiblanca y 1 Tm (3 Tm) de arbequina, si la empresa sólo dispone de 6 Tm de picual, 4 Tm de hojiblanca y 3 Tm de arbequina, los valores de las variables "x" e "y" han de ser tales que:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 4 \cdot y &\leq 6 \text{ (picual)} \\ 2 \cdot x + y &\leq 4 \text{ (hojiblanca)} \\ x + 3 \cdot y &\leq 3 \text{ (arbequina)} \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, debemos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar } f(x; y) = 20 \cdot x + 40 \cdot y \text{ sujeto a } \begin{cases} 3 \cdot x + 4 \cdot y \leq 6 \\ 2 \cdot x + y \leq 4 \\ x + 3 \cdot y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

El **conjunto de soluciones factibles** del problema es el de la siguiente figura.



Como la función objetivo y todas las restricciones son lineales, nuestro problema de maximización es **lineal**, y como su CSF es acotado, podemos garantizar **que tiene solución, que se encuentra en la frontera del CSF ... y si la solución es única, corresponde al vértice del CSF en que la función objetivo "f" toma el mayor valor; si el mayor valor de "f" se presenta en varios vértices, el problema tiene infinitas soluciones, que corresponden a dichos vértices y a todos los puntos que sean combinación lineal convexa de ellos**. Así, para lidiar el problema, basta determinar el valor de $f(x;y) = 20 \cdot x + 40 \cdot y$ en cada vértice de CSF:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(0;0) = 0 & ; & \quad f(B) = f(2;0) = 40 \\ f(C) &= f(1'2;0'6) = 48 & ; & \quad f(D) = f(0;1) = 40 \end{aligned}$$

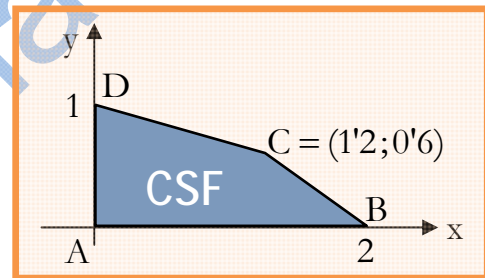
Por tanto, el vértice óptimo es $C = (1'2;0'6)$; o sea, la empresa maximiza su beneficio si produce 1'2 Tm del aceite "A" y 0'6 Tm del "B"; y en tal caso, el beneficio es de 48 €.

FONEMATO 3.7.6

Un individuo ingiere diariamente sólo dos alimentos "A" y "B" cuyos respectivos precios unitarios son 1 y 2 €, siendo los contenidos unitarios de proteínas, hidratos de carbonos y grasas de cada alimento los indicados a continuación:

	Proteínas	Hidratos	Grasas
Alimento "A"	1	1	1
Alimento "B"	4	2	1

Detemínese la dieta más económica si, para estar bien alimentado, la ingesta diaria de proteínas, hidratos y grasa nos debe ser inferior a 8, 6 y 4 respectivamente.



SOLUCIÓN

Siendo "x" e "y" las respectivas cantidades diarias ingeridas de "A" y "B", si los respectivos precios unitarios de "A" y "B" son 1 y 2 €, la función que determina el coste de los alimentos es la $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x;y) = x + 2 \cdot y$.

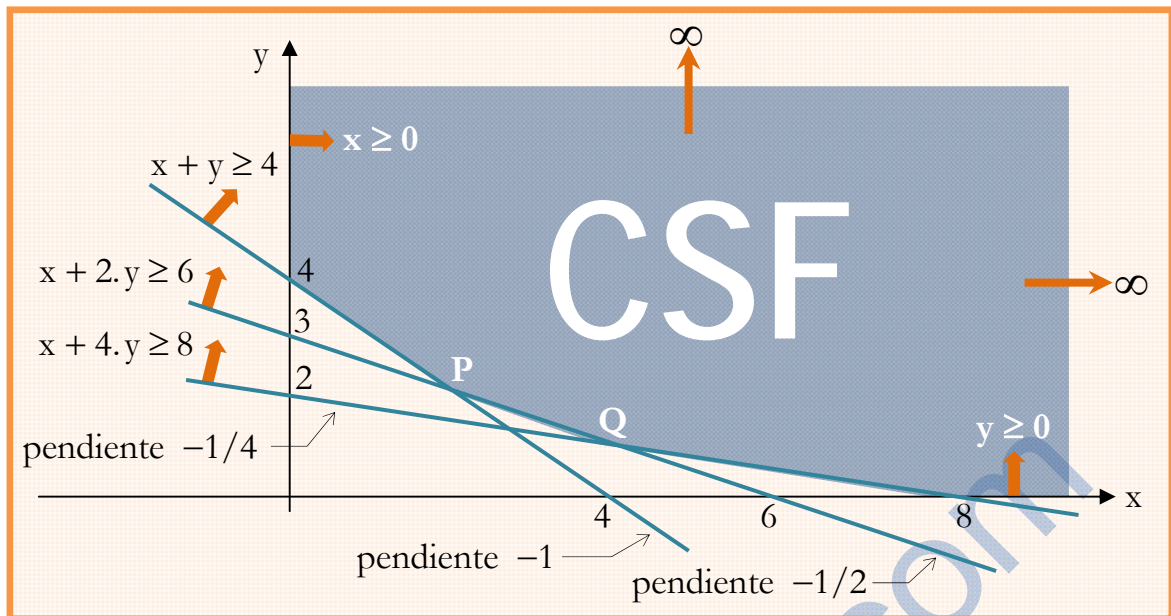
Si la ingesta diaria de proteínas, hidratos y grasa nos debe ser inferior a 8, 6 y 4 respectivamente, los valores de las variables "x" e "y" han de ser tales que:

$$\begin{aligned} x + 4 \cdot y &\geq 8 \quad (\text{Proteínas}) \\ x + 2 \cdot y &\geq 6 \quad (\text{Hidratos}) \\ x + y &\geq 4 \quad (\text{Grasas}) \\ x &\geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, debemos resolver el siguiente problema de optimización:

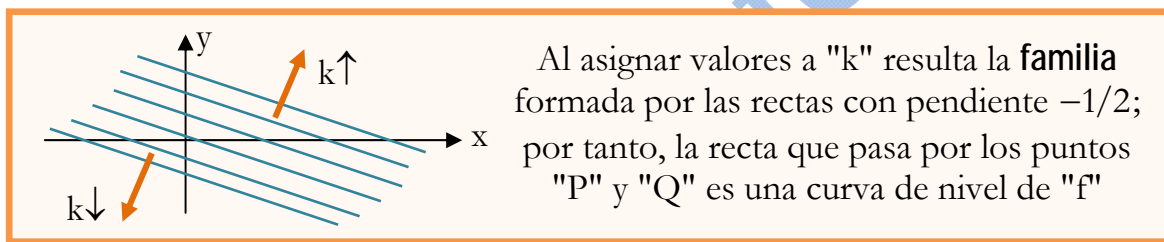
$$\text{Minimizar } f(x;y) = x + 2 \cdot y \text{ sujeto a } \begin{cases} x + 4 \cdot y \geq 8 \\ x + 2 \cdot y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

El **conjunto de soluciones factibles** del problema es el de la siguiente figura.

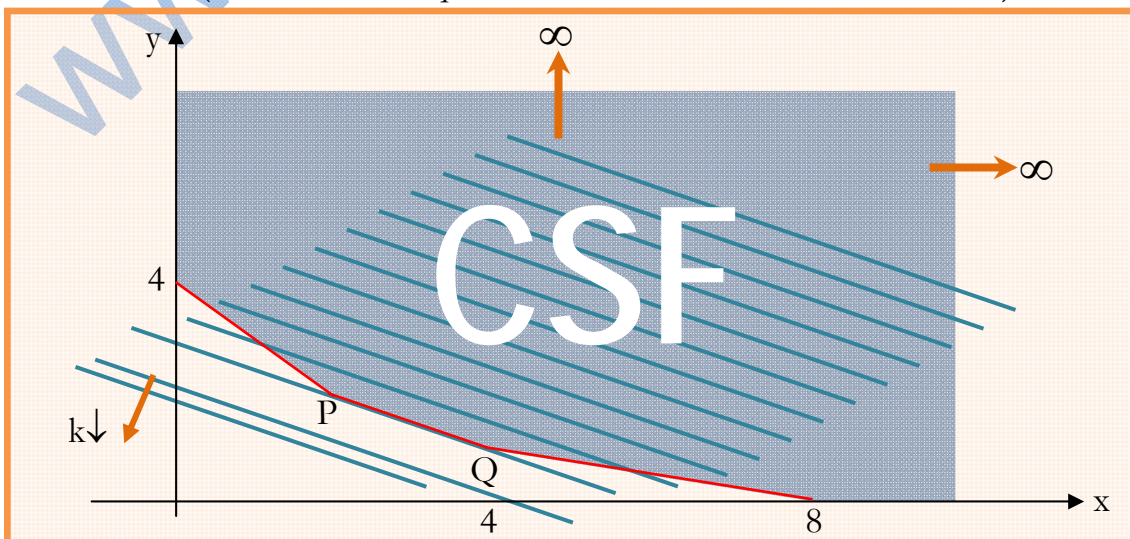


La curva S_k de nivel "k" de la función "f" es:

$$S_k = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / f(x; y) = k\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = k\} \equiv \\ \equiv \text{recta con pendiente } -1/2$$



Como "f" toma igual valor en todos los puntos $(x; y)$ de una misma curva de nivel, la solución del problema corresponde al punto (o puntos) del CSF por el que pasa la curva de nivel de "f" con menor valor de "k". Al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que hay infinitas soluciones (mínimos globales no estrictos), que corresponden a los puntos $P = (2; 2)$, $Q = (4; 1)$ y a los que son combinación lineal convexa de ellos, o sea, los puntos del segmento que une "P" y "Q" y sucede tal cosa porque la recta que pasa por "P" y "Q" es una curva de nivel de "f" (la de nivel "6", que es el coste mínimo de la dieta diaria).



FONEMATO 3.7.7

Siendo $a \in \mathfrak{R}$, sea el programa

$$\text{Opt. : } a \cdot x + 2 \cdot y \text{ sujeto a } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + 2 \cdot y \geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

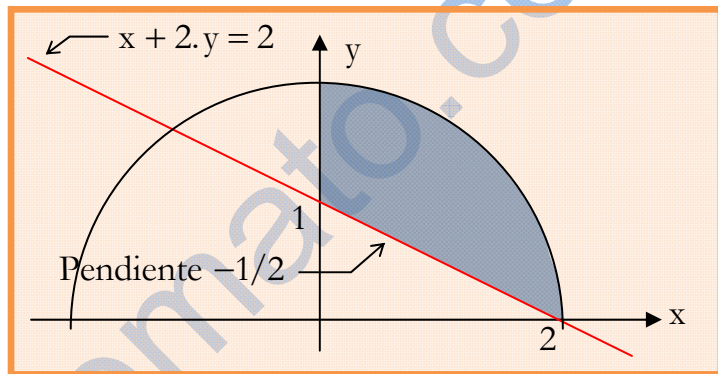
- 1) Resuélvalo gráficamente para los distintos valores de "a".
- 2) Demuéstrese que el problema es convexo.

SOLUCIÓN

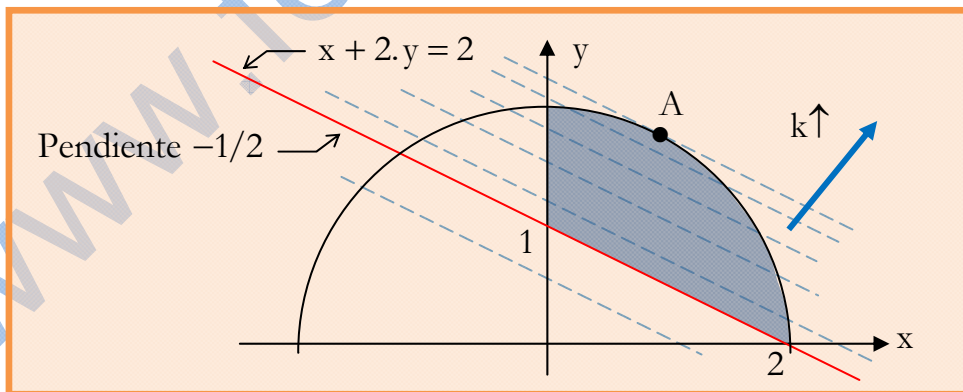
- La curva S_k de nivel "k" de la función objetivo $f(x;y) = a \cdot x + 2 \cdot y$ es:

$$S_k = \{(x;y) \in \mathfrak{R}^2 / f(x;y) = k\} = \{(x;y) \in \mathfrak{R}^2 / a \cdot x + 2 \cdot y = k\} \equiv \\ \equiv \text{recta con pendiente } -a/2$$

- El CSF es el sombreado.
- Como "f" toma igual valor en todo punto (x;y) de una misma curva de nivel, el máximo (mínimo) se presenta en el punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con mayor (menor) valor de "k".



- La pendiente de la circunferencia $g(x;y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ es $-\frac{g_x(x;y)}{g_y(x;y)} = -\frac{x}{y}$
- Si $a = 1$, las curvas de nivel tienen pendiente $-1/2$:

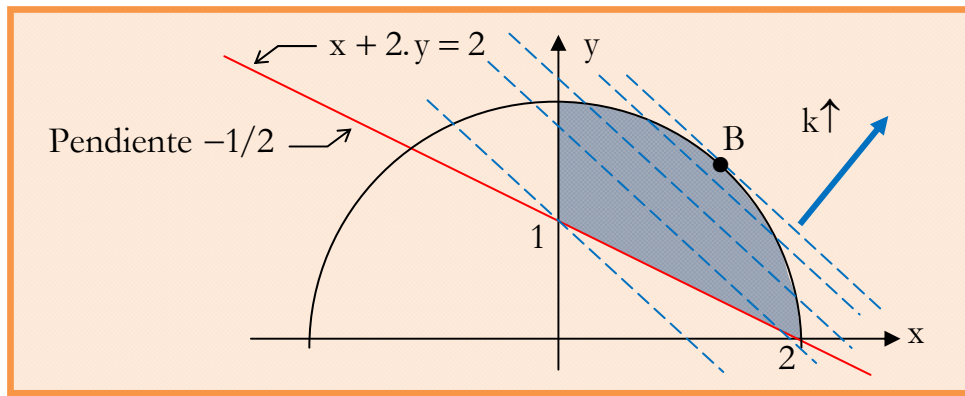


El problema de mínimo tiene infinitas soluciones: los puntos del segmento que une (2;0) y (0;1).

La solución del problema de máximo corresponde al punto "A" en que la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ tiene pendiente $-1/2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

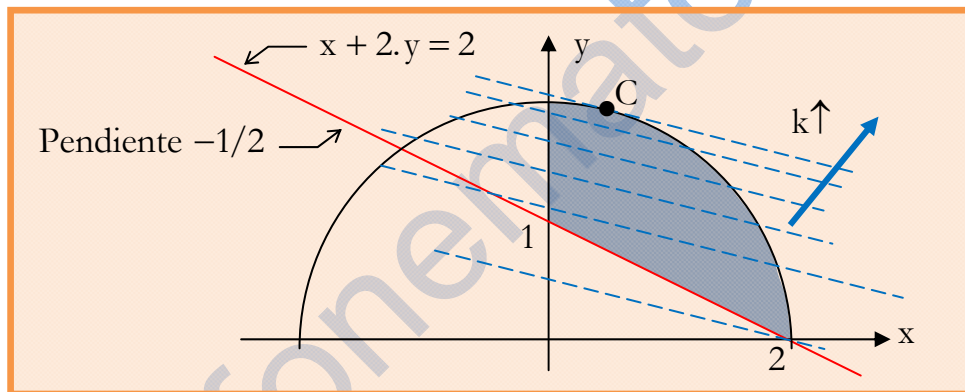
- Si $a > 1$, las curvas de nivel tienen pendiente $-a/2 < 0$:



El mínimo se presenta en el punto $(0;1)$, y el máximo es el punto "B" en que la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ tiene pendiente $-a/2$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -\frac{x}{y} = -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(\frac{2 \cdot a}{\sqrt{a^2 + 4}}; \frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}} \right), a > 1$$

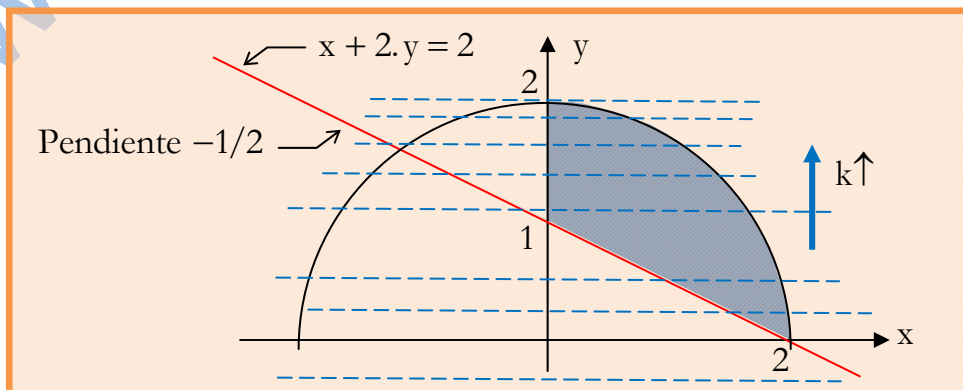
- Si $0 < a < 1$, las curvas de nivel tienen pendiente $-a/2 < 0$:



El mínimo se presenta en el punto $(2;0)$, y el máximo es el punto "C" en que la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ tiene pendiente $-a/2$:

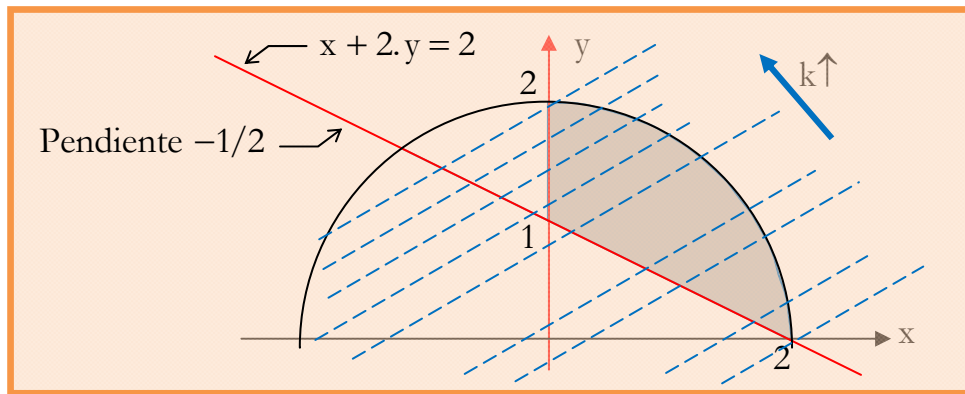
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ -\frac{x}{y} = -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{2 \cdot a}{\sqrt{a^2 + 4}}; \frac{4}{\sqrt{a^2 + 4}} \right), 0 < a < 1$$

- Si $a = 0$, las curvas de nivel tienen pendiente 0:



El mínimo se presenta en el punto $(2;0)$, y el máximo en el punto $(0;2)$.

- Si $a < 0$, las curvas de nivel tienen pendiente $-a/2 > 0$:



El mínimo se presenta en el punto $(2;0)$, y el máximo en el punto $(0;2)$.

Un programa de mínimo (máximo) es **convexo** si la función objetivo es convexa (cóncava) y el CSF es convexo.

El programa dado

$$\text{Opt. : } a \cdot x + 2 \cdot y \text{ sujeto a } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + 2 \cdot y \geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

es convexo, pues siendo lineal la función objetivo, es convexa y cóncava; además, el CSF es convexo, por ser la intersección de los convexos A_1 , A_2 , A_3 y A_4 :

$$A_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$A_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2 \cdot y \geq 2\}$$

$$A_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$$

$$A_4 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$$

El conjunto A_1 es convexo, pues $u(x; y) = x^2 + y^2$ es convexa, ya que su matriz hessiana $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es definida positiva en todo punto.

Los conjuntos A_2 , A_3 y A_4 , por ser **semiespacios cerrados**, son convexos.

FONEMATO 3.7.8

Razone si el conjunto $X = \{(x,y) / y - x^3 \geq 0, x + y \leq 2, x \geq 0\}$ es o no convexo.

SOLUCIÓN

Para que un conjunto sea convexo es suficiente (**no necesario**) que $g(\bar{x})$ sea

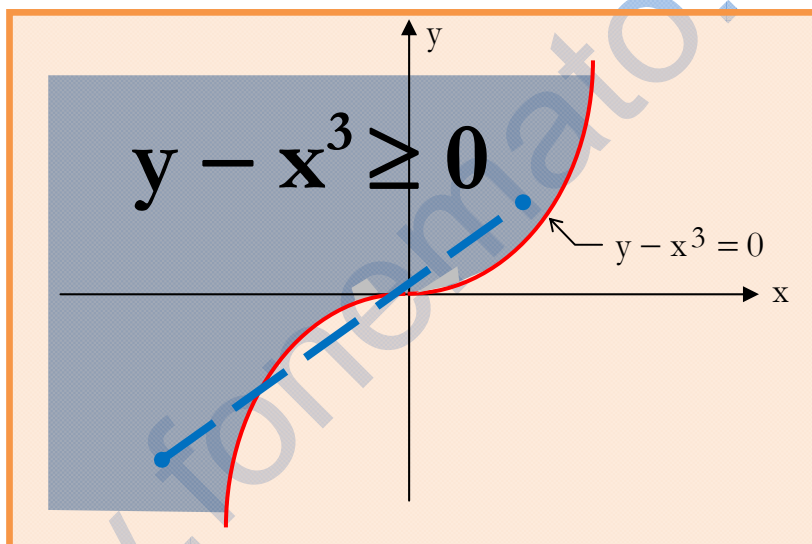
$$\begin{cases} \text{convexa} \\ \text{cóncava} \\ \text{lineal} \end{cases} \text{ si su restricción asociada es de la forma } \begin{cases} g(\bar{x}) \leq 0 \\ g(\bar{x}) \geq 0 \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases}.$$

El conjunto "X" es la intersección de conjuntos A_1, A_2 y A_3 :

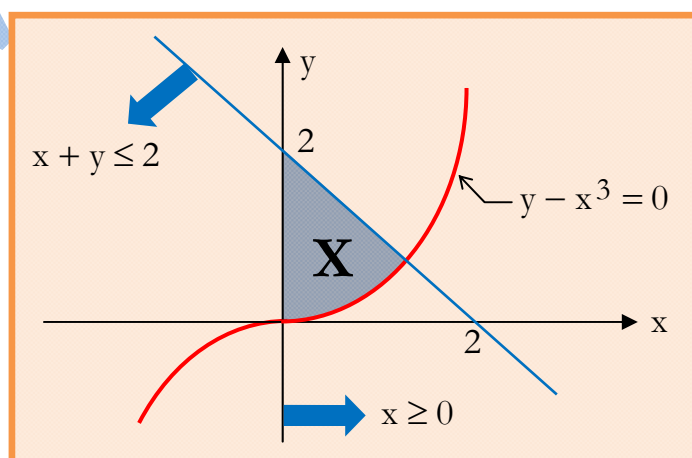
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^3 \geq 0\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 2\}; A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$$

Los conjuntos A_2 y A_3 , por ser **semiespacios cerrados**, son convexos, y como vemos en la figura, el conjunto A_1 no es convexo.



No obstante, la intersección "X" de A_1, A_2 y A_3 es un conjunto convexo.



TEMA 3: EL PROBLEMA DE LA OPTIMIZACIÓN

01) Señale la afirmación cierta para un problema de programación matemática:

- a) Si tiene soluciones factibles, tiene soluciones óptimas finitas.
- b) Puede no tener soluciones factibles y tener solución óptimas.
- c) Si tiene soluciones óptimas, tiene soluciones factibles.

02) El programa Max. $2 \cdot x \cdot y$ sujeto a $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ puede clasificarse como

- a) Diferenciable ; b) Lineal ; c) Convexo

03) Dada $f: S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, sea el programa Opt. $f(x)$ sujeto a $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, donde "X" es un conjunto no acotado:

- a) El problema no tiene solución finita.
- b) El problema es infactible.
- c) Las respuestas a) y b) no tienen porqué ser ciertas.

04) Siendo $f, g, h: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, el programa

$$\text{Max. } f(x; y) \text{ s.a. } \begin{cases} g(x; y) \leq 4 \\ h(x; y) \geq 2 \\ (x; y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

es convexo si:

- a) "f" es cóncava y "g" y "-h" son convexas $\forall (x; y) \in S$
- b) El conjunto $\{(x; y) \in S / g(x; y) \leq 4, h(x; y) \geq 2\}$ es convexo
- c) "f" y "h" son cóncavas y "g" es convexa

05) Sea el programa Min. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2$ s.a. $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$.

- a) El CSF es el triángulo de vértices (0;4), (4;0) y (0;0).
- b) El CSF es cerrado y no acotado.
- c) El problema no tiene solución acotada.

06) El óptimo del programa anterior

- a) Es el punto (1;3).
- b) Es el punto en que la recta $x + y = 4$ es tangente a la curva de nivel de la función objetivo.
- c) No es acotado.

07) Señale la correcta:

- a) Min. $(x + y)$ s.a. $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.
- b) Max. $-(x - 1)^2 - (y - 3)^2$ s.a. $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ tiene solución no acotada
- c) Max. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2$ s.a. $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ es infactible.

08) Siendo $f, g, h: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, señale el CSF del programa

$$\text{Max. } f(x; y) \text{ s.a. } \begin{cases} g(x; y) \leq 4 \\ h(x; y) \geq 2 \\ (x; y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

- a) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / g(x; y) \leq 4, h(x; y) \geq 2\}$
- b) $\{(x; y) \in S / g(x; y) \leq 4, h(x; y) \geq 2\}$
- c) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / g(x; y) \leq 4, h(x; y) \geq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$

09) El programa $\text{Max. } x^2 + y^2 \text{ s.a. } \begin{cases} x + y = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ verifica.

- a) El teorema de Weierstrass
- b) El teorema de local - global
- c) El teorema de local - global y el de unicidad de solución

10) Sea $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. El programa $\text{Max. } f(x) \text{ s.a. } x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si:

- a) "f" es convexa y "X" es convexo
- b) "f" es cóncava y "X" es convexo
- c) "f" es continua y "X" es convexo

11) Sea programa $\text{Opt. } f(x)$ sujeto a $x \in X$ y $x^* \in X$ un mínimo de éste:

- a) El conjunto "X" es acotado.
- b) El conjunto "X" es convexo.
- c) Las respuestas a) y b) no tienen porqué ser ciertas.

SOLUCIÓN

01) La a) es falsa: el que haya soluciones factibles (puntos que satisfacen todas las restricciones) no garantiza que haya soluciones óptimas finitas.

La b) es falsa: si $CSF = \emptyset \Rightarrow$ no hay soluciones óptimas.

La c) es verdadera: las propias soluciones óptimas son soluciones factibles.

02) La correcta es a): no es lineal, porque la función objetivo $f(x;y) = x \cdot y$ no es lineal. No es convexo, porque la función objetivo no es cóncava.

03) La correcta es c).

04) La b) no es verdadera, pues nada dice de la concavidad/convexidad de "f".

En la solución supuestamente corregida en la Facultad dice que la buena es a) ... y dice que la buena no puede ser la c) porque no especifica que es $(x;y) \in S$, lo que no tiene sentido: la concavidad/convexidad de "f" no es una característica "puntual" de "f", es una característica "conjuntista": en teoría se define la concavidad/convexidad de $f(x;y)$ en un conjunto de puntos, y no en un punto.

05) La correcta es b).

06) La correcta es a).

07) La correcta es a).

08) La correcta es b).

09) La correcta es a), pues el SCF es cerrado a acotado y es continua en él.

Siendo un problema de máximo con CSF convexo, se verificaría el teorema Local/Global si la función objetivo $f(x;y) = x^2 + y^2$ fuera cóncava en el

CSF, pero no lo es, pues $Hf(x;y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

10) La correcta es b).

11) La correcta es c).