

OPTIMIZACIÓN

Tema 1	CONJUNTOS CONVEXOS
Tema 2	FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS
Tema 3	CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA OPTIMIZACIÓN
Tema 4	OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES
Tema 5	LAGRANGE Y KHUN TUCKER
Tema 6	PROGRAMACIÓN LINEAL

Tema 4

Optimización Sin restricciones

4.01 Optimización sin restricciones	28
Test	48

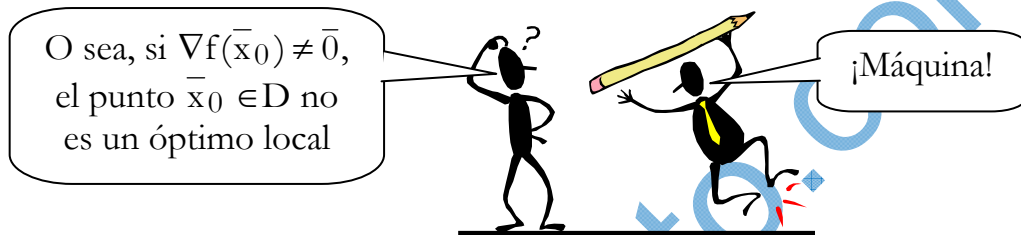
4.1 OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

Nos planteamos el problema de determinar los puntos de \mathbb{R}^n en que la función diferenciable $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ presenta un máximo o un mínimo.

- Si $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es diferenciable en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que $\bar{x}_0 \in A$ es un **punto crítico** de "f" si $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$.
- Un punto crítico $\bar{x}_0 \in A$ se dice de **silla** si en todo entorno de \bar{x}_0 hay puntos \bar{x}_1 tales que $f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_0)$ y también hay puntos \bar{x}_2 tales que $f(\bar{x}_2) < f(\bar{x}_0)$.

Condición necesaria de primer orden

Si $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es de clase C^1 en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una condición necesaria para que $\bar{x}_0 \in A$ sea óptimo local es que $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$.



En efecto: si "f" tiene un \u00f3ptimo local en el punto $\bar{x}_0 \in A$, la derivada de "f" en \bar{x}_0 seg\u00fan cualquier vector de \mathbb{R}^n debe ser nula, pues si existe un vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) \neq 0$, un desplazamiento infinitesimal en la direcci\u00f3n de \bar{v} hace

$\left\{ \begin{array}{l} \text{aumentar} \\ \text{disminuir} \end{array} \right\}$ el valor de "f" si $\left\{ \begin{array}{l} D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) > 0 \\ D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) < 0 \end{array} \right\}$, y un desplazamiento infinitesimal

en la direcci\u00f3n de $-\bar{v}$ hace $\left\{ \begin{array}{l} \text{disminuir} \\ \text{aumentar} \end{array} \right\}$ el valor de "f" si $\left\{ \begin{array}{l} D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) > 0 \\ D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) < 0 \end{array} \right\}$, lo que

es absurdo, pues as\u00ed "f" no presenta un \u00f3ptimo local en $\bar{x}_0 \in A$.

Por ser "f" de clase C^1 en "A", es diferenciable en $\bar{x}_0 \in A$, y eso garantiza que $D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v}$; as\u00ed, es $D_{\bar{v}}f(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v} = 0, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ s\u00f3lo si ocurre que $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$.

Condici\u00f3n necesaria de segundo orden

Si $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es de clase C^2 en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x}_0 \in A$ un punto cr\u00edtico de "f" tal que $Hf(\bar{x}_0)$ no es la matriz nula, una condici\u00f3n necesaria para que $\bar{x}_0 \in A$ sea m\u00e1ximo (m\u00ednimo) local de "f" es que es que $Hf(\bar{x}_0)$ sea semidefinida negativa o definida negativa (semidefinida positiva o definida positiva).



Observa: siendo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x}_0 \in A$ es un punto crítico de "f", si $Hf(\bar{x}_0)$ es indefinida no hay óptimo local en \bar{x}_0 , pues para que haya óptimo local en \bar{x}_0 es necesario que $Hf(\bar{x}_0)$ sea semidefinida o definida. Así, el punto \bar{x}_0 es de **silla**,

Condición suficiente de óptimo local


Siendo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x}_0 \in A$ un punto crítico de "f", si la matriz $Hf(\bar{x}_0)$ es definida negativa (positiva), el punto $\bar{x}_0 \in A$ corresponde a un máximo (mínimo) local estricto de "f".

Condición suficiente de óptimo global

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^1 en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y cóncava (convexa). Si $\bar{x}_0 \in A$ es un punto crítico de "f", entonces "f" presenta un máximo (mínimo) global en \bar{x}_0 , pues si $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$ y "f" es cóncava y de clase C^1 , sea cual sea el punto $\bar{x} \in D$ que elijamos, es:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) \leq \nabla f(\bar{x}_0) \bullet (\bar{x} - \bar{x}_0)^t = \bar{0} \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_0)$$


pues $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$



Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^1 en el abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y estrictamente cóncava (convexa). Si $\bar{x}_0 \in A$ es un punto crítico de "f", entonces "f" presenta un máximo (mínimo) global estricto en \bar{x}_0 , pues si $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$ y "f" es estrictamente cóncava y de clase C^1 , sea cual sea el punto $\bar{x} \in D$ que elijamos, es

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) < \nabla f(\bar{x}_0) \bullet (\bar{x} - \bar{x}_0)^t = \bar{0} \Rightarrow f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$$

pues $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{0}$



FONEMATO 4.1.1

Determinense los óptimos de $f(x;y) = x^2 + y^2$

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = 2 \cdot x = 0 \\ f_y(x;y) = 2 \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Condición suficiente: el carácter de $(0;0)$ está determinado por el signo de la forma cuadrática de matriz asociada $Hf(0;0)$.

$$Hf(0;0) = \begin{bmatrix} f_{x^2}(0;0) & f_{xy}(0;0) \\ f_{yx}(0;0) & f_{y^2}(0;0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como la forma cuadrática indicada es definida positiva, el punto $(0;0)$ corresponde a un mínimo local estricto, que también es global, pues "f" es cóncava, ya su matriz hessiana es definida positiva en todo punto.

FONEMATO 4.1.2

Determinense los óptimos de $f(x;y) = 1 - (x^2 + y^2)$

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = -2 \cdot x = 0 \\ f_y(x;y) = -2 \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Condición suficiente: el carácter de $(0;0)$ está determinado por el signo de la forma cuadrática de matriz asociada $Hf(0;0)$.

$$Hf(0;0) = \begin{bmatrix} f_{x^2}(0;0) & f_{xy}(0;0) \\ f_{yx}(0;0) & f_{y^2}(0;0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Como la forma cuadrática indicada es definida negativa, el punto $(0;0)$ corresponde a un máximo local estricto, que también es global, pues "f" es convexa, ya su matriz hessiana es definida negativa en todo punto.

FONEMATO 4.1.3

Determinense los óptimos de $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y$

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y = 0 & (1) \\ f_y(x;y) = 3 \cdot y^2 - 3 \cdot x = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) se deduce que $y = x^2$, y al sustituir en (2), resulta:

$$x^4 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Los puntos $(0;0)$ y $(1;1)$ son críticos.

Condición suficiente:

Como $Hf(x;y) = \begin{bmatrix} 6.x & -3 \\ -3 & 6.y \end{bmatrix}$, se tiene que:

$$* Hf(0;0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinida} \Rightarrow \text{ensilladura en } (0;0)$$

$$* Hf(1;1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{definida } + \Rightarrow \text{mínimo local estricto en } (1;1)$$

FONEMATO 4.1.4

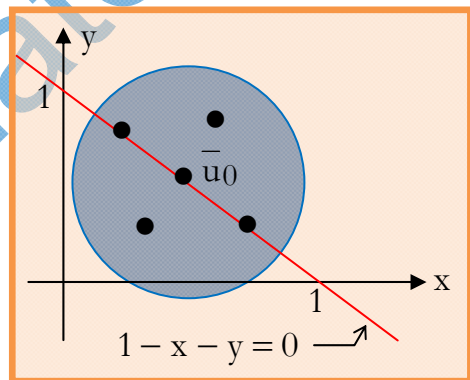
Determinense los óptimos de $f(x;y) = (1 - x - y)^2$

SOLUCIÓN

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = -2.(1 - x - y) = 0 \\ f_y(x;y) = -2.(1 - x - y) = 0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones $\nabla f(x;y) = \bar{0}$ tiene infinitas soluciones, que corresponden a los puntos de la recta $1 - x - y = 0$; o sea, los puntos de la forma $(x; 1 - x)$.

Como $Hf(x;1-x) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva, con la información de las derivadas segundas de "f" no podemos determinar el carácter del punto crítico $(x; 1 - x)$, que podría corresponder a un mínimo local estricto, a un mínimo local no estricto o a un punto de silla. En este caso, podemos resolver la papeleta mediante consideraciones geométricas: el valor de "f" en el punto crítico $\bar{u}_0 = (x; 1 - x)$ es 0, y sea cual sea el entorno de \bar{u}_0 elegido, la función "f" toma el valor 0 en los puntos de dicho entorno que están en la recta $1 - x - y = 0$, tomando valores positivos en los restantes puntos del entorno, pues en ellos es $1 - x - y \neq 0$, por lo que $f(x;y) = (1 - x - y)^2 > 0$; así, "f" tiene un mínimo local no estricto en \bar{u}_0 .



FONEMATO 4.1.4

Determinense los óptimos de $f(x;y) = x^3 + y^3$

SOLUCIÓN

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = 3.x^2 = 0 \\ f_y(x;y) = 3.y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Como $Hf(0;0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, la información contenida en las derivadas segundas de "f" no basta para determinar el carácter del punto crítico $(0;0)$.

El punto $(0;0)$ corresponde a una ensilladura, pues $f(0;0) = 0$ y $f(x;y) = x^3 + y^3$ toma valores $\left\{ \begin{matrix} \text{positivos} \\ \text{negativos} \end{matrix} \right\}$ en los puntos del $\left\{ \begin{matrix} \text{primer} \\ \text{tercer} \end{matrix} \right\}$ cuadrante que hay en todo entorno de $(0;0)$.

FONEMATO 4.1.5

Determinense los óptimos de $f(x; y; z) = e^{-x^2} + e^{-y^2} + z^2 - \ln z$

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x; y; z) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x; y; z) = -2 \cdot x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f_y(x; y; z) = -2 \cdot y \cdot e^{-y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_z(x; y; z) = 2 \cdot z - (1/z) = 0 \Rightarrow z = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Como $f(0; 0; -1/\sqrt{2}) \notin \mathfrak{R}$, el único punto crítico es $\bar{u}_0 = (0; 0; 1/\sqrt{2})$.

Condición suficiente: el carácter de \bar{u}_0 está determinado por el signo de la forma cuadrática de matriz asociada $Hf(\bar{u}_0)$.

$$Hf(\bar{u}_0) = \begin{bmatrix} e^{-x^2} \cdot (4 \cdot x^2 - 2) & 0 & 0 \\ 0 & e^{-y^2} \cdot (4 \cdot y^2 - 2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 + (1/z^2) \end{bmatrix}_{\bar{u}_0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Como la FC indicada es indefinida, \bar{u}_0 corresponde a una ensilladura.

FONEMATO 4.1.6

Determinense los óptimos de $f(x; y) = x^2 \cdot y + y^2 \cdot x - 3 \cdot x \cdot y$

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x; y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x; y) = y \cdot (2 \cdot x + y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 & (1) \\ 2 \cdot x + y - 3 = 0 & (2) \end{cases} \\ f_y(x; y) = x \cdot (x + 2 \cdot y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (3) \\ x + 2 \cdot y - 3 = 0 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

La solución del sistema que forman $\begin{cases} (1) \text{ y } (3) \\ (1) \text{ y } (4) \\ (2) \text{ y } (3) \\ (2) \text{ y } (4) \end{cases}$ es $\begin{cases} (0; 0) \\ (3; 0) \\ (0; 3) \\ (1; 1) \end{cases}$

Condición suficiente:

Como $Hf(x; y) = \begin{bmatrix} 2 \cdot y & 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3 & 2 \cdot x \end{bmatrix}$, se tiene que:

$$* Hf(0; 0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinida} \Rightarrow \text{ensilladura en } (0; 0)$$

$$* Hf(3; 0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinida} \Rightarrow \text{ensilladura en } (3; 0)$$

$$* Hf(0; 3) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{indefinida} \Rightarrow \text{ensilladura en } (0; 3)$$

$$* Hf(1; 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{definida } + \Rightarrow \text{mínimo local estricto en } (1; 1)$$

FONEMATO 4.1.7

Determinense los óptimos de $f(x; y; z) = x \cdot y \cdot z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

SOLUCIÓN

Condición necesaria:

$$\nabla f(x; y; z) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x = y \cdot z - (1/x^2) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot y \cdot z = 1 \\ f_y = x \cdot z - (1/y^2) = 0 \Rightarrow x \cdot y^2 \cdot z = 1 \\ f_z = x \cdot y - (1/z^2) = 0 \Rightarrow x \cdot y \cdot z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y \cdot z = x \cdot y^2 \cdot z \\ x \cdot y^2 \cdot z = x \cdot y \cdot z^2 \end{cases} \Rightarrow$$

Dividimos por $x \cdot y \cdot z$ los dos miembros de ambas ecuaciones, y al hacer eso se eliminan posibles soluciones del sistema para las que $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$ pero eso no debe preocuparnos, pues "f" no está definida si $x = 0$ ó $y = 0$ ó $z = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \Rightarrow y^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = z = 1 \\ y = -1 \Rightarrow x = z = -1 \end{cases}$$

sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones $\begin{cases} x^2 \cdot y \cdot z = 1 \\ x \cdot y^2 \cdot z = 1 \\ x \cdot y \cdot z^2 = 1 \end{cases}$

Condición suficiente:

Es

$$Hf(x; y; z) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & z & y \\ z & 2/y^3 & x \\ y & x & 2/z^3 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$Hf(1; 1; 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad Hf(-1; -1; -1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- En el punto $(1; 1; 1)$ hay un mínimo local estricto, pues $Hf(1; 1; 1)$ es definida positiva:

$$H_1 = 2 > 0; \quad H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0; \quad H_3 = |Hf(1; 1; 1)| > 0$$

- En el punto $(-1; -1; -1)$ hay un máximo local estricto, pues $Hf(-1; -1; -1)$ es definida negativa:

$$H_1 = -2 < 0; \quad H_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} > 0; \quad H_3 = |Hf(-1; -1; -1)| < 0$$

FONEMATO 4.1.8

Determinense los óptimos de $f(x;y) = x^2 - 2.a.x.y + y^3$ según los valores del parámetro real "a".

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = 2.x - 2.a.y = 0 & (1) \\ f_y(x;y) = -2.a.x + 3.y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) se deduce que $x = a.y$, y sustituyendo en (2), resulta:

$$-2.a^2.y + 3.y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 2.a^2/3 \Rightarrow x = 2.a^3/3 \end{cases}$$

Condición suficiente:

- Es $Hf(0;0) = \begin{bmatrix} 2 & -2.a \\ -2.a & 6.y \end{bmatrix}_{(0;0)} = \begin{bmatrix} 2 & -2.a \\ -2.a & 0 \end{bmatrix}$; así:

- * Si $a \neq 0 \Rightarrow Hf(0;0)$ es indefinida \Rightarrow ensilladura en $(0;0)$.

- * Si $a = 0 \Rightarrow Hf(0;0)$ es semidefinida positiva \Rightarrow con la información de las derivadas segundas no podemos determinar el carácter de $(0;0)$, que podría corresponder a un mínimo local estricto, a un mínimo local no estricto o a una ensilladura. Podemos resolver la papeleta mediante consideraciones geométricas: si $a = 0$ es $f(x;y) = x^2 + y^3$, siendo $f(0;0) = 0$... y sea cual sea el entorno de $(0;0)$ que elijamos, "f" toma valores $\begin{cases} \text{positivos} \\ \text{negativos} \end{cases}$ en los puntos $(0;y)$ de dicho entorno tales que $\begin{cases} y > 0 \\ y < 0 \end{cases}$; así, el punto $(0;0)$ es de silla.

- Es $Hf(2.a^2/3;2.a^2/3) = \begin{bmatrix} 2 & -2.a \\ -2.a & 6.y \end{bmatrix}_{(2.a^2/3;2.a^2/3)} = \begin{bmatrix} 2 & -2.a \\ -2.a & 4.a^2 \end{bmatrix}$; así:

- * Si $a \neq 0 \Rightarrow Hf(2.a^2/3;2.a^2/3)$ es definida positiva \Rightarrow mínimo local estricto en $(2.a^2/3;2.a^2/3)$.

- * Si $a = 0 \Rightarrow$ el punto $(2.a^2/3;2.a^2/3)$ es el $(0;0)$, que, como queda dicho, corresponde a una ensilladura.

FONEMATO 4.1.9

Determinense los óptimos de $f(x;y) = x^2 - 2.a.x.y + y^2$ según los valores del parámetro real "a".

SOLUCIÓN

Condición necesaria: los puntos críticos son aquéllos donde se anula ∇f :

$$\nabla f(x;y) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x;y) = 2.x - 2.a.y = 0 & (1) \\ f_y(x;y) = -2.a.x + 2.y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) se deduce que $x = a.y$, y sustituyendo en (2), resulta:

$$-2.a^2.y + 2.y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Condición suficiente:

Es $Hf(0;0) = \begin{bmatrix} 2 & -2.a \\ -2.a & 2 \end{bmatrix}$, y sus menores principales son

$$H_1 = 2 ; H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2.a \\ -2.a & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4.a^2$$

* Si $|a| < 1 \Rightarrow \begin{cases} H_1 > 0 \\ H_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ definida positiva \Rightarrow mínimo local estricto.

* Si $|a| > 1 \Rightarrow \begin{cases} H_1 > 0 \\ H_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ indefinida positiva \Rightarrow ensilladura.

* Si $a = 1 \Rightarrow f(x;y) = x^2 - 2.x.y + y^2 = (x - y)^2$, que se anula en los puntos de la bisectriz $x - y = 0$ del primer cuadrante, tomando valores positivos en los demás puntos del plano. Así, los puntos de dicha bisectriz corresponden a mínimos locales no estrictos.

* Si $a = -1 \Rightarrow f(x;y) = x^2 + 2.x.y + y^2 = (x + y)^2$, que se anula en los puntos de la bisectriz $x + y = 0$ del segundo cuadrante, tomando valores positivos en los demás puntos del plano. Así, los puntos de dicha bisectriz corresponden a mínimos locales no estrictos.

FONEMATO 4.1.10

En un monopolio de cerveza y vino, las funciones de demanda son

$$\begin{aligned} p_1 &= 256 - 3.q_1 - q_2 \\ p_2 &= 222 + q_1 - 5.q_2 \end{aligned}$$

donde p_1, p_2, q_1 y q_2 son los respectivos precios y cantidades demandadas de cerveza y vino. Si la función de coste es $C(q_1; q_2) = q_1^2 + q_1 \cdot q_2 + q_2^2$, determínese la producción que maximiza el beneficio.

SOLUCIÓN

El beneficio $B(q_1; q_2)$ es

$$B(q_1; q_2) = \underbrace{(p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2)}_{\text{Ingreso}} - \underbrace{(q_1^2 + q_1 \cdot q_2 + q_2^2)}_{\text{Coste}} =$$

$$\boxed{p_1 = 256 - 3.q_1 - q_2 ; p_2 = 222 + q_1 - 5.q_2}$$

$$\begin{aligned} &= (256 - 3.q_1 - q_2) \cdot q_1 + (222 + q_1 - 5.q_2) \cdot q_2 - (q_1^2 + q_1 \cdot q_2 + q_2^2) = \\ &= 256.q_1 + 222.q_2 - 4.q_1^2 - q_1 \cdot q_2 - 6.q_2^2 \end{aligned}$$

Condición necesaria:

$$\nabla B(q_1; q_2) = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} B_{q_1}(q_1; q_2) = 256 - 8.q_1 - q_2 = 0 \\ B_{q_2}(q_1; q_2) = 222 - q_1 - 12.q_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = 30 \\ q_2 = 16 \end{cases}$$

Condición suficiente:

Como $HB(30;16) = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -1 & -12 \end{bmatrix}$ es definida negativa, el punto $(30;16)$ corresponde a un máximo local estricto.

TEST 4: OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

01) Sea $f: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$ de clase dos y convexa. Si $a \in \mathcal{R}^n$ es un punto crítico de "f", entonces:

- a) $\forall x \in \mathcal{R}^n$ se verifica que $f(x) \leq f(a)$
- b) "a" es un máximo para la función "f"
- c) "a" no es un máximo para la función "f"

02) Sea $F(x;y) = f(x) + g(y)$, con $f, g: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$. Si $x = a$ es un punto óptimo de "f" e $y = b$ es un punto óptimo de "g", entonces:

- a) $(a;b)$ es un óptimo de "F"
- b) "F" no tiene porqué tener óptimos
- c) $(a;b)$ es un óptimo de "F" si es una función convexa

03) Si $f(x;y) = x^2 + x.y + y^2 + 3$, el punto $(0;0)$

- a) Es un máximo local de "f"
- b) Es un mínimo local de "f"
- c) Es un punto de silla de "f"

05) Si $f: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$ es de clase C^2 y cóncava y $a \in \mathcal{R}^n$ es un punto crítico de "f":

- a) $\forall x \in \mathcal{R}^n$ se verifica que $f(a) \leq f(x)$
- b) $Hf(a)$ es una matriz diagonal con autovalores positivos
- c) "a" es un máximo para la función "f"

06) Si $f: \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$ es de clase C^2 y convexa y $a \in \mathcal{R}^n$ es un punto crítico de "f"

- a) $\forall x \in \mathcal{R}^n$ se verifica que $f(a) \leq f(x)$
- b) $Hf(a)$ es una matriz diagonal con autovalores positivos
- c) "a" es un máximo para la función "f"

07) En el punto $(1;0)$ la función $f(x;y) = x^3 - 2.x.y^2 - 3.x$ presenta:

- a) Un máximo local ; b) Un máximo global ; c) Un punto de silla

08) Sea $f: \mathcal{R}^2 \mapsto \mathcal{R}$ de clase C^2 tal que $f_{xy}(a;b) = 0$. Si $(a;b)$ es un máximo local de "f", entonces:

- a) $f_{xx}(a;b) = f_{yy}(a;b)$; b) $f_{xx}(a;b).f_{yy}(a;b) \geq 0$
- c) $f_{xx}(a;b).f_{yy}(a;b) \leq 0$

09) Sea $f: \mathcal{R}^2 \mapsto \mathcal{R}$ de clase C^2 tal que $f_{xy}(a;b) = 0$. Si $(a;b)$ es un mínimo de "f", entonces:

- a) $f_{xx}(a;b) = f_{yy}(a;b)$; b) $f_{xx}(a;b).f_{yy}(a;b) \geq 0$
- c) $f_{xx}(a;b).f_{yy}(a;b) \leq 0$

10) Sea $f: S \subseteq \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$ diferenciable. Si $a \in S$ es un punto crítico de "f":

- a) $\nabla f(a) \neq 0$; b) $\nabla f(a) = 0$; c) $Hf(a) = 0$

11) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f(a; b) = 0$ y $Hf(a; b) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$:

- a) El punto $(a; b)$ es un mínimo de "f"
- b) El punto $(a; b)$ es un máximo de "f"
- c) El punto $(a; b)$ es un punto de silla de "f"

12) Sea $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 . Si $(0; 0; 0)$ es un punto crítico de la función "f"

$$\text{y } Hf(0; 0; 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- a) El punto $(0; 0; 0)$ es un mínimo local de "f"
- b) El punto $(0; 0; 0)$ es un máximo local de "f"
- c) El punto $(0; 0; 0)$ es un punto de silla de "f"

13) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 y $(a; b)$ su único punto crítico, que es un máximo local:

- a) (a, b) es un máximo global de "f"
- b) (a, b) es un máximo global de "f" si la FC de matriz $Hf(a; b)$ es definida negativa o semidefinida negativa
- c) (a, b) es un máximo global de "f" si la FC de matriz $Hf(x; y)$ es definida negativa o semidefinida negativa $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

14) Sea $F(x; y) = f(x) + g(y)$, con $f, g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 . Si $x = a$ es un punto óptimo de "f" e $y = b$ es un punto óptimo de "g", entonces:

- a) $(a; b)$ es un óptimo de "F"
- b) $(a; b)$ es un punto crítico de "F"
- c) $(a; b)$ es un punto de silla de "F"

15) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f(a; b) = 0$ y $Hf(a; b) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{bmatrix}$:

- a) El punto $(a; b)$ es un mínimo de "f"
- b) El punto $(a; b)$ es un máximo de "f"
- c) El punto $(a; b)$ es un punto de silla de "f"

16) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 y $(a; b)$ un máximo de "f":

- a) $(a; b)$ es un punto crítico de "f"
- b) $(a; b)$ es un punto de silla de "f"
- c) La matriz $Hf(a; b)$ corresponde a una FC definida negativa

17) Sea $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 con matriz hessiana definida positiva en todo punto de \mathbb{R}^n . Si $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico de "f":

- a) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ se verifica que $f(a) \leq f(x)$
- b) $Hf(a)$ es una matriz diagonal con autovalores positivos
- c) "a" es un máximo para la función "f"

18) Sea $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f_{xy}(a;b) = 0$. Si $(a;b)$ es un mínimo local de "f", entonces:

- a) $f_{xx}(a;b) \cdot f_{yy}(a;b) \geq 0$; b) $f_{xx}(a;b) \cdot f_{yy}(a;b) \leq 0$
- c) $f_{xx}(a;b) = f_{yy}(a;b)$

19) Si $f(x;y) = x^3 - 2 \cdot x \cdot y^3 + 8 \cdot x \cdot y - 11 \cdot x$, el punto $(1;2)$

- a) Es un máximo local de "f"
- b) Es un máximo global de "f"
- c) Es un punto de silla de "f"

www.fonemato.com

SOLUCIÓN

01) La correcta es c).

02) Contraejemplo: $f(x) = x^2$ presenta mínimo en $x = 0$ y $g(y) = -y^2$ presenta máximo en $y = 0$; pero $F(x; y) = x^2 - y^2$ no presenta óptimo en $(0; 0)$. Este ejemplo también acredita que b) es verdadera, pues $F(x; y) = x^2 - y^2$ carece de óptimos.

También es verdadera c): si "a" es óptimo de "f" y "b" lo es de "g", es $f'(a) = 0$ y $g'(b) = 0$, por lo que $(a; b)$ cumple la CN de óptimo para "F" pues $\nabla F(a; b) = [f'(a) \quad g'(b)] = [0 \quad 0] \dots$ y como la CN es suficiente si "F" es convexa, el punto $(a; b)$ es óptimo de "F", en concreto es mínimo de "F".

En la solución supuestamente corregida en la Facultad dice que la buena es b).

03) La correcta es b).

05) Si "f" es cóncava \Rightarrow la CN es suficiente y como "a" cumple la CN, es un máximo de "f".

06) Si "f" es convexa \Rightarrow la CN es suficiente y como "a" cumple la CN, es un mínimo de "f" \Rightarrow la correcta es a).

07) La correcta es c): $\nabla f(1; 0) = (0; 0)$ y $Hf(1; 0) = \begin{bmatrix} 6 \cdot x & -4 \cdot y \\ -4 \cdot y & -4 \cdot x \end{bmatrix}_{(1; 0)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

08) Si $f_{xy}(a; b) = 0$ es $Hf(a; b) = \begin{bmatrix} f_{x^2}(a; b) & 0 \\ 0 & f_{y^2}(a; b) \end{bmatrix}$; así, si $(a; b)$ es máximo

local de "f", la matriz es definida negativa (\Rightarrow los dos autovalores son negativos \Rightarrow producto positivo) o semidefinida negativa (\Rightarrow un autovalor negativo y el otro 0 \Rightarrow producto 0) \Rightarrow la correcta es b).

09) Si $f_{xy}(a; b) = 0$ es $Hf(a; b) = \begin{bmatrix} f_{x^2}(a; b) & 0 \\ 0 & f_{y^2}(a; b) \end{bmatrix}$; así, si $(a; b)$ es mínimo de

"f", la matriz es definida positiva (\Rightarrow los dos autovalores son positivos \Rightarrow producto positivo) o semidefinida positiva (\Rightarrow un autovalor positivo y el otro 0 \Rightarrow producto 0) \Rightarrow la correcta es b).

10) La correcta es b).

11) Ninguna es necesariamente correcta: si $(a; b) = (0; 0)$ es $Hf(0; 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

12) La correcta es c), pues $Hf(0; 0; 0)$ es indefinida.

13) La correcta es c): en tal caso el programa es convexo.

14) La correcta es b): si "a" es óptimo de "f" y "b" lo es de "g", es $f'(a) = 0$ y $g'(b) = 0 \Rightarrow \nabla F(a; b) = [f'(a) \quad g'(b)] = [0 \quad 0]$

15) Ninguna es necesariamente correcta: si $(a; b) = (0; 0)$ es $Hf(0; 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

16) La correcta es a).

17) La correcta es a): Como $\nabla f(a) = 0$ y $Hf(a)$ es definida positiva \Rightarrow "a" es un mínimo local, que también es global, pues "f" es convexa, ya que $Hf(x)$ es definida positiva en todo punto.

18) Si $f_{xy}(a; b) = 0$ es $Hf(a; b) = \begin{bmatrix} f_{x^2}(a; b) & 0 \\ 0 & f_{y^2}(a; b) \end{bmatrix}$; así, si $(a; b)$ es mínimo

local de "f", la matriz es definida positiva (\Rightarrow los dos autovalores son positivos \Rightarrow producto positivo) o semidefinida positiva (\Rightarrow un autovalor positivo y el otro 0 \Rightarrow producto 0) \Rightarrow la correcta es a).

20) La correcta es c): $Hf(1; 2) = \begin{bmatrix} 6 \cdot x & 8 - 4 \cdot y \\ 8 - 4 \cdot y & -4 \cdot x \end{bmatrix}_{(1; 2)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ es indefinida.