

OPTIMIZACIÓN

Tema 1	CONJUNTOS CONVEXOS
Tema 2	FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS
Tema 3	CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA OPTIMIZACIÓN
Tema 4	OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES
Tema 5	LAGRANGE Y KHUN TUCKER
Tema 6	PROGRAMACIÓN LINEAL

Tema 6

Optimización lineal

6.01 Optimización lineal	110
6.02 Características de un programa lineal	111
6.03 Soluciones básicas	111
6.04 Relación entre vértice y solución factible básica	113
6.05 Algoritmo del simplex	113
6.06 El método de las dos fases	122
6.07 Dualidad	124
6.08 Condiciones de holgura complementaria	125
Test	137

6.1 OPTIMIZACIÓN LINEAL

Se dice que un programa de optimización es lineal si la función objetivo y todas las restricciones son lineales.

Denotando:

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

la **forma canónica** de un problema lineal es la siguiente:

$$\text{Máx. } \bar{c}^t \bullet \bar{x} \text{ s.a.: } \begin{cases} A \bullet \bar{x} \leq \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases}$$

$$\text{Mín. } \bar{c}^t \bullet \bar{x} \text{ s.a.: } \begin{cases} A \bullet \bar{x} \geq \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases}$$

La **forma estándar** de un problema lineal es la siguiente:

$$\text{Máx. } \bar{c}^t \bullet \bar{x} \text{ s.a.: } \begin{cases} A \bullet \bar{x} = \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases}$$

$$\text{Mín. } \bar{c}^t \bullet \bar{x} \text{ s.a.: } \begin{cases} A \bullet \bar{x} = \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases}$$

Todo programa lineal puede expresarse en forma canónica y en forma estándar, pues:

1) Toda restricción de igualdad puede expresarse mediante dos restricciones de desigualdad.

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 7 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 7 \end{cases}$$

2) Introduciendo una variable adicional, llamada **de holgura**, toda restricción de desigualdad puede expresarse mediante una restricción de igualdad y otra de no negatividad de la variable de holgura introducida.

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 7 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 7 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2) El sentido de la desigualdad cambia multiplicando ambos miembros por -1 .

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 7 \Leftrightarrow -2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 \geq -7$$

Llamaremos **actividad** P_j a la j -ésima columna de la matriz "A".

6.2 CARACTERÍSTICAS DE UN PROGRAMA LINEAL

- 1) **Todo programa lineal** de $\begin{cases} \text{maximización} \\ \text{minimización} \end{cases}$ **es convexo**, pues la función objetivo, por ser lineal, es $\begin{cases} \text{cóncava} \\ \text{convexa} \end{cases}$, y el conjunto de soluciones factibles es convexo, ya que todas las restricciones son lineales. Así, el teorema Local/Global garantiza que la solución óptima, si existe, es global.
- 2) **Si un programa lineal tiene solución única, es un vértice del CSF.**

Por reducción al absurdo: supuesto que el problema es de máximo y que tiene solución única \bar{x}^* (o sea, en todo punto $\bar{x} \neq \bar{x}^*$ del CSF es $\bar{c}^t \cdot \bar{x} < \bar{c}^t \cdot \bar{x}^*$), si \bar{x}^* no fuera vértice del CSF, sería interior a algún segmento contenido en el CSF; es decir, existirían $\lambda \in [0;1]$ y sendos puntos $\bar{x}^0 \neq \bar{x}^*$ y $\bar{x}^1 \neq \bar{x}^*$ del CSF tales que $\bar{x}^* = \lambda \cdot \bar{x}^0 + (1 - \lambda) \cdot \bar{x}^1$. Así:

$$\bar{c}^t \cdot \bar{x}^* = \bar{c}^t \cdot (\lambda \cdot \bar{x}^0 + (1 - \lambda) \cdot \bar{x}^1) = \lambda \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{x}^0) + (1 - \lambda) \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{x}^1) <$$

pues $\bar{c}^t \cdot \bar{x}^0 < \bar{c}^t \cdot \bar{x}^*$ y $\bar{c}^t \cdot \bar{x}^1 < \bar{c}^t \cdot \bar{x}^*$

$$< \lambda \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{x}^*) + (1 - \lambda) \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{x}^*) = \bar{c}^t \cdot \bar{x}^* \Rightarrow \text{absurdo}$$

- 3) **Si el óptimo de un programa lineal se presenta en más de un vértice, toda combinación lineal convexa de esos vértices también es solución óptima.**

En efecto, si los vértices \bar{x}^0 y \bar{x}^1 son óptimos, es $\bar{c}^t \cdot \bar{x}^0 = \bar{c}^t \cdot \bar{x}^1$. Así, si $\lambda \in [0;1]$ y $\bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}^0 + (1 - \lambda) \cdot \bar{x}^1$, es:

$$\bar{c}^t \cdot \bar{x} = \bar{c}^t \cdot (\lambda \cdot \bar{x}^0 + (1 - \lambda) \cdot \bar{x}^1) = \lambda \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{x}^0) + (1 - \lambda) \cdot (\bar{c}^t \cdot \bar{x}^1) = \bar{c}^t \cdot \bar{x}^1$$

$\bar{c}^t \cdot \bar{x}^0 = \bar{c}^t \cdot \bar{x}^1$

6.3 SOLUCIONES BÁSICAS

Sea el programa lineal en forma estándar Máx. $\bar{c} \bullet \bar{x}$ s.a: $\left\{ \begin{array}{l} A \bullet \bar{x} = \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{array} \right\}$, siendo $\bar{x}, \bar{c} \in \mathcal{R}^n$, $\bar{b} \in \mathcal{R}^m$, $A \in M_{m \times n}$ con $m < n$ y $\text{rg}(A) = m$.

Llamamos **solución básica** a todo punto $\bar{x} \in \mathcal{R}^n$ que sea solución del sistema $A \bullet \bar{x} = \bar{b}$ y tenga como mucho "m" componentes no nulos.

De toda solución básica con componentes no negativos (o sea, $\bar{x} \geq \bar{0}$) diremos que es una **solución factible básica**.

Diremos que una solución factible básica $\left\{ \begin{array}{l} \text{es} \\ \text{no es} \end{array} \right\}$ **degenerada** si el número de componentes no nulos que tiene es $\left\{ \begin{array}{l} < m \\ = m \end{array} \right\}$.

Por ejemplo, supongamos que las restricciones de un programa lineal son las siguientes:

$$\begin{aligned} 3.x_1 + x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 9 \\ x_1 + 2.x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 8 \\ x_i &\geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Así, es:

$$\text{rg} \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}^A = 2$$

Como "A" tiene 2 filas, llamamos **solución básica** a todo punto $\bar{x} \in \mathcal{R}^4$ que tenga como mucho 2 componentes no nulos y sea solución del sistema

$$\begin{aligned} 3.x_1 + x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 9 \\ x_1 + 2.x_2 + x_3 + 2.x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones básicas pueden ser de cualquiera de las siguientes formas:

- 1) $(x_1; x_2; 0; 0)$
- 2) $(x_1; 0; x_3; 0)$
- 3) $(x_1; 0; 0; x_4)$
- 4) $(0; x_2; x_3; 0)$
- 5) $(0; x_2; 0; x_4)$
- 6) $(0; 0; x_3; x_4)$

Veamos:

1) Si $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3.x_1 + x_2 + 0 + 0 = 9 \\ x_1 + 2.x_2 + 0 + 0 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \geq 0 \\ x_2 = 3 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2; 3; 0; 0)$ es una solución factible básica no degenerada.

2) Si $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3.x_1 + 0 + x_3 + 0 = 9 \\ x_1 + 0 + x_3 + 0 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \geq 0 \\ x_3 = 15/2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1/2; 0; 15/2; 0)$ es una solución factible básica no degenerada.

- 3) Si $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 0 + 0 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 0 + 0 + 2x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \geq 0 \\ x_4 = 15/4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\frac{1}{2}; 0; 0; \frac{15}{4})$
 es una solución factible básica no degenerada.
- 4) Si $x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + x_2 + x_3 + 0 = 9 \\ 0 + 2x_2 + x_3 + 0 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 < 0 \\ x_3 = 10 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (0; -1; 10; 0)$ es
 una solución básica, pero no es factible, pues no cumple que $x_i \geq 0, \forall i$.
- 5) Si $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + x_2 + 0 + 2x_4 = 9 \\ 0 + 2x_2 + 0 + 2x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 < 0 \\ x_4 = 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (0; -1; 0; 5)$ es
 una solución básica, pero no es factible, pues no cumple que $x_i \geq 0, \forall i$.
- 6) Si $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 0 + 0 + x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{incompatible} \Rightarrow \text{no hay ninguna}$
 solución básica en la que $x_1 = x_2 = 0$.

Por ejemplo, supongamos que las restricciones de un programa lineal son las siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 3 \\ x_i &\geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Así, es:

$$\text{rg} \begin{matrix} A \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = 3$$

Como "A" tiene 3 filas, llamamos **solución básica** a todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^5$ que tenga como mucho 3 componentes no nulos y sea solución del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, una solución básica podría ser de la forma $(x_1; x_2; x_3; 0; 0)$. Veamos: si $x_4 = x_5 = 0$, se tiene que

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 + 0 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 0 + 0 = 1 \\ x_1 + x_2 - 0 + 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \geq 0 \\ x_2 = 2 \geq 0 \\ x_3 = 0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (1; 2; 0; 0; 0)$$

que es una solución factible básica **degenerada**, pues el número de componentes **no nulos** en ella es inferior a 3.

6.4 RELACIÓN ENTRE VÉRTICE Y SOLUCIÓN FACTIBLE BÁSICA

- 1) Si $\bar{x}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_k^*; 0; 0; \dots; 0)$, con $k \leq m$, es un punto del CSF tal que los "k" vectores P_1, P_2, \dots, P_k de la matriz "A" son linealmente independientes, entonces $\bar{x}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_k^*; 0; 0; \dots; 0)$ es un vértice del CSF.
- 2) Si \bar{x}^* es un vértice del CSF, las columnas de la matriz "A" asociadas a las componentes positivas de \bar{x}^* son linealmente independientes.
- 3) El punto \bar{x}^* del CSF es un vértice del CSF si y sólo si \bar{x}^* es una solución factible básica.

www.fonemato.com

6.5 ALGORITMO DEL SIMPLEX

Partiendo de una solución factible básica, el algoritmo del simplex nos permitirá pasar a una solución factible básica adyacente a la primera mejorando o no empeorando el correspondiente valor de la función objetivo, entendiendo que la solución factible básica "Pepa" es adyacente a la solución factible básica "Juana" si las variables básicas de "Pepa" son las mismas que las de "Juana", salvo una de las variables básicas.

FONEMATO 6.5.1

Maximizar $z = 150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3$ sujeto a

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 64$$

$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 \leq 104$$

$$x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 30$$

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN

Transformamos las inecuaciones en ecuaciones, introduciendo las correspondientes **variables de holgura**, que van afectadas de coeficiente nulo en la función objetivo (o sea, es: $z = 150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + x_4 = 64 \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 + x_5 = 104 \\ x_1 + 5 \cdot x_2 + x_6 = 30 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 64 \\ \hline 5 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 104 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ \hline \end{array}$$

La **base** de partida es la formada por P_4, P_5 y P_6 , por lo que $(0;0;0;64;104;30)$ es una solución factible básica; o sea, es un vértice del conjunto convexo que definen las restricciones del problema. En dicho vértice, las variables básicas son x_4, x_5 y x_6 , siendo x_1, x_2 y x_3 las variables no básicas.

En el vértice al que vamos a **saltar** con el simplex, una de las variables básicas será no básica, y una de las no básicas será básica. Para averiguar cuál es la variable que **sale** de la base y cuál la que **entra**, ampliamos la tabla anterior:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	$\theta = P_0/P_3$
0	P_4	1	4	4	1	0	0	64	16
0	P_5	5	0	4	0	1	0	104	26
0	P_6	1	5	0	0	0	1	30	—
×	c_j	150	100	200	0	0	0	×	×
×	z_j	0	0	0	0	0	0	0	×
×	$z_j - c_j$	-150	-100	-200	0	0	0	×	×

En C_x están los coeficientes de las variables básicas x_4, x_5 y x_6 en la función objetivo, siendo $z_j = C_x \cdot P_j$. Así, **entra** en la base la variable correspondiente al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que en nuestro caso es -200 y corresponde a la

variable x_3 . Para saber qué variable **sale** de la base, dividimos la columna P_0 por la columna de la variable x_3 que **entra** en la base (si alguno de los elementos de esta columna es 0, no se divide), obteniendo así la columna θ , y **sale** de la base la variable correspondiente al menor valor de θ (o sea, **sale** x_4).

Mediante **transformaciones elementales**, hacemos que la columna de la actividad P_3 que **entra** tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_4 que **sale** (a la 2ª fila le restamos la 1ª y dividimos ésta por 4):

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
200	P_3	0	5/4	1	5/16	-1/16	0	27/2
150	P_1	1	-1	0	-1/4	1/4	0	10
0	P_6	0	6	0	1/4	-1/4	1	20
×	c_j	150	100	200	0	0	0	×
×	z_j	150	100	200	25	25	0	4200
×	$z_j - c_j$	0	0	0	25	25	0	×

Esta tabla indica que el vértice al que hemos llegado es el $(0;0;16;0;40;30)$, y el valor de la función objetivo en él es 3200.

Damos otro salto: entra en la base x_1 , pues corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$ y sale de la base x_5 , que corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_1$.

Hacemos **transformaciones elementales** para que la columna de la actividad P_1 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_5 que **sale** de la base (dividimos la 2ª fila por 4, a la 1ª fila le restamos la 2ª dividida por 16, a la 3ª fila le restamos la 2ª dividida por 4):

¿falta tabla?

Esta tabla indica que el vértice al que hemos llegado es el $(10;0;27/2;0;0;20)$, y el valor de la función objetivo en él es 4200.

En un problema de máximo, sabremos que estamos en la solución óptima (vértice óptimo) si, como ocurre en nuestro caso, todos los $z_j - c_j$ son ≥ 0 .

Sabremos que el problema no tiene solución finita si en uno de los saltos que damos, todos los elementos de la columna correspondiente a la variable que entra en la base son negativos.

Sabremos que el problema tiene infinitas soluciones si, como ocurre en nuestro caso, todos los $z_j - c_j$ son ≥ 0 y entre ellos hay más ceros que vectores en la base.

FONEMATO 6.5.2

Minimizar $z = x_1 + 3 \cdot x_2$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 24 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN

Transformamos las inecuaciones en ecuaciones, introduciendo las correspondientes variables de holgura, que van afectadas de coeficiente nulo en la función objetivo (o sea, es: $z = x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$):

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 = 24 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 - x_4 = 25 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_0 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 24 \\ \hline 5 & 1 & 0 & -1 & 25 \\ \hline \end{array}$$

Observa que $(0;0;-24;-25)$ no es una solución factible básica (no es un vértice del conjunto convexo que definen las restricciones del problema), pues no satisface las restricciones $x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4$.

Para resolver la papeleta, en cada ecuación proveniente de una restricción de la forma " \geq " introducimos una nueva variable (**variable artificial**), así:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 + x_5 = 24 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 25 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ \hline 5 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 25 \\ \hline \end{array}$$

La base de partida es la formada por P_5 y P_6 , por lo que $(0;0;0;0;24;25)$ es una solución factible básica; o sea, es un vértice del conjunto convexo que definen las restricciones del problema. En dicho vértice, las variables básicas son x_5 y x_6 , y las variables no básicas son x_1, x_2, x_3 y x_4 .

Como las **variables artificiales** x_5 y x_6 se han introducido porque sólo con las **variables de holgura** x_3 y x_4 no es posible determinar un vértice del CSF, para que en la solución óptima, si existe, no aparezcan (sean nulas) las variables artificiales, les asignamos una **penalidad** muy elevada "M" en la función objetivo, que pasa a ser $z = x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + M \cdot x_5 + M \cdot x_6$, siendo "M" bestialmente positivo.

Y ahora ya podemos empezar a dar saltos a partir de la solución factible básica $(0;0;0;0;24;25)$.

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	$\theta = P_0/P_1$
M	P_5	1	4	-1	0	1	0	24	24
M	P_6	5	1	0	-1	0	1	25	5
×	c_j	1	3	0	0	M	M	×	×
×	z_j	6.M	5.M	-M	-M	M	M	49.M	×
×	$z_j - c_j$	6.M - 1	5.M - 3	-M	-M	0	0	0	×

Entra x_1 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es $6.M - 1$), y **sale** x_6 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_1$).

SEGUNDA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_1 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_6 que **sale** de la base (dividimos la 2ª fila por 5 y a la 1ª fila le restamos la 2ª dividida por 5):

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
M	P_5	0	$19/5$	-1	$1/5$	1	$-1/5$	19	5
1	P_1	1	$1/5$	0	$-1/5$	0	$1/5$	5	25
×	c_j	1	3	0	0	M	M	×	×
×	z_j	1	$\frac{19.M+1}{5}$	-M	$\frac{M-1}{5}$	M	$\frac{1-M}{5}$	$19.M+5$	×
×	$z_j - c_j$	0	$\frac{19.M-14}{5}$	-M	$\frac{M-1}{5}$	0	$\frac{1-6.M}{5}$	×	×

Entra x_2 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es $(19.M - 14)/5$) y **sale** x_5 (corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_2$).

TERCERA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_2 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_5 que **sale** de la base (multiplicamos la 1ª fila por $5/19$ y a la 2ª fila le restamos la 1ª dividida por 19):

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
3	P_2	0	1	$-5/19$	$1/19$	$5/19$	$-1/19$	5
1	P_1	1	0	$1/19$	$-4/19$	$-1/19$	$4/19$	4
×	c_j	1	3	0	0	M	M	×
×	z_j	1	3	$-14/19$	$-1/19$	$14/19$	$1/19$	19
×	$z_j - c_j$	0	0	$-14/19$	$-1/19$	< 0	< 0	×

En un problema de máximo, sabremos que estamos en la solución óptima (vértice óptimo) si, como ocurre en nuestro caso, todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0 . Así, la solución óptima $(4;5;0;0;0;0)$, que es única, pues entre los $z_j - c_j$ hay dos ceros. El valor óptimo de la función objetivo es 19.

Sabremos que el problema no tiene solución finita si en uno de los saltos que damos, todos los elementos de la columna correspondiente a la variable que entra en la base son negativos, o si todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0 y en la base hay alguna **variable artificial** con valor positivo.

Sabremos que el problema tiene infinitas soluciones si, como ocurre en nuestro caso, todos los $z_j - c_j$ son ≥ 0 y entre ellos hay más ceros que vectores en la base.

FONEMATO 6.5.3

$$\text{Minimizar } z = 2 \cdot x_1 + x_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} 3 \cdot x_1 + x_2 = 3 \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Si dibujas el CSF, puedes comprobar que el único punto de \mathbb{R}^2 que satisface todas las restricciones es el $(3/5; 6/5)$, que corresponde a la solución del problema y satura las restricciones $3 \cdot x_1 + x_2 = 3$, $4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 6$ y $x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 3$.

Simplex

Transformamos las inecuaciones en ecuaciones, introduciendo las correspondientes **variables de holgura**, que van afectadas de coeficiente nulo en la función objetivo (o sea: $z = 2 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$):

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + x_2 = 3 \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Para determinar una solución factible básica, introducimos **variables artificiales** en las ecuaciones que proceden de restricciones de la forma " \geq " ó "=":

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

La base de partida es la formada por P_4 , P_5 y P_6 , por lo que $(0; 0; 0; 3; 3; 6)$ es una solución factible básica; o sea, es un vértice del CSF. En dicho vértice, las variables básicas son x_4 , x_5 y x_6 , siendo x_1 , x_2 y x_3 las variables no básicas. A las variables artificiales les asignamos **penalidad** muy elevada "M" en la función objetivo, que pasa a ser $z = 2 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + M \cdot x_5 + M \cdot x_6$, siendo "M" bestialmente positivo.

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
M	P_5	3	1	0	0	1	0	3	1
M	P_6	4	3	-1	0	0	1	6	3/2
0	P_4	1	2	0	1	0	0	3	3
×	c_j	2	1	0	0	M	M	×	×
×	z_j	7.M	4.M	-M	0	M	M	9.M	×
×	$z_j - c_j$	7.M - 2	4.M - 1	-M	0	0	0	×	×

Entra x_1 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es $7.M - 2$), y **sale** x_5 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_1$).

SEGUNDA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_1 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_5 que **sale** de la base (dividimos la 1ª fila por 3, a la 2ª fila le restamos la 1ª dividida por $4/3$, y a la 3ª fila le restamos la 1ª multiplicada por $1/3$):

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
2	P_1	1	$1/3$	0	0	$1/3$	0	1	3
M	P_6	0	$5/3$	-1	0	$-4/3$	1	2	$6/5$
0	P_4	0	$5/3$	0	1	$-1/3$	0	2	$6/5$
×	c_j	2	1	0	0	M	M	×	×
×	z_j	2	$\frac{5.M+2}{3}$	-M	0	$\frac{2-4.M}{3}$	M	$2.M+2$	×
×	$z_j - c_j$	0	$\frac{5.M-1}{3}$	-M	0	$\frac{2-7.M}{3}$	0	×	×

Entra x_2 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es $(5.M - 1)/3$) y pueden **salir** x_4 (variable de holgura) ó x_6 (variable artificial), pues ambas corresponden al menor valor, $6/5$, de $\theta = P_0/P_2$. Hacemos que salga la variable artificial x_6 .

TERCERA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_2 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_6 que **sale** de la base, y resulta:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
2	P_1	1	0	$1/5$	0	$3/5$	$-1/5$	$3/5$
1	P_2	0	1	$-3/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$6/5$
0	P_4	0	0	1	1	1	-1	0
×	c_j	2	1	0	0	M	M	×
×	z_j	2	1	$-1/5$	0	$2/5$	$1/5$	$12/5$
×	$z_j - c_j$	0	0	$-1/5$	0	$\frac{2-5.M}{5}$	$\frac{1-5.M}{5}$	×

Como todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0 , la última tabla corresponde a la solución óptima $(3/5; 6/5; 0; 0; 0; 0)$, que es única, pues entre los $z_j - c_j$ hay tres ceros. El valor óptimo de la función objetivo es $12/5$.

FONEMATO 6.5.4

$$\text{Maximizar } z = 3 \cdot x_1 - x_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6 \\ 3 \cdot x_1 - x_2 \geq 3 \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 6 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Al resolver el problema geoméricamente, la solución corresponde al punto $(30/13; 6/13)$, que satura las restricciones $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6$ y $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 6$. No satura la restricción $3 \cdot x_1 - x_2 \geq 3$, pues $3 \cdot (30/13) - (6/13) = 84/13 > 3$; así, la variable de holgura correspondiente a esta restricción es $(84/13) - 3 = 45/13$.

Simplex

Transformamos las inecuaciones en ecuaciones, introduciendo las correspondientes **variables de holgura**, que van afectadas de coeficiente nulo en la función objetivo (o sea: $-z = -3 \cdot x_1 + x_2 + 9 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$):

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6 \\ 3 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_4 = 6 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Para determinar una solución factible básica, introducimos **variables artificiales** en las ecuaciones que proceden de restricciones de la forma " \geq " ó " $=$ ":

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_5 = 6 \\ 3 \cdot x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_4 = 6 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc|c} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

La base de partida es la formada por P_4, P_5 y P_6 , por lo que $(0; 0; 0; 6; 6; 3)$ es una solución factible básica; o sea, es un vértice del CSF. En dicho vértice, las variables básicas son x_4, x_5 y x_6 , siendo x_1, x_2 y x_3 las variables no básicas. A las variables artificiales les asignamos **penalidad** muy elevada "M" en la función objetivo, que pasa a ser $z = 3 \cdot x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - M \cdot x_5 - M \cdot x_6$, siendo "M" bestialmente positivo.

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
-M	P_5	2	3	0	0	1	0	6	3
-M	P_6	3	-1	-1	0	0	1	3	1
0	P_4	3	-2	0	1	0	0	6	2
×	c_j	3	-1	0	0	-M	-M	×	×
×	z_j	-5.M	-2.M	M	0	-M	-M	-9.M	×
×	$z_j - c_j$	-5.M - 3	-2.M + 1	M	0	0	0	×	×

Entra x_1 (corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que es $-5 \cdot M - 3$), y **sale** x_6 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_1$).

SEGUNDA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_1 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_6 que **sale** de la base:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
-M	P_5	0	11/3	2/3	0	1	-2/3	4	9/11
3	P_1	1	-1/3	-1/3	0	0	1/3	1	-
0	P_4	0	-1	1	1	0	-1	3	-
×	c_j	3	-1	0	0	-M	-M	×	×
×	z_j	3	$-\frac{11.M+3}{3}$	$-\frac{2.M+3}{3}$	0	-M	$\frac{2.M+3}{3}$	-4.M+3	×
×	$z_j - c_j$	0	$-\frac{11.M}{3}$	$-\frac{2.M+3}{3}$	0	0	$\frac{5.M+3}{3}$	×	×

Entra x_2 (corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que es $-11.M/3 \dots$ y **sale** x_5 (variable artificial), que corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_2$.

TERCERA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_2 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_5 que **sale** de la base:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
-1	P_2	0	1	2/11	0	3/11	-2/11	12/11	6
3	P_1	1	0	-8/33	0	3/11	8/33	15/11	-
0	P_4	0	0	13/11	1	3/11	-15/11	45/11	45/13
×	c_j	3	-1	0	0	-M	-M	×	×
×	z_j	3	-1	-10/11	0	6/11	10/11	3	×
×	$z_j - c_j$	0	0	-10/11	0	>0	>0	×	×

Entra x_3 (corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que es $-10/11 \dots$ y **sale** x_4 (variable artificial), que corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_3$.

CUARTA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_3 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_4 que **sale** de la base:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
-1	P_2	0	1	0	-2/13	3/13	0	6/13
3	P_1	1	0	0	3/13	2/13	0	30/13
0	P_3	0	0	1	11/13	3/13	-1	45/13
×	c_j	3	-1	0	0	-M	-M	×
×	z_j	3	-1	0	11/13	3/13	0	84/13
×	$z_j - c_j$	0	0	0	11/13	>0	>0	×

Como todos los $z_j - c_j$ son ≥ 0 , la última tabla corresponde a la solución óptima $(30/13; 6/13; 45/13; 0; 0; 0)$, que es única, pues entre los $z_j - c_j$ hay tres ceros. El valor óptimo de la función objetivo es $-(-84/13) = 84/13$.

www.fonemato.com

6.6 EL MÉTODO DE LAS DOS FASES

Permite determinar una solución factible básica en la que todas las variables artificiales son nulas; a partir de dicha solución factible básica, aplicando el algoritmo del simplex, obtendremos la solución óptima.

Como las variables artificiales se introducen en ecuaciones, para que éstas no se alteren, dichas variables deben ser nulas, por lo que su suma también será nula.

Fase I: con las mismas restricciones del problema dado, mediante el algoritmo del simplex, determinamos el **mínimo de la suma de las variables artificiales**. Si dicho mínimo es 0, todas las variables artificiales serán nulas y la correspondiente solución óptima de la fase I será una solución factible básica del problema dado, y a partir de tal solución factible básica (Fase II) resolvemos la papeleta.

Si el mínimo de la suma de las variables artificiales no es cero, hay alguna variable artificial no nula, por lo que el problema dado carece de solución.

FONEMATO 6.6.1

$$\text{Minimizar } z = x_1 + 3 \cdot x_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 24 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante el programa del ejemplo 2; tras introducir variables de holgura (x_3 y x_4) y artificiales (x_5 y x_6), las restricciones son:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 + x_5 &= 24 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 - x_4 + x_6 &= 25 \\ x_i &\geq 0, \forall i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_0 & \\ \hline 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 24 & \\ \hline 5 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 25 & \\ \hline \end{array}$$

FASE I

Con estas restricciones, minimizamos $z^* = x_5 + x_6$ partiendo de la solución factible básica (0;0;0;0;24;25).

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
1	P_5	1	4	-1	0	1	0	24	24
1	P_6	5	1	0	-1	0	1	25	5
×	c_j	0	0	0	0	1	1	×	×
×	z_j	6	5	-1	-1	1	1	49	×
×	$z_j - c_j$	6	5	-1	-1	0	0	0	×

Entra x_1 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es 6) y **sale** x_6 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_1$).

SEGUNDA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_1 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_6 que **sale** de la base:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0	θ
1	P_5	0	19/5	-1	1/5	1	-1/5	19	5
0	P_1	1	1/5	0	-1/5	0	1/5	5	25
×	c_j	0	0	0	0	1	1	×	×
×	z_j	0	19/5	-1	1/5	1	-1/5	19	×
×	$z_j - c_j$	0	19/5	-1	1/5	0	-6/5	×	×

Entra x_2 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es 19/5) y **sale** x_5 (corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_2$).

TERCERA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_2 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_5 que **sale** de la base:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
0	P_2	0	1	-5/19	1/19	5/19	-1/19	5
0	P_1	1	0	1/19	-4/19	-1/19	4/19	4
×	c_j	0	0	0	0	1	1	×
×	z_j	0	0	0	0	0	0	0
×	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1	-1	×

Como todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0 , la última tabla corresponde a la solución óptima del problema de minimizar $z^* = x_5 + x_6$ con las restricciones dadas. Dicha solución óptima es (4;5;0;0;0;0), y el valor óptimo de $z^* = x_5 + x_6$ es 0.

FASE II

Minimizamos $z = x_1 + 3 \cdot x_2$ partiendo de la solución factible básica (4;5;0;0), en la que ya **no intervienen las variables artificiales** x_5 y x_6 .

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_0
3	P_2	0	1	-5/19	1/19	5
1	P_1	1	0	1/19	-4/19	4
×	c_j	1	3	0	0	×
×	z_j	1	3	-14/19	-1/19	19
×	$z_j - c_j$	0	0	< 0	< 0	×

No hacen falta más iteraciones, pues todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0 . Así, la solución óptima del problema de minimizar $z = x_1 + 3.x_2$ con las restricciones dadas corresponde a $(4;5;0;0)$, y el valor óptimo de $z = x_1 + 3.x_2$ es 19.

www.fonemato.com

6.7 DUALIDAD

Todo programa lineal lleva pegado a su chepa su **programa dual**, de modo que si el primero de es máximo (mínimo), su dual es de mínimo (máximo). Para **construir el dual** de un programa lineal dado (primal) procedemos así:

- 1) Si el primal es de $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$, obligamos a que todas las restricciones de desigualdad sean de la forma $\begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases}$.
- 2) A cada restricción del primal le asociamos una variable de su dual; así, en el dual hay tantas variables como restricciones en el primal. Si la restricción es de $\begin{cases} \text{desigualdad} \\ \text{igualdad} \end{cases}$, la correspondiente variable del dual será $\begin{cases} \geq 0 \\ \text{de signo cualquiera} \end{cases}$. Los coeficientes de las variables del dual en la función objetivo del dual son los segundos miembros de las restricciones del primal.
- 3) A cada variable del primal le asociamos una restricción de su dual; así, en el dual hay tantas restricciones como variables en el primal. Si una variable del primal es $\begin{cases} \geq 0 \\ \text{de signo cualquiera} \end{cases}$, su restricción asociada es de $\begin{cases} \text{desigualdad} \\ \text{igualdad} \end{cases}$. La matriz de coeficientes del sistema de restricciones del dual es la traspuesta de la matriz de coeficientes del sistema de restricciones del primal, y los segundos miembros de las restricciones del dual son los coeficientes de la función objetivo del primal.

Por ejemplo, sea el primal:

$$\text{Máx. } (5 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3) \text{ sujeto a } \begin{cases} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 \leq 8 \\ x_1 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 \geq 4 \\ 3 \cdot x_1 - x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 5 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Obligamos a que todas las restricciones de desigualdad sean de la forma \leq :

$$\begin{aligned} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 &\leq 8 \\ -x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &\leq -4 \\ 3 \cdot x_1 - x_2 + 6 \cdot x_3 &\leq 5 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El **dual** es:

$$\text{Mín. } (8 \cdot \lambda_1 - 4 \cdot \lambda_2 + 5 \cdot \lambda_3 + 7 \cdot \lambda_4) \text{ sujeto a } \begin{cases} 7 \cdot \lambda_1 - \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 + 2 \cdot \lambda_4 \geq 5 \\ 2 \cdot \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \geq -1 \\ -\lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + 6 \cdot \lambda_3 + \lambda_4 = 2 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

Teorema de existencia de solución finita: una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución finita en un programa lineal es que su SCF no sea vacío, lo mismo que el CSF de su programa dual.

Teorema fundamental de la dualidad: si un programa lineal tiene solución óptima finita, su programa dual también tiene solución óptima finita, y los valores óptimos de las respectivas funciones objetivo son iguales.

Del teorema anterior se deducen los siguientes resultados:

- 1) Si un programa lineal es no acotado (no tiene solución óptima finita), su dual es infactible.
- 2) Si un programa lineal es infactible, su dual es infactible o no acotado.

www.fonemato.com

6.8 CONDICIONES DE HOLGURA COMPLEMENTARIA

Ejemplo 1

Sea el **primal**:

$$\text{Mín. } (x_1 + 3 \cdot x_2) \text{ sujeto a } \begin{cases} x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 24 \\ 5 \cdot x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

Su **dual** es:

$$\text{Máx. } (24 \cdot \lambda_1 + 25 \cdot \lambda_2) \text{ sujeto a } \begin{cases} \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 \leq 1 \\ 4 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \leq 3 \\ \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

Si resolviéramos el primal mediante Kuhn Tucker y llamáramos λ_1 y λ_2 a los multiplicadores de Kuhn Tucker asociados respectivamente a las restricciones $x_1 + 4 \cdot x_2 \geq 24$ y $5 \cdot x_1 + x_2 \geq 25$, en el bloque 3) de Kuhn Tucker aparecerían las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 - 24) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (5 \cdot x_1 + x_2 - 25) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

Si resolviéramos el dual mediante Kuhn Tucker y llamáramos x_1 y x_2 a los multiplicadores de Kuhn Tucker asociados respectivamente a las restricciones $\lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 \leq 1$ y $4 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \leq 3$, en el bloque 3) de Kuhn Tucker aparecerían las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x_1 \cdot (\lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 - 1) &= 0 \\ x_2 \cdot (4 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 - 3) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Las **condiciones de holgura complementaria** son las que resultan al reunir (I) y (II) y a partir de ellas es posible determinar la solución de uno de los problemas si se conoce la solución del otro.

En el ejemplo, la solución del primal es $x_1 = 4$ y $x_2 = 5$, y si sustituimos en las condiciones de holgura complementaria, resulta:

$$* \text{ De (I): } \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 \cdot (4 + 4 \cdot 5 - 24) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (5 \cdot 4 + 5 - 25) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$* \text{ De (II): } \left\{ \begin{aligned} 4 \cdot (\lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 - 1) &= 0 \\ 5 \cdot (4 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 - 3) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= 14/19 \\ \lambda_2 &= 1/19 \end{aligned} \right\}$$

que nos proporciona la solución óptima del dual.

Nota 1: los valores de $|z_j - c_j|$ correspondientes a las variables de holgura en la solución óptima de un problema lineal son los valores de las variables duales que constituyen la solución óptima del dual (solo es aplicable si se han introducido variables de holgura en **todas** las restricciones).

Nota 2: Si "D" es la matriz que forman las actividades básicas de la solución óptima de un problema lineal, la solución óptima del dual es $\bar{\lambda} = C_x \bullet D^{-1}$.

Por ejemplo, para Mín. $(x_1 + 3.x_2)$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + 4.x_2 \geq 24 \\ 5.x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_i \geq 0, \forall i=1,2 \end{cases}$, es:

$$\begin{cases} x_1 + 4.x_2 - x_3 + x_5 = 24 \\ 5.x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 25 \\ x_i \geq 0, \forall i=1, \dots, 6 \end{cases} (*)$$

y la tabla correspondiente a la solución óptima es:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
3	P_2	0	1	-5/19	1/19	5/19	-1/19	5
1	P_1	1	0	1/19	-4/19	-1/19	4/19	4
×	c_j	1	3	0	0	M	M	×
×	z_j	1	3	-14/19	-1/19	14/19	1/19	19
×	$z_j - c_j$	0	0	-14/19	-1/19	< 0	< 0	×

Así, según la nota 1), la solución óptima del dual es

$$\lambda_1 = |z_3 - c_3| = 14/19 ; \lambda_2 = |z_4 - c_4| = 1/19$$

Según la nota 2), siendo

$$C_X = [c_2 \quad c_1] = [3 \quad 1]$$

$$D = [P_2 \quad P_1] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 5/19 & -1/19 \\ -1/19 & 4/19 \end{bmatrix}$$

↑
leyendo en (*)

es:

$$\bar{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2] = C_X \cdot D^{-1} = [3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 5/19 & -1/19 \\ -1/19 & 4/19 \end{bmatrix} = [14/19 \quad 1/19]$$

Ejemplo 2

Sea el **primal** Máx. $z = 150.x_1 + 100.x_2 + 200.x_3$ s.a $\begin{cases} x_1 + 4.x_2 + 4.x_3 \leq 64 \\ 5.x_1 + 4.x_3 \leq 104 \\ x_1 + 5.x_2 \leq 30 \\ x_i \geq 0, \forall i=1,2,3 \end{cases}$

Su **dual** es:

$$\text{Mín. } (64.\lambda_1 + 104.\lambda_2 + 30.\lambda_3) \text{ sujeto a } \begin{cases} \lambda_1 + 5.\lambda_2 + \lambda_3 \geq 150 \\ 4.\lambda_1 + 5.\lambda_3 \geq 100 \\ 4.\lambda_1 + 4.\lambda_2 \geq 200 \\ \lambda_i \geq 0, \forall i=1,2 \end{cases}$$

Si resolviéramos el primal mediante Kuhn Tucker y llamáramos λ_1, λ_2 y λ_3 a los multiplicadores de Kuhn Tucker asociados respectivamente a las restricciones 1ª, 2ª y 3ª, en el bloque 3) de Kuhn Tucker aparecerían las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 64) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 - 104) &= 0 \\ \lambda_3 \cdot (x_1 + 5 \cdot x_2 - 30) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(I)}$$

Si resolviéramos el dual mediante Kuhn Tucker y llamáramos x_1, x_2 y x_3 a los multiplicadores de Kuhn Tucker asociados respectivamente a las restricciones 1ª, 2ª y 3ª, en el bloque 3) de Kuhn Tucker aparecerían las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x_1 \cdot (\lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 - 150) &= 0 \\ x_2 \cdot (4 \cdot \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_3 - 100) &= 0 \\ x_3 \cdot (4 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 - 200) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Las **condiciones de holgura complementaria** son las que resultan al reunir (I) y (II) y a partir de ellas es posible determinar la solución de uno de los problemas si se conoce la solución del otro.

En el ejemplo, la solución del primal es $x_1 = 10, x_2 = 0$ y $x_3 = 27/2$, y si sustituimos en las condiciones de holgura complementaria, resulta:

$$\begin{aligned} * \text{ De (I): } & \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 \cdot (10 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{27}{2} - 64) &= 0 \\ \lambda_2 \cdot (5 \cdot 10 + 4 \cdot \frac{27}{2} - 104) &= 0 \\ \lambda_3 \cdot (10 + 5 \cdot 0 - 30) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_3 \cdot (-20) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \\ * \text{ De (II): } & \left\{ \begin{aligned} 10 \cdot (\lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 - 150) &= 0 \\ 0 \cdot (4 \cdot \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_3 - 100) &= 0 \\ \frac{27}{2} \cdot (4 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 - 200) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 - 150 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 4 \cdot \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 - 200 &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

que nos proporciona la solución óptima del dual: $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 25$ y $\lambda_3 = 0$.

Nota 1: los valores de $|z_j - c_j|$ correspondientes a las variables de holgura en la solución óptima de un problema lineal son los valores de las variables duales que constituyen la solución óptima del dual (solo es aplicable si se han introducido variables de holgura en **todas** las restricciones).

Nota 2: Si "D" es la matriz que forman las actividades básicas de la solución óptima de un problema lineal, la solución óptima del dual es $\bar{\lambda} = C_x \bullet D^{-1}$.

Por ejemplo, para

$$\text{Máx. } z = 150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 + 200 \cdot x_3 \text{ s.a } \left\{ \begin{aligned} x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &\leq 64 \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 &\leq 104 \\ x_1 + 5 \cdot x_2 &\leq 30 \\ x_i &\geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{aligned} \right.$$

es:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 &= 64 \\ 5x_1 + 4x_3 + x_5 &= 104 \\ x_1 + 5x_2 + x_6 &= 30 \\ x_i &\geq 0, \forall i=1, \dots, 6 \end{aligned} \right\} (*)$$

y la tabla correspondiente a la solución óptima es:

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_0
-200	P_3	0	5/4	1	5/16	-1/16	0	27/2
-150	P_1	1	-1	0	-1/4	1/4	0	10
0	P_6	0	6	0	1/4	-1/4	1	20
×	c_j	-150	-100	-200	0	0	0	×
×	z_j	-150	-100	-200	-25	-25	0	-4200
×	$z_j - c_j$	0	0	0	-25	-25	0	×

Así, según la nota 1), la solución óptima del dual es

$$\lambda_1 = |z_4 - c_4| = 25 ; \lambda_2 = |z_5 - c_5| = 25 ; \lambda_3 = |z_6 - c_6| = 0$$

Según la nota 2), siendo

$$C_X = [c_3 \quad c_1 \quad c_6] = [200 \quad 150 \quad 0]$$

$$D = [P_3 \quad P_1 \quad P_6] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

leyendo en (*)

es:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3] = C_X \cdot D^{-1} = \\ &= [200 \quad 150 \quad 0] \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 16 \end{bmatrix} \right) = [25 \quad 25 \quad 0] \end{aligned}$$

FONEMATO 6.8.1

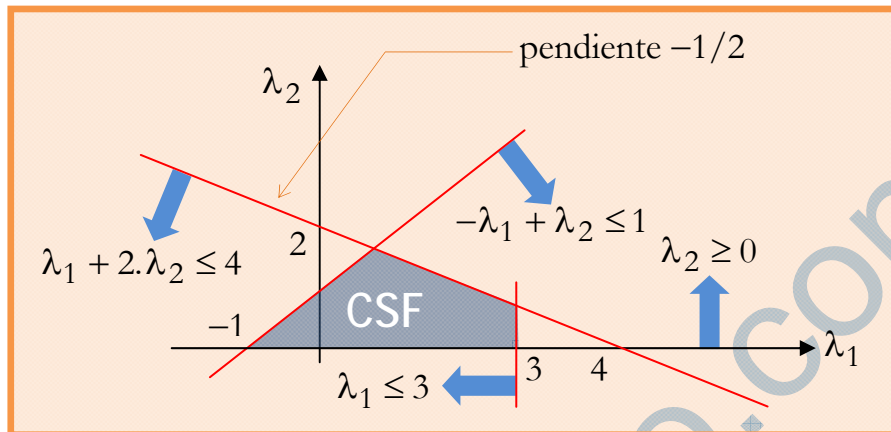
Sea el programa Min. $z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$ sujeto a $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

- 1) Plantee su programa dual.
- 2) Resuelva el dual gráficamente.
- 3) Obtenga la solución del primal mediante el teorema de las holguras complementarias.
- 4) Resuelva el primal mediante el algoritmo del simplex y compruebe que la solución coincide con la obtenida en el apartado anterior.

SOLUCIÓN

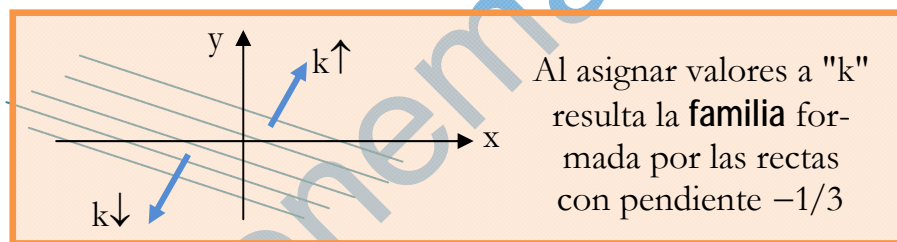
- 1) El programa dual es Máx. $z^* = \lambda_1 + 3.\lambda_2$ sujeto a
- $$\begin{cases} \lambda_1 + 2.\lambda_2 \leq 4 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \\ \lambda_1 \leq 3 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 2) El CSF del dual es el de la siguiente figura.



- La curva S_k de nivel "k" de la función objetivo $z^* = \lambda_1 + 3.\lambda_2$ del dual es:

$$S_k = \{(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathfrak{R}^2 / \lambda_1 + 3.\lambda_2 = k\} \equiv \text{recta con pendiente } -1/3$$



- Como la función objetivo del dual toma igual valor en todos los puntos $(\lambda_1; \lambda_2)$ de una misma curva de nivel, la solución del dual corresponde al punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con mayor valor de "k" y al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que dicho punto es $(2/3; 5/3)$, intersección de $\lambda_1 + 2.\lambda_2 = 4$ y $-\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; así, el valor máximo de la función objetivo $z^* = \lambda_1 + 3.\lambda_2$ del dual es $z^*(2/3; 5/3) = \frac{2}{3} + 3.\frac{5}{3} = \frac{17}{3}$.
 - Observa:** como el CSF del dual es acotado, no hace falta visualizar las curvas de nivel de $z^* = \lambda_1 + 3.\lambda_2$, pues podemos garantizar que el dual tiene solución y se encuentra en un vértice del CSF; por tanto, bastaría calcular las coordenadas de cada vértice y el valor de $z^* = \lambda_1 + 3.\lambda_2$ en cada uno de ellos, eligiendo después el vértice correspondiente al máximo valor de z^* .
- 3) Las condiciones de holgura complementaria son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot (x_1 - x_2 + x_3 - 1) = 0 \\ \lambda_2 \cdot (2x_1 + x_2 - 3) = 0 \\ x_1 \cdot (\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4) = 0 \\ x_2 \cdot (-\lambda_1 + \lambda_2 - 1) = 0 \\ x_3 \cdot (\lambda_1 - 3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot (x_1 - x_2 + x_3 - 1) = 0 \\ \frac{5}{3} \cdot (2x_1 + x_2 - 3) = 0 \\ x_1 \cdot \left(\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} - 4\right) = 0 \\ x_2 \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3} - 1\right) = 0 \\ x_3 \cdot \left(\frac{2}{3} - 3\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}; \lambda_2 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ x_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x_3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

4) Resolvamos Min. $z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$ sujeto a $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

- Transformamos las inecuaciones en ecuaciones, introduciendo las correspondientes variables de holgura, que van afectadas de coeficiente nulo en la función objetivo (o sea, es: $z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4$):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

- Introducimos un **variable artificial** x_5 en la segunda restricción:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}$$

A la **variable artificial** x_5 le asignamos una **penalidad** muy elevada "M" en la función objetivo, que pasa a ser $z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 + Mx_5$, donde "M" es mucho mayor que los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 .

La base de partida es la formada por P_3 y P_5 , por lo que $(0; 0; 1; 0; 3)$ es una solución factible básica.

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	$\theta = P_0/P_1$
0	P_3	1	-1	1	0	0	1	1
M	P_5	2	1	0	-1	1	3	3/2
×	c_j	4	1	3	0	M	×	×
×	z_j	2.M	M	0	-M	M	3.M	×
×	$z_j - c_j$	2.M - 4	M - 1	-3	-M	0	×	×

Entra x_1 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es $2.M - 4$), y **sale** x_6 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_1$).

SEGUNDA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_1 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_3 que **sale** de la base (a la 2ª fila le restamos el doble de la 1ª):

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	$\theta = P_0/P_2$
4	P_1	1	-1	1	0	0	1	-
M	P_5	0	3	-2	-1	1	1	1/3
×	c_j	4	1	3	0	M	×	×
×	z_j	4	3.M - 4	-2.M + 4	-M	M	M + 4	×
×	$z_j - c_j$	0	3.M - 5	-2.M + 1	-M	0	×	×

Entra x_2 (corresponde al mayor valor positivo de $z_j - c_j$, que es $3.M - 5$) y **sale** x_5 (corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_2$).

TERCERA ITERACIÓN

Hacemos que la columna de la actividad P_2 que **entra** en la base tome la forma que en la tabla anterior tiene la columna de la actividad P_5 que **sale** de la base.

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0
4	P_1	1	0	1/3	-1/3	1/3	4/3
1	P_2	0	1	-2/3	-1/3	1/3	1/3
×	c_j	4	1	3	0	M	×
×	z_j	4	1	2/3	-5/3	5/3	17/3
×	$z_j - c_j$	0	0	-7/3	-5/3	< 0	×

Como todos los $z_j - c_j$ son ≤ 0 , la última tabla corresponde a la solución óptima $(4/3; 1/3; 0; 0; 0)$, que es única, pues entre los $z_j - c_j$ hay dos ceros. El valor óptimo de la función objetivo es $17/3$.

FONEMATO 6.8.2

Sea el programa

$$\text{Min. } z = 120 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 40 \\ x_1 - x_2 \leq 15 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 60 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Plantee su programa dual.
- 2) Resuelva el dual mediante el algoritmo del simplex
- 3) A partir de la solución del dual obtenga la solución del programa original.

SOLUCIÓN

1) El **primal** es $\text{Min. } z = 120 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 40 \\ -x_1 + x_2 \geq -15 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 60 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Su programa **dual** es:

$$\text{Máx. } z^* = 40 \cdot \lambda_1 - 15 \cdot \lambda_2 + 60 \cdot \lambda_3 \text{ sujeto a } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 = 120 \\ 2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 \leq 100 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 2) Introducimos la variable de **holgura** λ_4 en la 2ª restricción y la variable **artificial** λ_5 en la 1ª; así, es $z^* = 40 \cdot \lambda_1 - 15 \cdot \lambda_2 + 60 \cdot \lambda_3 + 0 \cdot \lambda_4 - M \cdot \lambda_5$, siendo "M" bestialmente positivo.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 + \lambda_5 = 120 \\ 2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 + \lambda_4 = 100 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_0 \\ \hline 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 120 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 100 \\ \hline \end{array}$$

La base de partida es la formada por P_4 y P_5 , por lo que $(0;0;0;100;120)$ es una solución factible básica del dual.

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	$\theta = P_0/P_3$
-M	P_5	1	-1	3	0	1	120	40
0	P_4	2	1	2	1	0	100	50
×	c_j	40	-15	60	0	-M	×	×
×	z_j	-M	M	-3.M	0	-M	-120.M	×
×	$z_j - c_j$	$40 - M$	$M - 15$	$60 - 3.M$	0	0	×	×

Entra λ_3 (corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que es $60 - 3.M$), y **sale** λ_5 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_3$).

SEGUNDA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0	$\theta = P_0/P_1$
60	P_3	1/3	-1/3	1	0	1/3	40	120
0	P_4	4/3	5/3	0	1	-2/3	20	15
×	c_j	40	-15	60	0	-M	×	×
×	z_j	20	-20	60	0	20	2400	×
×	$z_j - c_j$	-20	-5	0	0	M + 20	×	×

Entra λ_1 (corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que es -20) y **sale** λ_4 (corresponde al menor valor de $\theta = P_0/P_1$).

TERCERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0
60	P_3	0	-3/4	1	-1/4	1/2	35
40	P_1	1	5/4	0	3/4	-1/2	15
×	c_j	40	-15	60	0	-M	×
×	z_j	40	5	60	15	10	2700
×	$z_j - c_j$	0	20	0	15	M + 10	×

Como todos los $z_j - c_j$ son ≥ 0 , la última tabla corresponde a la solución óptima (15;0;35;0;0), que es única, pues entre los $z_j - c_j$ hay dos ceros. El valor óptimo de $z^* = 40.\lambda_1 - 15.\lambda_2 + 60.\lambda_3$ es 2700.

3) Las condiciones de **holgura complementaria** son:

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 - 40) = 0 \\ \lambda_2 \cdot (x_1 - x_2 - 15) = 0 \\ \lambda_3 \cdot (3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 60) = 0 \\ x_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2 + 3 \cdot \lambda_3 - 120) = 0 \\ x_2 \cdot (2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \cdot \lambda_3 - 100) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

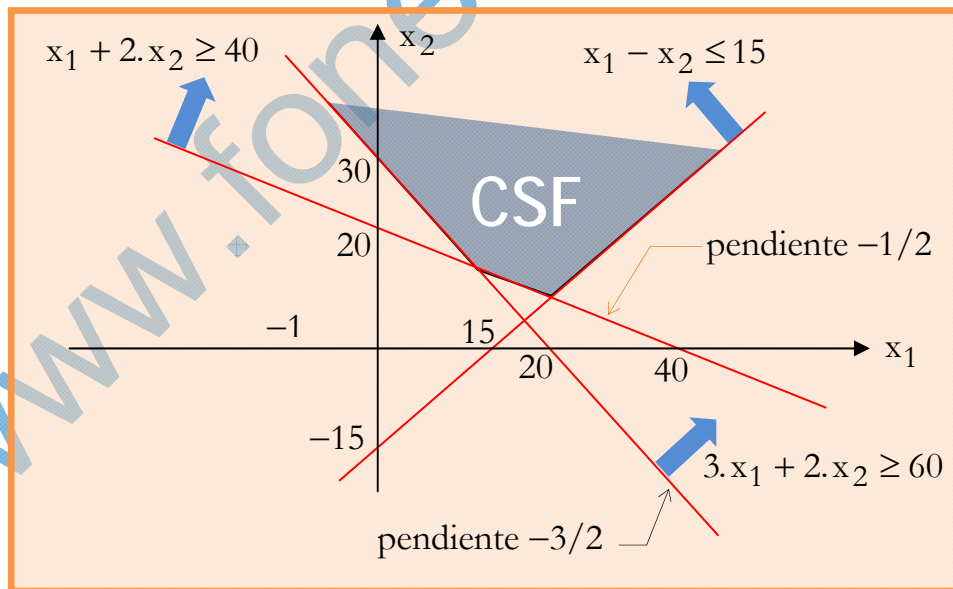
$$\boxed{\lambda_1 = 15 ; \lambda_2 = 0 ; \lambda_3 = 35}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 - 40) = 0 \\ 0 \cdot (x_1 - x_2 - 15) = 0 \\ 35 \cdot (3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 60) = 0 \\ x_1 \cdot (15 - 0 + 3 \cdot 35 - 120) = 0 \\ x_2 \cdot (2 \cdot 15 + 0 + 2 \cdot 35 - 100) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - 40 = 0 \\ 0 = 0 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 60 = 0 \\ x_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow z = 120 \cdot 10 + 100 \cdot 15 = 2700$$

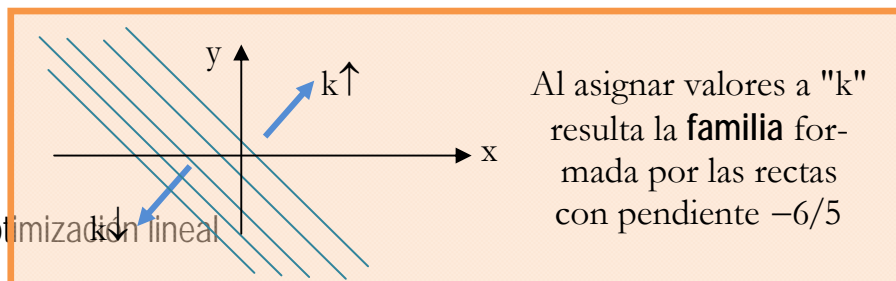
Nota: aunque no se pida, merece la pena invertir un par de minutos en resolver gráficamente el primal para comprobar que no hay errores de cálculo.

- El CSF del programa dado es el de la siguiente figura.



- La curva S_k de nivel "k" de la función objetivo $z = 120 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$ es:

$$S_k = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 / 120 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 = k\} \equiv \text{recta con pendiente } -6/5$$



- Como la función objetivo $z = 120 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$ toma igual valor en todos los puntos $(x_1; x_2)$ de una misma curva de nivel, la solución del primal corresponde al punto del CSF por el que pasa la curva de nivel con menor valor de "k" ... y al **superponer** las figuras anteriores, resulta evidente que dicho punto es $(10; 15)$, intersección de $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 60$ y $x_1 + 2 \cdot x_2 = 40$; así, el valor máximo de la función objetivo $z = 120 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$ es $z(10; 15) = 2700$.

FONEMATO 6.8.3

Sea el programa

$$\text{Mín. } z = 2 \cdot x_1 + x_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} x_1 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \end{cases}$$

- 1) Plantee su programa dual.
- 2) Resuelva el dual mediante el algoritmo del simplex
- 3) A partir de la solución del dual obtenga la solución del programa original.

SOLUCIÓN

- 1) El **primal** es

$$\text{Mín. } z = 2 \cdot x_1 + x_2 \text{ sujeto a } \begin{cases} x_1 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 \geq -6 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \end{cases}$$

Su programa **dual** es:

$$\text{Máx. } z^* = 6 \cdot \lambda_1 - 6 \cdot \lambda_2 + 10 \cdot \lambda_3 \text{ sujeto a } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

- 2) Introducimos la variable **artificial** λ_4 en la 2ª restricción; así, es:

$$z^* = 6 \cdot \lambda_1 - 6 \cdot \lambda_2 + 10 \cdot \lambda_3 - M \cdot \lambda_4$$

siendo "M" bestialmente positivo.

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

La base de partida es la formada por P_1 y P_4 , por lo que $(2; 0; 0; 1)$ es una solución factible básica del dual.

PRIMERA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_0	$\theta = P_0/P_3$
6	P_1	1	-1	1	0	2	2
-M	P_4	0	1	1	1	1	1
×	c_j	6	-6	10	-M	×	×
×	z_j	6	$-M-6$	$-M+6$	-M	$12-M$	×
×	$z_j - c_j$	0	-M	$-M-16$	0	0	×

Entra λ_3 (corresponde al menor valor negativo de $z_j - c_j$, que es $-M-16$), y **sale** λ_4 (correspondiente al menor valor de $\theta = P_0/P_3$).

SEGUNDA ITERACIÓN

C_x	Base	P_1	P_2	P_3	P_4	P_0
6	P_1	1	-2	0	-1	1
10	P_3	0	1	1	1	1
×	c_j	6	-6	10	-M	×
×	z_j	6	2	10	4	16
×	$z_j - c_j$	0	8	0	$M+4$	0

Como los $z_j - c_j$ son ≥ 0 , la solución $(1;0;1;0)$ es óptima (y única, pues entre los $z_j - c_j$ hay dos ceros). El valor óptimo de $z^* = 6.\lambda_1 - 6.\lambda_2 + 10.\lambda_3$ es 16.

3) Las condiciones de **holgura complementaria** son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot (x_1 - 6) = 0 \\ \lambda_2 \cdot (x_1 - x_2 - 6) = 0 \\ \lambda_3 \cdot (x_1 + x_2 - 10) = 0 \\ x_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 2) = 0 \\ x_2 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 6 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_1 + x_2 - 10 = 0 \\ x_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1 ; \lambda_2 = 0 ; \lambda_3 = 1$$

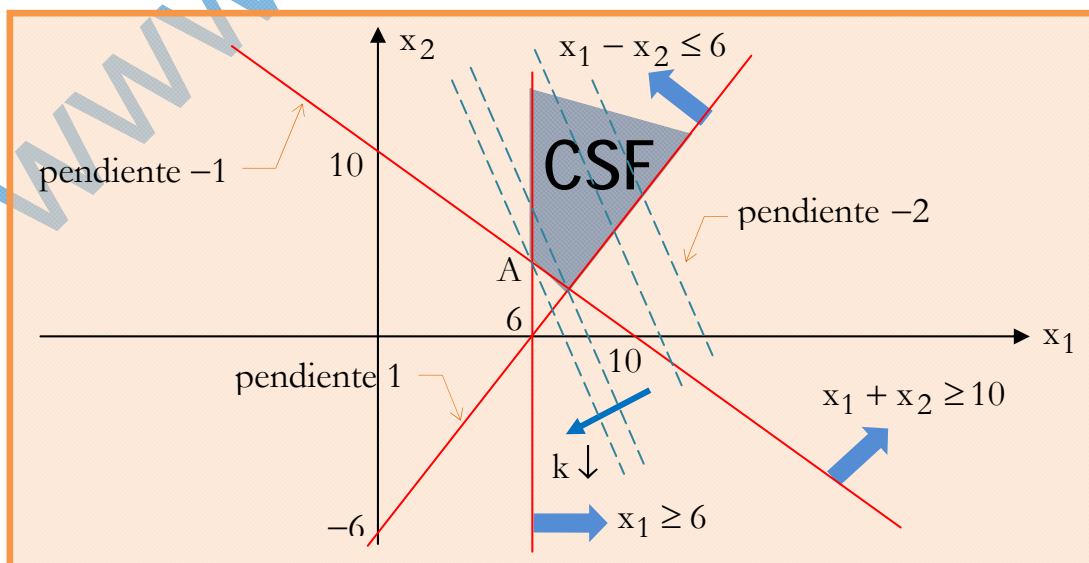
$$\Rightarrow z = 2 \cdot 6 + 4 = 16$$

Nota: aunque no se pida, merece la pena invertir un par de minutos en resolver gráficamente el primal para comprobar que no hay errores de cálculo.

- La curva S_k de nivel "k" de la función objetivo $z = 2 \cdot x_1 + x_2$ es:

$$S_k = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2 \cdot x_1 + x_2 = k\} \equiv \text{recta con pendiente } -2$$

- El CSF del programa dado es el de la figura.



El mínimo se presenta en el punto $A = (6;4)$, intersección de $x_1 + x_2 = 10$ y $x_1 = 6$; el valor máximo de la función objetivo $z = 2 \cdot x_1 + x_2$ es $z(6;4) = 16$.

TEST DEL TEMA 6: PROGRAMACIÓN LINEAL

01) Si x^* es una solución óptima finita de PL, nunca es cierto que:

- a) x^* es un punto interior del CSF ; b) x^* es un punto frontera del CSF
- c) x^* es un punto extremo del CSF

02) Sea el problema Opt. $(3 \cdot x_1 + x_2)$ sujeto a
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Si al aplicar el algoritmo del simplex, en una sola iteración, se pasa de la solución $(0;2;2;0)$ a la $(2;1;0,0)$, entonces:

- a) El problema es de minimización
- b) El problema es de maximización
- c) No puede saberse de qué tipo es el problema

03) Sea "P" un PL y "D" su dual. Si "P" tiene solución óptima finita, entonces:

- a) "D" tiene infinitas soluciones ; b) "D" tiene solución óptima finita
- c) "D" no tiene solución óptima finita

04) ¿Cuál de los siguientes programas no es lineal?

- a) Max. $(2 \cdot x_1 + x_2)$ sujeto a $1 \leq x_1 \leq 2, 1 \leq x_2 \leq 2$
- b) Max. $(4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ sujeto a $-2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- c) Max. $(x_1 \cdot x_2)$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

05) Señale una solución factible básica del siguiente programa:

Máx. $(x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5)$ s.a
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 4 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 4 \cdot x_4 + 3 \cdot x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

- a) $(0;2;0;1;0)$; b) $(2;0;0;-1;0)$; c) $(0;0;4;1;2)$

06) Sea x^* una solución óptima finita de un PL:

- a) x^* es solución óptima global del PL
- b) x^* es solución única del PL
- c) x^* no es CLC de otros puntos del CSF

07) Sean $x^1 = (2;2)$ y $x^2 = (2;0)$ puntos extremos de un PL de maximización, con función objetivo $f(x;y) = a \cdot x + b \cdot y, a, b \in \mathfrak{R}$. Según el algoritmo del simplex, es posible generar x^2 a partir de x^1 si:

- a) $a \geq 0$ y $b \geq 0$; b) $b \leq 0$; c) $b \leq 0$ y $a \geq 0$

08) Si un PL tiene solución óptima finita, su dual también la tiene y sucede que

- a) Ambas soluciones coinciden
- b) Ambos problemas tienen la misma función objetivo
- c) Ambas funciones objetivo toman el mismo valor óptimo

09) Para la solución factible básica $(2;0;0;2)$ del PL

$$\text{Máx. } (3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2) \text{ s.a } \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

se sabe que $z_2 - c_2 = -1$ y $z_3 - c_3 = 3$. Así, según el simplex:

- Es posible mejorar el valor de la función objetivo con otra solución factible básica que tenga el vector P_2 en la matriz de coeficientes en su conjunto de vectores linealmente independientes.
- Es posible mejorar el valor de la función objetivo con otra solución factible básica que tenga el vector P_3 en la matriz de coeficientes en su conjunto de vectores linealmente independientes.
- La solución $(2;0;0;2)$ es una solución no acotada.

10) El dual de $\text{Min. } (-x_1 + x_2 + x_3)$ sujeto a $\begin{cases} -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$ es:

$$\text{a) Máx. } (2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2) \text{ s.a } \begin{cases} 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 \geq 1 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 \leq 1 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) Máx. } (2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2) \text{ s.a } \begin{cases} -2 \cdot y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 \leq 1 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{c) Máx. } (2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2) \text{ s.a } \begin{cases} 2 \cdot y_1 - y_2 = 1 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 = 1 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

11) Utilizando el método gráfico, el dual del PL de la pregunta anterior:

- Tiene como vértices del CSF los puntos $(1;0)$, $(3/5;1/5)$ y $(1/3;-1/3)$, y como óptimo el punto $(1;0)$.
- Tiene como vértices del CSF los puntos $(1;0)$, $(3/5;1/5)$ y $(1/2;0)$, y como óptimo el punto $(1/2;0)$.
- Tiene un CSF no acotado y como óptimo el punto $(1;0)$.

12) A partir de la solución del dual, el teorema de las holguras complementarias garantiza que la solución óptima del PL de la pregunta 10) es:

- $x_1 = 0$; $x_2 = 1/2$; $x_3 = 3/2$
- $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$
- $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$

13) Para resolver el PL de la pregunta 10) mediante el simplex es necesario introducir dos variables artificiales x_4 y x_5 y emplear el método de las penalizaciones. Este método parte de la solución factible básica inicial $(0;0;0;2;2)$.

- Minimiza la función objetivo $-x_1 + x_2 + x_3 + M.x_4 + M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en dos iteraciones.
- Minimiza la función objetivo $-x_1 + x_2 + x_3 - M.x_4 - M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en tres iteraciones.
- Minimiza la función objetivo $-x_1 + x_2 + x_3 + M.x_4 + M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en una iteración.

14) En un PL nunca puede ocurrir que:

- Haya exactamente dos mínimos globales.
- Haya solución óptima finita si el CSF no es acotado.
- Haya óptimos locales.

15) La combinación convexa de dos soluciones factibles básicas de un PL es:

- Una solución factible básica ; b) Una solución factible
- Una solución básica

16) La solución óptima de Max. $(a.x + y)$ sujeto a $x + 2.y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$ es el segmento de extremos $(3;0)$ y $(0;3/2)$:

- $a = 3, b = 3/2$; b) $a = b/2$; c) $a = 2.b$

17) Sean $(0;2;2;0)$ y $(2;1;0,0)$ dos soluciones factibles básicas del PL

$$\text{Min. } (-3.x_1 - x_2) \text{ sujeto a } \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2.x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \end{cases}$$

Al aplicar el algoritmo del simplex, en una sola iteración:

- Es posible pasar de la solución $(2;1;0,0)$ a la $(0;2;2;0)$
- Es posible pasar de la solución $(0;2;2;0)$ a la $(2;1;0,0)$
- No es posible pasar de una solución a otra

18) En un PL de mínimo con 4 variables y 2 restricciones de igualdad, se obtiene la siguiente tabla en una de las iteraciones del simplex:

Base	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
P ₃	2	-3/2	0	1	-1/2
P ₂	4	-1/2	1	0	1/2
	$z_j - c_j$	5/2	0	0	-3/2

- La solución óptima es $(0;4;2;0)$.
- El problema no tiene solución acotada.
- El problema tiene infinitas soluciones.

19) Sea "P" un PL y "D" su dual. Si "P" no tiene solución acotada, entonces:

- a) "D" tiene infinitas soluciones ; b) "D" tiene óptimo no acotado
- c) "D" es infactible

20) El dual de Max. $(7.x_1 + 7.x_2)$ sujeto a $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2.x_2 \leq 5 \\ 2.x_1 - 3.x_2 \leq 3 \end{cases}$ es:

a) Min. $(-2.y_1 + 5.y_2 + 3.y_3)$ s.a $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2.y_3 = 7 \\ -y_1 + 2.y_2 - 3.y_3 = 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$

b) Min. $(2.y_1 + 5.y_2 + 3.y_3)$ s.a $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2.y_3 \geq 7 \\ -y_1 + 2.y_2 - 3.y_3 \leq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$

c) Min. $(2.y_1 + 5.y_2 + 3.y_3)$ s.a $\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2.y_3 \geq 7 \\ -y_1 + 2.y_2 - 3.y_3 \geq 7 \end{cases}$

21) Utilizando el método gráfico, el PL de la pregunta anterior:

- a) Tiene como vértices del CSF los puntos $(-1;3)$, $(3;1)$ y $(9/5;1/5)$, y como óptimo el punto $(3;1)$.
- b) Tiene como vértices del CSF los puntos $(0;2)$, $(0;5/2)$, $(9/5;1/5)$ y $(3;1)$, y como óptimo el punto $(3;1)$.
- b) Tiene como vértices del CSF los puntos $(0;2)$, $(0;5/2)$, $(9/5;1/5)$ y $(3;1)$, y como óptimo el punto $(0;5/2)$.

22) A partir de la solución de PL de la pregunta 20), el teorema de las holguras complementarias garantiza que la solución óptima de su dual es:

- a) $y_1 = 0 ; y_2 = 5/2 ; y_3 = 1$
- b) $y_1 = 3 ; y_2 = 1 ; y_3 = 0$
- c) $y_1 = 0 ; y_2 = 7/2 ; y_3 = 0$

23) Para resolver el dual del PL de la pregunta 20) mediante el simplex es necesario introducir dos variables artificiales y_4 e y_5 y emplear el método de las penalizaciones. Este método parte de la solución factible básica inicial $(0;0;0;7;7)$.

- a) Maximiza la función objetivo $-2.y_1 + 5.y_2 + 3.y_3 + M.y_4 + M.y_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en dos iteraciones.
- b) Maximiza la función objetivo $-2.y_1 + 5.y_2 + 3.y_3 + M.y_4 + M.y_5$ donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en una iteración.
- c) Maximiza la función objetivo $-2.y_1 + 5.y_2 + 3.y_3 - M.y_4 - M.y_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en tres iteraciones.

24) El PL Max. $(3 \cdot x + 4 \cdot y)$ sujeto a $x + 2 \cdot y \leq 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ tiene:

- a) Una solución óptima única ; b) Infinitas soluciones
c) Una solución no acotada

25) Si x_1 y x_2 son soluciones factibles básicas de un PL y $\lambda \in [0;1]$, el punto $x = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$ es:

- a) Una solución factible básica ; b) Una solución factible
c) Una solución básica

26) Señale la afirmación no siempre cierta:

- a) Todo PL es convexo
b) Todo PL tiene solución óptima y es global
c) El CSF de todo PL es cerrado

27) En un PL de mínimo con 4 variables y 2 restricciones de igualdad, se obtiene la siguiente tabla en una de las iteraciones del simplex:

Base	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
P ₃	2	3/2	0	1	-1/2
P ₂	4	-1/2	1	0	1/2
	$z_j - c_j$	5/2	0	0	-3/2

- a) La solución óptima es $(0;4;2;0)$.
b) Puede mejorarse el valor de la función objetivo generando otra solución factible básica que tenga en la base los vectores P₁ y P₂.
b) Puede mejorarse el valor de la función objetivo generando otra solución factible básica que tenga en la base los vectores P₃ y P₄.

28) El dual de Min. $(-2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3)$ sujeto a $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 7 \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 7 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1,2,3 \end{cases}$ es:

- a) Máx. $(7 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2)$ s.a $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 = 5 \\ 2 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 = 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$
b) Máx. $(7 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2)$ s.a $\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 \leq 5 \\ 2 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 \leq 3 \end{cases}$
c) Máx. $(7 \cdot y_1 + 7 \cdot y_2)$ s.a $\begin{cases} -y_1 - y_2 \leq -2 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 \leq 5 \\ 2 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$

- 29) Utilizando el método gráfico, el dual del PL de la pregunta anterior:
- Tiene como vértices del CSF los puntos $(-1;3)$, $(3;1)$ y $(9/5;1/5)$, y como óptimo el punto $(3;1)$.
 - Tiene como vértices del CSF los puntos $(0;2)$, $(0;5/2)$, $(9/5;1/5)$ y $(3;1)$, y como óptimo el punto $(3;1)$.
 - Tiene como vértices del CSF los puntos $(0;2)$, $(0;5/2)$, $(9/5;1/5)$ y $(3;1)$, y como óptimo el punto $(0;5/2)$.
- 30) A partir de la solución del dual, el teorema de las holguras complementarias garantiza que la solución óptima del PL de la pregunta 28) es:

- $x_1 = 3 ; x_2 = 1 ; x_3 = 0$
- $x_1 = 0 ; x_2 = 5 ; x_3 = 1$
- $x_1 = 0 ; x_2 = 7/2 ; x_3 = 0$

- 31) Para resolver el PL de la pregunta 28) mediante el simplex es necesario introducir dos variables artificiales x_4 y x_5 y emplear el método de las penalizaciones. Este método parte de la solución factible básica inicial $(0;0;0;7;7)$.

- Minimiza la función objetivo $-2.x_1 + 5.x_2 + 3.x_3 + M.x_4 + M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en una iteración.
- Minimiza la función objetivo $-2.x_1 + 5.x_2 + 3.x_3 + M.x_4 + M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en dos iteraciones.
- Minimiza la función objetivo $-2.x_1 + 5.x_2 + 3.x_3 - M.x_4 - M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en tres iteraciones

- 32) Si las únicas soluciones factibles básicas de un PL que tiene 4 variables son $(0;4;0;2)$, $(0;2;2;0)$ y $(2;2;0;0)$, el CSF se puede representar mediante las restricciones:

- $x_1 + x_2 + x_3 = 4, x_2 - x_4 = 2, x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$
- $x_1 + x_2 - x_3 = 4, x_2 + x_4 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 4, x_2 + x_4 = 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

- 33) El programa Max. $(2.x_1.x_2)$ s.a $x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- Es diferenciable ; b) Es lineal ; c) Es convexo

- 34) Sea el PL

$$\text{Min. } c^t x \text{ sujeto a } Ax > b, x \geq 0.$$

con $x, c \in \mathfrak{R}^n$, $A \in M_{m \times n}$, $b \in \mathfrak{R}^m$. Si x^* es su solución óptima e y^* es la solución óptima de su dual:

- $c^t x^* = y^* b$; b) $Ax^* = y^* A$; c) $x^* = y^*$

35) Para la solución factible básica (2;1;0;0) del PL

$$\text{Min. } (-3 \cdot x_1 - x_2) \text{ s.a. } \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

se sabe que $z_3 - c_3 = -5/2$ y $z_4 - c_4 = -1/2$. Así, según el simplex:

- La solución (2;1;0;0) es óptima pero no única.
- Es posible mejorar el valor de la función objetivo con otra solución factible básica que tenga el vector P_4 en la matriz de coeficientes en su conjunto de vectores linealmente independientes.
- La solución (2;1;0;0) es óptima y única.

36) Sea un PL de máximo con función objetivo $f(x;y) = a \cdot x + b \cdot y$, $a, b > 0$. Según el algoritmo del simplex, en una sola iteración;

- Es posible generar el punto extremo (2;2) a partir de (2;0).
- Es posible generar el punto extremo (0;2) a partir de (2;2).
- No es posible generar uno a partir del otro.

37) El dual de Máx. $(2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ s.a. $\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$ es:

- Min. $(-y_1 + y_2 + y_3)$ s.a. $\begin{cases} -2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \leq 2 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$
- Min. $(-y_1 + y_2 + y_3)$ s.a. $\begin{cases} -2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 2 \\ y_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$
- Min. $(-y_1 + y_2 + y_3)$ s.a. $\begin{cases} -2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 - 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 = 2 \\ y_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{cases}$

38) Utilizando el método gráfico, el PL de la pregunta anterior:

- Tiene como vértices del CSF los puntos (1;0), (3/5;1/5) y (1/3;-1/3), y como óptimo el punto (1;0).
- Tiene como vértices del CSF los puntos (1;0), (3/5;1/5) y (1/2;0), y como óptimo el punto (3/5;1/5).
- Tiene un CSF no acotado y como óptimo el punto (1;0).

39) A partir de la solución del PL de la pregunta 37), el teorema de las holguras complementarias garantiza que la solución óptima de su dual es:

- $y_1 = 6$; $y_2 = 2$; $y_3 = 0$
- $y_1 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = 0$
- $y_1 = 0$; $y_2 = 1/2$; $y_3 = 3/2$

- 40) Para resolver el PL de la pregunta 10) mediante el simplex es necesario introducir dos variables artificiales x_4 y x_5 y emplear el método de las penalizaciones. Este método parte de la solución factible básica inicial $(0;0;0;2;2)$.
- a) Minimiza la función objetivo $-x_1 + x_2 + x_3 + M.x_4 + M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en una iteración.
 - b) Minimiza la función objetivo $-x_1 + x_2 + x_3 - M.x_4 - M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en tres iteraciones.
 - c) Minimiza la función objetivo $-x_1 + x_2 + x_3 + M.x_4 + M.x_5$, donde "M" es una constante positiva cuyo valor puede ser tan grande como sea preciso, y alcanza el óptimo en dos iteraciones.
- 41) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no siempre es cierta?
- a) Todo óptimo de un PL es un vértice
 - b) Todo óptimo de un PL es óptimo global
 - c) Todo PL es convexo

SOLUCIÓN

- 01) La correcta es a).
- 02) El valor de $f(x_1; x_2) = 3 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$ en el punto $(0; 2; 2; 0)$ es 2, y en el punto $(2; 1; 0; 0)$ es 7; por tanto, el problema es de máximo.
- 03) La correcta es b).
- 04) La correcta es c).
- 05) La b) no puede ser, pues no satisface $x_i \geq 0$. La a) no puede ser, pues como hay dos restricciones, las soluciones factibles básicas tienen a lo más dos componentes no nulos.
- 06) Nada nos garantiza que x^* es solución única (\Rightarrow b) es falso); por tanto, no podemos garantizar que x^* sea un vértice del CSF (\Rightarrow c) es falso). La correcta es a): en un PL los óptimos siempre son globales.
- 07) Es $f(2; 2) = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ y $f(2; 0) = 2 \cdot a$; así, siendo de máximo el PL, es posible generar $x^2 = (2; 0)$ a partir de $x^1 = (2; 2)$ si $f(2; 0) = 2 \cdot a \geq 2 \cdot a + 2 \cdot b = f(2; 2)$, lo que sucede sólo si $b \leq 0$.
- 08) La correcta es c).
- 09) La correcta es a).
- 10) La correcta es b).
- 11) La correcta es a).
- 12) Siendo $y_1 = 0, y_2 = 1$ la solución del dual, la holgura complementaria dice:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} y_1 \cdot (-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 2) = 0 \\ y_2 \cdot (x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 2) = 0 \\ x_1 \cdot (2 \cdot y_1 + y_2 + 1) = 0 \\ x_2 \cdot (y_1 - 2 \cdot y_2 - 1) = 0 \\ x_3 \cdot (y_1 + 2 \cdot y_2 - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \boxed{y_1 = 1 ; y_2 = 0} \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot (-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 2) = 0 \\ 0 \cdot (x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 2) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ x_1 \cdot (2 \cdot 1 + 0 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 \cdot (1 - 2 \cdot 0 - 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 \cdot (1 + 2 \cdot 0 - 1) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

- 13) La c) es falsa: habiendo en la base de partida dos variables artificiales no nulas, al menos hacen falta dos iteraciones para que ambas variables artificiales salgan de la base. La b) es falsa: siendo un problema de mínimo, el coeficiente "M" de las variables artificiales en la función objetivo ha de ser positivo.
- 14) La correcta es a): si los puntos "Pepe" y "Juan" son mínimos globales, también son mínimos globales todos los infinitos puntos que son CLC de ellos.
- 15) La correcta es b).

- 16) La correcta es b), pues si $a = b/2$ la curva de nivel $a \cdot x + b \cdot y = k$ es paralela a $x + 2 \cdot y = 3$.
- 17) La correcta es b): al pasar de $(0;2;2;0)$ a $(2;1;0,0)$ disminuye el valor de la función objetivo.
- 18) La correcta es b): debería entrar P_1 , que corresponde al mayor valor positivo de los $z_j - c_j$, pero como todos los elementos de la columna P_1 son negativos, no hay solución acotada.
- 19) La correcta es c), famosa propiedad de la dualidad.
- 20) La correcta es a).
- 21) Si dibujas el CSF verás que sólo tiene 3 vértices \Rightarrow la correcta es a)
- 22) Siendo $x_1 = 3, x_2 = 1$ la solución de PL de 20), la HC dice:

$$\begin{cases} y_1 \cdot (x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ y_2 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 - 5) = 0 \\ y_3 \cdot (2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 3) = 0 \\ x_1 \cdot (-y_1 + y_2 + 2 \cdot y_3 - 7) = 0 \\ x_2 \cdot (-y_1 + 2 \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 - 7) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \cdot (3 + 1 - 2) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ y_2 \cdot (3 + 2 \cdot 1 - 5) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ y_3 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 3 \cdot (-y_1 + y_2 + 2 \cdot y_3 - 7) = 0 \\ 1 \cdot (-y_1 + 2 \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 - 7) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 5 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

- 23) La b) es falsa: habiendo en la base de partida dos variables artificiales no nulas, al menos hacen falta dos iteraciones para que ambas variables artificiales salgan de la base. La c) es falsa: siendo un problema de mínimo, el coeficiente "M" de las variables artificiales en la función objetivo ha de ser positivo.
- 24) La correcta es b): la curva de nivel $3 \cdot x + 6 \cdot y = k$ es paralela a $x + 2 \cdot y = 8$.
- 25) La correcta es b).
- 26) La correcta es b).
- 27) La correcta es b): entra P_1 (mayor valor positivo de los $z_j - c_j$) y sale P_3 .
- 28) La correcta es b).
- 29) Si dibujas el CSF verás que sólo tiene 3 vértices \Rightarrow la correcta es a).
- 30) La correcta es b).
- 31) La correcta es b).
- 32) Las SFB dadas sólo verifican las restricciones de a).
- 33) La correcta es a).

- 34) La correcta es a), famosa propiedad de la dualidad.
- 35) La correcta es c).
- 36) Si $a > 0$ y $b > 0$ es $f(2;2) = 2.a + 2.b > f(2;0) = 2.a$; así, siendo de máximo el PL, es posible generar (2;2) a partir de (2;0)
- 37) La correcta es c).
- 38) La correcta es a).
- 39) La correcta es c).
- 40) La a) es falsa: habiendo en la base de partida dos variables artificiales no nulas, al menos hacen falta dos iteraciones para que ambas variables artificiales salgan de la base. La b) es falsa: siendo un problema de mínimo, el coeficiente "M" de las variables artificiales en la función objetivo ha de ser positivo.
- 41) La a) no siempre es cierta.

www.fonemato.com