2. OPERACIONES ALGEBRAICAS BÁSICAS.

En este apartado vamos a realizar las operaciones algebraicas básicas que nos permiten utilizar DERIVE como herramienta de cálculo. Todas estas operaciones las realizaremos sobre una ventana de álgebra, por lo que los comandos que vamos a utilizar están asociados a menús o barras de herramientas de una ventana de álgebra. Nos situamos por tanto sobre una ventana de álgebra.

2.1 SIMPLIFICAR EXPRESIONES.

Para utilizar DERIVE como una calculadora, basta iluminar la expresión que se desea simplificar y a continuación aplicar el comando del menú *Simplificar-Normal*.

Si la expresión no ha sido introducida en la ventana de álgebra, existe la posibilidad de simplificarla directamente desde la ventana de edición. También se utiliza el botón de herramientas = (o bien la secuencia *Simplificar-Normal*):

Así por ejemplo, si introducimos con la expresión "35*(8984-4357)^3" y aplicamos el botón = se obtiene:

$$35\cdot(8984-4357)^3$$

$$3467101395905$$

También se podría haber simplificado la expresión incluyendo el signo "=" dentro de la ventana de edición obteniéndose en ese caso:

$$35\cdot(8984-4357)^3 = 3467101395905$$

Por último debemos señalar que en la ventana de edición tenemos también la posibilidad de simplificar aplicando el mismo botón de herramientas con "=", obsérvense los botones que aparecen en esta ventana de edición:

✓ = ≚ ≈ 35*(8984-4357)^3=

Con este comando = también podemos realizar simplificaciones de operaciones algebraicas. Por ejemplo, podemos intentar simplificar la expresión "(x^2-4)/((x-2)(x+3))". Para ello primero la editamos con y en segundo lugar aplicamos el comando de simplificar expresión con el botón de herramientas = resultando

$$\frac{x^2-4}{(x-2)\cdot(x+3)}$$

$$\frac{x+2}{x+3}$$

podemos observar que el resultado de la simplificación es una expresión que se sitúa centrada en la ventana de álgebra.

También se puede utiliza este comando para desarrollar las operaciones que algunas veces quedan indicadas en la ventana de álgebra, operaciones como el cálculo de derivadas, integrales, ... más adelante veremos con detalle esta aplicación.

EJERCICIO 13.

Calcular mediante DERIVE los siguientes valores:

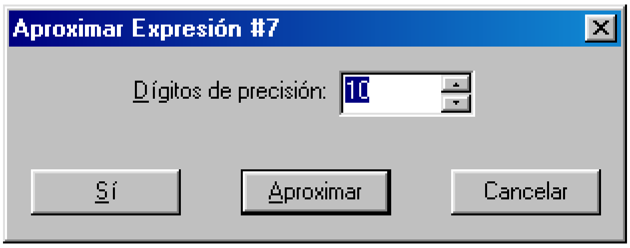
a) 500!
b) Ln(45)-4

2.2.TRABAJAR EN MODO APROXIMADO Y MODO EXACTO.

En el apartado b) del ejercicio anterior podemos observar que al simplificar la expresión "ln(45)-4" obtenemos la misma expresión, ¿por qué? DERIVE siempre trabaja por defecto en MODO EXACTO, por lo que siempre al simplificar obtenemos como resultado un número exacto. Es una de las características fundamentales de los programas de cálculo simbólico: la aritmética exacta. Pero si deseamos calcular expresiones aproximadas en coma flotante, con un cierto número de decimales podemos aplicar el comando de aproximación que se aplica usando o bien la secuencia de menú *Simplificar-Aproximar* o bien utilizando el botón de herramientas *Aproximar* 

.

Por ejemplo, si aplicamos *Simplificar-Aproximar* sobre la expresión anterior aparece la ventana de diálogo:



ventana que nos solicita el número de dígitos de precisión o de aproximación, si pulsamos 

obtenemos una expresión que al simplificar nos daría:

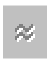
```
APPROX(LN(45) - 4, 10)
```

-0.1933375102

Si hubiésemos aplicado el botón 

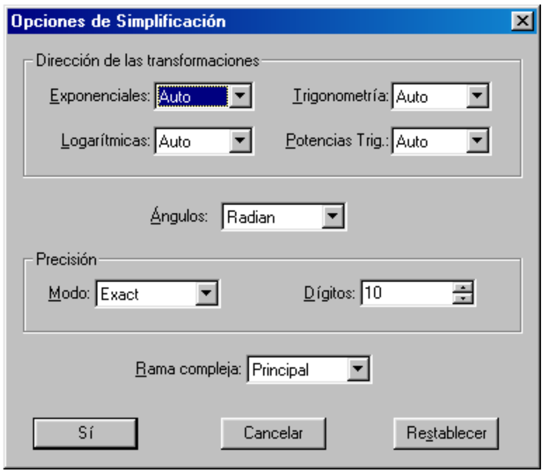
habríamos obtenido directamente el resultado:

-0.1933375102

Utilizando el botón 

sobre la expresión inicial obtendríamos directamente el mismo resultado.

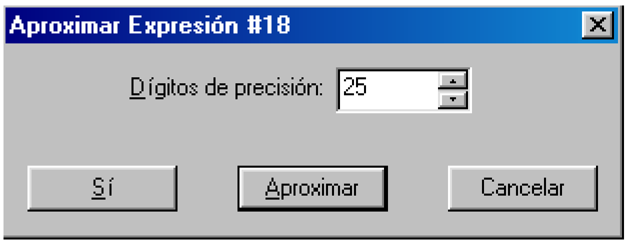
Hemos obtenido en este caso una aproximación con 10 dígitos decimales, que es la aproximación por defecto que tiene definida DERIVE. Sin embargo podemos modificarla, indicando el número de dígitos decimales que deseemos. Efectivamente, si abrimos la ventana de diálogo Modos de Simplificación, con la secuencia de menú *Definir- Preferencias de Simplificación* nos aparece la ventana de diálogo



En el campo PRECISION podemos seleccionar el número de dígitos de precisión para la aproximación. Al efectuar esta operación obligamos a que DERIVE efectúe por defecto una aproximación con tantos dígitos decimales como los indicados en el menú.

Sin embargo si no deseamos modificar el número de dígitos de aproximación más que en una operación concreta, resulta más cómodo aplicar el comando *Simplificar*-Aproximar indicando en la ventana de diálogo el número de dígitos de precisión que queremos aplicar en con esta expresión, de tal forma que si EN ESA ventana indicamos un número de dígitos diferente al determinado, DERIVE efectúa la aproximación con los dígitos que hemos señalado pero en posteriores aproximaciones seguirá utilizando la que tenía introducida por defecto.

Por ejemplo, si deseamos aproximar la expresión ln(34) con 25 dígitos de aproximación, aplicamos *Simplificar Aproximar* y en la ventana de diálogo introducimos 25:



si aplicamos Aproximar, obtenemos:

```
#18:  LN(34)

#19:                                3.526360524616161389666766
```

Si ahora deseamos aproximar por 10 dígitos (que son los que tiene DERIVE por defecto), bastaría aplicar  sobre la expresión #18 y se obtiene:

```
#20:                                3.52636052461
```

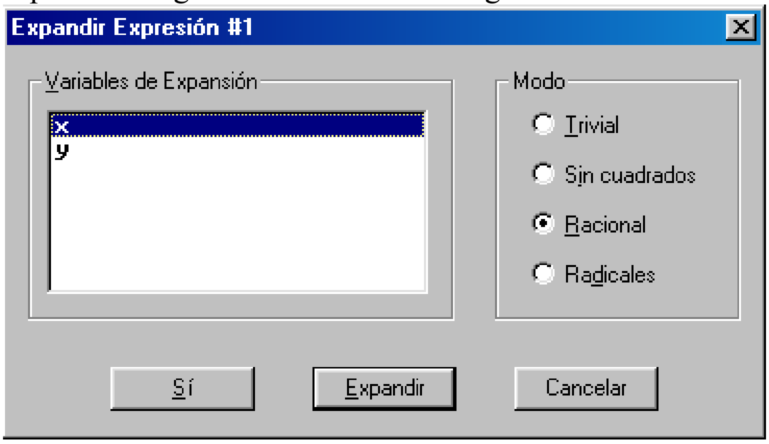
EJERCICIO 14.

Obtener valores aproximados con 14 dígitos de las siguientes expresiones:

a) el número pi b) el número e c) ln(2) d) e^5

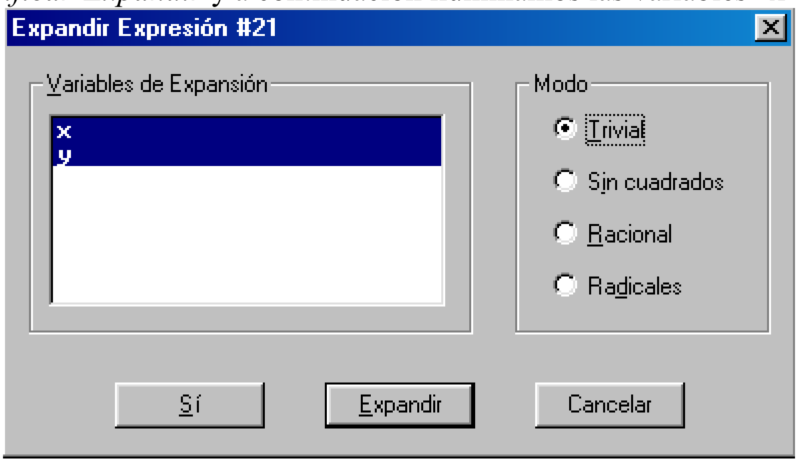
2.3.EXPANDIR UNA EXPRESIÓN.

Para expandir o desarrollar una expresión utilizaremos la secuencia de menú *Simplificar-Expandir.* Al aplicar esta secuencia sobre cierta expresión previamente iluminada nos aparece la siguiente ventana de diálogo



En esta ventana de diálogo podemos seleccionar las variables respecto de las cuales deseamos expandir y el tipo de expansión: *trivial, sin cuadrados, Racional y Radicales*. Normalmente utilizaremos la expansión *trivial*, iluminando este campo; y en el campo Variables iluminaremos con el ratón aquellas variables respecto de las cuales se desea efectuar la expansión (suelen iluminarse todas). Una vez hecho esto hacemos clic sobre el botón EXPANDIR.

Por ejemplo si deseamos expandir la expresión "$(x+y)^4$", introducimos primero esta expresión en la ventana de álgebra con *Edición Expresión;* aplicamos la secuencia de menú *Simplificar-Expandir* y a continuación iluminamos las variables “x” e “y”



luego aplicamos nuevamente el botón 

resultando

#21: $(x + y)^4$

#22: $x^4 + 4\cdot x^3\cdot y + 6\cdot x^2\cdot y^2 + 4\cdot x\cdot y^3 + y^4$

EJERCICIO 15.
Desarrollar o expandir las expresiones

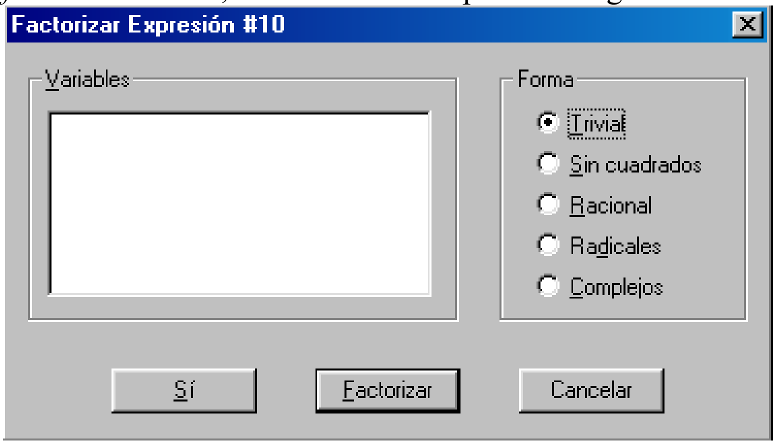
a) $(a^3-b)^8$

b) $(2x-y/3)^6$

c) $\frac{5x-1}{x^4-1}$

2.4. FACTORIZAR UN NÚMERO.

Obtener la descomposición en factores primos de un número entero es sencilla, basta con introducir el número como expresión y aplicar sobre esta la secuencia de menú *Simplificar-Factorizar* , inmediatamente aparece la siguiente ventana de diálogo



para factorizar un número es suficiente con elegir el campo TRIVIAL, y hacer clic sobre el botón FACTORIZAR. Por ejemplo, si intentamos calcular la descomposición en factores primos del número "1470512848896" debemos primero editar la expresión y aplicar *Simplificar-Factorizar* elegir el campo TRIVIAL y factorizar, resultando

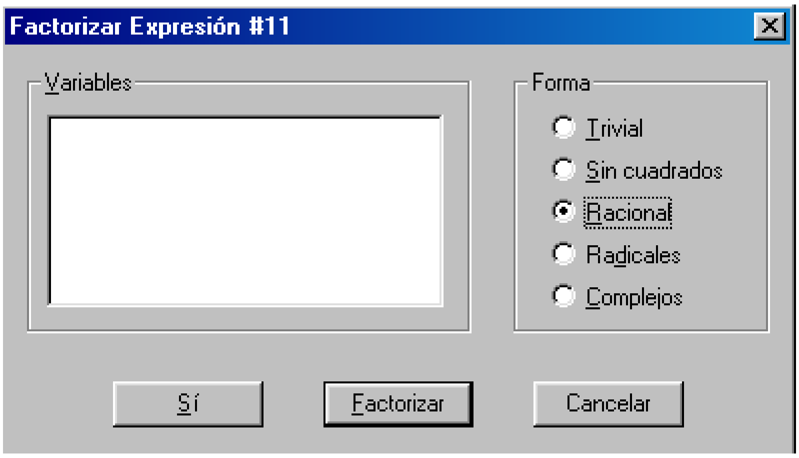
#23: 1470512848896

#24: $2^{13}\cdot 3^4\cdot 7^4\cdot 13\cdot 71$

EJERCICIO 16
Calcular el máximo común divisor de los números 259308 y 7200.

2.5.FACTORIZAR UN POLINOMIO.

DERIVE permite realizar distintos tipos de factorizaciones de polinomios: Todos ellos se obtienen aplicando la secuencia de menú *Simplificar-Factorizar* como puede observarse en la ventana de diálogo en el campo FORMA:



Eligiendo en el campo FORMA el tipo de factorización deseada sobre la expresión polinómica introducida en la línea de edición.

Para entender como operan cada una de estas opciones vamos a introducir un polinomio sobre el cual iremos observando el resultado obtenido al aplicar cada uno de los comandos. Introduzcamos por tanto con  el polinomio:

$$x^8+2x^7-3x^6-10x^5-8x^4+6x^3+16x^2+8x$$

a) Si aplicamos la secuencia *Simplificar-Factorizar* y elegimos en el campo Forma la opción TRIVIAL, podemos sacar factor común al polinomio si es que este lo tiene, en nuestro ejemplo obtendríamos

$$x\cdot(x^7+2\cdot x^6-3\cdot x^5-10\cdot x^4-8\cdot x^3+6\cdot x^2+16\cdot x+8)$$

b) Aplicando la secuencia *Simplificar-Factorizar*, y eligiendo en el campo Forma la opción LIBRE DE CUADRADOS obtenemos la expresión

$$x\cdot(x+1)^2\cdot(x^5-4\cdot x^3-2\cdot x^2+8)$$

c) Mediante la secuencia *Simplificar-Factorizar* y eligiendo en el campo Forma la opción RACIONAL, obtenemos la factorización racional del polinomio dado

$$x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2\cdot(x^3-2)$$

d) La secuencia *Simplificar-Factorizar* y eligiendo en el campo Forma la opción RADICAL efectúa una factorización real del mismo

$$x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2\cdot(x-2^{1/3})\cdot(x^2+2^{1/3}\cdot x+2^{2/3})$$

e) Y por último con *Simplificar-Factorizar* COMPLEJO se realiza una factorización polinómica utilizando raíces complejas

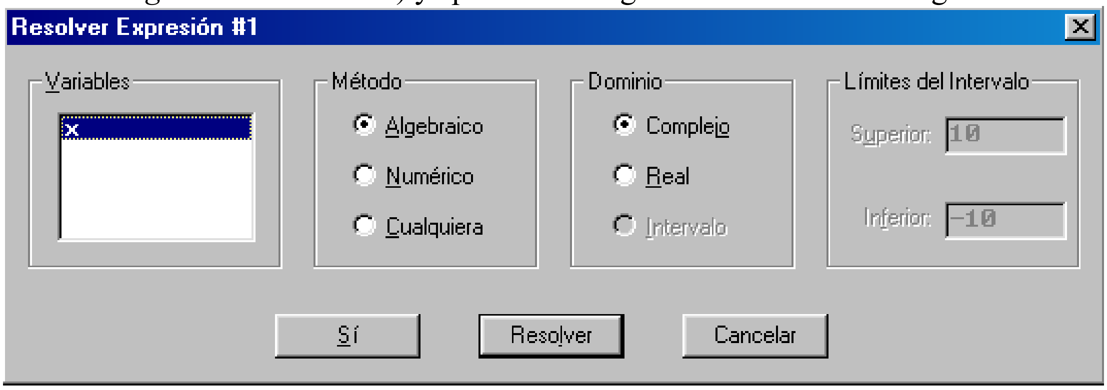
$$x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x+1)^2\cdot(x-2^{1/3})\cdot\left(x+\frac{2^{1/3}}{2}+\frac{108^{1/6}\cdot \hat{\imath}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{2^{1/3}}{2}-\frac{108^{1/6}\cdot \hat{\imath}}{2}\right)$$

OBSERVACION: Si se intentan factorizar polinomios de varias variables, deberemos elegir las variables sobre las cuales se desea efectuar la factorización.

EJERCICIO 17.
Calcular las raíces enteras del polinomio $4x^3$-$5x^2$+8x-5.

2.6.RESOLVER UNA ECUACIÓN.

Para resolver una ecuación en DERIVE, en primer lugar deberemos introducir la expresión que define la ecuación "expresión1 = expresión 2", y a continuación aplicar la secuencia de menú *Resolver-Expresión* (o bien aplicar el botón de herramientas *Resolver-Algebraicamente*) y aparecerá la siguiente ventana de diálogo:



donde, por defecto, aparecerá marcado el Método Algebraico.

Si la ecuación tiene más de una variable, el programa nos solicita respecto de qué variable queremos obtener la solución. Por ejemplo, si deseamos resolver la ecuación x^2*-x-6=0*, bastará que la introduzcamos en la ventana de álgebra, a continuación aplicamos el botón *Resolver Algebraicamente* , hacemos clic sobre el icono Resolver y se obtiene

#1: $x^2 - x - 6 = 0$

#2: SOLVE($x^2 - x - 6 = 0$, x)

#3: $x = 3 \lor x = -2$

Hagamos un segundo ejemplo de una ecuación con más de una variable. Si deseamos resolver la ecuación $x^2+y^2-8x+6y=169$ respecto de la variable y; entonces una vez editada con *Edición Expresión* la expresión anterior, aplicamos sobre ella y elegimos la variable de resolución "y", resultando

#1: $x^2 + y^2 - 8\cdot x + 6\cdot y = 169$

#2: SOLVE($x^2 + y^2 - 8\cdot x + 6\cdot y = 169$, y)

#3: $y = -\sqrt{2\cdot(4\cdot x + 89) - x^2} - 3 \lor y = \sqrt{2\cdot(4\cdot x + 89) - x^2} - 3$

EJERCICIO 18.
Resolver las ecuaciones:

a) $x^2-5x+6=0$
b) $5(x-1/x^2)=x-1$
c) $x^3-1=0$
d) Resolver respecto de la variable x la ecuación $x+y^2-3xy=9$

2.7.RESOLVER UNA INECUACIÓN CON MÁS DE UNA VARIABLE.

Para resolver una inecuación bastará editar la inecuación y aplicar sobre ella el menú *Resolver-Expresión-Algebraicamente* o el botón de herramientas . A continuación elegimos la variable respecto de la cual deseamos resolver y luego hacemos clic en RESOLVER.

Por ejemplo, si deseamos resolver la inecuación $3x-5y+7>0$, primero la editamos y en segundo lugar aplicamos , luego elegimos la variable respecto de la cual resolver "x" y resulta

$$3 \cdot x - 5 \cdot y + 7 > 0$$

$$\left[x > \frac{5 \cdot y - 7}{3} \right]$$

2.8. ASIGNACIÓN DE VALORES A VARIABLES, DEFINICIÓN DE FUNCIONES Y SUSTITUCIÓN DE VARIABLES.

Es frecuente efectuar asignaciones de valores a variables. Este procedimiento se ejecuta editando en DERIVE una expresión de la forma

"variable := valor"

Por ejemplo si deseamos asignar a la variable a, el valor 3, editamos la expresión

$$a := 3$$

En adelante, cualquier expresión que contenga la variable a, siempre evaluara la expresión tomando la variable a el valor asignado, en este caso 3. Así por ejemplo si editamos la expresión "$3ax+5$" y la simplificamos, se obtiene

$$3 \cdot a \cdot x + 5$$

$$9 \cdot x + 5$$

De igual forma que definimos variables, podemos DEFINIR FUNCIONES. Para ello, seguiremos la siguiente sintaxis:

"nombre_función(var1,var2,...,varn) := expresión funcional"

Por ejemplo si deseamos definir la función mifuncion(x)=$ln(x^2+2x$-3), bastará que editemos la expresión

$$MIFUNCION(x) := LN(x^2 + 2 \cdot x + 3)$$

Como puede observarse la función aparece escrita en mayúsculas. Esta es una característica de DERIVE: todas las funciones definidas aparecen en mayúsculas en la ventana de álgebra (aunque en la línea de edición se hayan escrito en minúsculas). Esta definición es útil, ya que si deseamos evaluar esta función en x=5, bastará editar la expresión "mifuncion(5)" y aplicar el comando *Simplificar-Normal* resulta

```
#2:   mifuncion(5)

#3:                                   5·LN(2)
```

Si en una expresión dada deseamos sustituir el valor de una o varias variables sin necesidad de asignar un valor a dichas variables, podemos utilizar el comando *Simplificar-SustituirVariables.* Por ejemplo, si tenemos editada la expresión

$$\frac{x^2 - 3\cdot x}{2\cdot y}$$

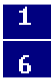
y deseamos sustituir la variable "x" por el valor "5" y la variable "y" por el valor "30" aplicaremos el comando *Simplificar-SustituirVariables* y aparece la ventana de diálogo

en la que deberemos indicar para cada variable el valor de sustitución, marcando primero la variable y luego tecleando el valor en el campo Sustitución:

al aplicar el botón Sí se obtiene

$$\frac{5^2 - 3\cdot 5}{2\cdot 30}$$

si en vez de aplicar el botón Sí hubiésemos aplicado el botón Simplificar se obtiene la simplificación de la expresión anterior, es decir



El botón de herramientas  es equivalente a la secuencia *Simplificar-SustituirVariable.*

EJERCICIO 19.

a) Definir la variable “b” con el valor “34”.

c) Evaluar la expresión b+5.

d) Definir una función con el nombre $mia(x,y)= x^2-3xy$ y evaluarla en x=2,y=4.

e) Editar la expresión $\dfrac{\sqrt{x-y^2+2z}}{z+2(x+y)}$ y sustituir en ella la variable x por el valor 58 y la variable y por el valor 89, y obtener la expresión simplificada.

2.9. FUNCIONES PREDEFINIDAS EN DERIVE.

DERIVE tiene una colección de funciones predefinidas, es decir, funciones que no necesitan de un fichero de utilidades para ser cargadas en memoria. Estas funciones se encuentran por tanto, siempre disponibles. A continuación mostramos algunas de estas funciones:

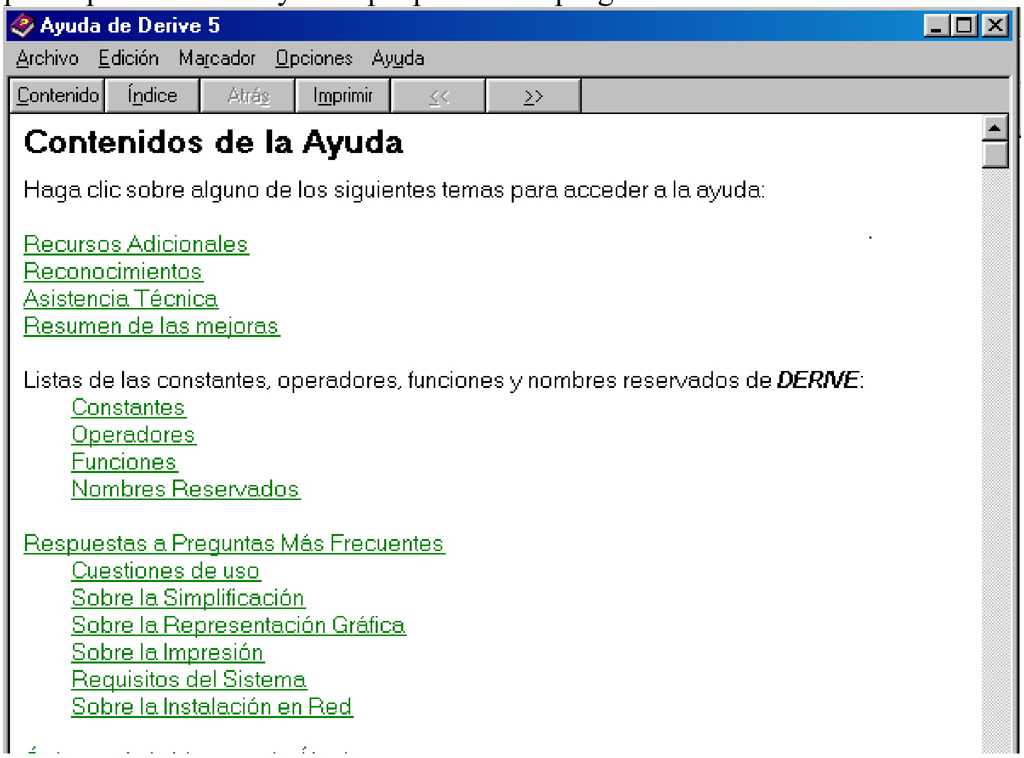
- Función raíz cuadrada: SQRT(x)
- Función valor absoluto: ABS(x)
- Función parte entera de x: FLOOR(x)
- Función resto de la división entera del número h entre m: MOD(h,m)
- Función exponencial: EXP(x)
- Función logaritmo neperiano: LN(x)
- Función seno: SIN(x)
- Función coseno COS(x)
- Función máximo común divisor de los números a y b GCD(a,b)
- Mínimo común múltiplo de los números a y b: LCM(a,b)
- Menor número primo mayor que el natural x: NEXT_PRIME(x)
- Máximo común divisor de los polinomios a y b: POLY_GCD(a,b)
- Factorial de n: n!
- Función media aritmética de argumentos dados: AVERAGE($x1,x2,...,xn$)
- Función varianza de los argumentos dados: VAR($x1,x2,...,xn$)
- Número de subconjuntos de p elementos de un conjunto m (combinaciones) COMB(m,p)
- Módulo del complejo z: ABS(z)
- Argumento del número complejo z: PHASE(z)
- Parte real del complejo z: RE(z)
- Parte imaginaria del complejo z: IM(z)

- ....

La lista de funciones predefinidas se puede consultar en la AYUDA de DERIVE.

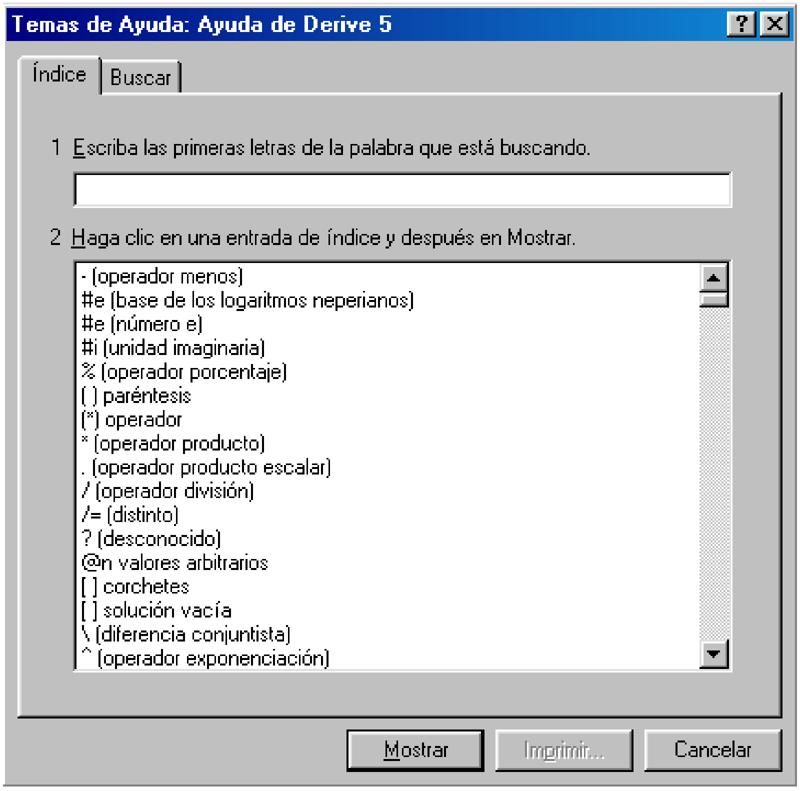
2.10. LA AYUDA DE DERIVE.

Utilizando el menú *Ayuda* podemos obtener información de todos los comandos y funciones definidas en DERIVE. En concreto podemos obtener varios tipos de ayuda. Tenemos una ayuda en función de CONTENIDOS, de tal forma que al aplicar esta opción se despliega una nueva ventana independiente del programa que tiene agrupados por temas las ayudas que presta este programa:



El programa de ayuda tiene estructura de fichero hipertexto de tal forma que basta ir pinchando las palabras subrayadas para acceder a la información que contiene el programa de ayuda sobre ellas.

También tenemos la posibilidad de utilizar un índice de temas de ayuda. Este índice se desplica aplicando *Ayuda-Indice* desplegándose la ventana de diálogo:



EJERCICIO 20.

Consultar en la AYUDA DE DERIVE las funciones predefinidas de DERIVE. Para calcular la tangente de 35.