4. ANÁLISIS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

En esta sección realizaremos algunos ejercicios sobre el estudio de funciones de una variable. En la parte final hay ejercicios propuestos.

4.1. PROPIEDADES GENERALES Y GRÁFICAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

<u>EJEMPLO 4.1.</u>

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ se pide:

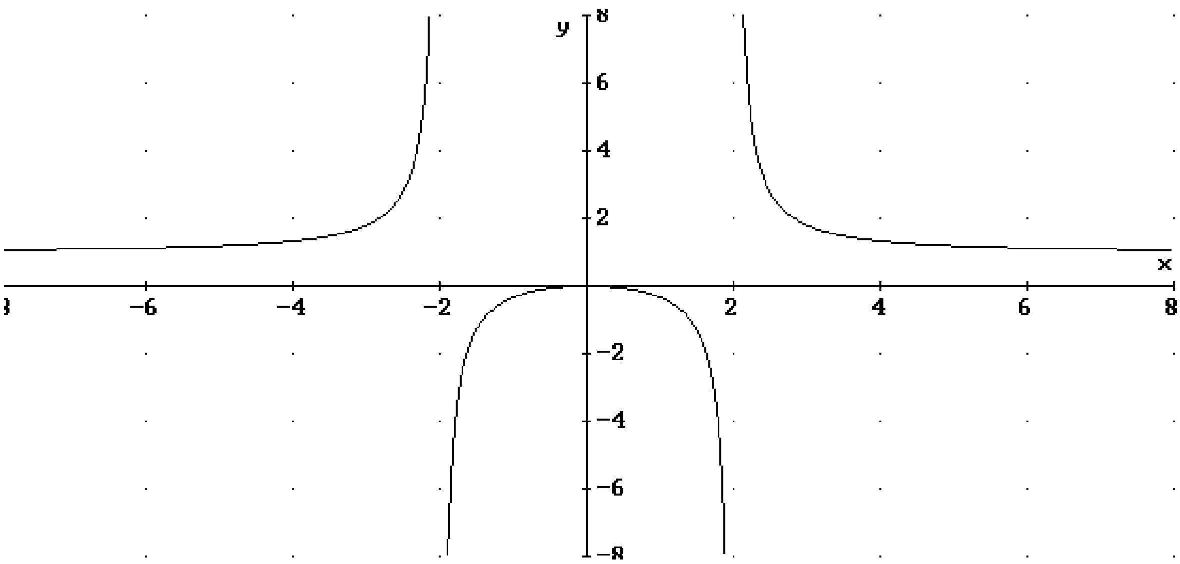
(a) Representar la función gráficamente.
(b) Estudiar el comportamiento de la función: dominio, rango, asíntotas, intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos y puntos de inflexión.

<u>Solución:</u>

(a) Para representar la función, se introduce la expresión "*x^2/(x^2-4)*"

$$\frac{x^2}{x^2-4}$$

y a continuación aplicamos *Ventana-Nueva ventana 2D.* En la nueva ventana se aplica  y se obtiene



(b) En este caso, de la gráfica de la función se puede deducir directamente información que utilizaremos en el análisis de este apartado y que se obtendrá de forma alternativa con el estudio analítico correspondiente.

- **DOMINIO.**

Para estudiar el dominio se buscan los valores de x para los cuales $f(x)$ es un número real, o, si se utiliza la representación anterior, los valores de x para los cuales "hay gráfica". Obsérvese que en nuestro ejemplo, para $x=2$ y $x=-2$, no existe la función, ya que estos son justamente los valores que anulan el denominador.

- **RANGO.**

Gráficamente el rango de la función es el conjunto de números del eje OY en los que "existe la gráfica". Como puede verse, en este caso el rango de la función es todo el conjunto de números reales menos el intervalo (0,2] es decir en $R\backslash(0,2]$.

- **ASÍNTOTAS.**

Asíntotas verticales. La función, como se ve gráficamente, tiene dos asíntotas verticales, las rectas $x=2$ y $x=-2$. Analíticamente, para determinar las asíntotas verticales estudiamos los siguientes límites $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4}$ y $\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4}$. Para calcular el primer límite, se edita la expresión "*x^2/(x^2-4)*", se elige el botón de herramientas lim y en la ventana de diálogo correspondiente al cálculo de límites se introducen la *variable* "*x*", el *punto -2* y en el campo "Aproximación desde" se elige la opción *"derecha"*. Finalmente se hace clic en Sí *y* obtenemos

$$\lim_{x\to 2-} \frac{x^2}{(x^2-4)^2}$$

que tras simplificar con = se obtiene

$$\infty$$

Es decir cuando x se aproxima a –2 por la derecha la rama de la gráfica se va $-\infty$. Para calcular el segundo límite se repite el proceso anterior, pero en el campo "Aproximación desde" se elige la opción *"izquierda"* y obtenemos las expresiones

$$\lim_{x\to -2-} \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$\infty$$

se observa que cuando los valores de x se aproximan a -2 por la izquierda la rama de la gráfica se va a infinito.

Asíntotas horizontales. Gráficamente se ve que la recta $y=1$ es la única asíntota horizontal de la función. Obsérvese que analíticamente los siguientes límites nos informan de la existencia de dicha asíntota.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-4}$$

$$1$$

- **INTERVALOS DE CRECIMIENTO /DECRECIMIENTO.**

En la gráfica se observa que en (-∞,-2)∪(-2,0) la función es creciente, y en (0,2)∪(2,∞) la función es decreciente.

El estudio analítico de los intervalos de crecimiento y decrecimiento utiliza la función derivada. Por tanto, se calcula en primer lugar la derivada (**derivada de primer orden**) de la función. Para ello se edita la expresión "x^2/(x^2-4)", se aplica ∂ y la ventana de diálogo que aparece nos aseguramos de que los campos *"variable"* y ***"orden"*** tengan asignados los valores "x" y **"1"** respectivamente y a continuación se elige la opción Simplificar y se obtiene

$$-\frac{8\cdot x}{(x^2-4)^2}$$

Como la función es creciente en aquellos valores en los que la derivada es positiva, debemos resolver la inecuación $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}>0$. Para ello se introduce la expresión "-8x/(x^2-4)^2>0" mediante 

$$-\frac{8\cdot x}{(x^2-4)^2}>0$$

se aplica  y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*Método*" y "*Dominio*" tengan asignados las opciones "*Algebraico*" y "*Complejo*" y finalmente se elige la opción Resolver obteniéndose el resultado:

$$x \neq -2 \wedge x < 0$$

Por tanto, los intervalos de crecimiento son (-∞,-2)∪(-2,0).

Para determinar los intervalos de decrecimiento se estudian los valores en los que la derivada es negativa. El procedimiento es análogo al anterior: hay que resolver la inecuación $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}<0$.

$$-\frac{8\cdot x}{(x^2-4)^2}<0$$

$$x \neq 2 \wedge x > 0$$

Los intervalos de decrecimiento son en efecto (0,2)∪(2,∞).

- **EXTREMOS RELATIVOS.**

De la gráfica se concluye que en x=0 la función alcanza un máximo local.
Para determinar analíticamente los puntos críticos de la función se calculan los puntos que anulan la derivada. Por tanto, hay que resolver la ecuación $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}=0$, lo cuál se consigue de la forma siguiente:

1. Con  se edita la expresión

$$-\frac{8\cdot x}{(x^2-4)^2}=0$$

2. Se elige el botón de herramientas  y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*Método*" y "*Dominio*" tengan asignados las opciones "*Algebraico*" y "*Complejo*" y finalmente se elige la opción 

. El resultado es:

$$x=\pm\infty \vee x=0$$

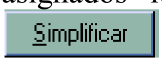
3. El punto crítico es x=0. En este caso es un máximo local pues separa un intervalo de crecimiento (a su izquierda) de un intervalo de decrecimiento (a su derecha).

- **INTERVALOS DE CONCAVIDAD/CONVEXIDAD.**

Si observamos la gráfica de la función podemos concluir que la función es convexa en el conjunto $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ y cóncava en el intervalo $(-2,2)$.
El estudio analítico de la convexidad de una función utiliza la **segunda** derivada de la función, la cual se obtiene de la siguiente forma:

- Utilizando la expresión que ya teníamos editada anteriormente

$$\frac{x^2}{x^2-4}$$

- Se aplica el botón de herramientas  y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*variable*" y ***"orden"*** tengan asignados los valores "x" y **"2"** respectivamente y finalmente se elige la opción 

y se obtiene:

$$\frac{8\cdot(3\cdot x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

A continuación se determina el conjunto de los números reales para los que la segunda derivada es positiva resolviendo la inecuación

$$\frac{8\cdot(3\cdot x^2+4)}{(x^2-4)^3}>0$$

El resultado es

$$x < -2 \vee x > 2$$

Y así se obtiene que los intervalos de convexidad son $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

Análogamente la función es cóncava en aquellos puntos que hacen negativa la segunda derivada para lo que hay que resolver la inecuación

$$\frac{8\cdot(3\cdot x^2+4)}{(x^2-4)^3} < 0$$

El resultado es

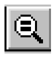
$$[-2 < x < 2]$$

Y se obtiene que el intervalo de concavidad de la función es: (-2,2)

- **PUNTOS DE INFLEXION.**

Los puntos de inflexión se encuentran entre aquellos puntos que igualan a cero la derivada segunda. En el ejemplo que nos ocupa, bastará resolver la ecuación

$$\frac{8\cdot(3\cdot x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0$$

Para ello se elige el botón de herramientas  y en la ventana de diálogo se comprueba que los campos "*Método*" y "*Dominio*" tengan asignados las opciones "*Algebraico*" y "*Complejo*" y finalmente se elige la opción Resolver. El resultado es:

$$x = -\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\hat{\imath}}{3} \vee x = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\hat{\imath}}{3} \vee x = \pm\infty$$

Por consiguiente no existen valores reales que anulen la derivada segunda, y en consecuencia, (tal como se observa en la gráfica) no hay puntos de inflexión.

Obsérvese que $x=-2$ y $x=2$ separan intervalos de concavidad y convexidad, pero no son puntos de inflexión por que son puntos que no están en el dominio de la función.

4.2. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES.

EJEMPLO 4.2.

Dada la función $g(x)=ln(1+2x)$ se pide:

(a) Calcular los polinomios de Taylor de orden *1,2,3* y *4* de la función *g(x)* en un entorno de $x=0$.

(b) Representar gráficamente en el mismo dibujo la función y todos los polinomios calculados en el apartado (a).

Solución:

(a) El cálculo del polinomio de Taylor de orden 1 en un entorno de x=0 se obtiene así: se introduce la expresión "ln(1+2x)", se aplica el comando *Cálculo* y luego la opción "*Polinomios de Taylor*" y en la ventana de diálogo que aparece se examina que los campos *"variable", "punto" y "grado"* tengan asignados los valores "*x*", "*0*" y "1" respectivamente y finalmente se elige la opción Sí y aparece la expresión

$$\mathrm{TAYLOR}(\mathrm{LN}(1 + 2\cdot x),\ x,\ 0,\ 1)$$

que al simplificarla con = obtenemos

$$2\cdot x$$

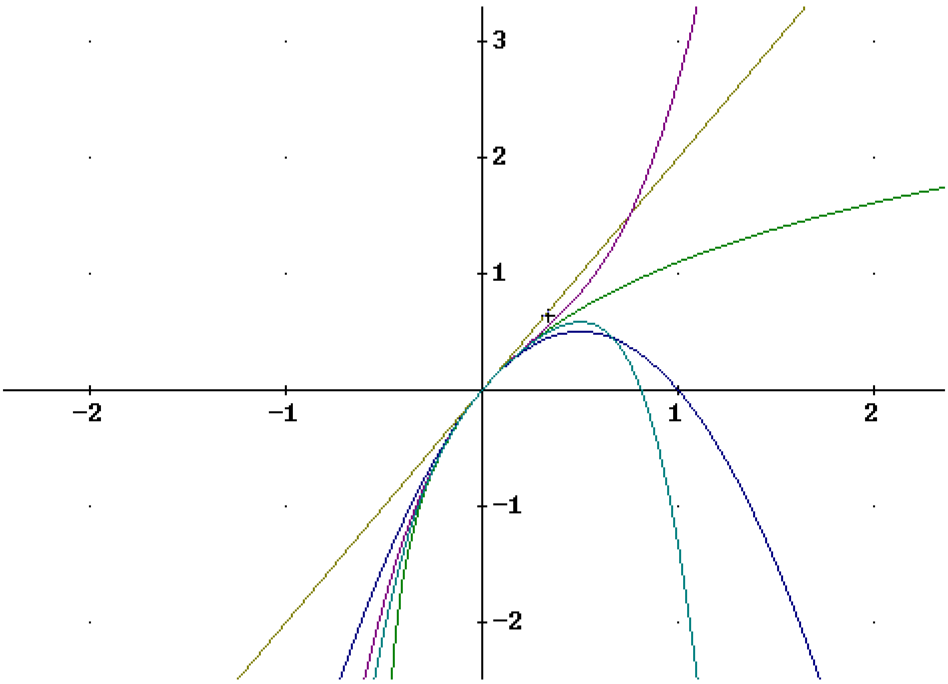
Para calcular los demás polinomios se procede como en el caso anterior: edición de la expresión "*ln(1+2x)*", aplicar la secuencia *Cálculo-Polinomios de Taylor* asignando en cada caso, a diferencia del anterior, al campo *"orden"* los números " 2,3 y 4". Luego aplicando Simplificar se obtienen sucesivamente las siguientes funciones:

$$2\cdot x - 2\cdot x^2$$

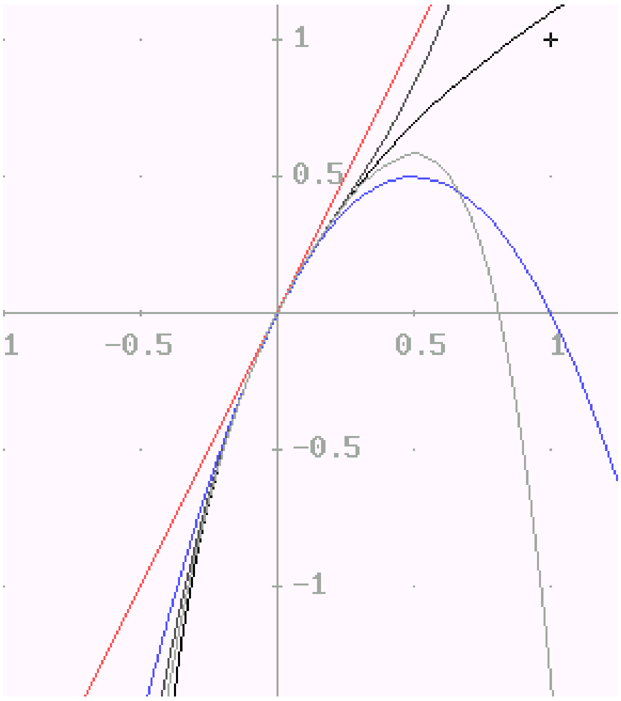
$$\frac{8\cdot x^3}{3} - 2\cdot x^2 + 2\cdot x$$

$$- 4\cdot x^4 + \frac{8\cdot x^3}{3} - 2\cdot x^2 + 2\cdot x$$

(c) Para dibujar la función y sus cuatro polinomios en el mismo gráfico se procede de las siguiente forma: se edita la expresión "*ln(1+2x)*", se elige el botón. En la nueva ventana se selecciona el botón. En la ventana 2D aparece entonces el dibujo de la gráfica de la función. A continuación se repite el siguiente proceso: seleccionamos la ventana de álgebra donde tenemos editados los diferentes polinomios de Taylor, seleccionamos cada uno de ellos y los representamos en la ventana 2D anterior con . Finalmente obtenemos



donde podemos observar como el grado de aproximación en un entorno de *x=0* va aumentando a medida que aumenta el orden del polinomio, lo cual se observa mejor si nos aproximamos con 



4.3. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS.

Si deseamos definir en DERIVE funciones definidas a TROZOS, debemos utilizar comandos de programación, en concreto la sentencia IF(Condicion,I1,I2), cuyo significado consiste en estudiar la Condición, de tal forma que si es cierta se aplica I1 y si es falsa se aplica I2. Veámoslo con un ejemplo.

<u>EJEMPLO 4.3.</u>

Definir la función

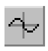
$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ -x^2+4 & x\geq 0 \end{cases}$$

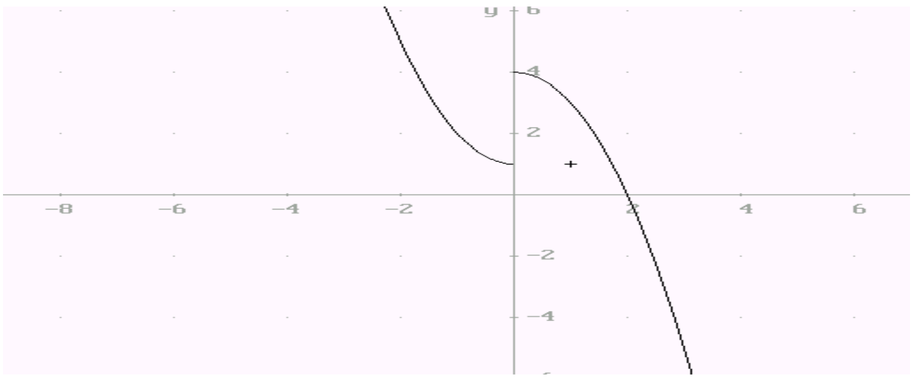
y estudiar su derivabilidad y continuidad.

<u>Solución:</u>

Para definir en DERIVE esta función se introduce la expresión:

f(x):=if(x<0,x^2+1,-x^2+4)

Veamos el aspecto de su gráfica seleccionando la ventana 2D y aplicando 



Obsérvese que no es continua en *x=0* (la curva de la función se "rompe" o da un salto), y en consecuencia no es derivable en *x=0*. A continuación estudiamos de forma analítica el problema de continuidad. Para estudiar la continuidad de *f* es necesario calcular el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$, para lo cual aplicamos lim y en la nueva ventana comprobamos que los campos *"variable", "punto"* y *"Aproximación desde"* tengan asignados los valores *"x","0"* y *"ambas"*. Finalmente hacemos clic en Simplificar y nuevamente obtenemos

```
lim f(x) :=
x→0   If x < 0
         x^2 + 1
         - x^2 + 4

         ?
```

lo cual significa que el límite no existe y, por tanto, la función no es continua en el punto *x=0*.

4.4. REPRESENTACIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES CONSTRUIDAS POR TRANSFORMACION DE FUNCIONES.

<u>EJEMPLO 4.4.</u>

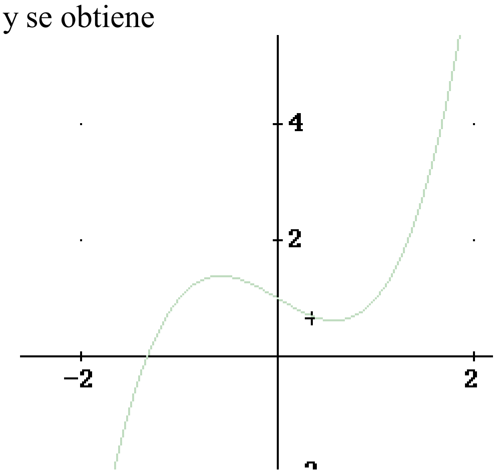
Dada la función $f(x)=x^3-x+1$ se pide representar gráficamente las funciones:

(a) *f(x), f(x)+3 , f(x)-3*
(b) *f(x), f(x+3), f(x-3)*
(c) *f(x), 3f(x), f(x)/3*
(d) *f(x), f(3x), f(x/3)*
(e) *f(x), f(-x),-f(x)*

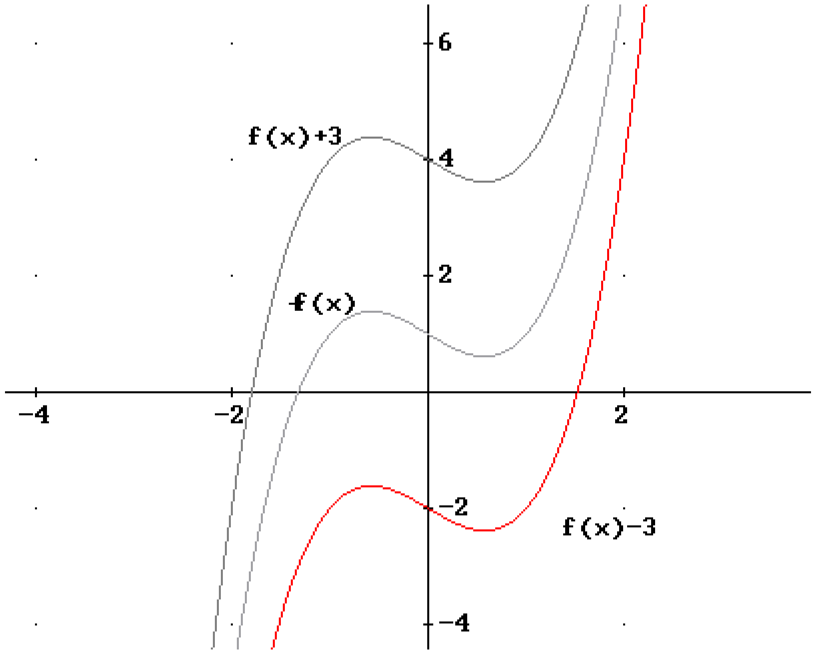
<u>Solución:</u>

En primer lugar se introduce la expresión "*f(x):=x^3-x+1*".

(a) La representación gráfica de *f(x)* se hace seleccionando la ventana 2D y aplicando  y se obtiene

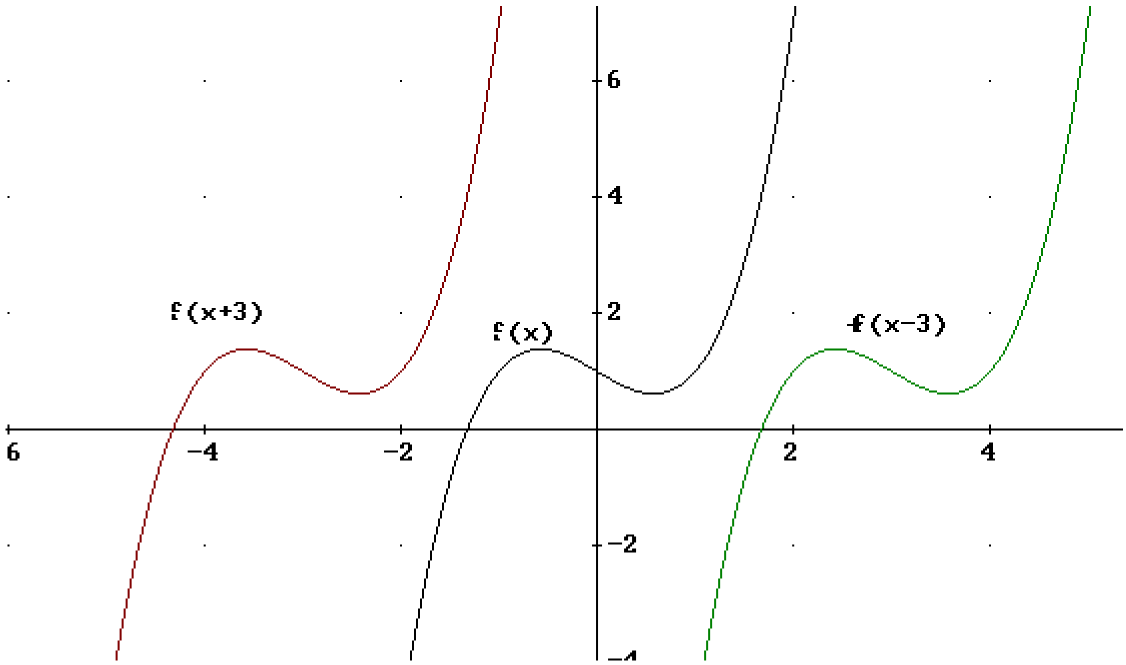


Luego se editan las expresiones "*f(x)+3*" y "*f(x)-3*" en la ventana de edición de la ventana 2D, se aplica  y obtenemos



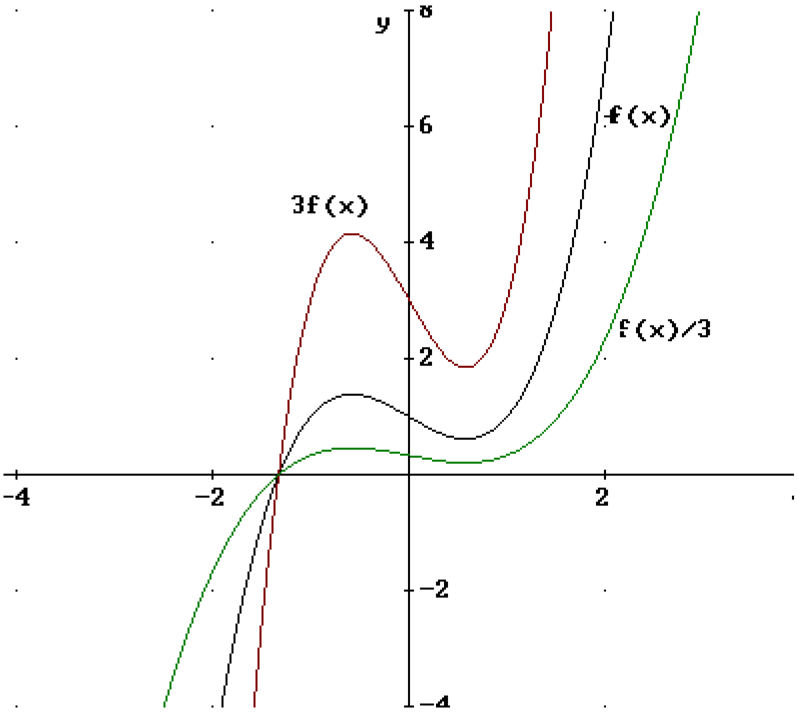
Se observa que la curva de la función "*f(x)+3*" se obtiene trasladando la curva de la función *f(x)* tres unidades hacia arriba.

(b) Borremos ahora todas las gráficas de la ventana 2D aplicando el botón  tres veces. Para representar las tres funciones pedidas se editan sucesivamente las expresiones *"f(x)"* "*f(x+3)*" y "*f(x-3)*" en la ventana de edición de la ventana 2D y a continuación elegimos la opción  obteniendo

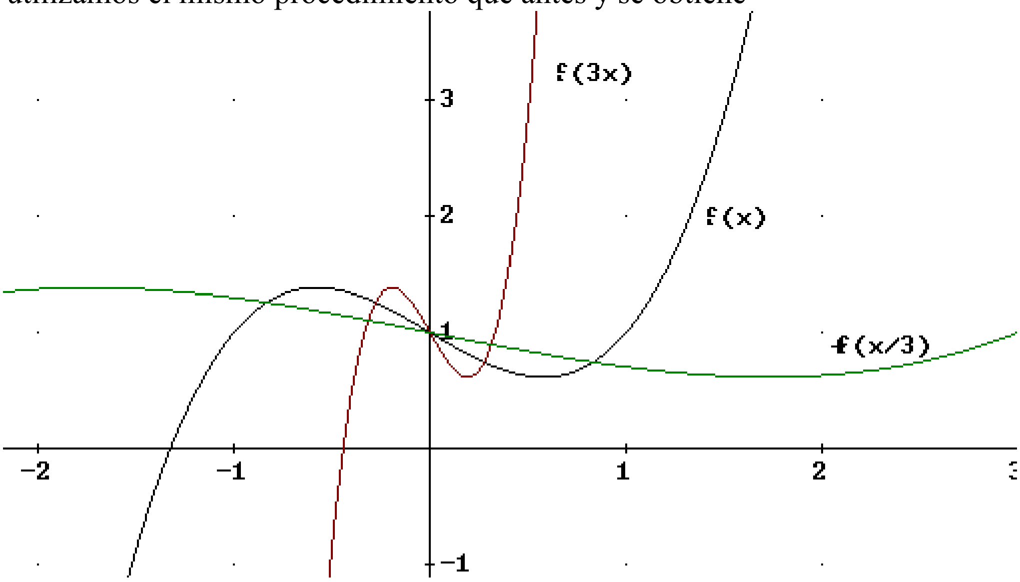


Se observa que la curva de la función "*f(x+3)*" se obtiene trasladando la curva de la función *f(x)* tres unidades hacia la izquierda, respectivamente "*f(x-3)*" se obtiene trasladando la gráfica de *f(x)* tres unidades a la derecha.

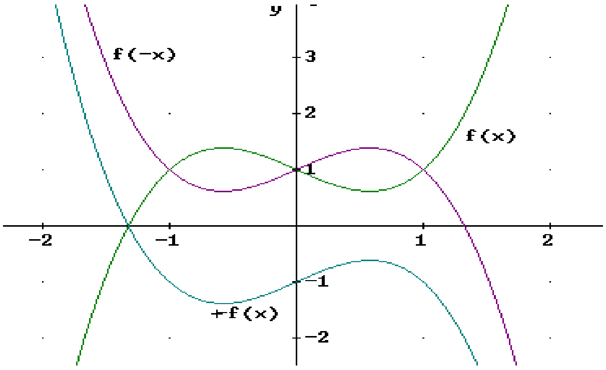
(c) Nuevamente borramos primero todas las gráficas de la ventana 2D. Luego editamos las expresiones "*f(x)*", "*3*f(x)*" y "*f(x)/3*" en la ventana de edición de la ventana 2D y aplicando se obtiene



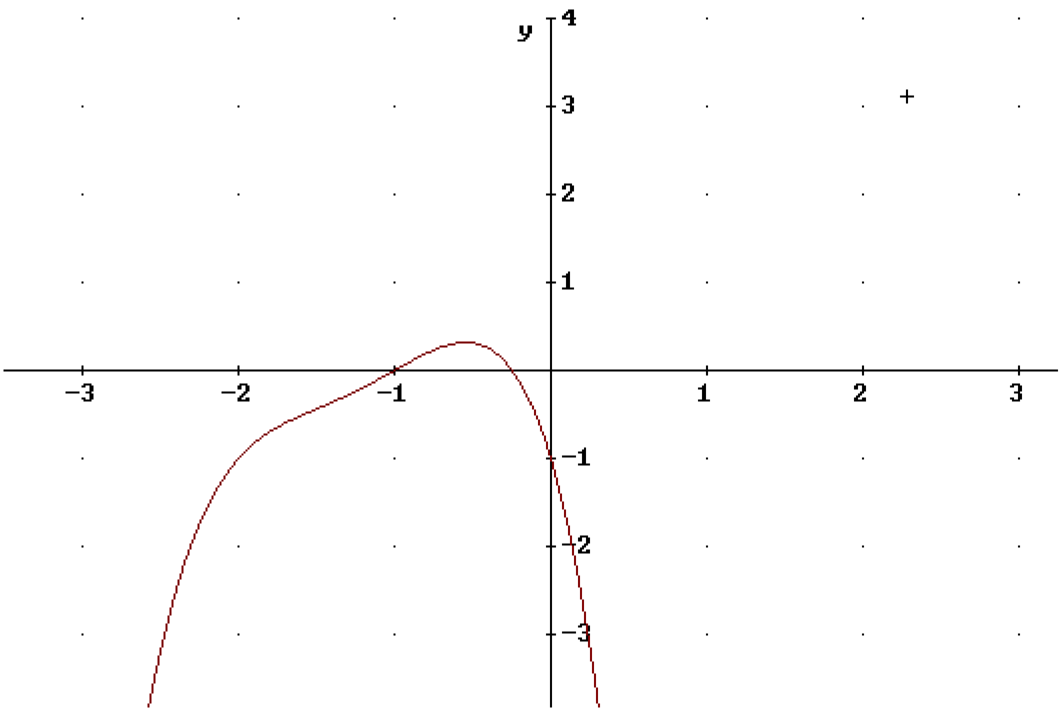
(d) Se borran todas las gráficas de la ventana 2D como en los casos anteriores, se editan las expresiones "*f(x)*", "*f(3x)*" y "*f(x/3)*" y se representan las tres funciones utilizamos el mismo procedimiento que antes y se obtiene



(e) Borramos todas las gráficas y editamos las expresiones "*f(x)*", "*f(-x)*" y "*-f(x)*". A continuación podemos dibujar *f(x), f(-x)* y *–f(x)* y se obtiene



EJERCICIO 29.
Dada la función $f(x)=x^4+x^3-x$
(a) Dibujar su gráfica.
(b) Deducir ¿cuál será la función *g(x)* que tiene la siguiente gráfica?



EJERCICIO 30.
Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & -1<x \\ x^2 & -1\le x<1 \\ \dfrac{x+2}{3} & 1\le x \end{cases}$$

Se pide:
(a) Definir la función en DERIVE (utilizando dos if encadenados)
(b) Obtener su gráfica.
(c) ¿es continua en su dominio? ¿es derivable en todo su dominio?

(d) Dibujar la recta tangente a la función en el punto *x=0*.

EJERCICIO 31.

Una empresa posee las siguientes funciones de ingreso y coste

$$I(x) = 20x - \frac{x^2}{4}$$

$$C(x) = x^2 + 10x - 1800$$

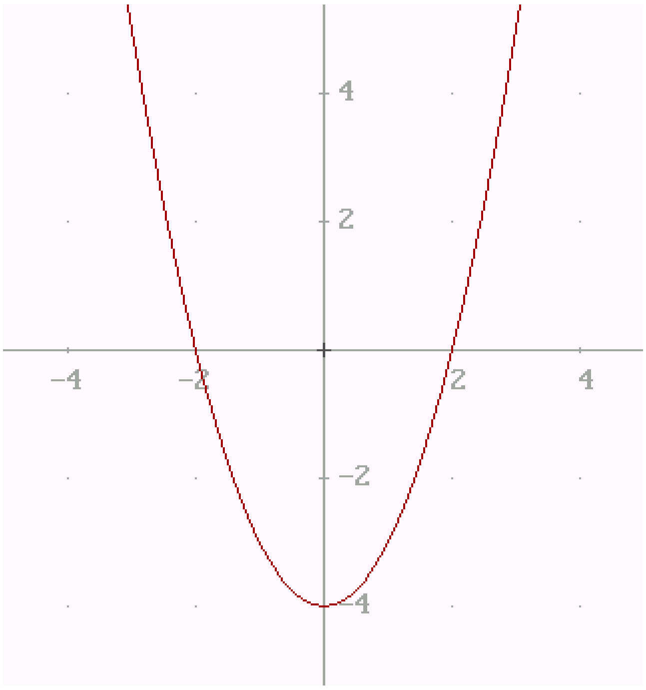
Siendo x el número de unidades. Se pide:

(a) Representar *I(x) y C(x)*.

(b) Representar la función beneficio y determinar analíticamente el número de unidades que maximizan el beneficio.

EJERCICIO 32.

Si la gráfica de la derivada *f'(x)* de una cierta función *f(x)* viene dada por



Intentar obtener una aproximación gráficamente de la función f(x).