5. ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

En este apartado trabajaremos con funciones de dos variables, aunque los cálculos analíticos se pueden efectuar con funciones de más de dos variables, con las limitaciones relacionadas con la imposibilidad de representar sus gráficas.

5.1. GRÁFICAS Y CURVAS DE NIVEL DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

EJEMPLO 5.1.

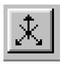
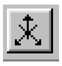
Dibujar la gráfica de la función

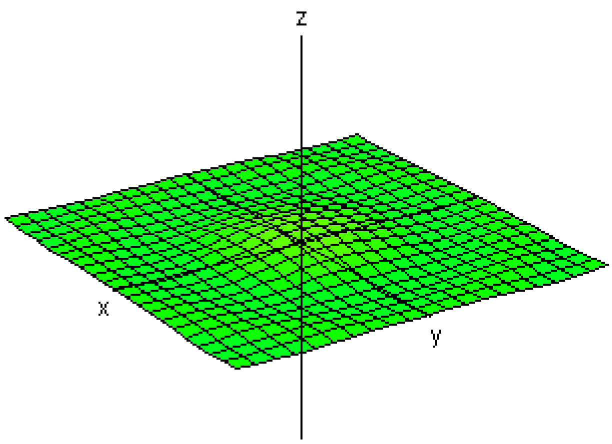
$$f(x,y)=\frac{\cos\left(\dfrac{x^2+y^2}{4}\right)}{3+x^2+y^2}.$$

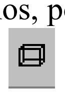
Solución

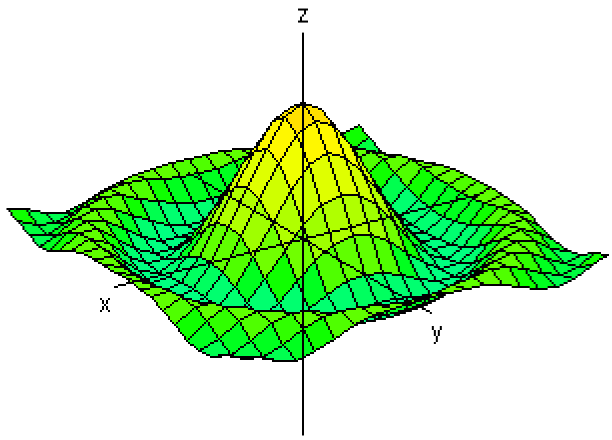
Editamos la función

$$F(x,\ y) := \frac{\text{COS}\left(\dfrac{x^2+y^2}{4}\right)}{3+x^2+y^2}$$

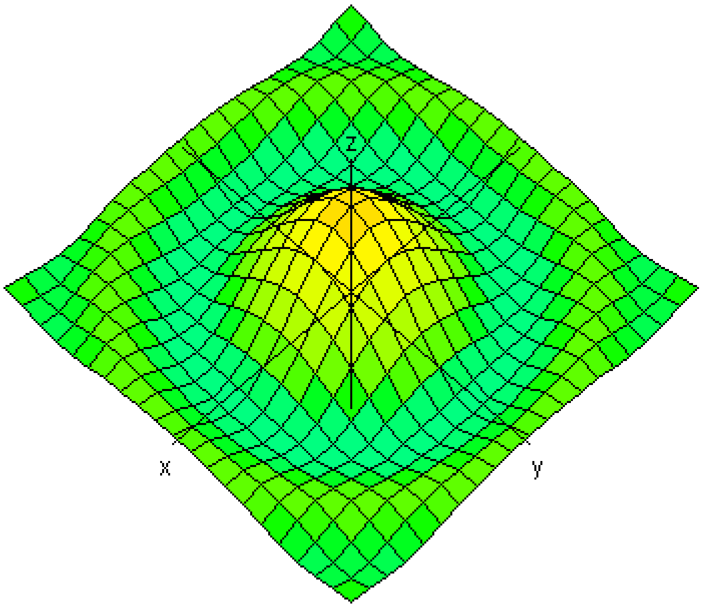
y marcamos en *Ventana* la opción *Nueva ventana 3D* o  y una vez abierta la ventana 3D marcamos nuevamente  y obtenemos



Como el recorrido de la función coseno es [-1,-1], el recorrido de nuestra función es [-1/3,1/3]. Modificamos, por tanto, la escala en la variable *z*, para obtener una mejor visión de la gráfica. Marcamos  y fijamos el mínimo de la variable *z* en –0.5 y el máximo en 0.5, obteniendo

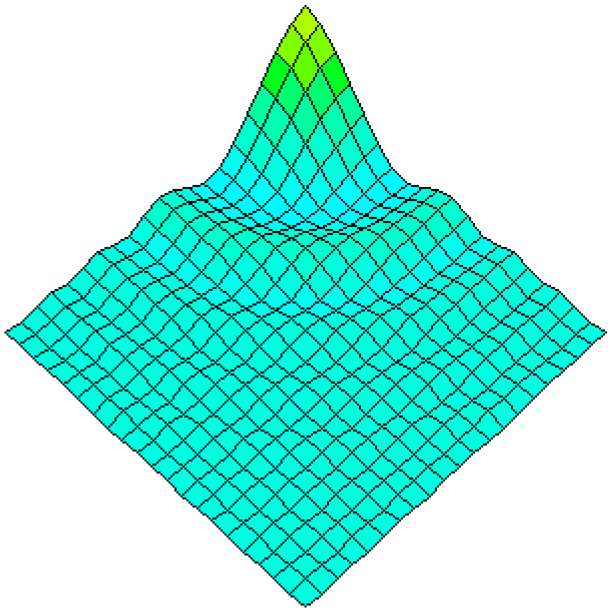


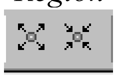
Para cambiar el punto de referencia del observador marcamos en *Seleccionar* la opción *Posición de ojo* o equivalentemente  y cambiamos las *Coordenadas del ojo*. Por ejemplo, si: x=10, y=10, z=24, obtenemos

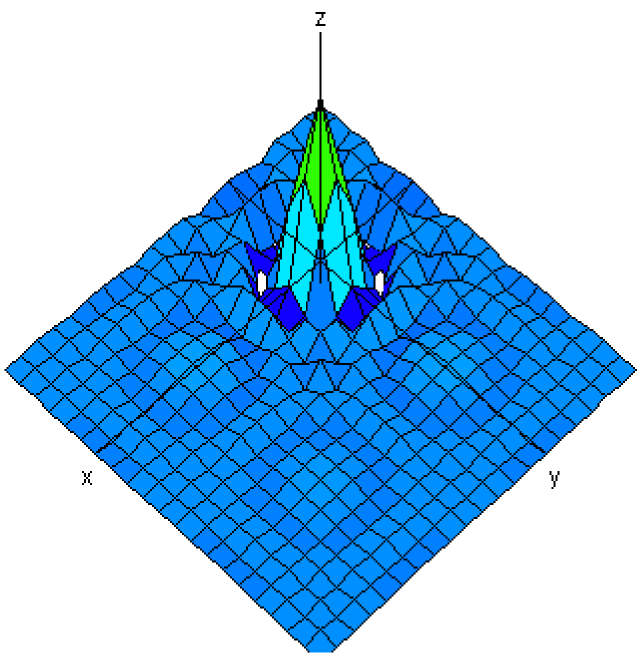


Podemos conseguir el mismo efecto (cambio de posición del ojo) utilizando los iconos


Si lo que queremos es enfocar a otro punto de la gráfica para ver un trozo diferente de la misma marcamos en *Seleccionar* la opción *Región*. Por ejemplo, cambiando las coordenadas del *Centro* por: x=5, y=5, z=0.2, obtenemos



Si lo que queremos es ampliar o disminuir la visión que tenemos de la gráfica marcamos en *Seleccionar* la opción *Región* y cambiamos *Longitud* o, equivalentemente, pinchamos el botón de herramientas  que nos interese. Por ejemplo, considerando: x=25, y=25 y z=0.5, obtenemos



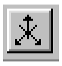
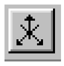
EJEMPLO 5.2.

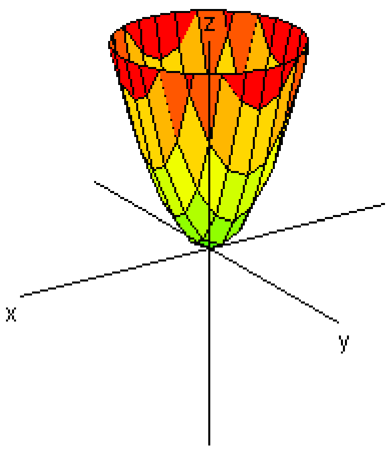
Dada la función $f(x,y)=x^2+y^2$, se pide:
(a) dibujar su gráfica
(b) construir sus curvas de nivel.

Solución

(a) Para dibujar la gráfica editamos la expresión

$$F(x, y) := x^2 + y^2$$

Como en el ejemplo anterior marcamos en *Ventana* la opción *Nueva ventana 3D* o  y una vez abierta la ventana 3D marcamos nuevamente  y obtenemos

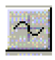


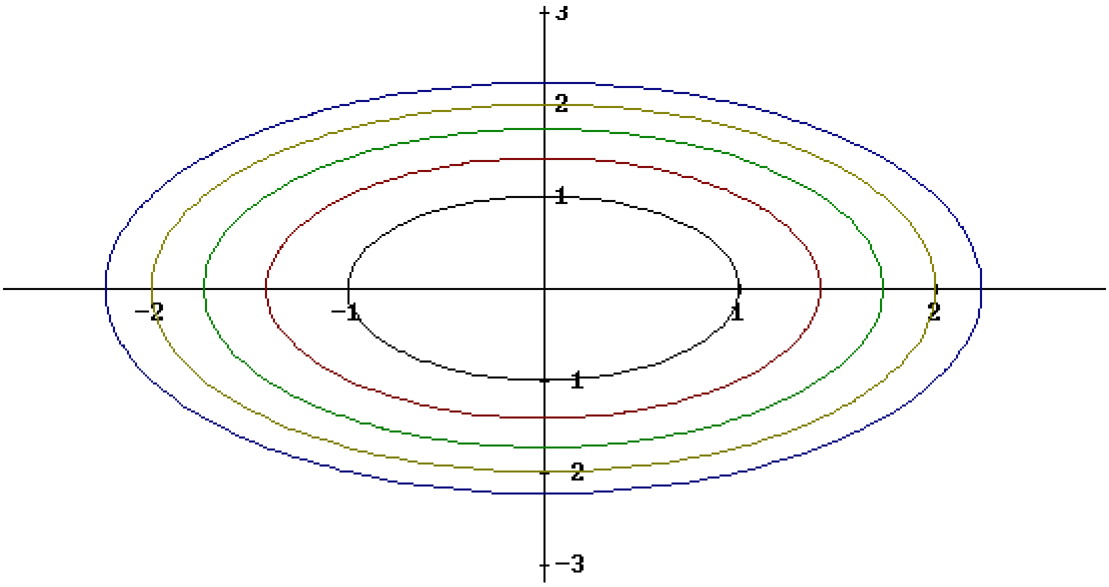
(b) Las curvas de nivel de esta función son de la forma *f*(*x*,*y*)=*k*. Un camino para representar estas curvas sería ir dando valores a *k* y para cada uno de ellos representar la ecuación *f*(*x*,*y*)=*k*. Utilizando la función VECTOR podemos agrupar en una misma expresión las curvas de nivel que nosotros queramos; por ejemplo cuando *k* va desde 1 hasta 5. Editando y simplificando la expresión

$$\mathrm{VECTOR}(F(x, y) = k, k, 1, 5)$$

obtenemos

$$\left[x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2, x^2 + y^2 = 3, x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 5\right]$$

Si abrimos ahora una *Ventana 2D* y mandamos representar con el icono  obtenemos las gráficas de esas 5 curvas de nivel:



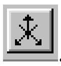
EJEMPLO 5.3.

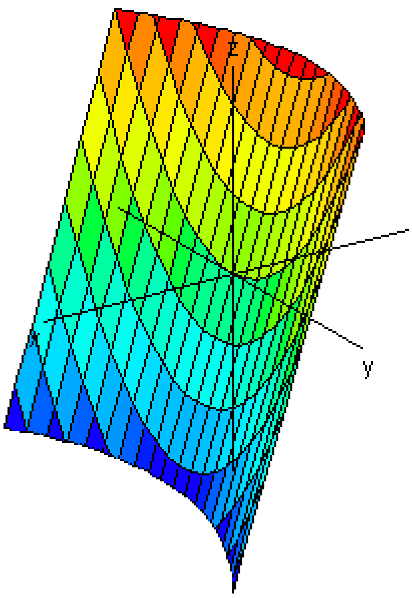
Dibujar la gráfica y las curvas de nivel de la función $f(x,y)=\dfrac{y^2}{5}-3x$.

Solución

Editamos la expresión

$$F(x,\ y) := \frac{y^2}{5} - 3 \cdot x$$

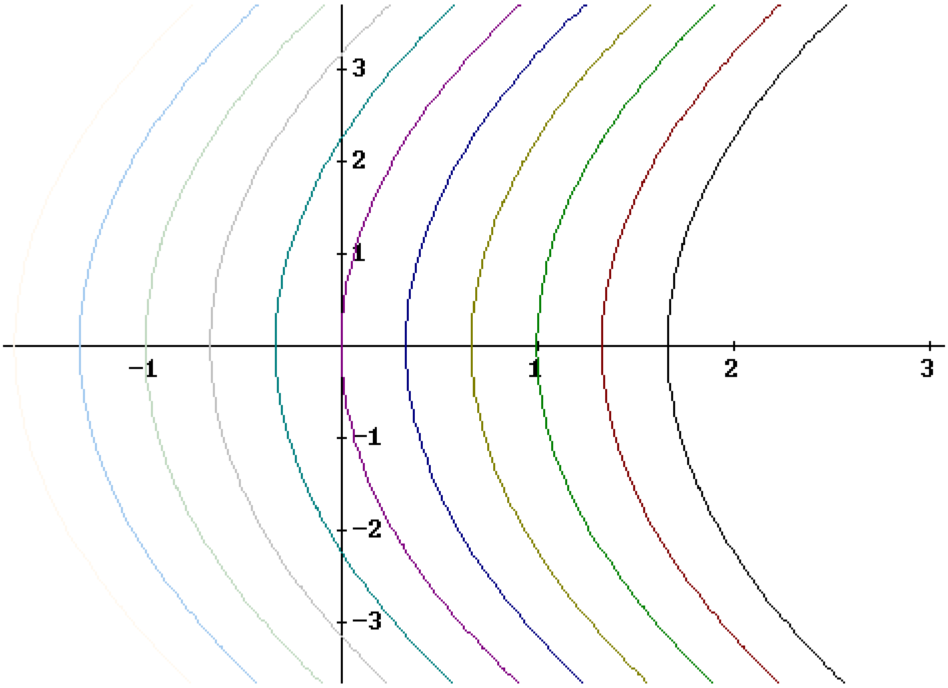
abrimos una *Ventana 3D*, marcamos . La gráfica que obtenemos es



Si deseamos dibujar las curvas de nivel de la función, debemos representar las ecuaciones $f(x,y)=k$, por ejemplo para k desde –5 a 5, editando

```
VECTOR(F(x, y) = k, k, -5, 5)
```

que al simplificar y representar nos da las curvas de nivel



5.2. LÍMITES Y CONTINUIDAD.

Como bien sabemos, en funciones de varias variables el concepto de límite es mucho más complejo que en funciones de una variable debido a que a un punto nos podemos aproximar por muchas direcciones diferentes. Veamos algunos ejemplos que nos permiten estudiar la continuidad de la función a través de la información que nos da su límite.

<u>EJEMPLO 5.4.</u>

Determinar si es continua en (0,0) la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

<u>Solución</u>

Estudiamos en primer lugar la existencia de límite en dicho punto. Para calcular dicho límite calculamos sus límites reiterados. Comenzamos calculando primero el límite respecto de la variable x y después respecto de la variable y. Editamos la siguiente función

$$\mathrm{F(x,\ y)\ :=\ IF}\left(\mathrm{x\ =\ y,\ 0,\ }\frac{\mathrm{x\ +\ y}}{\mathrm{x\ -\ y}}\right)$$

<u>Nota</u>: La función IF se utiliza para escribir funciones definidas a trozos.

En *Cálculo* seleccionamos la opción *Límite* (*Variable x, Punto* 0) o, equivalentemente, pinchamos el botón de herramientas 

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0}\left(\mathrm{F(x,\ y)\ :=\ IF}\left(\mathrm{x\ =\ y,\ 0,\ }\frac{\mathrm{x\ +\ y}}{\mathrm{x\ -\ y}}\right)\right)$$

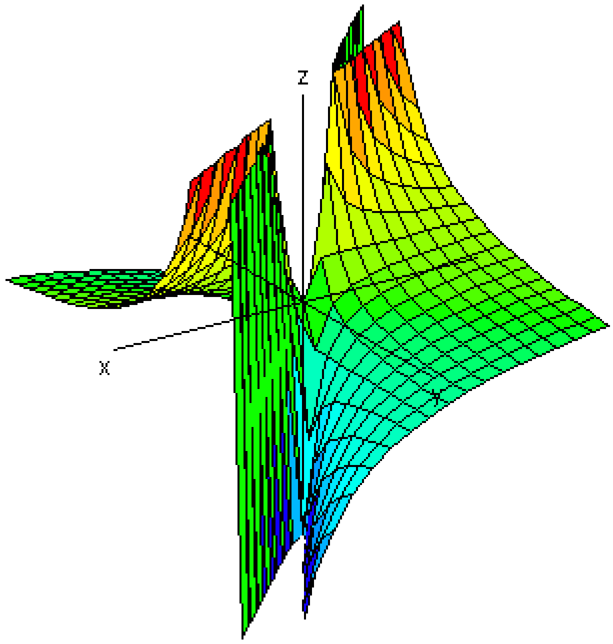
y sobre esta última expresión repetimos lo anterior, *Límite* (*Variable y, Punto* 0)

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(F(x,\ y) := \mathrm{IF}\left(x = y,\ 0,\ \frac{x + y}{x - y}\right)\right)$$

que tras *Simplificar* (botón de herramientas [=]) nos da –1.

De la misma forma podemos calcular el otro límite reiterado, primero respecto de la variable *y* en 0 y a continuación respecto de la variable *x* en 0 que al simplificar resulta 1. Como no coinciden los límites reiterados entonces podemos asegurar que no existe el límite en (0,0) y por tanto la función no es continua en (0,0).

Veamos la gráfica de dicha función. Situándonos en la expresión *f*(*x*,*y*) pasamos a representarla



EJEMPLO 5.5.

Estudiar la continuidad en (0,0) de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución

Definimos la función editando la expresión

$$F(x,\ y) := \mathrm{IF}\left(x = 0 \wedge y = 0,\ 0,\ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

En este caso para el estudio del límite vamos a utilizar el cálculo de límites direccionales, nos acercaremos al punto (0,0) por rectas que pasan por dicho punto; es decir, rectas de la forma $y=mx$. Por tanto, calculamos

$$lim_{(y=mx),(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Primero editamos

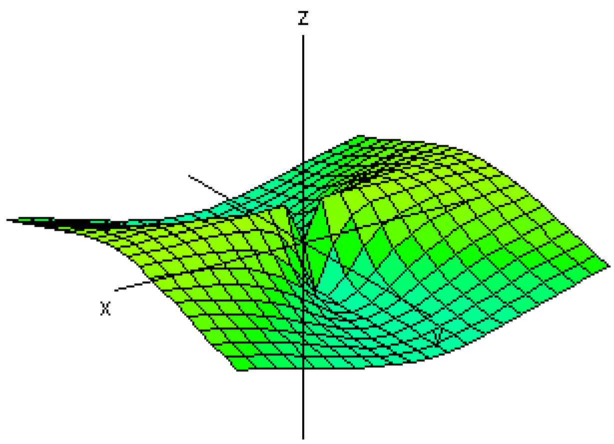
$$F(x,\ m\cdot x)$$

y calculamos el límite cuando x tiende a 0 (en *Cálculo* opción *Límite* (*Variable x, Punto* 0)) obteniendo después de *Simplificar*

$$\frac{1-m^2}{m^2+1}$$

Por tanto no existe el límite, ya que el resultado depende de la pendiente de la recta por la que nos acerquemos al punto (0,0).

Veamos la gráfica de dicha función. Nos situamos en la expresión $f(x,y)$ y representamos



5.3. DERIVADAS PARCIALES. VECTOR GRADIENTE. MATRIZ HESSIANA.

EJEMPLO 5.6.

Estudiar la existencia de derivadas parciales en (0,0) de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución

Definimos la función editando la expresión

$$F(x,\ y) := IF\left(x = 0 \wedge y = 0,\ 0,\ \frac{x \cdot y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}\right)$$

Calculamos primero la derivada parcial de la función respecto de x en el (0,0); esto es,

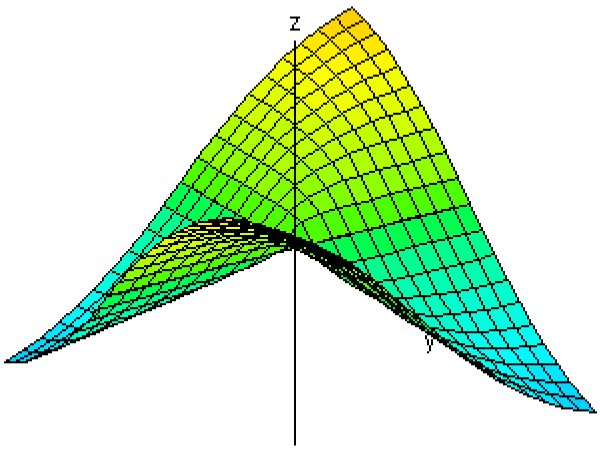
$$f_x(0,0) = lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}.$$

Para calcular dicha derivada editamos la expresión

$$\frac{F(t,\ 0) - F(0,\ 0)}{t}$$

sobre la cual aplicamos *Calcular-Límite* respecto de t en el *punto* 0 y al *Simplificar* se obtiene 0. Por tanto, $f_x(0,0)=0$.

Para calcular la derivada parcial de f respecto de y en el (0,0) repetimos el proceso obteniendo $f_y(0,0)=0$. La gráfica de la función es la siguiente



EJEMPLO 5.7.

Calcular el vector gradiente de la función anterior en el punto (1,1).

Solución

En un entorno suficientemente pequeño del punto (1,1) la función $f(x,y)$ está definida por

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por tanto, editamos primero una nueva función no definida en el (0,0) que también llamamos $f(x,y)$:

$$F(x,\ y) := \frac{x \cdot y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

Calculamos $f_x(x,y)$ (*Cálculo-Derivadas* o ∂, *variable* x, *orden* 1)

$$\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

y después sustituimos el punto (1,1) utilizando o *Simplificar-Sustituir Variable*. Obtenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Calculamos ahora $f_y(x,y)$ siguiendo el proceso anterior (*Cálculo-Derivadas* o , *variable y*, *orden* 1) y sustituimos en el punto (1,1) obteniendo

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Por tanto, $\nabla f(1,1) = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

EJEMPLO 5.7.

Calcular la matriz Hessiana de la función $f(x,y)=2x^2y+y^2$ en el punto (0,1).

Solución

Editamos la expresión

$$F(x, y) := 2 \cdot x^2 \cdot y + y^2$$

Calculamos las derivadas parciales segundas de dicha función el en punto (0,1).

Para calcular $f_{xx}(0,1)$ aplicamos *Cálculo-Derivadas* o , *variable x*, *orden* 2 y al simplificar obtenemos

$$4 \cdot y$$

que al sustituir en x=0, y=1, nos da $f_{xx}(0,1)=4$.

Para calcular $f_{xy}(0,1)$ aplicamos *Cálculo-Derivadas* o , *variable x*, *orden* 1, sobre la expresión que obtenemos aplicamos de nuevo *Cálculo-Derivadas* o , *variable y*, *orden* 1 y al simplificar obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(F(x, y) := 2 \cdot x^2 \cdot y + y^2\right)$$

$$\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\left(F(x, y) := 2 \cdot x^2 \cdot y + y^2\right)$$

$$4 \cdot x$$

que al sustituir en x=0, y=1, nos da $f_{xy}(0,1)=0$. Por el Teorema de Schwartz de las derivadas parciales cruzadas sabemos que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, por tanto, $f_{yx}(0,1)=0$.

Por último para calcular $f_{yy}(0,1)$ aplicamos *Cálculo-Derivadas* o , *variable y*, *orden* 2 y al simplificar obtenemos

$$2$$

y por tanto $f_{yy}(0,1)=2$.

Así pues la matriz Hessiana pedida es

$$Hf(0,1)=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nota: Para calcular el gradiente o la matriz Hessiana de una función de varias variables podemos seguir el siguiente camino alternativo ya que DERIVE dispone de una función básica GRAD que nos ayuda a calcularlas directamente. Para utilizar dicha función cargamos el fichero VECTOR.MTH (*Archivo-Leer-Utilidad*). La función GRAD está definida para funciones de tres variables. Como nuestra función es de dos variables tenemos que decir cuales son nuestras variables.

Editamos la expresión

```
GRAD(F(x, y), [x, y])
```

y al simplificar obtenemos el vector gradiente de $f(x,y)$:

$$\left[4\cdot x\cdot y,\ 2\cdot x^2 + 2\cdot y\right]$$

Para calcular la matriz Hessiana de $f(x,y)$ editamos la expresión

```
GRAD(GRAD(F(x, y), [x, y]), [x, y])
```

y simplificamos, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 4\cdot y & 4\cdot x \\ 4\cdot x & 2 \end{bmatrix}$$

Como hemos dicho la función GRAD asume por defecto que la función de varias variables de la que queremos calcular el vector gradiente es una función de tres variables. La función del ejemplo anterior es una función de dos variables y por tanto tenemos que añadir esta información. Para calcular el vector gradiente de una función de tres variables será, por tanto, suficiente escribir GRAD($f(x,y,z)$) para calcular el vector gradiente y GRAD(GRAD($f(x,y,z)$)) para calcular la matriz Hessiana.

5.4. DERIVADAS DIRECCIONALES. DIFERENCIABILIDAD.

EJEMPLO 5.9.

Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y)=3x^2+y$ en el punto (0,0) y en la dirección del vector (1,1).

Solución

Vamos a obtener la derivada direccional. Por definición

$$f_{(1,1)}(0,0) = lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0+h)-f(0,0)}{h\|(1,1)\|}$$

Para efectuar este cálculo editamos la expresión que define la función

$$F(x,\ y) := 3\cdot x^2 + y$$

A continuación editamos la expresión de la que queremos calcular el límite

$$\frac{F(0 + h,\ 0 + h) - F(0,\ 0)}{h}$$

Calculamos el límite de esta expresión (*Cálculo-Límite,* o equivalentemente respecto de la *variable h* en el *punto* 0),

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(0 + h,\ 0 + h) - F(0,\ 0)}{h}$$

y al simplificar obtenemos 1.

Como el módulo del vector (1,1) no es unitario, debemos dividir dicho resultado por el módulo de este vector $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$. Obtenemos como resultado final que la derivada direccional de la función $f(x,y)=3x^2+y$ en el punto (0,0) y en la dirección del vector (1,1) es $1/\sqrt{2}$.

Un modo análogo de enfrentarse al problema requiere la comprobación de que f es diferenciable. Para ello calculamos sus derivadas parciales respecto de las variables x e y (*Cálculo-Derivadas* o, equivalentemente, *variable x, orden* 1) y simplificando obtenemos

$$\frac{d}{dx} F(x,\ y)$$

$$6 \cdot x$$

Y de manera análoga para calcular la derivada parcial respecto de la variable y

$$\frac{d}{dy} F(x,\ y)$$

$$1$$

Ambas derivadas parciales son continuas en R^2 y , por tanto, f es diferenciable. Por ser f diferenciable podemos aplicar la siguiente propiedad

$$f_{(1,1)}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$$

Pasamos a calcular el vector gradiente de f en el punto (0,0) editando la expresión

$$\mathrm{GRAD}(F(x,\ y),\ [x,\ y])$$

simplificando obtenemos

$$[6 \cdot x,\ 1]$$

y sustituyendo en la expresión obtenida el punto (0,0) (*Simplificar-Sustituir Variable* o , x=0)

$$[0,\ 1]$$

Nos resta por calcular el producto escalar de los vectores (0,1) y $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$

$$[0,\ 1] \cdot \left[\frac{1}{2^{1/2}},\ \frac{1}{2^{1/2}}\right]$$

que nos da como resultado $\sqrt{2}/2$.

EJEMPLO 5.10.

Calcular el valor aproximado de $\ln(0{,}09^3+0{,}99^3)$ utilizando la diferencial.

<u>Solución</u>

Comprobemos en primer lugar si la función ln es diferenciable en el punto (0,1). Para ello debemos calcular sus derivadas parciales. Editamos la función

$$F(x,\ y) := \mathrm{LN}(x^3 + y^3)$$

y en *Cálculo* seleccionamos la opción *Derivadas*. Primero calculamos la derivada de *orden* 1 respecto de la variable *x*

$$\frac{d}{dx}\left(F(x,\ y) := \mathrm{LN}(x^3 + y^3)\right)$$

Simplificando se obtiene

$$\frac{3 \cdot x^2}{x^3 + y^3}$$

que es una función continua en (0,1). Sustituyendo en el punto x=0, y=1 (*Simplificar-Sustituir Variable* o) tenemos

$$\frac{3 \cdot 0^2}{0^3 + 1^3}$$

y simplificando se obtiene 0.

De igual forma derivamos la función respecto de la variable *y*, *orden* 1 y obtenemos

$$\frac{d}{dy}\ F(x,\ y)$$

$$\frac{3 \cdot y^2}{x^3 + y^3}$$

que también es continua en (0,1). Nuevamente al sustituir x=0, y=1, resulta que nos da el valor 3 al simplificar. Luego $\nabla f(0{,}1) = (0{,}3)$.

Como las dos derivadas parciales son continuas en un entorno del punto (0,1), podemos aproximar el valor de la función mediante la diferencial ya que

$$f(0{,}09,\quad 0{,}99) \approx f(0{,}1) + df(0{,}1) = f(0{,}1) + \nabla f(0{,}1) \cdot (0{,}09 - 0,\quad 0{,}99 - 1)$$

por tanto si editamos

$$F(0,\ 1) + [0,\ 3] \cdot [0.09,\ -0.01]$$

tras simplificar y aproximar obtenemos

$$-0.03$$

Así –0,03 es el valor aproximado de ln($0{,}09^3$+$0{,}99^3$) que hemos obtenido utilizando la diferencial.

Obsérvese que si aproximamos el valor de la expresión *f*(0.09^3,0.99^3) editando

$$F(0.09^3,\ 0.99^3)$$

tras simplificar obtenemos

$$- \mathrm{LN}\left(\frac{3814697265625}{2283793311967765347}\right) - 16 \cdot \mathrm{LN}(2)$$

resultado que aproximando nos da el valor

$$-0.0903540$$

Por tanto concluimos que utilizando la diferencial no obtenemos una buena aproximación.

Sugerimos como ejercicio para el lector calcular una mejor aproximación de $f(0.09^3,0.99^3)$ utilizando el polinomio de Taylor de orden en el punto (0,1).

5.5.TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

EJEMPLO 5.11.

Dada la ecuación implícita $2e^y-x-y-2=0$

(a) ¿Define esta ecuación una función del tipo $y=h(x)$, función definida respecto de la variable x, en un entorno de (0,0)? En caso afirmativo, calcular $h'(0)$.

(b) ¿Define a su vez una función $x=g(y)$ en un entorno de (0,0)? ¿Podemos en este caso calcular de forma explícita la función g?

Solución

Definamos en primer lugar a la función $f(x,y)$, editando la expresión

$$F(x, y) := 2 \cdot ê^{y} - x - y - 2$$

(Obsérvese que el número e se edita utilizando el acento circunflejo, es decir, con el símbolo ê).

(a) Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita para la ecuación anterior.

(i) ¿$f(0,0)=0$?

Si editamos la expresión "$f(0,0)$" y simplificamos, comprobamos que la respuesta es afirmativa.

(ii) ¿Existen y son continuas en un entorno del punto (0,0) las derivadas parciales de f?

Calculemos las derivadas parciales de f.

Para calcular f_x (*Cálculo-Derivadas*, respecto de x, orden 1)

$$\frac{d}{dx} F(x, y)$$

que al simplificar nos da –1. Se trata de una función constante y, por tanto, continua en R^2 y en particular en cualquier entorno del (0,0).

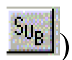
De la misma forma, calculamos ahora f_y.

$$\frac{d}{dy} F(x, y)$$

$$2 \cdot ê^{y} - 1$$

y vemos que también se trata de una función continua en R^2.

(iii) ¿$f_y(0,0)\neq 0$?

Sustituyendo en la última expresión $y=0$ (*Simplificar-Sustituir Variable* o 

) se obtiene que $f_y(0,0)=1$ y, por tanto, la respuesta también es afirmativa.

Luego, efectivamente, se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implícita y tenemos que $h'(0)= -f_x(0,0)/ f_y(0,0)= -(-1)/1=1$.

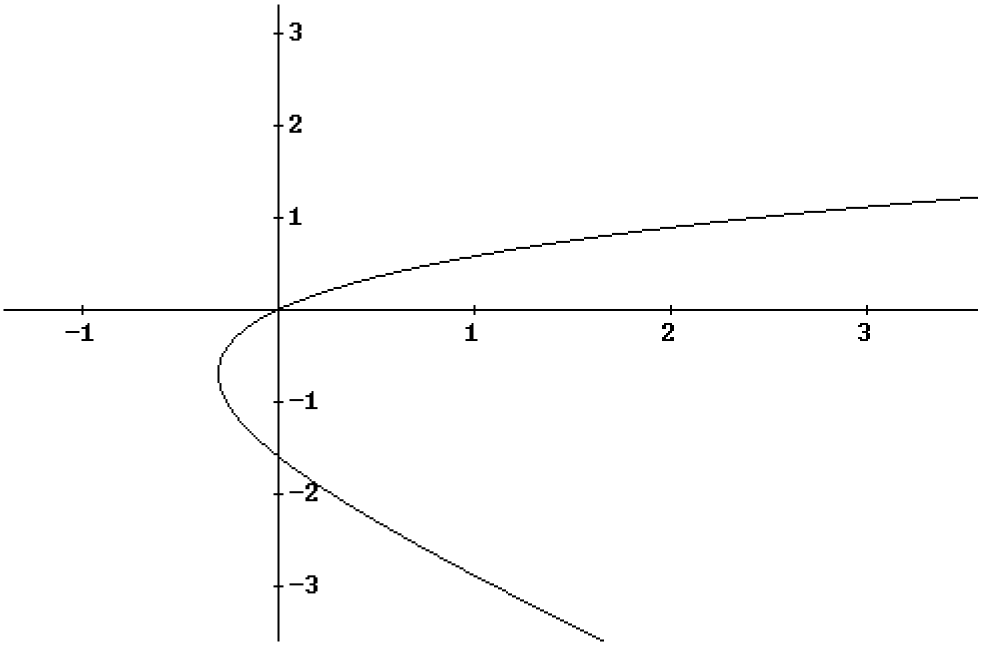
Para comprobar si existe una función g tal que x=g(y) basta comprobar la tercera hipótesis del teorema ($f_x(0,0)\neq 0$). Efectivamente, esta condición se cumple. Por tanto sabemos que existe la función g. El Teorema de la Función Implícita sólo nos garantiza su existencia, pero no nos da un método para calcular su expresión. Aun así en algunos casos especiales se puede obtener la expresión de dicha función. Por ejemplo en este caso utilizando la secuencia *Resolver-Expresión Algebraico*, o  y después simplificamos obtenemos

$$\mathrm{SOLVE}(F(x,\ y) := 2\cdot \hat{e}^{y} - x - y - 2,\ x)$$

$$\left[x = 2\cdot \hat{e}^{y} - y - 2\right]$$

que determina la relación funcional pedida, siendo $g(y)= 2e^{y}-y-2$.

Estudiemos ahora la gráfica de la ecuación $f(x,y)=0$ (esto equivale a ver la curva de nivel 0 de la función $f(x,y)$). Abrimos una *Ventana 2D*, mandamos representar y obtenemos



Esta gráfica nos muestra que en un entorno del (0,0) se verifica la existencia de ambas funciones h y g ya que la recta tangente a la curva en el (0,0) no es paralela a ninguno de los dos ejes. Además se obtiene la existencia "global" de g y "no global" de f.

<u>EJEMPLO 5.12.</u>

Determinar si la ecuación implícita

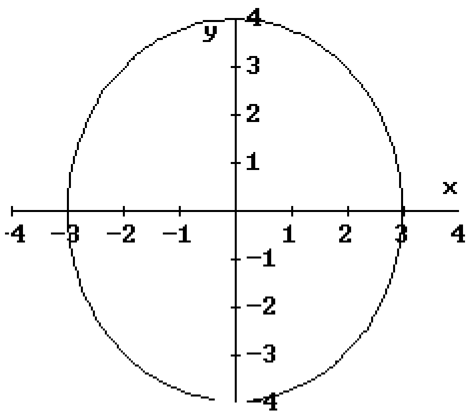
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

define a y en función de x (y=f(x)) en un entorno del punto (3,0).

<u>Solución</u>

Veámoslo geométricamente. Para ello representamos la gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Obsérvese que en ningún entorno del punto (3,0) existe una dependencia funcional unívoca de *y* respecto de *x*, ya que cualquier recta vertical que tracemos en puntos de cualquier entorno del punto (3,0) se cruza con dos puntos de la curva, ya que la recta tangente a la curva en dicho punto paralela al eje x=0. Por tanto en este caso podemos afirmar que no existe una función $y=f(x)$ definida en ningún entorno de (3,0).

5.6.EXTREMOS RELATIVOS.

EJEMPLO 5.13.

Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Solución

Editamos la expresión que define la función

$$F(x,\ y) := x^3 + y^3 - 3\cdot x\cdot y$$

A continuación vamos a calcular sus puntos críticos. Calculamos el vector gradiente de esta función

$$\text{GRAD}(F(x,\ y),\ [x,\ y])$$

que al simplificar resulta

$$\left[3\cdot x^2 - 3\cdot y,\ 3\cdot y^2 - 3\cdot x\right]$$

Utilizando *Resolver-Sistema* e introduciendo las dos componentes del vector gradiente igualadas a 0 e iluminando las variables *x* e *y* respecto de las cuales resolvemos obtenemos

$$\text{SOLVE}(\left[3\cdot x^2 - 3\cdot y = 0,\ 3\cdot y^2 - 3\cdot x = 0\right],\ [x,\ y])$$

$$\left[x = 0 \wedge y = 0,\ x = 1 \wedge y = 1,\ x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \wedge y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2},\ x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2} \wedge y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot \hat{\imath}}{2}\right]$$

Nosotros estamos únicamente interesados en las raíces reales ya que las variables de *f* son reales.

Sustituyendo los valores obtenidos para la variable *x* y la ecuación que define *y* en función de *x* ($y=x^2$) obtenemos que si x=0 entonces y=0. Así encontramos el primer punto crítico (0,0) y si x=1 obtenemos el punto (1,1).

Procedamos ahora a su clasificación utilizando la matriz Hessiana

$$\mathrm{GRAD(GRAD(F(x,\ y),\ [x,\ y]),\ [x,\ y])}$$

que al simplificar nos da

$$\begin{bmatrix} 6\cdot x & -3 \\ -3 & 6\cdot y \end{bmatrix}$$

Como deseamos ver cuales son las entradas de esta matriz en los puntos calculados anteriormente sustituimos las componentes x e y de cada punto o, de forma análoga, podemos editar la función

$$\mathrm{H}(x,\ y) := \begin{bmatrix} 6\cdot x & -3 \\ -3 & 6\cdot y \end{bmatrix}$$

y calcular el valor de esta en esos puntos

$$\mathrm{H}(0,\ 0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

El determinante de esta matriz se calcula editando

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

que al simplificar nos da –9. El punto (0,0) es, por tanto, un punto de inflexión.

Con (1,1), procedemos de igual forma, y la secuencia de resultados que se obtienen son los siguientes

$$\mathrm{H}(1,\ 1)$$

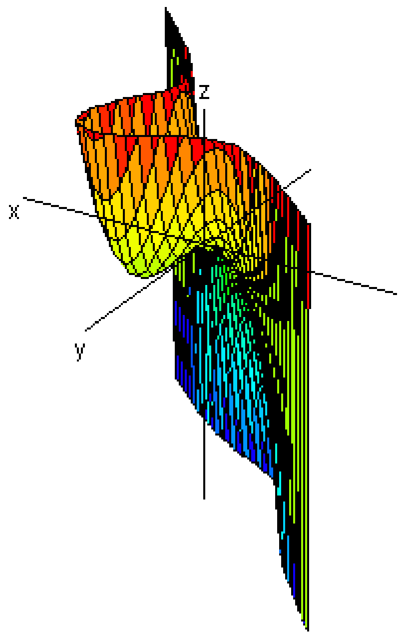
$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$27$$

Al tratarse de un determinante de signo positivo el punto (1,1) es un extremo y por ser la primera entrada de la matriz Hessiana, $f_{xx}(1,1)$, mayor que 0, es un mínimo local.

Vamos a efectuar la representación gráfica de la función para observar que, efectivamente, tenemos un mínimo local y un punto de inflexión en dichos puntos. Representándola y cambiando las coordenadas del ojo a x=-15, y=25 y z=12, la longitud 10:10:15 y centro x=0, y=0 y z=-1.5, obtenemos



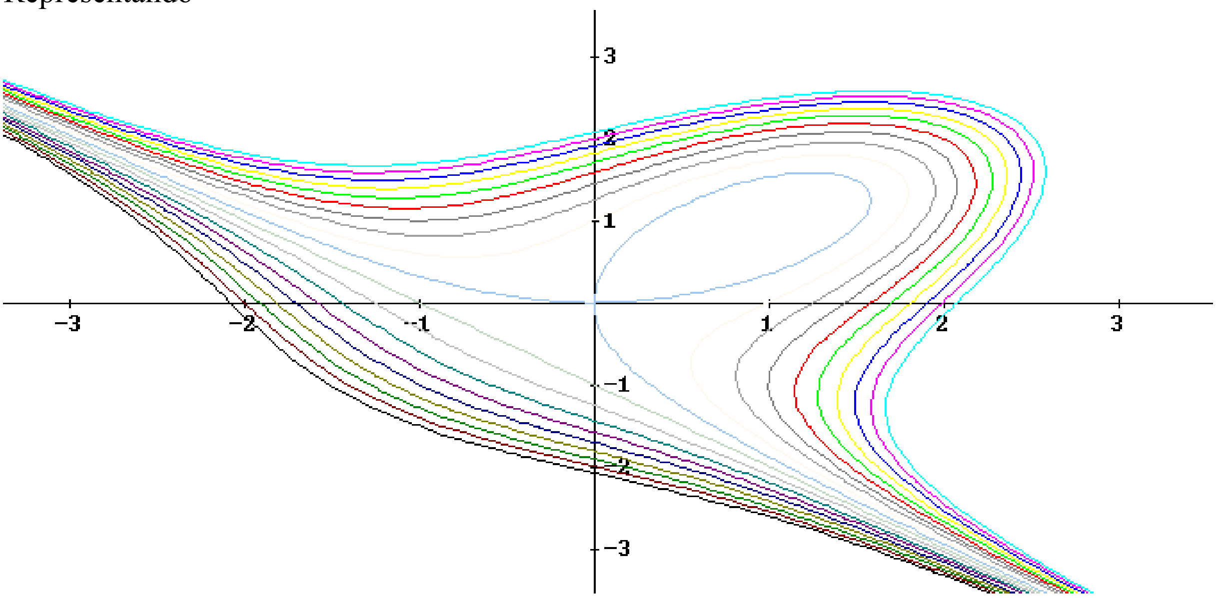
Una segunda alternativa para clasificar extremos locales podría ser estudiando sus curvas de nivel. Para obtener las curvas de nivel de esta función editamos

$$\text{VECTOR}(F(x, y) = k, k, -9, 9)$$

y al simplificar obtenemos

$$[x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -9, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -8, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -7, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -6, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -5, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -4, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -3, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -2, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = -1, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 0, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 1, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 2, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 3, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 4, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 5, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 6, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 7, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 8, x^3 - 3\cdot x\cdot y + y^3 = 9]$$

Representando



Donde vemos que el punto (1,1) es un punto crítico.

EJEMPLO 5.14.

Optimizar la función $f(x,y) = -\dfrac{y}{9+x^2+y^2}$.

Solución

Editamos la expresión

$$F(x,\ y) := -\frac{y}{9 + x^2 + y^2}$$

Para obtener los puntos críticos debemos resolver el sistema de ecuaciones que se obtienen editando

$$\text{GRAD}(F(x,\ y),\ [x,\ y]) = [0,\ 0]$$

y simplificando obtenemos

$$\left[\frac{2\cdot x\cdot y}{(x^2 + y^2 + 9)^2} = 0,\ -\frac{x^2 - y^2 + 9}{(x^2 + y^2 + 9)^2} = 0\right]$$

Los puntos críticos son las soluciones de este sistema de ecuaciones. Observamos que este sistema es equivalente al sistema

$$\left[2\cdot x\cdot y = 0,\ -(x^2 - y^2 + 9) = 0\right]$$

resolvemos éste siguiendo el proceso del ejemplo anterior para obtener los puntos críticos.

$$\text{SOLVE}(\left[2\cdot x\cdot y = 0,\ -(x^2 - y^2 + 9) = 0\right],\ [x,\ y])$$

$$[x = 0 \wedge y = 3,\ x = 0 \wedge y = -3,\ x = 3\cdot \hat{\imath} \wedge y = 0,\ x = -3\cdot \hat{\imath} \wedge y = 0]$$

De esta manera hemos obtenido dos puntos críticos (0,-3) y (0,3) (el resto de las soluciones del sistema no tiene componentes reales).

Procedemos a su clasificación utilizando la matriz Hessiana. Editamos

$$\text{GRAD}(\text{GRAD}(F(x,\ y),\ [x,\ y]),\ [x,\ y])$$

que al simplificar nos da

$$\left[\begin{array}{cc} -\dfrac{2\cdot y\cdot(3\cdot x^2 - y^2 - 9)}{(x^2 + y^2 + 9)^3} & \dfrac{2\cdot x\cdot(x^2 - 3\cdot(y^2 - 3))}{(x^2 + y^2 + 9)^3} \\ \dfrac{2\cdot x\cdot(x^2 - 3\cdot(y^2 - 3))}{(x^2 + y^2 + 9)^3} & \dfrac{2\cdot y\cdot(3\cdot x^2 - y^2 + 27)}{(x^2 + y^2 + 9)^3} \end{array}\right]$$

Sustituimos ahora en la matriz Hessiana el punto (0,-3) y obtenemos

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{2\cdot(-3)\cdot(3\cdot 0^2 - (-3)^2 - 9)}{(0^2 + (-3)^2 + 9)^3} & \dfrac{2\cdot 0\cdot(0^2 - 3\cdot((-3)^2 - 3))}{(0^2 + (-3)^2 + 9)^3} \\ \dfrac{2\cdot 0\cdot(0^2 - 3\cdot((-3)^2 - 3))}{(0^2 + (-3)^2 + 9)^3} & \dfrac{2\cdot(-3)\cdot(3\cdot 0^2 - (-3)^2 + 27)}{(0^2 + (-3)^2 + 9)^3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{54} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{54} \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es

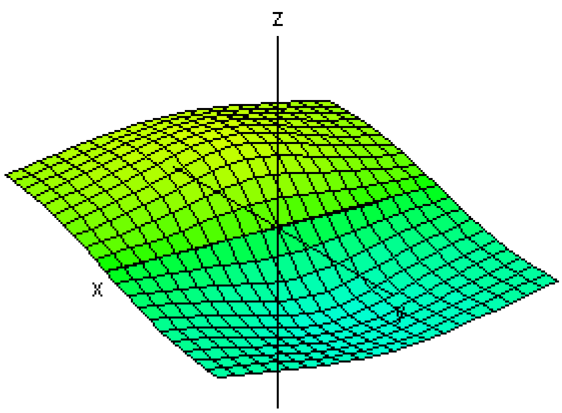
$$\text{DET}\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{54} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{54} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2916}$$

Por ser el determinante positivo, el punto (0,-3) es un extremo local. Como $f_{xx}(0,-3)<0$ se trata de un máximo local. Para el punto (0,3) seguimos el mismo procedimiento y vemos que se trata de un mínimo local.

Nota: Recordamos que para utilizar una expresión editada anteriormente podemos utilizar el botón F3. En este caso para calcular el determinante de la matriz Hessiana hemos seguido el siguiente camino: En *Editar*(*Autor*) escribimos DET y en lugar de escribir la matriz la podemos recuperar con F3 una vez iluminada.

Representemos la función, cambiando el *Rango* de la variable z de –0.5 a 0.5.

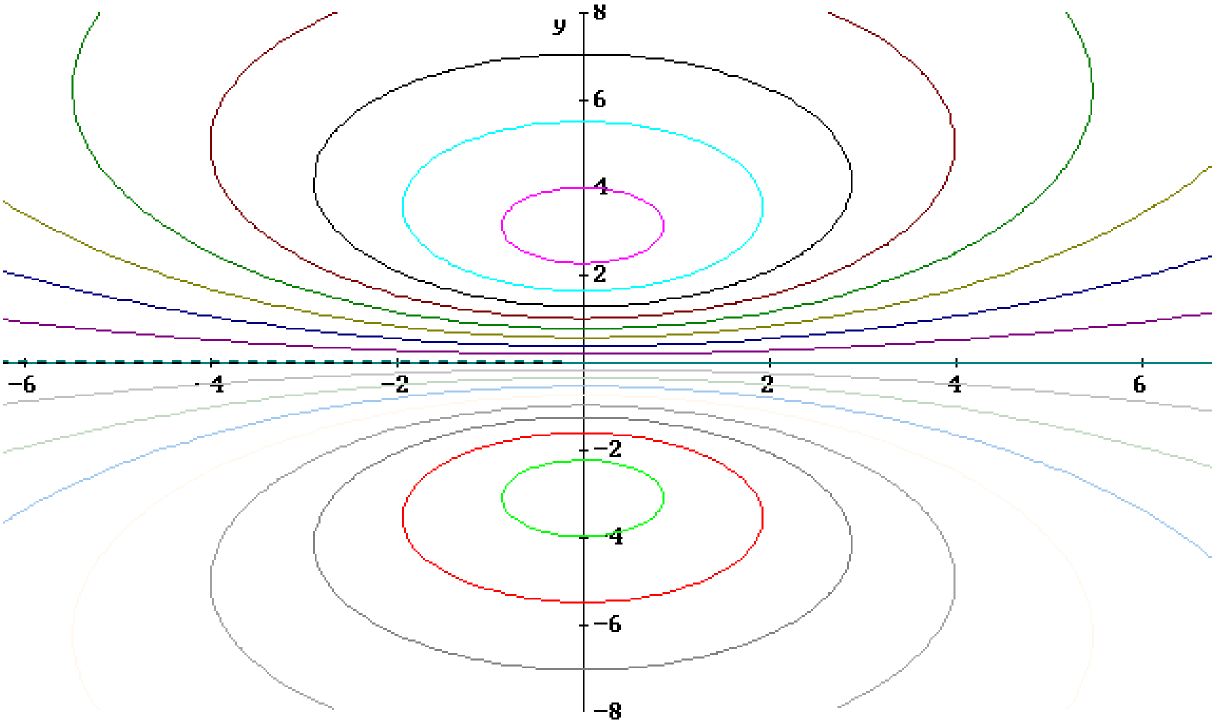


Calculamos sus curvas de nivel editando la expresión

$$\text{VECTOR}\left(F(x,\ y) = k,\ k,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0.02\right)$$

Nota: Obsérvese que en este caso estamos añadiendo una información adicional en la función VECTOR. Por defecto la distancia entre los valores que toma el parámetro k es de una unidad, pero si queremos considerar una distancia diferente tenemos que indicarlo. En este caso queremos que la distancia entre cada una de las curvas de nivel sea 0.02.

Las curvas de nivel son



Como puede observarse los puntos (0,3) y (0,-3) son puntos críticos.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

EJERCICIO 33.

Una empresa produce dos tipos de ordenadores O1 y O2 cuyos precios por unidad vienen dados por p_{O1}=100, p_{O2}=150.

La función de costes de la empresa es $C(x,y)=40 \ln x - 20 \ln y + 20x^2 + 35\, y^2$ siendo x e y las unidades de ordenadores producidas de cada uno de los dos tipos. Calcular los niveles de producción que permiten alcanzar el máximo beneficio.

EJERCICIO 34.

Optimizar la función $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$..

EJERCICIO 35.

Obtener la gráfica de la función $f(x,y)=y^2-x^2$.

EJERCICIO 36.

Dibujar las curvas de nivel de la función anterior.