8. ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES.

8.1. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES. COMBINACIÓN LINEAL.

EJEMPLO 8.1.

Estudiar si el vector $\bar{v} = (1,0,1,0)$ de R^4 es combinación lineal de los vectores

$$\bar{u}_1 = (0,1,2,-1), \bar{u}_2 = (0,-1,1,0), \bar{u}_3 = (0,1,0,1).$$

Solución.

Este problema se puede resolver de varias formas. La manera clásica consiste en plantear una ecuación vectorial del tipo

$$\bar{v} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + c\bar{u}_3$$

tal que si tiene solución, entonces el vector dado es combinación lineal de los restantes.

Para resolver este problema en DERIVE primero definimos los cuatro vectores editando las expresiones:

"v:=[1,0,1,0]", "u1:=[0,1,2,-1]", "u2:=[0,-1,1,0]" y "u3:=[0,1,0,1]".

```
v := [1, 0, 1, 0]
u1 := [0, 1, 2, -1]
u2 := [0, -1, 1, 0]
u3 := [0, 1, 0, 1]
```

a continuación introducimos la ecuación vectorial

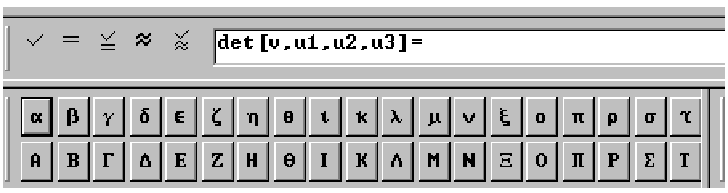
```
v = a·u1 + b·u2 + c·u3
```

que al simplificar nos da

```
[1 = 0, 0 = a - b + c, 1 = 2·a + b, 0 = c - a]
```

Obsérvese que la primera ecuación nunca se verifica lo cual nos indica que el sistema carece de solución

Una segunda alternativa de resolución podría ser el estudiar el rango de la matriz formada por los vectores. Si el rango es cuatro, esto quiere decir que son linealmente independientes y, por tanto, no existe combinación lineal. Esto se puede comprobar editando la expresión



que al pulsar (enter) nos da

```
DET([v, u1, u2, u3]) = 4
```

EJEMPLO 8.2.

Analizar la dependencia e independencia lineal de los siguientes vectores de R^5:

(1,2,-3,5,0), (2,-1,0,6,7), (-3,0,1,1,4), (1,5,-7,3,2)

Solución.

En primer lugar definimos en DERIVE los cuatro vectores:

$$u1 := [1,\ 2,\ -3,\ -5,\ 0]$$

$$u2 := [2,\ -1,\ 0,\ 6,\ 7]$$

$$u3 := [-3,\ 0,\ 1,\ 1,\ 4]$$

$$u4 := [1,\ 5,\ -7,\ 3,\ 2]$$

a continuación editamos en *Editar(Autor)-Expresión* la ecuación vectorial

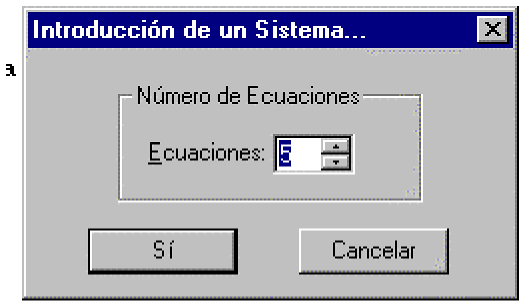
$$a \cdot u1 + b \cdot u2 + c \cdot u3 + d \cdot u4 = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Por definición de dependencia e independencia lineal, si existe solución no nula entonces son linealmente dependientes, y si la única solución es la nula son linealmente independientes. Al simplificar la expresión anterior se obtiene el sistema

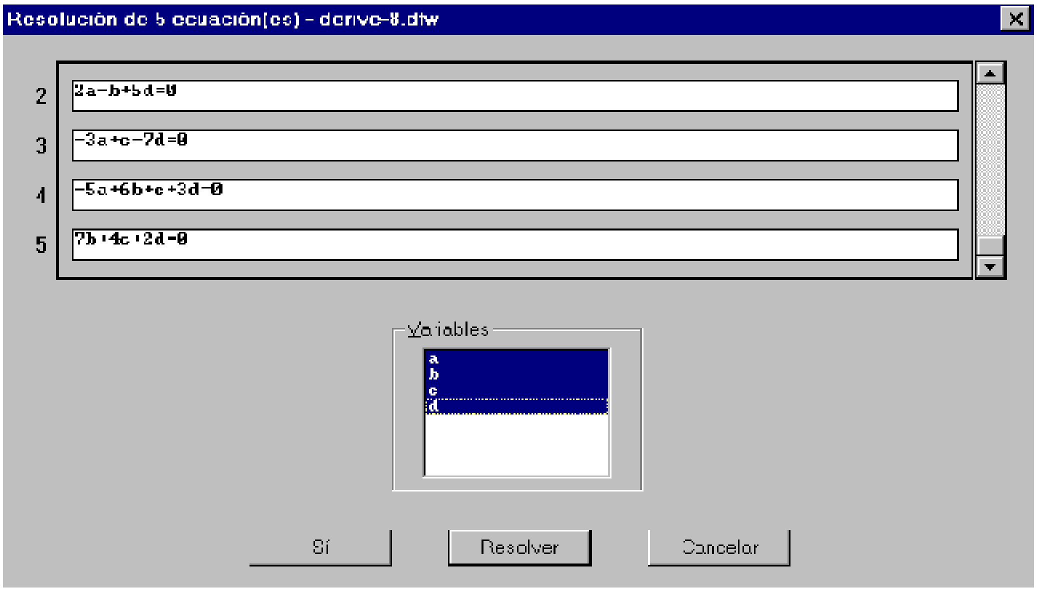
$$[a + 2 \cdot b - 3 \cdot c + d = 0,\ 2 \cdot a - b + 5 \cdot d = 0,\ - 3 \cdot a + c - 7 \cdot d = 0,\ - 5 \cdot a + 6 \cdot b + c + 3 \cdot$$

$$0,\ 7 \cdot b + 4 \cdot c + 2 \cdot d = 0]$$

y al resolverlo con los comandos *Resolver-Sistema de ecuaciones* obtenemos



pinchamos en Si y en la siguiente ventana introducimos las ecuaciones, y las variables en las cuales deseamos resolver el sistema



Pulsando Resolver se obtiene

$$[a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \wedge d = 0]$$

Por tanto, estos vectores son linealmente independientes.

8.2. SUBESPACIOS VECTORIALES. BASES. COORDENADAS.

EJEMPLO 8.3.

Dado el subespacio vectorial de R^4

$$W=L\{(1,1,1,1),(1,2,3,0),(5,7,9,3)\}$$

(a) Obtener sus ecuaciones paramétricas y cartesianas.
(b) Hallar una base de W.
(c) Determinar las coordenadas del vector (5,12,19,-2) en dicha base.

Solución.

(a) Editamos previamente los tres vectores que generan el subespacio

$$u1 := [1, 1, 1, 1]$$

$$u2 := [1, 2, 3, 0]$$

$$u3 := [5, 7, 9, 3]$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

Las ecuaciones paramétricas del subespacio se pueden obtener introduciendo la ecuación vectorial

$$[x, y, z, t] = a\cdot u1 + b\cdot u2 + c\cdot u3$$

Al simplificar se obtienen las ecuaciones paramétricas del subespacio

$$[x = a + b + 5\cdot c, y = a + 2\cdot b + 7\cdot c, z = a + 3\cdot b + 9\cdot c, t = a + 3\cdot c]$$

siendo a,b,c los parámetros con valores reales.

ECUACIONES CARTESIANAS.

Para obtener las ecuaciones cartesianas, necesitamos eliminar los tres parámetros a,b,c de las ecuaciones anteriores. Si iluminamos la primera ecuación y la resolvemos utilizando *Resolver Expresión* método Algebraico y dominio Complejo respecto del parámetro a

se tiene

$$a = x - b - 5 \cdot c$$

Si ahora sustituimos el valor de "a" por "x-b-5c" en el sistema inicial con la secuencia *Simplificar-SustituirVariable*

tras simplificar resulta

$$[x = x,\ y = x + b + 2 \cdot c,\ z = x + 2 \cdot b + 4 \cdot c,\ t = x - b - 2 \cdot c]$$

Obsérvese que la primera ecuación se ha convertido en una identidad. Despejemos el parámetro b de la segunda ecuación editando la misma y aplicando *Resolver-Expresión* (método:algebraico, campo: complejo) respecto de b se obtiene al simplificar

$$b = -x + y - 2 \cdot c$$

Si sustituimos en el anterior sistema "b" por "-x+y-2c" con *Simplificar-Sustituirvariable* tras simplificar se obtiene

$$[x = x,\ y = y,\ z = 2 \cdot y - x,\ t = 2 \cdot x - y]$$

Obsérvese que directamente se ha anulado el tercer parámetro, por lo que las ecuaciones cartesianas que nos quedan son:

$$z=2y-x$$
$$t=2x-y$$

Luego

$$W = \{(x,y,z,t) \in R^4 \,/\, z = 2y - x, t = 2x - y\}$$

(b) Para hallar una base de dicho subespacio, bastará tomar dos vectores que sean linealmente independiente, ya que de las ecuaciones cartesianas se deduce que la dimensión del subespacio es 2. Una posibilidad es construir una matriz formada por dos vectores y calcular su rango. Como necesitamos la función RANK, carguemos el fichero de utilidades VECTOR.MTH (*Archivo-Leer-Utilidades)* obsérvese que aparece en la ventana de edición el mensaje que nos indica la operación realizada

```
LOAD(C:\DfW5\Math\Vector.mth)
```

y a continuación editamos

$$\text{RANK}([u1,\ u2])$$

y al simplificar resulta

$$2$$

Luego los dos primeros vectores son linealmente independientes, y en consecuencia forman una base del subespacio vectorial W.

(c)Editemos el nuevo vector mediante el comando *Editar(Author)*

$$u4 := [5,\ 12,\ 19,\ -2]$$

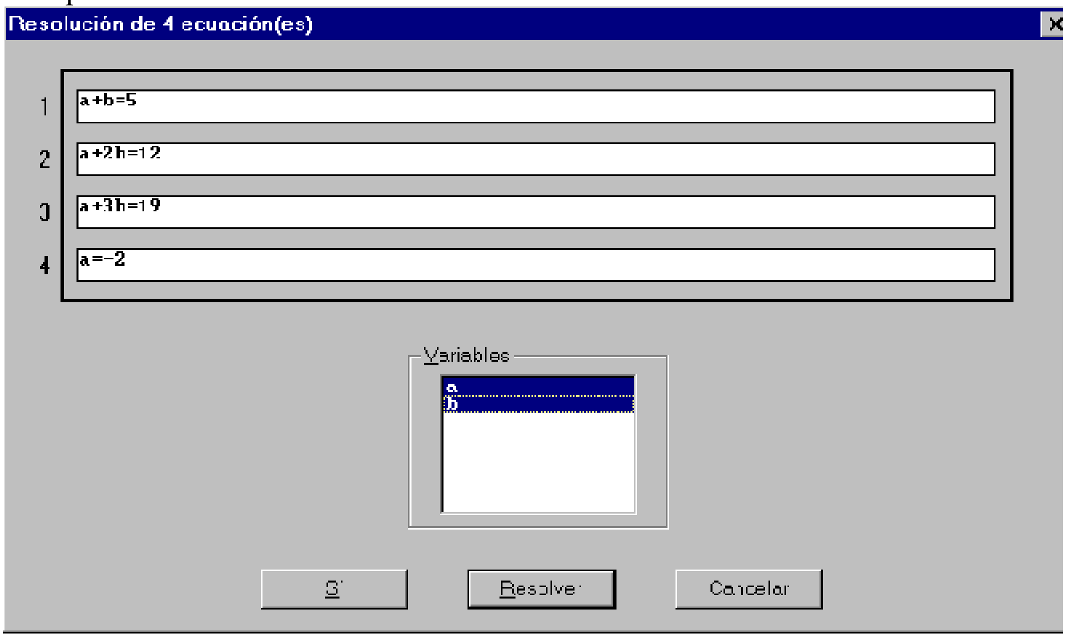
Para obtener las coordenadas de este vector respecto de la base B={u1,u2}, planteamos la siguiente ecuación vectorial

$$a \cdot u1 + b \cdot u2 = u4$$

Al simplificarla obtenemos el sistema

$$[a + b = 5,\ a + 2 \cdot b = 12,\ a + 3 \cdot b = 19,\ a = -2]$$

ecuaciones que introducimos en la ventana de resolución de ecuaciones



que al simplificar nos proporciona las coordenadas de este vector u4 respecto de la base dada

$$[a = -2 \wedge b = 7]$$

8.3 APLICACIÓN LINEAL. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

EJEMPLO 8.4.

Dada la aplicación $f : R^4 \to R^4$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (x - y + t, 2x + 4z - t, x + y, 2x + y - z + t)$$

(a) Comprobar que es una aplicación lineal.
(b) Calcular la matriz de *f* respecto de las bases canónicas.
(c) Obtener la matriz de *f* respecto de las bases
B_1={(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)} y
B_2={(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(1,1,1,1)}
(d) Determinar el núcleo y la imagen de *f* así como una base y la dimensión de dichos subespacios.

Solución

(a) La linealidad de la aplicación *f* se realiza comprobando la igualdad

$$f(a\overline{u} + b\overline{v}) = af(\overline{u}) + bf(\overline{v})$$

o bien

$$f(a\overline{u} + b\overline{v}) - af(\overline{u}) - bf(\overline{v}) = \overline{0}$$

En consecuencia en primer lugar debemos introducir la expresión

$$f(\overline{u}) = (u_1 - u_2 + u_4,\ 2u_1 + 4u_3 - u_4,\ u_1 + u_2,\ 2u_1 + u_2 - u_3 + u_4)$$

y para ello, en *Editar(Autor)-Expresión* escribimos

y al pulsar Si resulta

$$f(u) := [u_1 - u_2 + u_4,\ 2\cdot u_1 + 4\cdot u_3 - u_4,\ u_1 + u_2,\ 2\cdot u_1 + u_2 - u_3 + u_4]$$

Necesitamos también dos vectores genéricos de R^4 y para definirlos en primer lugar hemos de asegurarnos que el programa identifica variables de la forma "u1", es decir variables con más de un carácter. Para ello es preciso cambiar la configuración. En concreto hemos de seleccionar *Definir-Preferencias de Entrada-Palabra* y aparece en la ventana de edición la siguiente expresión:

```
InputMode := Word
```

Una vez hecho esto ya podemos editar las expresiones:

```
u := [u1, u2, u3, u4]
v := [v1, v2, v3, v4]
```

Por último, introducimos en *Editar(Autor)* la ecuación vectorial

```
f(a·u + b·v) - a·f(u) - b·f(v)
```

que una vez simplificada da lugar a

```
[0, 0, 0, 0]
```

Por tanto, la aplicación es lineal

(b) Como las columnas de la matriz asociada a la aplicación lineal *f* respecto de las bases canónicas son las imágenes de los vectores de la base canónica de R^4 del espacio inicial, entonces bastará editar la expresión

```
fa := [f([1, 0, 0, 0]), f([0, 1, 0, 0]), f([0, 0, 1, 0]), f([0, 0, 0, 1])]`
```

y al simplificar se obtiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que esta matriz la hemos nombrado como FA. Evidentemente este caso no requiere del uso de DERIVE, sin embargo lo mostramos para que se vea la dinámica de la construcción.

(c)Ahora tenemos dos bases distintas de la canónica. Definamos previamente en DERIVE los vectores v1, v2, v3, v4 de la base B_1 y w1,w2,w3,w4 de la base B_2 editando las expresiones

```
v1 := [1, 1, 1, 1]
v2 := [1, 1, 1, 0]
v3 := [1, 1, 0, 0]
v4 := [1, 0, 0, 0]
w1 := [0, 1, 1, 1]
w2 := [0, 0, 1, 1]
w3 := [0, 0, 0, 1]
w4 := [1, 1, 1, 1]
```

Para hallar la matriz asociada de la aplicación lineal respecto de estas bases tenemos que calcular las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base B_1 respecto de la base B_2.

Las coordenadas de f(v1) respecto de la base B_2 se obtienen editando

```
f(v1) = x1·w1 + x2·w2 + x3·w3 + x4·w4
```

lo que una vez simplificado se convierte en el sistema de ecuaciones

```
[1 = x4, 5 = x1 + x4, 2 = x1 + x2 + x4, 3 = x1 + x2 + x3 + x4]
```

cuya solución con *Resolver-Expresión* respecto de las variables x1,x2,x3,x4, al simplificar se obtiene

[x1 = 4 ∧ x2 = −3 ∧ x3 = 1 ∧ x4 = 1]

Por tanto, la primera columna de la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de f(v2) respecto de la base B_2 se calculan editando

f(v2) = x1·w1 + x2·w2 + x3·w3 + x4·w4

y al simplificar resulta

[0 = x4, 6 = x1 + x4, 2 = x1 + x2 + x4, 2 = x1 + x2 + x3 + x4]

Una vez resuelto el sistema se obtiene la segunda columna

[x1 = 6 ∧ x2 = −4 ∧ x3 = 0 ∧ x4 = 0]

Para las coordenadas de f(v3) efectuamos las mismas operaciones

f(v3) = x1·w1 + x2·w2 + x3·w3 + x4·w4

[0 = x4, 2 = x1 + x4, 2 = x1 + x2 + x4, 3 = x1 + x2 + x3 + x4]

SOLVE([0 = x4, 2 = x1 + x4, 2 = x1 + x2 + x4, 3 = x1 + x2 + x3 + x4], [x1, x2, x3, x4])

[x1 = 2 ∧ x2 = 0 ∧ x3 = 1 ∧ x4 = 0]

Análogamente para f(v4)

f(v4) = x1·w1 + x2·w2 + x3·w3 + x4·w4

[1 = x4, 2 = x1 + x4, 1 = x1 + x2 + x4, 2 = x1 + x2 + x3 + x4]

SOLVE([1 = x4, 2 = x1 + x4, 1 = x1 + x2 + x4, 2 = x1 + x2 + x3 + x4], [x1, x3, x2, x4])

[x1 = 1 ∧ x3 = 1 ∧ x2 = −1 ∧ x4 = 1]

Por tanto la matriz asociada a *f* respecto de las bases B_1 y B_2 es

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) NÚCLEO DE *f*.

El núcleo de *f* es el conjunto de vectores de R^4 tales que f(x)=(0,0,0,0). Por tanto si editamos la ecuación

F([x, y, z, t]) = [0, 0, 0, 0]

y la simplificamos obtenemos las ecuaciones cartesianas del núcleo

[x − y + t = 0, 2·x + 4·z − t = 0, x + y = 0, 2·x + y − z + t = 0]

En consecuencia

$$Ker(f)=\{(x,y,z,t)\in R^4 / x-y+t=0, 2x+4z-t=0, x+y=0, 2x+y-z+t=0\}$$

Si ahora resolvemos este sistema obtenemos

SOLVE([x − y + t = 0, 2·x + 4·z − t = 0, x + y = 0, 2·x + y − z + t = 0], [x, y, z, t])

[2·x + t = 0 ∧ 2·y − t = 0 ∧ 2·z − t = 0]

Como se trata de un sistema compatible indeterminado, para resolver este sistema debemos utilizar el comando SOLUTIONS como se indicó en la introducción, de tal forma que si ahora resolvemos este último sistema equivalente con el inicial mediante dicho comando

SOLUTIONS([2·x + t = 0 ∧ 2·y − t = 0 ∧ 2·z − t = 0], [x, y, z, t])

obtenemos tras simplificar

[[@1, −@1, −@1, − 2·@1]]

donde la expresión @1 indica que tenemos un parámetro. Luego el núcleo está generado por un solo vector, por ejemplo el vector (1,-1,-1,-2), que forma una base del mismo, y por tanto su dimensión es 1.

IMAGEN DE *f*.

Del estudio de la dimensión del núcleo, se deduce que la dimensión de la Im(*f*) es 3. Como hemos calculado la matriz asociada a *f* respecto de las bases canónicas, sus vectores columna son un sistema de generadores de Im(*f*). Si deseamos obtener una base, bastará con extraer tres que sean linealmente independientes. La matriz en cuestión la teníamos guardada en fa

fa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos el rango de los tres primeros vectores de dicha matriz mediante

RANK(DELETE_ELEMENT(fa, 4))

Al simplificar resulta

3

Por tanto son linealmente independientes y, en consecuencia, una base de Im(*f*) viene dada por

B={(1,2,1,2),(-1,0,1,1),(0,4,0,-1)}.

EJERCICIO 46

Calcular los valores de x e y para que la siguiente matriz tenga rango 2

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ x & 1 & -1 & 2x \\ y & 2 & 1 & y \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 47

Estudiar en función del parámetro "t" la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores $\{(1,1,t),(1,t,1),(t,1,1)\}$.

EJERCICIO 48

Dada la aplicación lineal $f: R^4 \to R^2$ dada por

$$f(x,y,z,t) = (x+y+t, x-y+z)$$

(a) Obtener el núcleo e imagen de f así como una base y la dimensión de cada uno de ellos.
(b) Obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica de R^4 y la base B={(1,2),(1,1)} de R^2.

EJERCICIO 49

Dados los subespacios vectoriales de R^4

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in R^4 / x-2y+z+t=0, x-y+2z+t=0, y+z=0\}$$

y

$$W_2 = L\{(1,1,-1,2),(1,0,1,0),(0,0,-1,2),(2,1,1,0)\}$$

Hallar

(a) Una base de W_1
(b) Ecuaciones cartesianas de W_2.
(c) Una base de $W_1 \cap W_2$.