10. DIAGONALIZACIÓN.

10.1. PRINCIPALES FUNCIONES DE DERIVE PARA LA DIAGONALIZACION: CALCULO DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

Antes de iniciar el estudio de los principales conceptos que componen la DIAGONALIZACIÓN de matrices, vamos a mostrar algunas funciones de DERIVE, útiles en este contexto. Algunas de ellas están predefinidas y otras se contienen en el fichero de utilidades VECTOR.MTH.

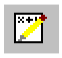
(A) Funciones predefinidas en DERIVE.
Sea A una matriz cuadrada:
DET(A) — calcula el determinante de la matriz A.
TRACE(A) — calcula la traza de la matriz cuadrada A.
CHARPOLY(A) — calcula el polinomio característico de la matriz A.
EIGENVALUES(A) — calcula los autovalores de la matriz A.

(B) Funciones del programa de utilidades VECTOR.MTH
RANK(A) — calcula el rango de la matriz A.
EXACT_EIGENVECTOR(A,v) — calcula los autovectores asociados al autovalor v de la matriz A.
APPROX_EIGENVECTOR(A,v) — calcula los autovectores asociados al autovalor v de la matriz A.

<u>EJEMPLO 10.1.</u>

Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular sus autovalores y el orden de multiplicidad de cada uno de ellos.

<u>Solución</u>

En primer lugar definimos en DERIVE la matriz dada editando con  o bien con *Editar(<u>A</u>utor)-Expresion* la expresión "a:=[[1,-1,0],[-1,2,-1],[0,-1,1]]" y se obtiene

$$a := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A continuación calculamos sus autovectores directamente a través de la función EIGENVALUES. Editando y simplificando la función

EIGENVALUES(a)

se obtiene

[0, 1, 3]

Otro método, consiste en calcular su polinomio característico mediante la función

`CHARPOLY(a)`

$$- w^3 + 4 \cdot w^2 - 3 \cdot w$$

y a continuación aplicar el comando *Resolver-Expresión-(forma algebraica)* la ecuación característica, (en este caso basta aplicar el comando *resolver* sobre la expresión anterior, ya que DERIVE sobreentiende que la ecuación a resolver es dicha expresión igualada a cero), y de esta forma obtenemos que:

$$w = 3 \vee w = 1 \vee w = 0$$

Obsérvese que DERIVE, por defecto, toma como variable para el polinomio característico "w".

Sin embargo es posible definir el polinomio característico utilizando la expresión que le define mediante

`DET(a - λ·IDENTITY_MATRIX(3))`

que al simplificar con [=] se obtiene

$$- \lambda^3 + 4 \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda$$

<u>EJEMPLO 10.2.</u>

Calcular los autovectores asociados a los autovalores de la matriz del ejemplo anterior.

<u>Solución</u>

Para calcular los autovectores asociados a los autovalores obtenidos en el ejemplo anterior podemos utilizar dos procedimientos:

1) **Resolver un sistema de ecuaciones a través de ROW_REDUCE.**

- Autovectores asociados al autovalor w=0.

Los autovectores en este caso surgen de resolver el sistema

$$(A - 0 * I_3)\bar{v} = \bar{0}$$

es decir, son las soluciones de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es ($A-0*I_3$). Para resolver este sistema basta aplicar ROW_REDUCE a dicha matriz y obtendremos la matriz de coeficientes de un sistema triangular equivalente. Por tanto editando y simplificando la expresión

`ROW_REDUCE(a - 0·IDENTITY_MATRIX(3))`

resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el subespacio de autovectores asociado al autovalor 0 es el conjunto de vectores (x,y,z) tales que x=z=y, que está generado por el autovector (1,1,1).

- Autovectores asociados al autovalor w=1

Utilizando el mismo razonamiento que en el apartado anterior, en este caso editando y simplificando

```
ROW_REDUCE(a - 1·IDENTITY_MATRIX(3))
```

obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por los tanto los autovectores asociados al autovalor w=1 son aquellos $(x, y, z) \in R^3$ tales que x=-z,y=0, por tanto el subespacio asociado al autovalor w=1 está generado por (-1,0,1).

- Autovectores asociados al autovalores w=3

En este caso efectuando

```
ROW_REDUCE(a - 3·IDENTITY_MATRIX(3))
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego el subespacio de autovectores asociado al autovalor 3 es $V(\lambda = 3) = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z, y = -2z\}$ que está generado por el vector (1,-2,1).

Aunque en este caso hemos resuelto el sistema usando la función ROW_REDUCE, podríamos haber utilizado la función SOLVE o bien la secuencia de comandos *Resolver-Sistemas de ecuaciones.*

2) Aplicar la función EXACT_EIGENVECTOR(A,w)
(Para utilizar esta función debemos tener el fichero de utilidades VECTOR.MTH).

- Cálculo de $V(\lambda = 0)$. Editando y simplificando

```
EXACT_EIGENVECTOR(a, 0)
```

obtenemos como resultado un único vector paramétrico (el parámetro es @1):

```
[[@1, @1, @1]]
```

es decir, $V(\lambda_1 = 0) = L\{(1,1,1)\}$.

- Cálculo de $V(\lambda_2 = 1)$. Editando y simplificando resulta

```
EXACT_EIGENVECTOR(a, 1)
```

```
[[@2, 0, -@2]]
```

es decir, $V(\lambda_2 = 1) = L\{(1,0,-1)\}$.

- Cálculo de $V(\lambda_3 = 3)$. Editando y simplificando resulta

```
EXACT_EIGENVECTOR(a, 3)
                                        [[@3, - 2·@3, @3]]
```

es decir, $V(\lambda_3 = 3) = L\{(1,-2,1)\}$.

10.2. DIAGONALIZACION DE MATRICES.

Recordemos brevemente algunos resultados teóricos:

- Una matriz cuadrada A <u>es diagonalizable</u>, por definición, si es semejante a una matriz diagonal D, es decir, existe una matriz regular P, llamada matriz de paso, tal que
$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$
- La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable en R es que los autovalores sean reales y la multiplicidad de cada autovalor λ sea igual a la dimensión del subespacio propio asociado a λ.

- Si un autovalor tiene multiplicidad “m”, entonces la dimensión del subespacio de autovectores (llamado también subespacio propio) es menor o igual que “m”.

- Si una matriz A de orden “n” es diagonalizable, y obtenemos una base B de cada subespacio de autovectores $V(\lambda_i)$. Entonces la matriz de paso P, se construye colocando en columna las coordenadas de los vectores propios que forman la base de cada subespacio.

A partir de estas ideas fundamentales para el estudio de este tópico, vamos a plantear algunos ejemplos de problemas típicos de DIAGONALIZACIÓN.

<u>EJEMPLO 10.3.</u>

Dada la matriz cuadrada

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Determinar si A es diagonalizable.. En caso afirmativo obtener su matriz diagonal semejante D y la matriz de paso P y comprobar que se verifica $A=P.D.P^{-1}$.

(b) Utilizando la diagonalización anterior, diagonalizar A^2 y A^{-1}.

<u>Solución</u>

Definimos la matriz A, mediante el comando *Editar (<u>A</u>utor)*

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Para comprobar si la matriz es diagonalizable, vamos a estudiar sus autovalores editando y simplificando la expresión

(b)

```
EIGENVALUES(a)
```

```
[2, -2]
```

Observamos que con este procedimiento no obtenemos la multiplicidad de los autovalores. Para ello, lo que vamos hacer, es calcular el polinomio característico y a continuación lo vamos a factorizar. Así pues, editando la expresión

```
CHARPOLY(a)
```

al simplificar se obtiene

$$w^4 - 4\cdot w^3 + 16\cdot w - 16$$

que al factorizar con el comando *Simplificar-Factorizar-Racional* se obtiene

$$(w + 2)\cdot(w - 2)^3$$

Por lo tanto las multiplicidades de los autovalores λ_1=-2 y λ_2=2 son 1 y 3 respectivamente, es decir, om(λ_1=-2)=1, y om(λ_2=2)=3.

Vamos a estudiar ahora la dimensión de los subespacios de autovectores asociados a cada autovalor (previamente cargamos el fichero VECTOR.MTH mediante la secuencia *Archivo-Leer-Utilidades).*

Calculamos en primer lugar el subespacio $V(\lambda_1 = -2)$. Para esto, de nuevo editando y simplificando la expresión

```
EXACT_EIGENVECTOR(a, -2)
```

```
[[@4, -@4, -@4, -@4]]
```

obtenemos que el subespacio de autovectores asociado al autovalor λ_1=-2 tiene dimensión uno que coincide con la multiplicidad del autovalor λ_1=-2, es decir,

$$V(\lambda_1 = -2) = L\{(1,-1,-1,-1)\}, \dim(V(\lambda_1 = -2)) = 1 = om(\lambda_1 = -2).$$

Calculamos en segundo lugar el subespacio $V(\lambda_2 = 2)$. La ecuaciones de este subespacio propio se obtienen editando y simplificando la expresión

```
EXACT_EIGENVECTOR(a, 2)
```

```
[[@5, @6, @7, @5 - @6 - @7]]
```

por tanto se concluye que

$$V(\lambda_2 = 2) = L\{(1,0,0,1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\},$$
$$\dim(V(\lambda_2 = 2)) = 3 = om(\lambda_2 = 2)$$

y en consecuencia la matriz A es diagonalizable.

Según los cálculos que hemos obtenido tenemos que la matriz D es

$$d := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y que la matriz de paso P viene dada por:

$$p := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente comprobamos que $A=P.D.P^{-1}$, editando la expresión “p.d.p^-1=”

$$p \cdot d \cdot p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) La diagonalización de la matriz A^3, resulta sencilla, una vez calculada la de A puesto que

$$A^3 = A.A.A = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1}$$

Por tanto la matriz diagonal D^3 es semejante a la matriz A^3. Editando y simplificando “d^3” obtenemos

$$d^3$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

permaneciendo invariante su matriz de paso P.

Por último calculando

$$p \cdot d^3 \cdot p^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

y por otro lado

$$a^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

podemos concluir que hemos realizado bien el proceso.

A continuación pasamos a la diagonalización de A^{-1}. Para ello en primer lugar calculamos su inversa (que existe)

$$a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

y observamos que teniendo en cuenta que

$$A^{-1} = (P.D.P^{-1})^{-1} = P^{-1}.D^{-1}.P$$

podemos concluir que la matriz diagonal semejante a A^{-1} es

$$d^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y que la matriz de paso es la inversa de la anterior, es decir

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que efectivamente, se cumple la semejanza entre dichas matrices.

EJEMPLO 10.4.

Estudiar para qué valores de los parámetros dados, es diagonalizable la siguiente matriz:

$$c := \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Antes de editar la matriz, vamos a liberar de valores a los parámetros a y b editando “a:=” y “b:=”

$$a :=$$

$$b :=$$

Ahora sí podemos editar la matriz “c” de forma usual “c(a, b):=[[a,b,0],[0,1,2],[0,0,2]]” (obsérvese que editamos la matriz dependiente de los parámetros a y b, ya que esto nos puede resultar muy útil a la hora de considerar unos parámetros determinados)

$$C(a, b) := \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sus autovalores se obtienen factorizando de forma racional su polinomio característico, es decir editando y simplificando

```
CHARPOLY(C(a, b))
```

$$(a - w)\cdot(w - 1)\cdot(w - 2)$$

De donde obtenemos que los autovalores de la matriz son w1=a, w2=1, w3=2.

A continuación pasamos a estudiar los distintos casos según los valores de “a”:

- Si $a \neq 1, a \neq 2$ entonces tendremos tres autovalores distintos, por lo que la matriz C será diagonalizable.

- Si a=1, tenemos que estudiar únicamente la dimensión del subespacio $V(\lambda_1 = 1)$. Este subespacio se obtiene editando y simplificando "exact_eigenvector(c(1,b),1)" y resulta

```
EXACT_EIGENVECTOR(c(1, b), 1)
```

```
[[@8, 0, 0]]
```

Obtenemos que el subespacio propio está generado por el vector (1,0,0), es decir, tiene dimensión 1. Por tanto en este caso C(1, b) no es diagonalizable puesto que

$$\dim(V(\lambda_1 = 1) = 1 \neq 2 = om(\lambda_1 = 1)$$

- Si a=2, el estudio del subespacio $V(\lambda_2 = 2)$ se obtiene editando y simplificando "exact_eigenvector(c(2,b),2)" y resulta

```
EXACT_EIGENVECTOR(c(2, b), 2)
```

```
[[@9, 0, 0]]
```

Por tanto en este caso C(2, b) tampoco es diagonalizable puesto que

$$\dim(V(\lambda_2 = 2) = 1 \neq 2 = om(\lambda_2 = 2)$$

EJEMPLO 10.5.

Construir una matriz cuyos autovalores son:

λ_1=1/2 con om(λ_1)=1
λ_2=1 con om(λ_2)=2
λ_3=3 con om(λ_3)=1

y tal que

$$V(\lambda_1 = 1/2) = L\{(1,1,1,1),(2,2,2,2)\}$$
$$V(\lambda_2 = 1) = L\{(1,1,1,0),(1,1,0,0)\}$$
$$V(\lambda_3 = 3) = L\{(1,0,0,0),(3,0,0,0)\}$$

Solución.

Lo primero que debemos determinar es si podemos construir una base de R^4 formada por los autovectores dados, ya que, en caso contrario la matriz no sería diagonalizable.

Para ello, elegimos una base de cada subespacio.

Es evidente que una base para el primer subespacio lo forma el vector (1,1,1,1).

Para el segundo subespacio, lo forman {(1,1,1,0),(1,1,0,0)}.

Y para el tercero {(1,0,0,0)}.

¿estos cuatro vectores forman una base de R^4?

Para comprobarlo, construimos la matriz que tiene por columnas cada uno de estos vectores editando

$$p := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calculamos su determinante

$$\mathrm{DET}(p) = 1$$

Deducimos que los cuatro vectores son l.i., y por tanto forman una base de R^4.
Como nos dan los autovalores, la matriz diagonal correspondiente a esta matriz P es

$$d := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz pedida verifica que es semejante a D por P, es decir se obtiene efectuando

$$p \cdot d \cdot p^{-1}$$

que al simplificar nos da la matriz pedida

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

EJERCICIO 53.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & -4/5 & 3/10 \\ 1/5 & 6/5 & -1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Hallar sus polinomios característicos.
b) Determinar si son diagonalizables, y en ese caso hallar sus matrices de paso y diagonales.

EJERCICIO 54.

La exponencial de una matriz cuadrada A se define por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

Si la matriz A es diagonalizable este cálculo se puede efectuar de forma sencilla ya que

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P.D.P^{-1})^n}{n!} = P.e^D.P^{-1}$$

Utilizando este hecho, calcular la función exponencial de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 55.

Estudiar para qué valores de los parámetros son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 56.

Dada la aplicación lineal

$$f(x, y, z) = (x - y - 3z, 2x + 4y + 3z, 3z)$$

Se pide:

(a) Determinar los subespacios vectoriales de R^3 invariantes por f.

(b) ¿Es posible escribir R^3 como suma directa de subespacios vectoriales invariantes por f? En caso afirmativo, obtener una base B de R^3 como unión de bases de dichos subespacios invariantes y hallar la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto a esta base B.