11. FORMAS CUADRÁTICAS.

El objetivo de esta sección consiste básicamente en ofrecer una visión general de cómo utilizar DERIVE para clasificar formas cuadráticas. Trataremos dos aspectos fundamentales, por un lado la clasificación de una forma cuadrática dada por una matriz simétrica de valores constantes utilizando los métodos de los menores principales y de los autovalores, y en segundo lugar clasificar una forma cuadrática en función de los valores de los parámetros que aparezcan en su matriz simétrica asociada.

11.1. OBTENCIÓN DE LA MATRIZ ASOCIADA A UNA FORMA CUADRÁTICA.

EJEMPLO 11.1.

Encontrar la matriz simétrica asociada a las siguientes formas cuadráticas:

(a) $q_1(x,y,z,t) = -2x^2+2xt-6yz+4z^2+4tz+t^2$

(b) $q_2(x,y,z,t,u) = 3xy+xz+2xt+xu+3y^2+7yz+8yt+5yu+2z^2+5zt+8zu+t^2+5tu+9u^2$

Solución.

Una posibilidad para obtener la matriz simétrica asociada a una forma cuadrática q cualquiera consiste en considerar la matriz hessiana de q y dividir todos su elementos por 2, ya que la matriz hessiana de una forma cuadrática ha de ser simétrica pues toda función polinómica cumple el Teorema de Schwartz.

DERIVE tiene predefinida una función que calcula el gradiente de una función dada, indicando en el segundo argumento las variables de la función. Su sintaxis es

GRAD(función ó vector de funciones, variables)

Por tanto si calculamos el gradiente del gradiente obtendremos su matriz hessiana. Entonces para definir en DERIVE una función que calcule la matriz simétrica asociada a una forma cuadrática bastará con editar la expresión:

$$\text{MATRIZ\_SIMETRICA}(q,\ u) := \frac{1}{2}\cdot \text{GRAD}(\text{GRAD}(q,\ u),\ u)$$

Estamos entonces en situación de resolver el ejemplo 1.

(a) Para introducir la forma cuadrática en DERIVE escribimos en *Editar(Autor)-Expresión*

"q1(x,y,z,t):=-2x^2+2x t-6 y z + 4 z^2 + 4 t z + t^2"

y resulta

$$\text{Q1}(x,\ y,\ z,\ t) := -\ 2\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot t - 6\cdot y\cdot z + 4\cdot z^2 + 4\cdot t\cdot z + t^2$$

Si ahora editamos la expresión "s1:=matriz_simetrica(q1(x,y,z,t),[x,y,z,t])" y simplificamos obtendremos la matriz simétrica de la forma cuadrática q_1 guardada en la variable S1.

s1 := matriz_simetrica(q1(x, y, z, t), [x, y, z, t])

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Escribimos en primer lugar la forma cuadrática mediante la expresión "q2(x,y,z,t,u):=3x y + x z + 2 x t +x u + 3y^2+7y z + 8y t + 5y u + 2z^2+5z t + 8z u + t^2 +5t u + 9u^2"

resultando

$$q2(x, y, z, t, u) := 3\cdot x\cdot y + x\cdot z + 2\cdot x\cdot t + x\cdot u + 3\cdot y^2 + 7\cdot y\cdot z + 8\cdot y\cdot t + 5\cdot y\cdot u + 2\cdot z^2 + 5\cdot z\cdot t + 8\cdot z\cdot u + t^2 + 5\cdot t\cdot u + 9\cdot u^2$$

A continuación editando y simplificando "s2:=matriz_simetrica(q2(x,y,z,t,u),[x,y,z,t,u])" obtenemos

s2 := matriz_simetrica(q2(x, y, z, t, u), [x, y, z, t, u])

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 4 \\ 1 & 4 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 4 & \frac{5}{2} & 9 \end{bmatrix}$$

que es la matriz simétrica buscada.

Obsérvese que podríamos haber utilizado otro método, el que consiste en obtener una matriz asociada cualquiera de la forma cuadrática y luego simetrizarla empleando la regla conocida ½ $(A+A^t)$.

11.2. CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS CON MATRIZ ASOCIADA DE VALORES CONSTANTES.

EJEMPLO 11.2.

Clasificar las formas cuadráticas definidas en el ejemplo anterior.

Solución.

(a) Vamos a utilizar en primer lugar el método de clasificación utilizando los menores principales.

Comencemos calculando el determinando de la matriz mediante

$$\mathrm{DET}(s1) = 27$$

Por tanto la forma cuadrática puede ser d.p., d.n. o indefinida. Calculemos el resto de menores principales:

- El menor principal de orden 1,D1, es negativo, por lo que no puede ser d.p.

- D2: se obtiene calculando el determinante de la submatriz

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Por tanto tampoco puede ser definida negativa. En cuyo caso es indefinida.

- D3, no es necesario calcularlo.

NOTA:

Para facilitar el cálculo de menores principales, hemos definido en el fichero ALGEBRA.MTH la función MENORES_PRINCIPALES(A), que calcula los menores principales de una matriz dada y que simplifica la clasificación.

Asi pues, cargamos este fichero de utilidades para hacer uso de esta función en adelante.

Si utilizamos esta función en el ejemplo anterior obtendríamos

MENORES_PRINCIPALES(s1)

$$[-2,\ 0,\ 18,\ 27]$$

Se podría haber empleado el criterio de los autovalores, en cuyo caso editando y simplificando "eigenvalues(s1)", resulta

EIGENVALUES(s1)

$$\left[1,\ \frac{2\cdot\sqrt{70}\cdot \mathrm{COS}\left(\dfrac{\mathrm{ATAN}\left(\dfrac{3\cdot\sqrt{159}}{163}\right)}{3}\right)}{3} + \frac{2}{3},\ \frac{2}{3} - \frac{2\cdot\sqrt{70}\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{\mathrm{ATAN}\left(\dfrac{3\cdot\sqrt{159}}{163}\right)}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)}{3},\ \frac{2}{3} - \frac{2\cdot\sqrt{70}\cdot \mathrm{COS}\left(\dfrac{\mathrm{ATAN}\left(\dfrac{3\cdot\sqrt{159}}{163}\right)}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)}{3}\right]$$

si aproximamos esta última expresión con *Simplificar-aproximar* se obtiene

$$[1,\ 6.228293760,\ -2.480972981,\ -1.747320778]$$

es decir, dos autovalores positivos y dos negativos, por lo que la forma cuadrática es indefinida.

(b) A pesar de que podríamos calcular los menores principales uno a uno utilizaremos la función programada MENORES_PRINCIPALES. Si editamos la expresión "menores_principales(s2)=" se obtiene

$$\mathrm{MENORES\_PRINCIPALES}(s2) = \left[0,\ -\frac{9}{4},\ 0,\ \frac{9}{16},\ -\frac{505}{16}\right]$$

es decir, la forma cuadrática es indefinida.

Para utilizar el criterio de los autovalores, bastaría efectuar

```
EIGENVALUES(s2)
```

Obsérvese que dado que DERIVE no consigue obtener los autovalores de forma directa, veamos qué sucede si intentamos obtener el polinomio característico:

```
CHARPOLY(s2)
```

$$\frac{16\cdot w^5 - 240\cdot w^4 - 28\cdot w^3 + 2564\cdot w^2 + 3050\cdot w + 505}{16}$$

si intentamos resolver este polinomio obtenemos:

$$\mathrm{SOLVE}\left(-\frac{16\cdot w^5 - 240\cdot w^4 - 28\cdot w^3 + 2564\cdot w^2 + 3050\cdot w + 505}{16}, w\right)$$

$$w\cdot(8\cdot w^4 - 120\cdot w^3 - 14\cdot w^2 + 1282\cdot w + 1525) = -\frac{505}{2}$$

Pero incluso intentando resolver de forma numérica en el intervalo [-100,100] con *Resolver-Expresión:*

obtenemos tan solo una raiz:

$$\mathrm{NSOLVE}\left(w\cdot(8\cdot w^4 - 120\cdot w^3 - 14\cdot w^2 + 1282\cdot w + 1525) = -\frac{505}{2}, w, -100, 100\right)$$

$$w = -2.215814447$$

luego parece que en este caso el criterio de autovalores no podría aplicarse con el programa DERIVE.

EJEMPLO 11.3.

Clasificar las siguientes formas cuadráticas:

$$\text{(a) } q_3(\overline{x}) = \overline{x}.\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\overline{x}^t \qquad \text{(b) } q_4(\overline{x}) = \overline{x}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\overline{x}^t$$

Solución:

(a) En primer lugar introducimos la matriz simétrica que define $q_3(\overline{x})$ editando

$$s3 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si intentamos clasificar la forma cuadrática utilizando el criterio de los menores principales efectuando

```
MENORES_PRINCIPALES(s3)
```

$[-1, 0, 0]$

observamos que este criterio no nos indica el tipo de $q_3(\bar{x})$, ya que el determinante es nulo. Asi pues, aplicamos el criterio de los autovalores obteniendo

```
EIGENVALUES(s3)
```

$[0, 2, -2]$

por lo que la forma cuadrática es indefinida.

(b) Editamos como habitualmente la matriz simétrica

$$s4 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de los menores principales obtenemos

$[1, 1, 3]$

de donde, podemos deducir que la forma cuadrática es definida positiva.

11.3. CLASIFICACIÓN DE UNA FORMA CUADRÁTICA CUYA MATRIZ DEPENDE DE PARAMETROS.

<u>EJEMPLO 11.4.</u>

Clasificar en función de los valores de "a" la forma cuadrática

$$q_5(x,y,z)=ax^2+4xy+y^2+2xz+z^2$$

<u>Solución.</u>

Definimos en primer lugar la forma cuadrática

$$q5(x, y, z) := a\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot y + y^2 + 2\cdot x\cdot z + z^2$$

La matriz simétrica asociada a dicha forma cuadrática se obtiene editando y simplificando

"matriz_simetrica(q5(x,y,z),[x,y,z])"

tras lo cual resulta

```
matriz_simetrica(q5(x, y, z), [x, y, z])
```

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene un parámetro, para facilitar cálculos posteriores, editamos la expresión

"s5(a):=[[a,2,1],[2,1,0],[1,0,1]]"

obteniéndose

$$S5(a) := \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procedemos a continuación a estudiar la matriz simétrica según los valores de a. El determinante de la matriz es

$$DET(S5(a)) = a - 5$$

Por tanto, podemos realizar una primera distinción de casos:

- Si a=5, entonces la matriz a clasificar es

$$S5(5) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando, por ejemplo, el criterio de autovalores, resulta

EIGENVALUES(s5(5))

[0, 1, 6]

por tanto, para a=5 la forma cuadrática es semidefinida positiva.

- Si a≠5, estudiando los menores principales con

MENORES_PRINCIPALES(s5(a)) = [a, a - 4, a - 5]

se tiene que:

- Si a>5, es claro que D_3=det(S4)>0. En ese caso
  D_1=a>5>0 y
  D_2=a-4>0
  Por tanto si a>5 es definida positiva.

- Si a<5, resulta que D_3<0. Además como
  D_1=a, si 0<a<5 entonces D_1>0 y D_2=a-4<0 luego indefinida.
  y si a<0, entonces D_1<0 y D_2<0 y también es indefinida.

Resumiendo:

a=5 semidefinida positiva
a>5 definida positiva
a<5 indefinida.

<u>EJEMPLO 11.5.</u>

Clasificar la forma cuadrática

$$q_6(x,y)=ax^2+2bxy+2y^2$$

según los valores de a y b.

<u>Solución.</u>

Editamos en primer lugar la forma cuadrática mediante

$$Q6(x, y) := a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2$$

La matriz simétrica asociada a la forma cuadrática se calcula con

```
MATRIZ_SIMETRICA(Q6(x, y), [x, y])
```

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & 2 \end{bmatrix}$$

Definamos la matriz S6 dependiente de dos parámetros con la expresión

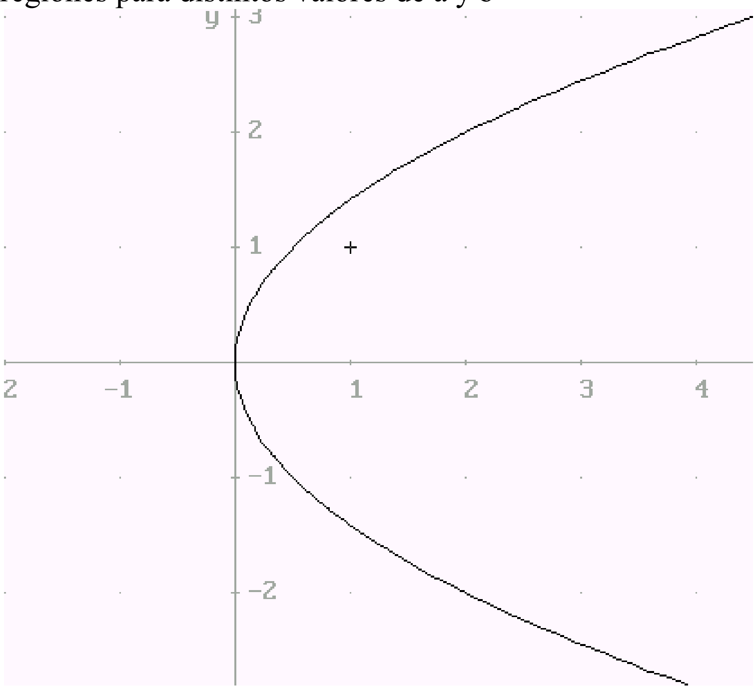
$$S6(a, b) := \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2 \end{bmatrix}$$

Los menores principales de la forma cuadrática son

```
MENORES_PRINCIPALES(S6(a, b))
```

$$\left[a,\ 2 \cdot a - b^2\right]$$

Por tanto, el determinante viene dado por $2a-b^2$. Si representamos esta función, obtenemos varias regiones para distintos valores de a y b



Los puntos (a,b) de la parábola cumplen que el determinante es cero.

- Si $2a = b^2$ entonces $a \geq 0$.
  Si a=0 también b=0, en cuyo caso la matriz asociada es

$$S6(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  por lo que la forma cuadrática es semidefinida positiva.
  Si a>0, como $D_1>0$ y $D_2=0$ será s.d.p.

- Si $2a-b^2>0$, entonces $a>0$. Por tanto, $D_1>0$ y $D_2>0$ y la forma cuadrática es definida positiva.
- Si $2a-b^2<0$, como $2a < b^2$ se tiene que $D_2<0$ y por tanto, la forma cuadrática es indefinida.

EJERCICIO 57.
Clasificar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociadas

(a) $A_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $A_2=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 58.
Clasificar la siguiente forma cuadrática en función de los valores del parámetro "a"

$$q(\overline{x}) = \overline{x}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & a & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\overline{x}^t$$