BACHILLERATO

MATEMATICAS 2

EJERCICIOS DE EXAMEN

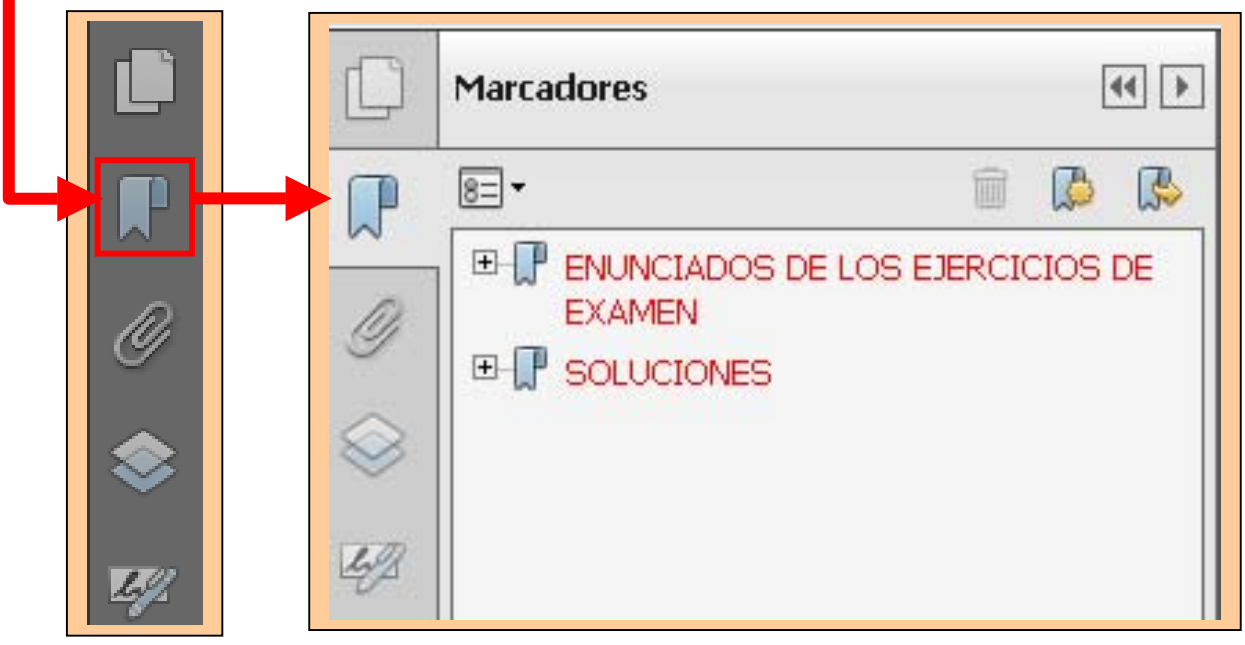
MAQUINA VOLADORA DE LEONARDO DA VINCI

Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO
EJERCICIOS DE EXAMEN

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright

© RAFAEL CABREJAS HERNANSANZ

A Regino, mi padre;
sin su ilusión no
existiría Fonemato.

Soluciones

Los exámenes se aprueban en el aula de examen el día del examen; por tanto, las horas que dediques a prepararte para ese día tienen carácter de **entrenamiento**... y ya sabes: **entrenar es "sufrir"**.

Como sólo deja huella en nosotros lo que nos putea y hace sufrir, cuando estés entrenando en casa y un ejercicio te desborde, lucha a muerte con él todo el tiempo que sea preciso (cuanto más tiempo resistas la tentación de mirar la solución más cicatrices quedarán en tu cerebro y más se curtirán tus neuronas), buscando en el abanico finito de posibilidades que siempre se abre cuando en una encrucijada no vemos claro qué camino seguir.

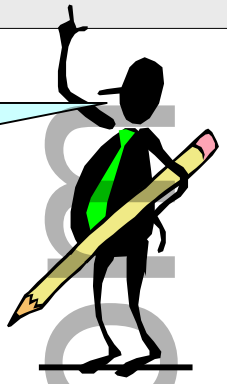
Inicialmente no debe preocuparte si los ejercicios te "salen" o no; te debe preocupar aprender a sufrir con ellos: si eres perseverante, al final ninguno se resistirá.

fotocopiable

© Rafael Cabrejas Hernansanz

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CÁLCULO MATRICIAL

Ahora llega la hora de la verdad: estás en el examen, y no debes desaprovechar ninguna oportunidad para escribir cosas que te diferencien de los demás



FONEMATO 01

Halle "a" para que la matriz "A" tenga inversa, y calcule dicha inversa si $a = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

Acostúmbrate a emplear el verbo exigir.

SOLUCIÓN

Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" sea regular (o sea, $|A| \neq 0$), resulta:

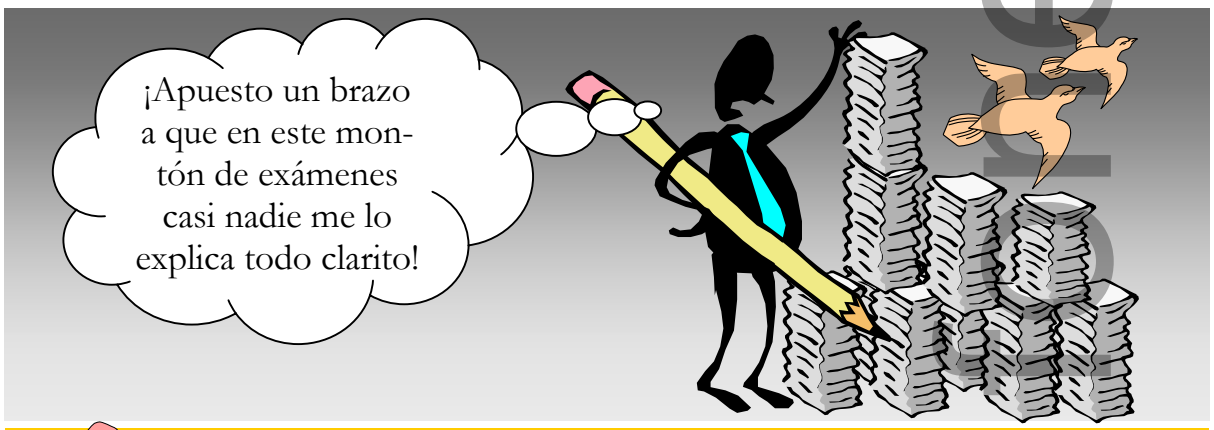
$$|A| = a^2 + 4.a - 21 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

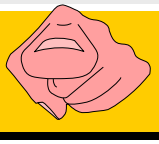
$$\bullet \text{ Si } a = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ y es } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj}(A) = \frac{1}{11} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow |A| = 4^2 + 4.4 - 21 = 11$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto





A tu profe le pasa como a ti: cuanto más clarito le explicas las cosas, más contento se pone.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 02

Halle los valores de "c" para que la matriz "A" tenga inversa, y calcule dicha inversa si $c=1$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 0 & c\\ c & 4 & 0\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" sea regular (o sea, $|A|\neq 0$), resulta:

$$|A|=c.(c^2-4)\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} c\neq 0 \\ c^2-4\neq 0 \Rightarrow c\neq \pm 2\end{cases}$$

desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera columna

• Si $c=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$, siendo:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet Adj(A)=\frac{1}{-3}\bullet\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

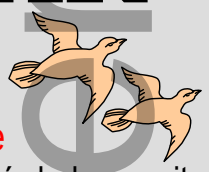
$$\text{Si } c=1 \Rightarrow |A|=1.(1^2-4)=-3$$

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow Adj(A)=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

SABER ESTUDIAR

Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees; es decir, tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de llenarlo de contenido pleno. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero en caso de atranque para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte; o sea, si no eres capaz de llenar de contenido pleno una palabra o símbolo, invierte el tiempo que sea menester (dos minutos, dos horas, dos semanas, dos meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.



En fonemato.com tienes el videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 03

Demuestre que la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & a & b-1\\ 1 & a & -1\end{bmatrix}$ tiene inversa sólo si los parámetros "a" y "b" son no nulos, y calcular dicha inversa si $a=b=1$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" sea regular (o sea, $|A|\neq 0$), resulta:

$$|A|=-a.b\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ b\neq 0 \end{cases}$$

un producto es no nulo sólo si todos los factores son no nulos

• Si $a=b=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, siendo:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet Adj(A)=\frac{1}{-1}\bullet\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Si $a=b=1 \Rightarrow |A|=-1$

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 04

1) Calcule el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & a^2-1 & a\\ 1 & 2.a^2-2 & 2.a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{bmatrix}$ según el valor del parámetro "a".

2) Si existe, calcule la inversa de "A" en los casos $a=0$ y $a=1$.

SOLUCIÓN

1) Latiguillo: el rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucede sólo si $|A|\neq 0$. Determinemos los valores de "a" tales que $|A|=0$:

a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$|A|=(a^2-1).\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 2 & 2.a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{vmatrix}=$$

sacamos factor común a^2-1 en la segunda columna

$$=(a^2-1).\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & a-1\\ 0 & -1 & a^2-a\end{vmatrix}=(a^2-1)^2=0\Rightarrow a=\pm 1\ (\text{dobles})$$

desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna

En consecuencia:

- Si $a\neq\pm 1\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=3$.
- Si $a=1\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=1$.
- Si $a=-1\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2$, pues $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\neq 0$.

2) Si $a=0\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, siendo $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\bullet Adj(A)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$

Si $a=0\Rightarrow |A|=(0^2-1)^2=1$

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow Adj(A)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

- Si $a=1\Rightarrow |A|=0\Rightarrow$ no existe A^{-1}, pues está prohibido dividir por cero.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 05

Resuelva razonadamente la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: debemos determinar la matriz "X" que satisface la ecuación (condición de igualdad) matricial dada:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

para despejar "X" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, que existe, pues $|A| \neq 0$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \cdots$$

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es regular $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

EL PROFESOR QUE CORRIGE TU EXAMEN

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en muchos casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

Así las cosas, no hace falta ser un lince para entender que lo que escribamos en examen debe diferenciarnos positivamente de los demás... y para conseguir tal diferenciación basta escribir pensando que el profe que te ha de corregir no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano, explicándole todos los aspectos relevantes de las conexiones neuronales que establezcamos en cada caso.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 06

Encuentre dos matrices "X" e "Y", de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $AX + BY = C$ y $AX = Y$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: debemos determinar las matrices "X" e "Y" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

Sustituyendo AX por Y en la primera ecuación, resulta:

$$Y + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow Y = (I + B)^{-1}C = ...$$

para despejar "Y" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos lmiembros por la inversa de la matriz I+B, que existe, pues I+B es regular

Como $AX = Y$ e $Y = (I + B)^{-1}C$, resulta ser:

$$AX = (I + B)^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}(I + B)^{-1}C = ...$$

para despejar "X" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz A, que existe, pues A es regular

SOFISMA:

Razón o argumento aparente con que se quiere defender o persuadir lo que es falso.

Ejemplo muy famoso:

Es una regla que todas las reglas tienen excepciones.

Como esta regla tiene excepción, entonces debe haber alguna regla sin excepción, contra lo que afirma la proposición, que es una estupidez.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 07

Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} x+a+b & -a & -b \\ -c & x+b+c & -b \\ -c & -a & x+a+c \end{vmatrix} = 0$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor:

$$\begin{vmatrix} x+a+b & -a & -b \\ -c & x+b+c & -b \\ -c & -a & x+a+c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

a la primera columna le sumamos la segunda y la tercera

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & -a & -b \\ x & x+b+c & -b \\ x & -a & x+a+c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & -a & -b \\ 0 & x+a+b+c & -b \\ 0 & 0 & x+a+b+c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la primera columna

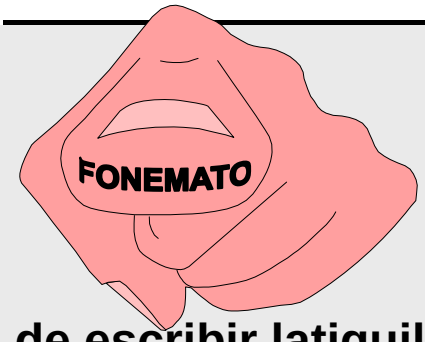
$$\Rightarrow x.(x+a+b+c)^2 = 0 \Rightarrow$$

considerando que la incógnita es "x", y que "a", "b" y "c" son constantes

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -(a+b+c) \text{ (doble)} \end{cases}$$

un producto es nulo sólo si alguno de los factores es nulo

fonemato.com



Si aprovechas las Matemáticas de Bachillerato para educarte en el arte de escribir latiguillos, cuando estés en la Universidad, en los exámenes, serás capaz de escribir latiguillos sobre cualquier disciplina que se exprese mediante números... con el consiguiente gozo para todos tus profesores.

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 08

Determine todas las matrices "X" tales que $XA = B$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: se trata de determinar la matriz "X" que satisface la ecuación (condición de igualdad) matricial dada:

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = ...$$

para despejar "X" postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros por la inversa de la matriz A

NOTA

Si fuera $|A| = 0$ no existiría A^{-1}, y deberíamos resolver el asunto a lo bestia: siendo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

al exigir que se satisfaga la ecuación matricial $XA = B$, resulta:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+3.b & 2.a+4.b \\ c+3.d & 2.c+4.d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} a+3.b=4 \\ 2.a+4.b=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-7/2 \\ b=5/2 \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} c+3.d=2 \\ 2.c+4.d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c=-5/2 \\ d=3/2 \end{cases} \end{cases}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 09

Dadas las matrices "A" y "B", halle una matriz simétrica "P" que sea regular y tal que $PB = AP$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Sea $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ una matriz simétrica tal que $|P| = a.c - b^2 \neq 0$.

Exijamos que se satisfaga la condición $PB = AP$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4.a + 6.b & -3.a - 5.b \\ 4.b + 6.c & -3.b - 5.c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.a - 6.b & 4.b - 6.c \\ 3.a - 5.b & 3.b - 5.c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 12.b & -3.a - 9.b + 6.c \\ 9.b + 6.c - 3.a & -6.b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 12.b = 0 \\ -3.a - 9.b + 6.c = 0 \\ 9.b + 6.c - 3.a = 0 \\ -6.b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} b = 0 \\ -3.a + 6.c = 0 \\ 6.c - 3.a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 2.c \end{array} \right\} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2.c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Como vemos, hay infinitas matrices que satisfacen la condición $PB = AP$; si elegimos $c = 1$ (para que P sea regular basta que $c \neq 0$), obtenemos una de ellas:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 10

Si "A" y "B" son matrices 3×3 de números reales y A es diagonal (o sea, $a_{ij} = 0$ si es $i \neq j$), ¿podemos afirmar que $A \bullet B = B \bullet A$ para cualquier matriz "B"? ¿Cómo debería ser "A" para que $A \bullet B = B \bullet A$ para cualquier matriz "B"?

SOLUCIÓN

Latiguillo: en general, el producto de matrices no es conmutativo.
Siendo "A" una matriz diagonal, veamos bajo qué condiciones se cumple que $A \bullet B = B \bullet A$ para toda matriz "B":

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Es:

$$A \bullet B = \begin{bmatrix} a_{11}.x & a_{12}.x & a_{13}.x \\ a_{21}.y & a_{22}.y & a_{23}.y \\ a_{31}.z & a_{32}.z & a_{33}.z \end{bmatrix}$$

$$B \bullet A = \begin{bmatrix} a_{11}.x & a_{12}.y & a_{13}.z \\ a_{21}.x & a_{22}.y & a_{23}.z \\ a_{31}.x & a_{32}.y & a_{33}.z \end{bmatrix}$$

Así, es falso que $A \bullet B = B \bullet A$, salvo si $x = y = z$.

SILOGISMO: argumento que consta de tres proposiciones, la última de las cuales se deduce necesariamente de las otras dos.

EJEMPLO

Ningún gato tiene 17 colas.
Todo gato tiene una cola más que ningún gato, luego tiene 18 colas.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 11

Sabiendo que una matriz "A" verifica $A^2 = A$, determine un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo "I" la matriz identidad.

SOLUCIÓN

Aquí no hay "latiguillo" que rascar; se trata de mero calculote:

$$(\lambda A - I)^2 = I \Rightarrow (\lambda A - I)(\lambda A - I) = I \Rightarrow \lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 A^2 - 2\lambda A = 0 \overset{\text{pues "A" es idempotente, o sea: } A^2 = A}{\Rightarrow} \lambda^2 A - 2\lambda A = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda)A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 2\lambda) = 0 \overset{\text{si "A" no es la matriz nula}}{\Rightarrow} \lambda = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Por tanto, el valor no nulo pedido es $\lambda = 2$.

fonema.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 12

Sea la ecuación matricial $X \bullet A = B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

1) ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la ecuación anterior?
2) Calcule una solución.
3) ¿Es única la solución? Razone la respuesta.

SOLUCIÓN

1) Si "X" es de orden $m \times n$, para que el producto $X \bullet A$ tenga sentido debe ocurrir que el número "n" de columnas de "X" sea igual al de filas de "A"; por tanto, debe ser $n = 2$. Siendo "X" de orden $m \times 2$, para que $X \bullet A$ sea una matriz de orden 3×2 (como es "B") debe ocurrir que $m = 3$.

2) Latiguillo: se trata de encontrar una matriz "X" que satisfaga la condición (ecuación) dada $X \bullet A = B$; para despejar "X" postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) por A^{-1} los dos miembros de $X \bullet A = B$:

$$X \bullet A = B \Rightarrow X = B \bullet A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \\ 13 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es regular} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3) La solución es única, pues la matriz "A" es regular.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 13

Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

El asunto es de "idea feliz":

a la tercera fila le sumamos la segunda

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

pues la tercera fila es proporcional a la primera

Aunque no se te ocurra la "idea feliz", la cosa es fácil:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c+a & a-b & a-c \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda y tercera les restamos la primera

en la segunda columna sacamos factor común "b − a"
en la tercera columna sacamos factor común "c − a"

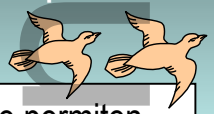
$$= (b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c+a & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

pues las columnas segunda y tercera son iguales

El uso de "ventanas", asunto esencial

Aprende a usar ventanas, porque facilitan mucho la lectura de lo escrito, y tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

Pedrusco "A" = Pedrusco "B"



En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" ⇒ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 14

Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor

a las filas 2ª, 3ª y 4ª les restamos la 1ª

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la primera columna

a las filas 2ª y 3ª les restamos la 1ª

$$= 2.\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.3.(1.4 - 1.1) = 18$$

desarrollamos por los elementos de la primera columna

En general, es:

a las filas 2ª, 3ª y 4ª les restamos la primera

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la primera columna

a las filas 2ª y 3ª les restamos la primera

$$= a.\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a.(b-a).\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$= a.(b-a).\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ 0 & d-c \end{vmatrix} = a.(b-a).(c-b).(d-c)$$

a la 2ª fila le restamos la primera

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 15

Calcule los valores de "a" y "b" para los que $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1+a\\ 0 & 1 & 3+b\\ 1 & 0 & b\end{bmatrix}$ tiene rango 2:

SOLUCIÓN

Latiguillo: el rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como $H_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$, es $rg(A)\geq 2$.

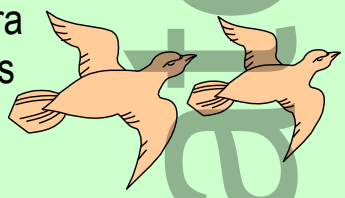
Será $rg(A)=2$ si son nulos todos los menores de orden 3 que resultan al orlar H_1.

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3+b\\ 1 & 0 & b\end{vmatrix}=3.b=0\ \ (I)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1+a\\ 0 & 1 & 3+ba\\ 1 & 0 & b\end{vmatrix}=b-1-a=0\ \ (II)$$

La solución del sistema de ecuaciones que forman (I) y (II) es $a=1$ y $b=0$.

OJO AL PARCHE: en todo examen de Álgebra hay una proporción no pequeña de almas cándidas que hablan del determinante de una matriz no cuadrada; incluso, no se sabe cómo, llegan a calcularlo. Naturalmente, si perpetras tan descomunal barbaridad, serás suspendido ipso facto ... y además serás objeto de todo tipo de rechiflas, porque tu profe congregará a toda su familia ante tu examen, y se pasarán la tarde tronchándose de tus conocimientos de Álgebra.



fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 16

Halle una matriz "B" sabiendo que su primera fila es $(0,1)$ y que verifica:

$$A \bullet B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 2×3, para que el producto $A \bullet B$ sea de orden 2×2 la matriz "B" debe ser de orden 3×2.

Siendo $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, exijamos que $A \bullet B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2.a + 2.c & -1 + 2.b + 2.d \\ a & 2 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

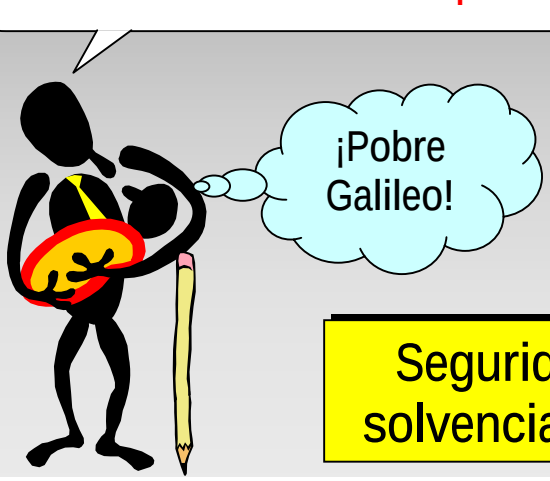
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2.a + 2.c = 1 \\ -1 + 2.b + 2.d = 0 \\ a = 1 \\ 2 + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1/2 \\ d = 5/2 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Hay **cosas** respecto de las que debes tener **igual certeza** que respecto de tu propio nombre... y si el mismísimo Papa de Roma te lleva la contraria con una de esas cosas (por ejemplo, te dice que $\text{rg}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 123$), debes contestar:

Su Santidad ha tenido un despiste o está mal informado

Y no te arrugues si el Papa insiste en que $\text{rg}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 123$, con la mayor educación y respeto, debes añadir:

Su Santidad no tiene ni puñetera idea de lo que dice



Seguridad en ti mism@, en la solvencia de tus conocimientos.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 17

Determine para qué valores de "k" la matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ carece de inversa.

Si existe, calcule la inversa de "A" para $k=4$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: una matriz cuadrada carece de inversa sólo si es singular.

Al exigir que la matriz "A" sea singular (o sea, $|A|=0$), resulta:

$$|A| = 2.(3-.k) = 0 \Rightarrow k = 3$$

- Si $k=4$ es $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj}(A) = \frac{1}{-2} \bullet \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & -15 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $k=4$, entonces $|A|=-2$

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & -15 & -1 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

Estudiar Matemáticas a muerte es la mejor gimnasia para desarrollar las habilidades que garantizan el éxito en las Carreras de Ciencias: disciplina mental, facultad de abstracción y capacidad de razonamiento.

LO DICEN TODOS LOS EVANGELIOS, INCLUSO LOS APÓCRIFOS

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 18

Sean "A" y "B" matrices cuadradas de orden dos tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$. Justificando la respuesta, calcule:

$$rg(A)\ ;\ rg(B)\ ;\ |A^2|\ ;\ |-A|\ ;\ |A^{-1}|\ ;\ |2A|\ ;\ |AB^t|\ ;\ |B^tA|$$

Ponga ejemplo de matrices cuadradas de orden 2 tales que $|A+B| \neq |A| + |B|$.

SOLUCIÓN

Es $rg(A) = rg(B) = 2$, pues "A" y "B" son cuadradas de orden 2 y tienen determinante no nulo (son regulares).

Es:

$$|A^2| = (|A|)^2 = 4$$

$$|-A| = (-1)^2 . |A| = 2$$

$$|A^{-1}| = 1/|A| = 1/2$$

$$|2A| = 2^2 . |A| = 8$$

$$|AB^t| = |A| . |B^t| = |A| . |B| = -8$$

$$|B^tA| = |B^t| . |A| = |B| . |A| = -8$$

Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, es

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

siendo $|A+B| \neq |A| + |B|$, pues $|A+B| \neq 0\ ;\ |A| = |B| = 0$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 19

Determine para qué valores de "a", "b", "c" y "d" se verifica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ c.a + c.d & c.b + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 1 & (1) \\ a.b + b.d = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 & (2) \\ a + d = 0 & (3) \end{cases} \\ c.a + c.d = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 & (4) \\ a + d = 0 & (5) \end{cases} \\ c.b + d^2 = 0 & (6) \end{cases}$$

El **desdoblamiento** acaecido en las ecuaciones segunda y tercera origina el desdoblamiento del sistema en los siguientes cuatro sistemas:

$$(1), (2), (4), (6) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$(1), (2), (5), (6) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 1 \\ b = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \\ a + d = 0 \\ d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no tiene solución}$$

de la 1ª ecuación se deduce $a = \pm 1$ y de la 4ª se deduce $d = 0$, pero estos valores de "a" y "d" no cumplen que $a + d = 0$

$$(1), (3), (4), (6) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 1 \\ a + d = 0 \\ c = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a + d = 0 \\ c = 0 \\ d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no tiene solución}$$

$$(1), (3), (5), (6) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 1 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 1 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a + d = 0 \Rightarrow a = -d$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-d)^2 + b.c = 1 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 + b.c = 1 \\ c.b + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{no tiene solución}$$

no puede ser a la vez $d^2 + b.c = 1$ y $c.b + d^2 = 0$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 20

1) De una matriz "A" se sabe que admite inversa. ¿Qué se puede decir del determinante de "A"? ¿Y del rango de "A"?

2) Determine para qué valores de "k" la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}$ carece de inversa.

Calcula la inversa de "A" para $k = 2$.

SOLUCIÓN

1) Si una matriz cuadrada de orden "n" admite inversa, su determinante es no nulo y su rango es "n".

2) Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si su determinante es no nulo (o sea, si la matriz es regular).

Al exigir que la matriz "A" no sea regular, resulta:

$$|A| = 1 - k^2 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

- Si $k = 2$, es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

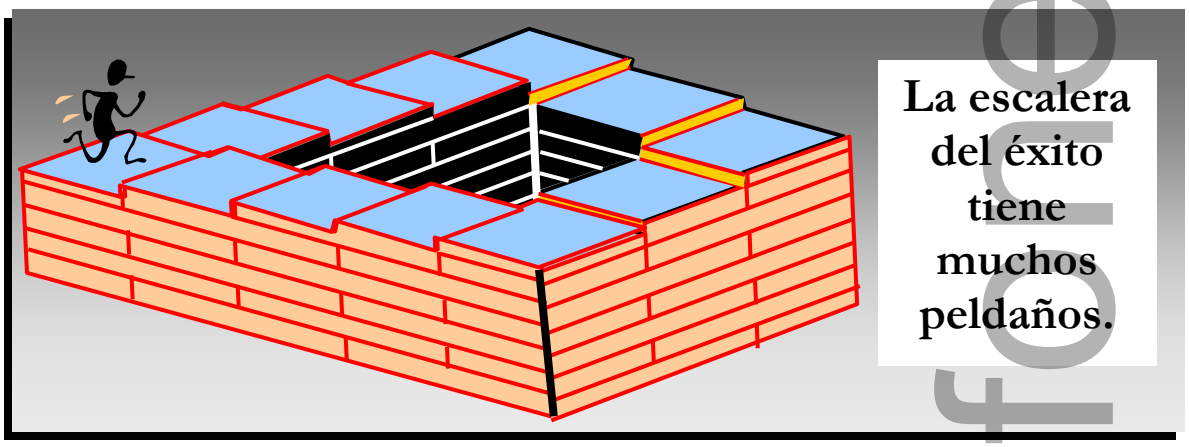
Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet Adj(A) = \frac{1}{-3} \bullet \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $k = 2 \Rightarrow |A| = -3$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto



fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 21

Halle las matrices "X" de la forma $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Exijamos que $X^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{X} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 = 9 \\ a+b=0 \\ b^2 = 9 \\ b+c=0 \\ c^2 = 9 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=3,\ b=-3,\ c=3 \\ a=-3,\ b=3,\ c=-3 \end{cases}$$

fonemato.com

La crisis

La crisis es la mejor bendición que puede sucederle a las personas y países, porque la crisis trae progresos, la creatividad nace de la angustia como el día de la noche oscura. De la crisis nacen la inventiva, los descubrimientos y las grandes estrategias. Quien supera la crisis se supera a si mismo sin quedar superado. Quien atribuye la crisis a sus fracasos y penurias, violenta su propio talento y respeta más los problemas que las soluciones, la verdadera crisis es la crisis de la incompetencia. El inconveniente de las personas y los países es la pereza para encontrar salidas y soluciones. Sin la crisis no hay desafíos, y sin desafíos la vida es una rutina, una lenta agonía. Sin crisis no hay méritos. Es en la crisis donde aflora lo mejor de cada uno, porque sin crisis todo viento es caricia. Hablar de crisis es promoverla, y callar en la crisis es exaltar el conformismo. En vez de esto, trabajemos nuestro talento y nuestras habilidades para encontrar soluciones, acabemos de una sola vez con la única crisis amenazadora, que es la tragedia de no querer luchar por superarla.

Albert Einstein

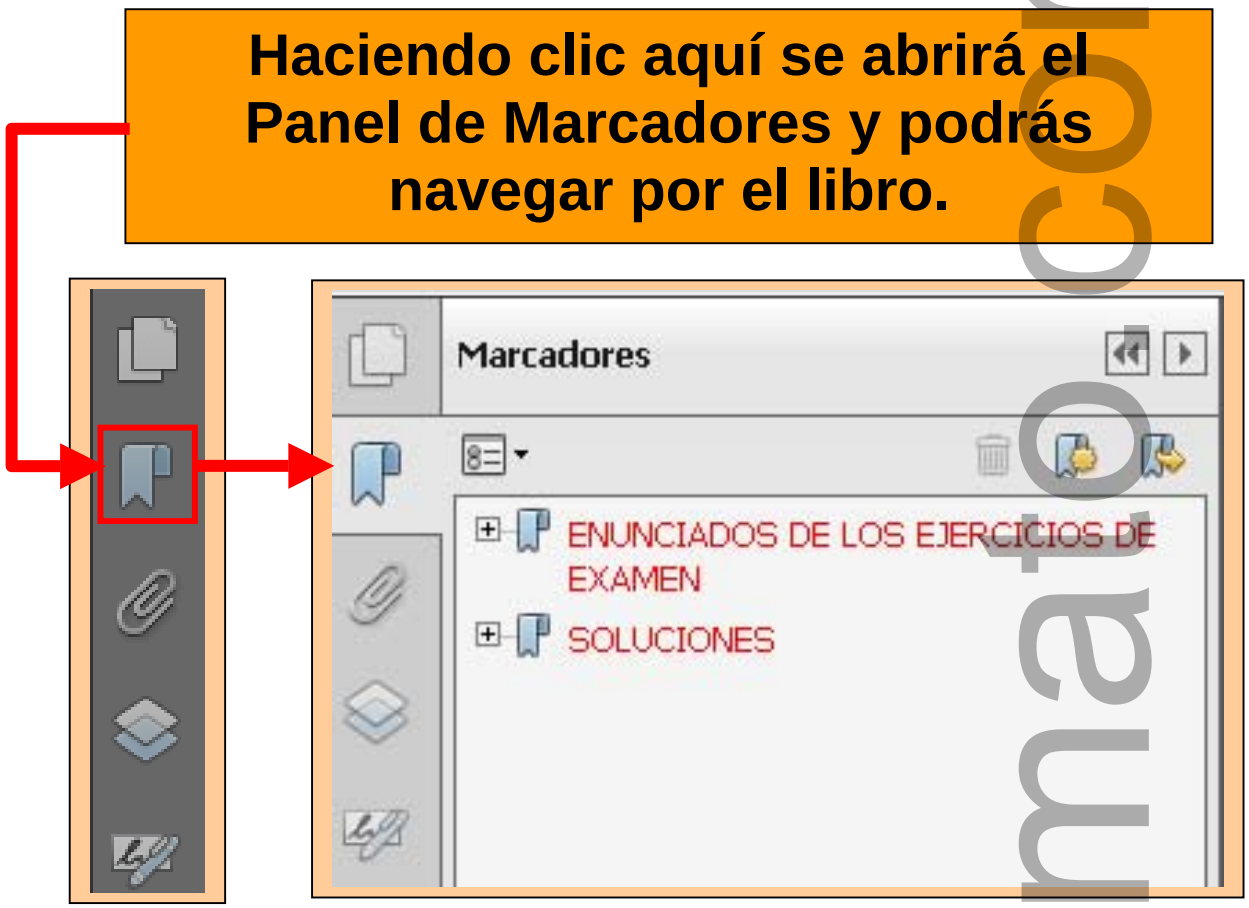
© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 22

Halle "A" y "B" si $A+B=C$ y $3\bullet A+4\bullet B=C$, siendo $C=\begin{bmatrix}8 & -2\\ 7 & 9\end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Al multiplicar la primera ecuación por 3 y restarle la segunda se obtiene $B=-2\bullet C$, y al sustituir B por $-2\bullet C$ en la primera ecuación resulta $A=3\bullet C$



fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 23

Determine para qué valores de "k" la matriz "A" tiene de inversa.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & k\\ 1 & 1 & k-1\\ 1 & 2 & k+1\end{bmatrix}$$

Calcule la inversa de "A" para $k=3$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" sea regular (o sea, $|A|\neq 0$), resulta:

$$|A|=4-k\neq 0\Rightarrow k\neq 4$$

• Si $k=3\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$, y es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}$ • $\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 5 & -1\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$

$$\text{Si } k=3\Rightarrow |A|=1$$

$$A^t=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 5 & -1\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 24

Calcule "x" e "y" si la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ verifica $A^2+x\bullet A+y\bullet I=0$.

SOLUCIÓN

Es $A^2=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & 9\end{bmatrix}$; así:

$$A^2+x\bullet A+y\bullet I=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & 10\\ 0 & 9\end{bmatrix}+x\bullet\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}+y\bullet\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2.x+y+4 & 2.x+10\\ 0 & 3.x+y+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2.x+y+4=0\\ 2.x+10=0\\ 0=0\\ 3.x+y+9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=6\end{cases}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 25

Sean "A", "B" y "C" matrices cuadradas de orden dos distintas de la matriz nula. ¿Es cierto que $AB = AC \Rightarrow B = C$? Si es cierta, demuéstrela; si es falsa dé un contraejemplo.

SOLUCIÓN

- En general, no es cierto que $AB = AC \Rightarrow B = C$.

  Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} ; \; C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  es obvio que $B \neq C$, y sin embargo $AB = AC$

- Siendo $AB = AC$, sólo es cierto que $B = C$ si $|A| \neq 0$.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 26

Aplique las propiedades de los determinantes (o sea, sin desarrollar el determinante) para calcular una solución de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & x & 18 \\ 1 & 12 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN

Nuestra gran astucia nos hace ver que las columnas 2ª y 3ª son proporcionales si $x = 6$; por tanto, podemos garantizar que el determinante se anula si $x = 6$.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 27

Siendo "a", "b" y "c" tres números reales arbitrarios, calcula A^n para todo número natural "n", siendo

$$A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Sea "B" una matriz 3×3 arbitraria. Indique, justificando la respuesta, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

1) Si el rango de "B" es 2, el rango de B^2 también es 2.

2) Si el rango de "B" es 3, el rango de B^3 también es 3.

SOLUCIÓN

La matriz A^n es la nula si $n\geq 3$:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & a.c\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\bullet A=\begin{bmatrix}0 & 0 & a.c\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1) Es falso que $rg(B)=2\Rightarrow rg(B^2)=2$.

Para demostrarlo vale el siguiente contraejemplo:

$$B=\begin{bmatrix}0 & \pi & 1\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2\ ;\ B^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 7.\pi\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B^2)=1$$

2) Si $B\in M_{3\times 3}$ y $rg(B)=3\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow |B^3|=|B|.|B|.|B|\neq 0\Rightarrow rg(B^3)=3$.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 28

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & b\end{bmatrix}$.

1) ¿Cuándo el determinante de "A" es el seno de algún número real?
2) Calcule la inversa de "A" cuando exista.
3) Determine todos los pares (a,b) para los que "A" coincide con su inversa.

SOLUCIÓN

1) El seno toma valores entre -1 y 1, por lo que $|A|=b$ será el seno de algún número real siempre que $-1\le b\le 1$.

2) La matriz "A" tiene inversa sólo si $|A|=b\neq 0$, y en tal caso:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet \text{Adj}(A)=\frac{1}{b}\bullet\begin{bmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ -a & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ -a & 0 & 1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

3) Al exigir que $A=A^{-1}$, resulta:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & b\end{bmatrix}=\frac{1}{b}\bullet\begin{bmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ -a & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=-a/b\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}\\ b=1/b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}a=0\\ b=1/b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=\pm 1\end{cases}\\ \begin{cases}b=-1\\ b=1/b\end{cases}\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

Por tanto, es $A=A^{-1}$ si $b=-1$ o si $a=0$ y $b=\pm 1$.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 29

Justifique cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles no:

$$1)\ \begin{vmatrix} \alpha.a & b \\ \alpha.c & d \end{vmatrix} = \alpha.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\ ;\ 2)\ \begin{vmatrix} \alpha.a & b \\ c & \alpha.d \end{vmatrix} = \alpha^2.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{vmatrix} = \alpha^2.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\ ;\ 4)\ \begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

La primera es cierta: $\begin{vmatrix} \alpha.a & b \\ \alpha.c & d \end{vmatrix} = \alpha.a.d - \alpha.c.b = \alpha.(a.d - c.b) = \alpha.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

La segunda es falsa: $\begin{vmatrix} \alpha.a & b \\ c & \alpha.d \end{vmatrix} = \alpha^2.a.d - b.c \neq \alpha^2.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha^2.(a.d - c.b)$

La tercera es cierta: $\begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{vmatrix} = \alpha^2.a.d - \alpha^2.c.b = \alpha^2.(a.d - c.b) = \alpha^2.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

La cuarta es cierta: $\begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha.a.d - \alpha.c.b = \alpha.(a.d - c.b) = \alpha.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 30

Compruebe que $(B \bullet A)^t = A^t \bullet B^t$, siendo:

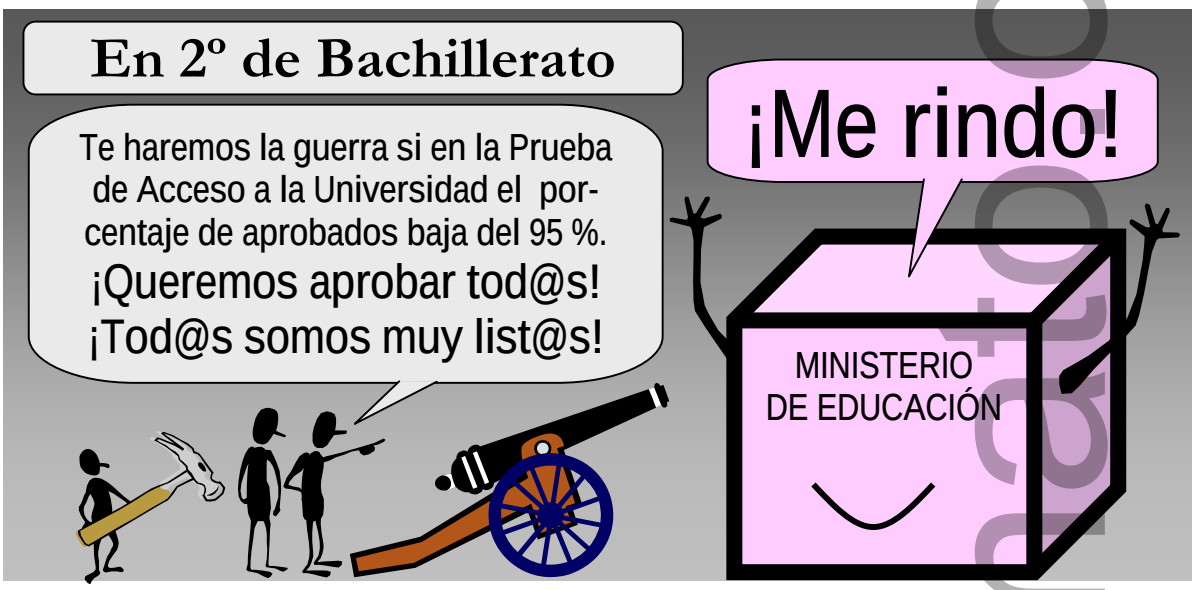
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Es:

$$(B \bullet A)^t = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \\ 30 & 18 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 30 \\ 7 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A^t \bullet B^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 30 \\ 7 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$



+Cálculo.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 31

Encuentre dos matrices "A" y "B", de orden 3×3 con coeficientes reales y tales que $3A+2B=C$ y $A-B=D$, siendo:

$$C=\begin{bmatrix}3 & 8 & -3\\ -2 & 2 & -3\\ 7 & 2 & 4\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: se trata de determinar las matrices "A" y "B" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

De la segunda ecuación se deduce que $A=B+D$, y al sustituir esto en la primera, resulta:

$$3(B+D)+2B=C\Rightarrow 5B=C-3D\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{5}(C-3D)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 32

Sean las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1) Estudie si existe y, si es así, calcula la inversa de "A".
2) Determine una matriz "X" que verifique la ecuación $A \bullet B = A \bullet X \bullet A$.

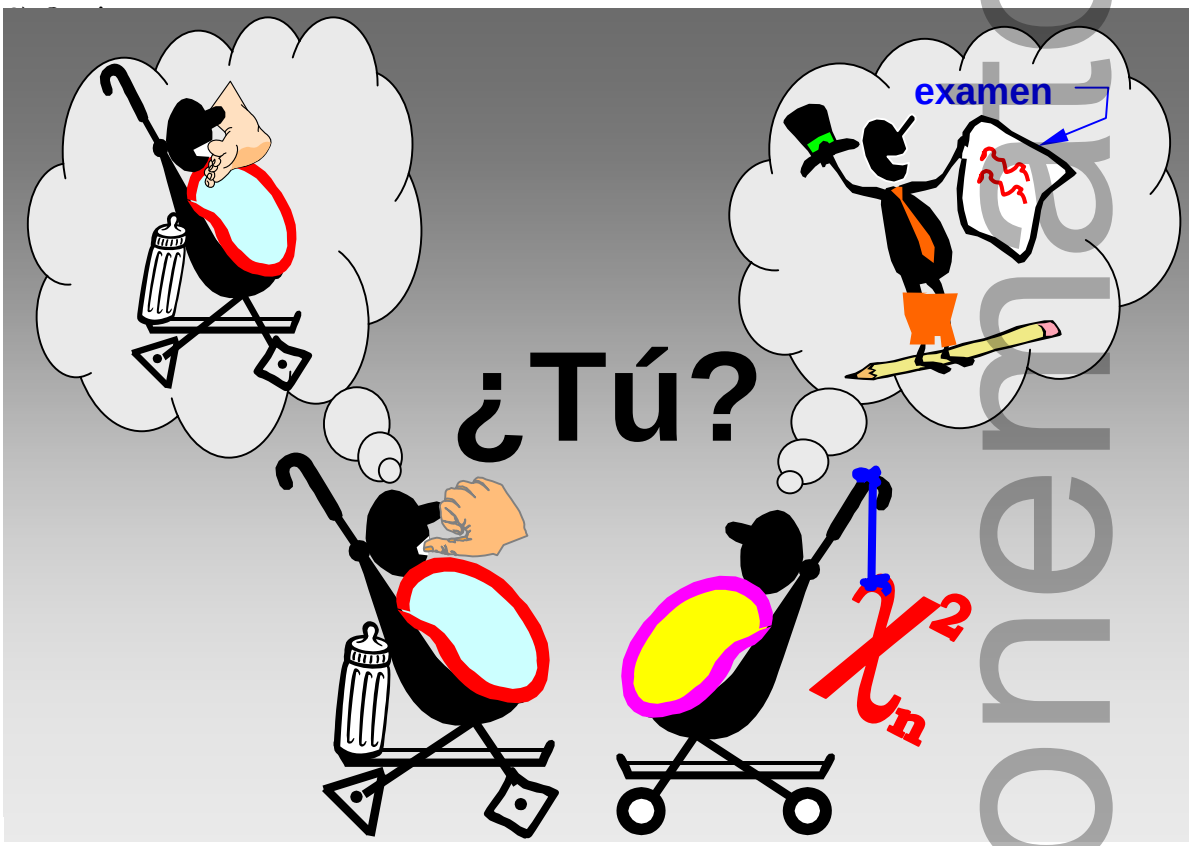
SOLUCIÓN

1) Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.
En nuestro caso existe A^{-1}, pues $|A| = 9 \neq 0$. Es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet \text{Adj}(A)=\frac{1}{9}\bullet\begin{bmatrix}-4 & 2 & -11\\ -2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -11\\ -2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto



fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 33

Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & -x & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & -x & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ -x-1 & x+1 & 0 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 & 0 \\ x & -x & x & 0 \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la cuarta columna

sacamos factor común "x" en la tercera fila

$$= \begin{vmatrix} -x-1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 \\ x & -x & x \end{vmatrix} = x. \begin{vmatrix} -x-1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

a la primera columna le sumamos la segunda

$$= x. \begin{vmatrix} 0 & x+1 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x.(x+1). \begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$= x.(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = -1 \text{ (doble)}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 34

Halle los valores de "a" para que la matriz "A" tenga inversa, y calcula dicha inversa

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" satisfaga esta condición, resulta $|A| = a^3 - a + 1 \neq 0$.

Siendo $a^3 - a + 1 \neq 0$, es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet Adj(A) = \frac{1}{a^3 - a + 1} \bullet \begin{bmatrix} a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 - 1 & 1 \\ 1 - a & -a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 - 1 & 1 \\ 1 - a & -a & a^2 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 35

1) Razone si es cierto que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ para cualquier par de matrices cuadradas "A" y "B".

2) Siendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz triangular invertible, demuestre que su inversa también es triangular.

SOLUCIÓN

1) Si las matrices cuadradas "A" y "B" son equidimensionales, en general no es cierto que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, pues:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + AB + BA$$

y en general no sucede que $AB = BA$.

2) Siendo matriz "A" triangular e invertible es $b = 0$ ó $c = 0$ y $|A| = a.d \neq 0$; así:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet Adj(A) = \frac{1}{a.d} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

que también es un matriz triangular si $b = 0$ ó $c = 0$.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 36

Calcule el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$, llamado de Vandermonde.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ 0 & b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix} =$$

Restamos a cada fila la anterior multiplicada por "a"

Desarrollamos el determinante por los elementos de la 1ª columna

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b.(b-a) & c.(c-a) & d.(d-a) \\ b^2.(b-a) & c^2.(c-a) & d^2.(d-a) \end{vmatrix} =$$

En la 1ª columna sacamos factor común "b – a", en la 2ª sacamos factor común "c – a", y en la 3ª sacamos factor común "d – a"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d. \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

Estamos ante otro Vandermonde, pero la matriz es 3 × 3. Repetimos el proceso: a cada fila le restamos la anterior multiplicada por "b"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos por los elementos de la 1ª columna

$$= (b-a).(c-a).(d-a).\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c.(c-b) & d.(d-b) \end{vmatrix} =$$

En la 1ª columna sacamos factor común "c – b" y en la 2ª sacamos factor común "d – b"

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a).(c-a).(d-a).(c-b).(d-b).(d-c)$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 37

Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7$ halle, sin desarrollarlo, el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3.x+4 & 3.y+5 & 3.z+6 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN

Si todos los elementos de una línea de $|A|$ están formados por dos sumandos, $|A|$ puede descomponerse en suma de otros dos determinantes idénticos a $|A|$ excepto en dicha línea, que en el primero (segundo) de los "nuevos" determinantes está formada por los primeros (segundos) sumandos.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3.x+4 & 3.y+5 & 3.z+6 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3.x & 3.y & 3.z \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}}_{\text{este determinante es 0, pues sus filas 1ª y 2ª son proporcionales}} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{\text{este determinante es 0, pues sus filas primera y tercera son iguales}} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 38

Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 & x+4 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

a la primera fila le sumamos las restantes

sacamos factor común "x+4" en la primera fila

$$= (x+4).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+4).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & x-2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera

desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$= (x+4).\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+4).(x-2).\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la segunda columna

$$= (x+4).(x-2).\left((x-1)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ (x-1)^2-1=0 \Rightarrow x^2-2.x=0 \Rightarrow x=0,\ x=2 \end{cases}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 39

Determine el rango de la matriz "A" según los valores del parámetro "a".

$$A=\begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: el rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 3×4, su máximo rango es 3.

$$H=\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-a^2-a+1=0\Rightarrow a=\begin{cases} 1\ (\text{doble}) \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a\neq\pm 1\Rightarrow H\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)=3$.
- Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=2$

  a efectos del cálculo del rango de "A", podemos eliminar las columnas segunda y tercera, pues son iguales a la primera

- Si $a=-1$ es $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=3$

  a efectos del cálculo del rango de "A", podemos eliminar la tercera columna, pues es proporcional a la primera

LETANÍA

- Inteligencia, dime el nombre exacto de las cosas.
- Astucia, dime qué errores no debo cometer.
- Sabiduría, resista yo la dulce tentación de lo fácil.
- Lucidez, asísteme en los momentos de pánico.
- Estrategia, dime qué batallas no han de preocuparme.
- Supervivencia, identifique yo al mortal enemigo.
- Estupidez, no dé yo valor a lo que nada vale.
- Fortaleza, dame sombra en el desierto.
- Inmadurez, no te poses en mi hombro.
- Desaliento, no serás mi confidente.
- Miedo, sólo a ti temeré.

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 40

Indique qué le sucede al valor de un determinante de orden 2 cuando:

* se multiplica una fila por 4
* se multiplica una columna por 5
* se multiplica todos sus elementos por 3

Compruébalo con los determinantes $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 7 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 21 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN

Si una línea (fila o columna) de un determinante se multiplica por un número "k", el determinante se multiplica por "k":

$$\begin{vmatrix} k.x & k.y \\ z & t \end{vmatrix} = k.x.t - k.y.z = k.(x.t - y.z) = k.\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k.x & y \\ k.z & t \end{vmatrix} = k.x.t - k.y.z = k.(x.t - y.z) = k.\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$$

Multiplicar por "k" todos los elementos de un determinante de orden "n" es multiplicar por "k" sus "n" filas; por tanto, el determinante se multiplica por k^n.

Para $n = 2$, es:

$$\begin{vmatrix} k.x & k.y \\ k.z & k.t \end{vmatrix} = k^2.x.t - k^2.y.z = k^2.(x.t - y.z) = k^2.\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$$

Para los ejemplos dados, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4.2 & 4.3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 4.2.7 - 4.3.4 = 8 = 4.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5.2 & 3 \\ 5.4 & 7 \end{vmatrix} = 5.2.7 - -5.4.3 = 10 = 5.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.2 & 3.3 \\ 3.4 & 3.7 \end{vmatrix} = 3.2.3.7 - 3.3.3.4 = 18 = 3^2.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz

FONEMATO 41

Determine el rango de la matriz "A" según los valores del parámetro "k", y calcule su inversa para los valores de "k" que hacen que el determinante sea 1.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & k & k\\ -1 & k & -1\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: el rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3.

Determinemos los valores de "k" que anulan al determinante de "A":

$$|A|=-k^2-2.k=0\Rightarrow k=\begin{cases}0\\-2\end{cases}$$

Por tanto:

- Si $k\neq 0$ y $k\neq -2\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rg(A)=3$.
- Si $k=0\Rightarrow |A|=0$, siendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Es $rg(A)=2$, pues $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$.
- Si $k=-2\Rightarrow |A|=0$, siendo $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$. Es $rg(A)=2$, pues $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix}\neq 0$.
- Es $|A|=1$ si $k=-1$ (doble):

$$|A|=1\Rightarrow -k^2-2.k=1\Rightarrow k=-1\ (\text{doble})$$

Para $k=-1$, es $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, siendo:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet Adj(A)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow Adj(A)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

fonemato.com

© Rafael Cabrejas Hernansanz