BACHILLERATO 2

MATEMATICAS

EJERCICIOS DE EXAMEN

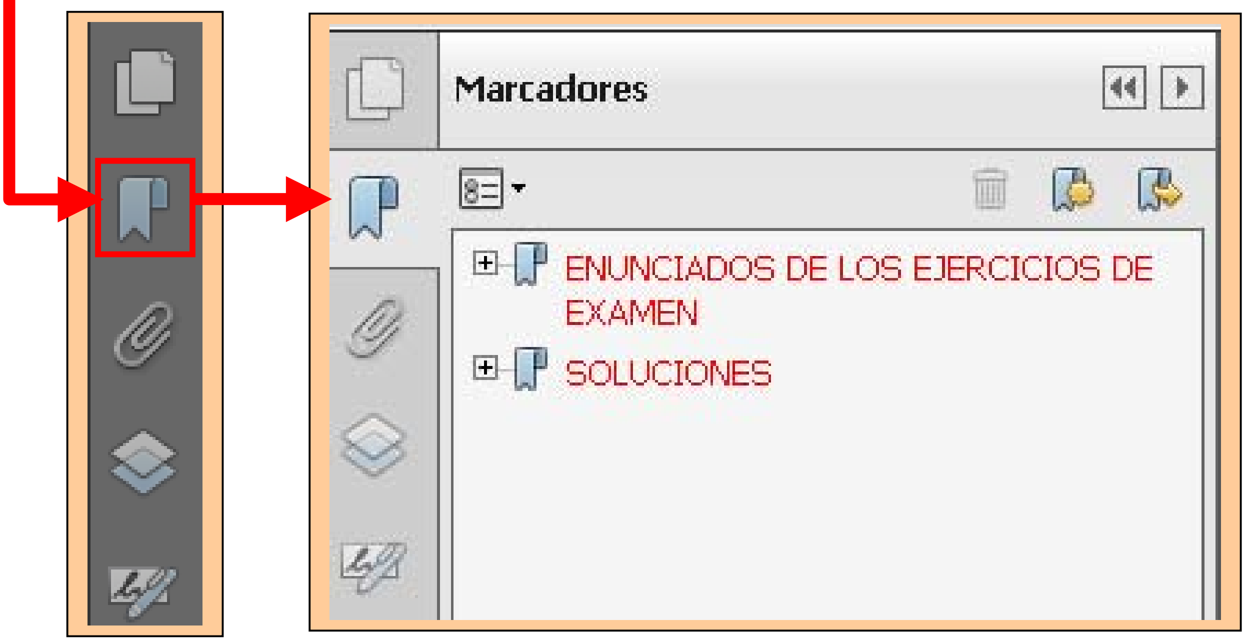
MAQUINA VOLADORA DE LEONARDO DA VINCI

Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO
EJERCICIOS DE EXAMEN

A Regino, mi padre;
sin su ilusión no
existiría Fonemato.

Enunciados

Los exámenes se aprueban en el aula de examen el día del examen; por tanto, las horas que dediques a prepararte para ese día tienen carácter de **entrenamiento**... y ya sabes: **entrenar es "sufrir".**

Como sólo deja huella en nosotros lo que nos putea y hace sufrir, cuando estés entrenando en casa y un ejercicio te desborde, lucha a muerte con él todo el tiempo que sea preciso (cuanto más tiempo resistas la tentación de mirar la solución más cicatrices quedarán en tu cerebro y más se curtirán tus neuronas), buscando en el abanico finito de posibilidades que siempre se abre cuando en una encrucijada no vemos claro qué camino seguir.

Inicialmente no debe preocuparte si los ejercicios te "salen" o no; te debe preocupar aprender a sufrir con ellos: si eres perseverante, al final ninguno se resistirá.

CÁLCULO MATRICIAL

01 Halle "a" para que $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ a & -2 & 1\\ 7 & 0 & -a\end{bmatrix}$ tenga inversa, y halle A^{-1} si $a=4$.

02 Halle "c" para que $A=\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 0 & c\\ c & 4 & 0\end{bmatrix}$ tenga inversa, y calcule A^{-1} si $c=1$.

03 Demuestre que la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & a & b-1\\ 1 & a & -1\end{bmatrix}$ tiene inversa sólo si los parámetros "a" y "b" son no nulos, y calcular dicha inversa si $a=b=1$.

04 Halle el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & a^2-1 & a\\ 1 & 2.a^2-2 & 2.a-1\\ 1 & 0 & a^2\end{bmatrix}$ según los valores de "a".

Si existe, calcule la inversa de "A" en los casos $a=0$ y $a=1$.

05 Resuelva razonadamente la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\bullet X-\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

06 Encuentre dos matrices "X" e "Y", de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $AX+BY=C$ y $AX=Y$, siendo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}6 & 7\\ -2 & -5\end{bmatrix}$$

07 Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix}x+a+b & -a & -b\\ -c & x+b+c & -b\\ -c & -a & x+a+c\end{vmatrix}=0$

08 Halle todas las matrices "X" tales que $XA=B$, si $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

09 Sean $A=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{bmatrix}$.

Halle "P" simétrica y regular y tal que $PB=AP$.

10 Si "A" y "B" son matrices 3×3 de números reales y A es diagonal (o sea, $a_{ij}=0$ si es $i\neq j$), ¿podemos afirmar que $A\bullet B=B\bullet A$ para toda matriz "B"? ¿Cómo debería ser "A" para que $A\bullet B=B\bullet A$ para toda matriz "B"?

11 Sabiendo que una matriz "A" verifica $A^2=A$, determine un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A-I)^2=I$, siendo "I" la matriz identidad.

12 Sea la ecuación matricial $X\bullet A=B$, siendo $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$.

1) ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la ecuación anterior?
2) Calcule una solución.
3) ¿Es única la solución? Razone la respuesta.

13 Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ a & b & c\\ b+c & c+a & a+b\end{vmatrix}$.

14 Calcule el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

15 Calcule los valores de "a" y "b" para los que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 1 & 3+b \\ 1 & 0 & b \end{bmatrix}$ tiene rango 2:

16 Halle una matriz "B" sabiendo que su primera fila es $(0,1)$ y que verifica:

$$A \bullet B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

17 Halle para qué valores de "k" la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ carece de inversa.

Si existe, calcule la inversa de "A" para $k = 4$.

18 Sean "A" y "B" cuadradas de orden dos tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$.

Justificando la respuesta, calcule:

$$rg(A)\ ;\ rg(B)\ ;\ |A^2|\ ;\ |-A|\ ;\ |A^{-1}|\ ;\ |2A|\ ;\ |AB^t|\ ;\ |B^tA|$$

Ponga ejemplo de matrices 2×2 tales que $|A+B| \neq |A| + |B|$.

19 Determine para qué valores de "a", "b", "c" y "d" es $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

20 De una matriz "A" se sabe que admite inversa. ¿Qué se puede decir del determinante de "A"? ¿Y del rango de "A"?

Halle para qué valores de "k" la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}$ carece de inversa.

Calcule la inversa de "A" para $k = 2$.

21 Halle las matrices "X" de la forma $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

22 Halle "A" y "B" si $A + B = C$ y $3 \bullet A + 4 \bullet B = C$, siendo $C = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

23 Halle para qué valores de "k" la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 2 & k+1 \end{bmatrix}$ tiene de inversa.

Calcule la inversa de "A" para $k = 3$.

24 Calcule "x" e "y" si la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ verifica $A^2 + x \bullet A + y \bullet I = 0$.

25 Sean "A", "B" y "C" matrices cuadradas no nulas de orden dos. ¿Es cierto que $AB = AC \Rightarrow B = C$? Si es cierta, demuéstrela; si es falsa dé un contraejemplo.

26 Aplique las propiedades de los determinantes (o sea, sin desarrollar el determinante) para calcular una solución de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & x & 18 \\ 1 & 12 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

27 Siendo "a", "b" y "c" tres números reales arbitrarios, calcula A^n para todo número natural "n", siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea "B" una matriz 3×3 arbitraria. Indique, justificando la respuesta, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

1) Si el rango de "B" es 2, el rango de B^2 también es 2.

2) Si el rango de "B" es 3, el rango de B^3 también es 3.

28 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$.

1) ¿Cuándo el determinante de "A" es el seno de algún número real?
2) Calcule la inversa de "A" cuando exista.
3) Determine todos los pares (a, b) para los que "A" coincide con su inversa.

29 Justifique cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles no:

$$1) \begin{vmatrix} \alpha.a & b \\ \alpha.c & d \end{vmatrix} = \alpha.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \; ; \; 2) \begin{vmatrix} \alpha.a & b \\ c & \alpha.d \end{vmatrix} = \alpha^2.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{vmatrix} = \alpha^2.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \; ; \; 4) \begin{vmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

30 Compruebe que $(B \bullet A)^t = A^t \bullet B^t$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

31 Encuentre dos matrices "A" y "B", de orden 3×3 con coeficientes reales y tales que $3A + 2B = C$ y $A - B = D$, siendo:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

32 Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Estudie si existe y, si es así, calcula la inversa de "A".

2) Determine una matriz "X" que verifique la ecuación $A \bullet B = A \bullet X \bullet A$.

33 Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & -x & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

34 Halle "a" para que $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ tenga inversa, y calcula dicha inversa

35 Razone si es cierto que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ para cualquier par de matrices cuadradas "A" y "B".

Siendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz triangular invertible, demuestre que su inversa también es triangular.

36 Calcule el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$, llamado de Vandermonde.

37 Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7$ halle el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3.x+4 & 3.y+5 & 3.z+6 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$.

38 Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

39 Determine el rango de $A = \begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$ según los valores de "a".

40 Indique qué le sucede al valor de un determinante de orden 2 cuando:

- se multiplica una fila por 4
- se multiplica una columna por 5
- se multiplica todos sus elementos por 3

Compruébalo con los determinantes $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 7 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 21 \end{vmatrix}$

41 Determine el rango de la matriz "A" según los valores del parámetro "k", y calcule su inversa para los valores de "k" que hacen que el determinante sea 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & k & k \\ -1 & k & -1 \end{bmatrix}$$

SISTEMAS LINEALES

01 Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}1&1&-2\\2&1&1\\2&3&-9\end{bmatrix}$, $C_1=\begin{bmatrix}1\\2\\\alpha\end{bmatrix}$, $C_2=\begin{bmatrix}-6\\-11\\\beta\end{bmatrix}$ y $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

Halle los valores de α para los que el sistema $AX=C_1$ es incompatible.

Halle los valores de β para los que el sistema $AX=C_2$ es compatible y resuelve el sistema para cada uno de estos valores.

Para $\alpha=3$ y $\beta=-13$, estudie el sistema $AX=C_1+C_2$; si es posible, resuélvalo, y si no es posible, indica por qué.

02 Discuta y resuelva el siguiente sistema.

$$(a-2).x-y+z=0\ ;\ x+(2.a-1).y-a.z=0\ ;\ x+a.y-z=0$$

03 Discuta el siguiente sistema según los valores de "k", y resuélvalo si $k=1$.

$$k.x+2.z=0\ ;\ k.y-z=k\ ;\ x+3.y+z=5$$

04 Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b".

$$a.x+y+b.z=1\ ;\ x+a.y+b.z=1\ ;\ x+y+a.b.z=b$$

05 Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores de "a".

$$x+y+a.z=a\ ;\ a.x+a.y+z=1\ ;\ x+a.y+z=a$$

06 Discuta el siguiente sistema lineal en función del parámetro "a".

$$a.x+y+z=0\ ;\ x+a.y=0\ ;\ 3.x+a.z=0$$

07 Resuelva el siguiente sistema

$$-3.x+y+2.z=1\ ;\ x+5.y-z=4\ ;\ -4.x-2.y+3.z=-1$$

08 Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "a".

$$a.x+a.y=a\ ;\ (1-a).z=a+1\ ;\ y+z=a-1$$

09 Discuta el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro "a", y halle todas sus soluciones cuando sea compatible e indeterminado.

$$a.x+y+z=a\ ;\ x+a.y-z=1\ ;\ 3.x+y+a.z=2$$

10 Discuta, en función de los parámetros "a" y " b", y resuelva, en los casos en que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x+y+a.z=1\ ;\ x+y+b.z=a\ ;\ x+a.y+z=a$$

11 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$:\ x+2.y+z=1\ ;\ 2.x+y+2.z=2\ ;\ x+y+z=1$$

12 Discuta el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$x+(a+1).y+b.z=a\ ;\ a.y+b.z=a+b\ ;\ x+2.y+z=b$$

13 Halle las soluciones comunes a los siguientes sistemas.

$$S_1:\begin{cases}x+y+z=2\\x-y-z=1\end{cases}\ ;\ S_2:\begin{cases}3.x+y+z=5\\2.x-4.y-4.z=0\end{cases}$$

14 Sea el sistema $x+y+z=0,\ x+2.y+3z=a$ y $2.x+3.y+4.z=a$.

Razone si es posible encontrar un sistema equivalente al dado, pero que tenga sólo dos ecuaciones.

15 Discuta el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de "a" y "b".

$$x + y = 1 \ ; \ x + 2.y = a \ ; \ x + 3.y = b \ ; \ x + 4.y = 2.a$$

16 Estudie la compatibilidad del siguiente sistema.

$$x + 2.y + 2.z + 3.w = 6 \ ; \ 2.x + 4.y + 3.z + 5.w = 10 \ ; \ x + 2.y - z = 0$$

17 Determine para qué valores del parámetro "a" tiene solución única el sistema.

$$2.x - 3.y = 2 \ ; \ 3.x - 3.y = a \ ; \ 5.x + a.y = -13$$

18 Estudie el siguiente sistema para los distintos valores de "a" y resuélvalo cuando sea posible.

$$2.y - z = 6 \ ; \ 3.x - 2.z = 11 \ ; \ y + z = 6 \ ; \ 2.x + y - 4.z = a$$

19 Estudie el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro real "a" y resuélvalo en los casos que sea compatible.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$$

20 Discuta, según los valores de los parámetros λ y δ, el sistema

$$(\lambda + 1).x + 3.y + \lambda.z = 1 \ ; \ 3.x + (\lambda + 1).y + 2.z = \delta - 1 \ ; \ \lambda.x + 2.y + \lambda.z = 2$$

21 Estudie el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro real "a" y resolverlo en los casos que sea compatible

$$y + a.z = -a \ ; \ x + a.y + z = 0 \ ; \ x - a.y + a.z = 2$$

22 Determine la matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial. Calcule las soluciones de módulo 1.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones para los valores del parámetro real "a" que lo hagan compatible.

$$a.x + y + (a + 1).z = 0 \ ; \ a.y + (a + 1).z = 0 \ ; \ x + 2.z = 1$$

24 Aplique el Teorema de Rouché-Frobenius para decir cómo es el sistema

$$a.x + b.y + c.z = a + b + c \ ; \ b.x + c.y + a.z = a + b + c$$
$$c.x + a.y + b.z = a + b + c$$

Encuentre una solución de dicho sistema.

25 Justifique en qué casos un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$.

Obtenga todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2.y + 3.z = 0 \end{cases}$

26 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule A^{-1}, la inversa de A^t y la de A^{-1}

Resuelva los sistemas $A^t \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

27 Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "a":

$$5.x + 3.y + 2.z + 4.t = a \; ; \; 2.x + y + z + t = 2$$
$$3.x - y + z - t = 1 \; ; \; x + y + 2.t = 3$$

28 Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a" y "b":

$$a.x + b.y + 2.z = 1 \; ; \; a.x + (2.b - 1).y + 3.z = 1 \; ; \; a.x + b.y + 3.z = 2.b - 1$$

29 Estudie la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo si $k = 2$:

$$k.x + y + z = 3 \; ; \; x - k.y + z = 1 \; ; \; x + y + z = k + 2$$

30 Estudie para qué valores de "k" el siguiente sistema es compatible indeterminado, describiendo sus soluciones en tal caso

$$6.x + 2.k.y + 3.z = 1 \; ; \; x - y + z = 3 \; ; \; 9.x - y + 6.k.z = 10$$

31 Discuta siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$x - y + z = 2 \; ; \; x + k.y + z = 8 \; ; \; k.x + y + k.z = 10$$

32 Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$x + y + z = k + 1 \; ; \; k.x + k.y + (k - 1).z = k \; ; \; x + k.y + z = 1$$

33 Discuta y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$-x - k.z = k \; ; \; x + y + 3.z = 5 \; ; \; 2.x + k.y = 0$$

34 Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro "k":

$$x + y + z = 1 \; ; \; 2.x + y + k.z = 1 \; ; \; 4.x + y + k^2.z = k$$

35 Discuta y resuelva el sistema $2.x + k.y + z = 2,\; k.x - z = 1,\; x + y + 2.z = 1$.

ESPACIO VECTORIAL

01 ¿Son $\overline{h}_1 = (1;1;1)$, $\overline{h}_2 = (2;1;-1)$ y $\overline{h}_3 = (1;0;5)$ una base de $\Re^3$?
Si $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \Re^3$ son linealmente independientes, ¿forman los vectores $\overline{u} + \overline{v}$, $\overline{u} + \overline{w}$ y $\overline{v} + \overline{w}$ una base de $\Re^3$?

02 En $\Re^4$, sean $\overline{h}_1 = (1;0;-1;2)$; $\overline{h}_2 = (\lambda;-1;0;1)$; $\overline{h}_3 = (0;\lambda;-1;1)$.
¿Para qué valores de λ son linealmente dependientes? Determinar, en tal caso, "x" e "y" de modo que $\overline{h}_3 = x \bullet \overline{h}_1 + y \bullet \overline{h}_2$.

03 Sabiendo que los vectores $(a_{11};a_{12})$ y $(a_{21};a_{22})$ son linealmente independientes, prueba que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}.x + a_{21}.y = b_1 \\ a_{12}.x + a_{22}.y = b_2 \\ a_{13}.x + a_{23}.y = b_3 \end{cases}$$

es compatible y determinado si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & 22 & b_2 \\ a_{13} & a_{22} & b_3 \end{vmatrix} = 0$

04 Dados los vectores $(1;0;0)$ y $(1;1;0)$, probar que son linealmente independientes y encontrar un vector $(x;y;z) \neq (0;0;0)$ que sea combinación lineal de los anteriores y perpendicular a $(1;0;0)$.

05 ¿Son linealmente independientes los vectores $\overline{a} = (1;2;3)$ y $\overline{b} = (3;2;1)$?
Determina un vector $\overline{c}$ de modo que $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ generen $\Re^3$.

06 Demuestra que si $\{\overline{u}, \overline{v}\}$ es base de $\Re^2$ también lo es. $\{\overline{u} + \overline{v}, \overline{u} - \overline{v}\}$.

07 Estudia si los vectores $(1;2;3)$, $(1;1;-1)$ y $(2;1;4)$ son LI o no.

08 Determina un vector $\overline{v} \in \Re^3$ sabiendo que

* la suma de sus coordenadas es 3
* $\overline{v}$ es combinación lineal de $(2;2;2)$ y $(-1;1;0)$
* los vectores $(1;0;1)$, $(0;1;0)$ y $\overline{v}$ son linealmente dependientes

ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

01 Dado el punto $A=(-6;2;0)$, halle su simétrico A' con respecto a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3.t \end{cases}$$

Halle un punto P de "r" tal que el área del triángulo AA'P sea $3.\sqrt{66}$

02 Halle la ecuación del plano Π que contiene a la recta "r" y es paralelo a la recta "s", siendo:

$$r \equiv \begin{cases} y = 2.z - 4 \\ x = 3.z - 8 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-10}{1} = \frac{y-20}{-1} = \frac{z}{1}$$

Determine el punto de corte de Π con cada una de las bisectrices de los ángulos formados por los ejes de coordenadas.

03 Determine la ecuación de la recta "s" que pasa por el punto $P=(2;3;-5)$ y es paralela a la recta "r":

$$r \equiv \begin{cases} 2.x + y - z = 4 \\ x - y + 2.z = 0 \end{cases}$$

04 Halle el valor de "k" para que los puntos A, B, C y D estén en el mismo plano, si $A=(2;-1;2)$, $B=(4;-3;-1)$, $C=(-2;1;1)$ y $D=(-1;-1;k)$.

05 Determine las coordenadas del punto común a la recta $x-1=y+2=z$ y al plano de ecuación $x+y-z=4$.

06 Determine la ecuación de la recta "t" que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en las rectas "r" y "s":

$$r \equiv \begin{cases} 2.x - y = 5 \\ \quad y + z = -1 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x + 2.y - 3.z + 1 = 0 \\ 2.x + 5.y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Halle los puntos de apoyo de "t" en "r" y en "s".

07 Si $a \neq 0$, halle la distancia de la recta que pasa por los puntos $A=(0;0;0)$ y $B=(a;a;a)$ a que pasa por los puntos $C=(a;0;0)$ y $D=(0;a;0)$.

08 Calcule la distancia del punto $P=(0;1;6)$ a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + 2.y - z + 3 = 0 \\ 3.x + 5.y + 2.z - 1 = 0 \end{cases}$$

09 Determine la posición relativa de las rectas "r" y "s":

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2.z + 1 = 0 \\ 2.x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2.x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2.z + 1 = 0 \end{cases}$$

Calcule el coseno del ángulo que forman las direcciones de las dos rectas.

10 Discuta la intersección de los planos Π_1, Π_2 y Π_3 en función de los parámetros "a" y "b":

$$\Pi_1 \equiv x - y + 1 = 0 \quad ; \quad \Pi_2 \equiv x - z + 2 = 0 \quad ; \quad \Pi_3 \equiv x + y + a.z + b = 0$$

11 Determine la ecuación del plano Π que contiene a la recta "r" y es paralelo a la recta "s", siendo:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2.y + 2.z = 0 \\ x - y + 2.z + 2 = 0 \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} 2.x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

12 Halle la recta que corta perpendicularmente a las rectas "r" y "s":

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2.x + 2.y - z = 3 \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} 2.x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

13 Estudie la posición de los siguientes planos según los valores de "a":

$$\begin{cases} (a-2).x + y - z = -1 \\ -a.x + (2.a-1).y + (-a+2).z = a \\ -x + a.y + z = a \end{cases}$$

14 Determine si hay algún valor de "a" para el que las rectas "r" y "s" se corten

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ a.y - z = 0 \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} x - a.y = 1 \\ y - z = a \end{cases}$$

Determina si hay algún valor de "a" para el que "r" y "s" sean paralelas.

15 Calcule el pie de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la recta "r".

$$r \equiv \frac{3.x - \sqrt{3}}{3} = \frac{3.y - \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} - 3.z}{6}$$

Calcule la distancia del origen a dicha recta.

16 Determine la recta "t" que es perpendicular a la recta "r" y a la recta "s" que es perpendicular a "r" y pasa por el origen de coordenadas, siendo:

$$r \equiv x + 1 = y - 1 = \frac{z}{2}$$

17 Determine "a" para que tenga área mínima el triángulo que determinan los puntos $P = (-a;0;a)$, $Q = (0;1;a+1)$ y $S = (2-a;-a;0)$.

18 Estudie la posición relativa de los planos Π_1 y Π_2 según el valor de "a":

$$\Pi_1: 4.x + a.y + a.z = 6 \; ; \; \Pi_2: a.x + y + z = -3$$

¿Para qué valor de "a" son perpendiculares?

19 Discuta e interpreta geométricamente el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de "a", y resuélvelo para $a = 1$:

$$a.x + y + z = a \; ; \; x + (1-a).y + (a-1).z = 3 \; ; \; a.x + y + z = 1$$

20 Determine el ángulo formado por el plano que pasa por los puntos A, B y C, y la recta que pasa por los puntos C y D, siendo:

$$A = (3;0;0) \; ; \; B = (0;0;0) \; ; \; C = (0;2;0) \; ; \; D = (1;1;2)$$

21 Sea la recta "r" definida como $(x;y;z) = (2;1;1) + t \bullet (-1;0;2)$. Halle su proyección ortogonal sobre el plano Π cuya ecuación es $2.x + y + z = 0$.

22 Halle el plano Π que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A=(1;2;0)$ y $B=(-1;1;3)$. Halle la ecuación del plano paralelo a Π que pasa por el punto $P=(1;2;3)$. Halle la distancia entre ambos planos.

23 Calcule el valor de "a" para que las rectas "r" y "s" se corten:

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z+3=0\\x-y-z-1=0\end{cases}\;;\;s\equiv\frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+a}{-2}$$

Halle, para ese valor de "a", el ángulo que forman las dos rectas.

24 Estudie la posición relativa de las rectas "r" y "s":

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5}\;;\;s\equiv\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{3}$$

25 Halle el plano que pasa por el punto $P=(1;1;1)$ y es perpendicular a la recta

$$r\equiv\begin{cases}x-y+z=0\\x+y+2.z=1\end{cases}$$

26 Estudie si las rectas "r" y "s" se cruzan y en su caso calcula su distancia:

$$r\equiv\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1+2.t\end{cases}\;;\;s\equiv\begin{cases}2.x-y=0\\x+z-3=0\end{cases}$$

27 Sean los puntos $A=(1;0;2)$, $B=(2;1;2)$ y $C=(1;0;1)$, sea Π el plano definido por ellos. Sean las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x-1=0\\2.y+z-1=0\end{cases}\;;\;s\equiv\begin{cases}x-z-2=0\\y-z-2=0\end{cases}$$

Determine la ecuación de Π. Una de las rectas corta a Π, determínala, halla su punto de corte con Π y calcula el seno del ángulo que forma el plano Π con ella. Compruebe que la otra recta es paralela a Π. Calcule la ecuación general del plano que la contiene y es paralelo a Π.

28 Halle el ángulo del plano Π_1 que definen los puntos $A=(0;0;8)$, $B=(-5;1;2)$ y $C=(0;-2;0)$ con el plano Π_2 que pasa por el punto $M=(0;0;1)$ y es perpendicular a la recta $"r"\equiv x-1=y-2=z/6$.

29 Halle los puntos de la recta "r" que equidistan de los planos Π_1 y Π_2

$$r\equiv\begin{cases}x-z=1\\x+y=2\end{cases}\;;\;\Pi_1\equiv 2.x+y-2.z=0\;;\;\Pi_2\equiv x-2.y+2.z-1=0$$

30 Halle la perpendicular común a las rectas "r" y "s": $r\equiv\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}\;;\;s\equiv\begin{cases}x=0\\z=3\end{cases}$

31 Determine el plano Π_1 que pasa por el punto $P=(4;3;7)$ y es paralelo al plano Π_2 de ecuación $x+y+z=0$. Halle la distancia entre ambos planos.

32 Sean los puntos $A=(2;-1;1)$ y $B=(3;0;-2)$, y la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

Determine los puntos "P" de la recta "r" tales que el triángulo ABP es rectángulo con hipotenusa AB. Hallar el área del triángulo.

33 Sea "r" la recta que definen los puntos $A=(2;-1;1)$ y $B=(0;1;-1)$, y "s" la recta que definen los puntos $C=(2;0;-1)$ y $D=(2;1;-1)$. Estudie la posición relativa de "r" y "s". Determine la ecuación del plano paralelo a "r" y a "s" que pasa por el origen de coordenadas. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto B y es perpendicular a la recta "r".

34 Los puntos $P=(1;1;0)$ y $Q=(0;2;1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo, y otro vértice está en la recta

$$r \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Halle los vértices de un rectángulo que verifique las condiciones anteriores.

35 Determine el plano que contiene los puntos $A=(0;0;0)$ y $B=(0;0;2)$ y al punto "C" que está en la recta "r" y equidista de "A" y "B":

$$r \equiv \begin{cases} x-1=0 \\ 2.x-y-1=0 \end{cases}$$

36 Halle el plano que contiene a la recta "r" y es paralelo a la recta "s"

$$r \equiv \begin{cases} x=1+2.\lambda \\ y=2-3.\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} x=z-1 \\ y=z+2 \end{cases}$$

37 ¿Qué representan geométricamente las siguientes ecuaciones paramétricas?

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=-\lambda \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x=\lambda-\delta \\ y=\lambda \\ z=\delta \end{cases}$$

38 Sea "r" la recta que pasa por el punto $A=(0;2;1)$ y cuyo vector director es el $\overline{v}=(1;-1;1)$. Halle el punto P de la recta "r" que está más próximo al punto $B=(4;7;5)$. Halle el vértice Q del paralelogramo con vértices consecutivos APBQ e indica qué tipo de paralelogramo es.

39 Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ 3.y-4.z=18 \end{cases}$

Halle la ecuación de la recta "s" que corta perpendicularmente a "r" y pasa por el punto $A=(1;-1;1)$. Calcula el punto P de intersección de "r" y "s". Halle la distancia "d" entre A y P y obtener los puntos de la recta "r" cuya distancia a P es 2.d. Siendo Q uno cualquiera de estos puntos, obtener las coordenadas del cuarto vértice del rectángulo determinado por A, P y Q.

40 Sean la recta "r" y el plano Π definidos como

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + 2.z + 5 = 0 \end{cases} \;;\; \Pi \equiv x + y - z - 6 = 0$$

Halle el punto P de intersección de "r" y Π y el punto $M \in \Pi$ más próximo al punto $Q = (6;-3;-1)$ de "r". Calcule la ecuación de la recta "s" determinada por P y M. Halle el área del triángulo de vértices P, Q y M.

41 Estudie la posición de las rectas "r" y "s" según los valores de "a":

$$r \equiv \begin{cases} x = (a+2).\lambda \\ y = 1 \\ z = a + 2.\lambda \end{cases} \;;\; s \equiv a - x = \frac{y-2}{a} = \frac{z-a}{a-1}$$

Determine el punto de intersección de "r" y "s" en el caso en que se corten

42 Halle el plano que pasa por el punto $(2;2;1)$ y contiene a la recta "r"

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z$$

43 De los planos $\Pi \equiv 2.x - a.y + 2.z = 1$, dados en función del parámetro "a", encuentre el que pasa por el punto $P = (1;2;1)$, el que dista 3 unidades del punto $Q = (1;1;1)$, el paralelo al plano $\Pi' \equiv 4.x + y + 4.z - 2 = 0$ y el que es perpendicular a la recta

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

44 Calcule el coseno del ángulo que forman las siguientes rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3.a \\ y = 1 + 2.a \\ z = 4 - a \end{cases} \;;\; s \equiv \begin{cases} x - 3.y + z + 2 = 0 \\ 4.x + 2.y - 3.z + 1 = 0 \end{cases}$$

45 Determine la recta que pasa por el punto $(1;0;2)$ y corta a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 3.y - 6 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \;;\; s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

46 Sean el punto $P = (1;-3;-4)$, el plano $\Pi \equiv x + 2.y - z = 0$ y el plano Π' que pasa por los puntos $A = (0;0;0)$, $B = (0;1;2)$ y $C = (1;0;7)$.
Determine el plano que pasa por P y es perpendicular a los planos Π y Π'.
Calcule la distancia del punto P al plano Π.

47 Determine el plano perpendicular al $x - y + z = 1$ que pasa por los puntos $(0;0;0)$ y $(1;1;0)$.

48 Sean los puntos $A = (1;1;0)$ y $B = (0;1;2)$. Halle los puntos C de la recta $(x;y;z) = (0;1;1) + \lambda \bullet (1;0;1)$ a distancia $2\sqrt{2}$ de la recta definida por A y B.

49 Compruebe que el punto $P=(1;1;-1)$ está en la recta "r" pero no en el plano Π:

$$r \equiv \begin{cases} 2.x+y-3=0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad ; \quad \Pi \equiv x-2.y+3.z-1=0$$

Determine el otro punto de "r" a igual distancia de Π que P.

50 Halle "k" de modo que las rectas "r" y" s" se corten, halla el punto de corte

$$r \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+k}{2} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x=1-3.a \\ y=-1+4.a \\ z=5-a \end{cases}$$

51 Halle "k" de modo que las rectas "r" y" s" sean secantes

$$r \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+k}{2}=\frac{z-1}{2} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-3}{2}$$

52 Halle "k" de modo que los puntos $(0;0;1), (0;1;2), (-2;1;3)$ y $(k;k-1;2)$ pertenezcan a un mismo plano.

53 Halle "k" de modo que los puntos $A=(3;1;5), B=(1;5;9)$ y $C=(3;2;k)$ estén alineados y determina el punto medio del segmento AC.

54 Halle el plano que contiene a la recta "r" y pasa por el punto $P=(2;1;3)$:

$$r \equiv \begin{cases} 2.x-y+5.z=4 \\ x-3.y+2.z=1 \end{cases}$$

55 Estudie la posición relativa de la recta "r" que pasa por los puntos $A=(2;-4;6)$ y $B=(-1;1;-1)$ y la recta "s" dada por la ecuación

$$(x;y;z)=(1;-1;2)+\lambda(3;-5;7)$$

56 Determine la ecuación del plano que pasa por la intersección de la recta "r" y el plano Π y es paralelo al plano de ecuación $x+2.y-3.z-3=0$.

$$r \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{0} \quad ; \quad \Pi \equiv x+y-z=0$$

57 Sean los planos $x+y+z=1$, $x+2.y+2.z=1$, $\lambda.x+\lambda.y+z=-1$. ¿Para qué valores de λ se cortan en un punto? Calcular ese punto. ¿Qué posición relativa tienen los tres planos cuando no se cortan en un punto?

58 Dados los vectores $\overline{k}_1=(1;3;0)$ y $\overline{k}_2=(2;1;1)$, encuentre un vector de módulo 1 y perpendicular a los anteriores.

59 Calcule la distancia del punto $P=(1;2;-4)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y-z=4 \end{cases}$

60 Determine el valor de "a" para el que la recta $x/a=y=z$ está contenida en un plano Π perpendicular a la recta $x=-y=-z$.

61 Determine la proyección ortogonal del punto $P=(0;0;4)$ sobre el plano Π que pasa por los puntos $(0;3;0), (10;3;0)$ y $(0;7;3)$.

62 Discuta en función de "k" el siguiente sistema y resolverlo si es posible.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2.x - 3.y + 4.z = k + 3 \\ 3.x - 2.y + k.z = 10 \end{cases}$$

Interprete la solución o soluciones obtenidas considerando que son el punto o puntos de una intersección de tres planos.

63 Determine la recta que está contenida en el plano $\Pi \equiv 3.x + y - 4.z = 0$, pasa por el origen y es perpendicular a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2.x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

64 Sea "r" la recta determinada por los puntos $A = (2;0;-1)$ y $B = (2;2;-1)$ y "s" la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Halle su distancia "d" y sendos puntos P en "r" y Q en "s" tales que la distancia entre ambos sea "d".

65 Halle la recta que pasa por el punto $P = (1;0;-1)$ y corta a las rectas "r" y "s", siendo:

$$r \equiv \begin{cases} 3.x + 2.y - z + 1 = 0 \\ 2.x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} x = 3 + \delta \\ y = \delta \\ z = 1 + \delta \end{cases}$$

66 Los puntos $P = (1;-1;1)$ y $Q = (3;-3;3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$. Determine los vértices restantes. Calcule la ecuación de la recta que pasa por los vértices obtenidos. Calcule el perímetro del cuadrado.

67 Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2.\lambda \\ y = 2 - 3.\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3.\lambda \\ y = 3 - 2.\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

Calcule un vector perpendicular a dichas rectas. Halle la ecuación de la recta perpendicular a "r" y a "s" que se apoya en ellas.

68 Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 2.x - y = 1 \\ x - y + 2.z = -1 \end{cases}$. De todos los planos que se pueden representar por una ecuación de la forma $5.x + k.y - 2.z + 1 = 0$, pruebe que hay un único plano Π que es paralelo a "r". Comprueba si Π contiene o no a "r"; en caso negativo determine la ecuación del plano Π' que es paralelo a Π y contiene a "r". Calcule la ecuación de una recta contenida en Π' que sea perpendicular a "r", ¿cuántas hay?

69 Halle la longitud del segmento de la recta "r" entre los planos Π_1 y Π_2

$$r \equiv \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2.x - y = 0 \end{cases} \;;\; \Pi_1 \equiv x - y = 3 \;;\; \Pi_2 \equiv 3.x + z = 5$$

Determine el ángulo que forman "r" y Π_1.

70 Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 3.x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Calcule la ecuación de la recta "s" que pasa por el punto $P = (2;-1;0)$ y corta perpendicularmente a "r". Calcule el punto Q de intersección de "r" y "s" y el simétrico de P respecto de "r". Obtenga, explicando el procedimiento utilizado, una recta paralela a "s" que se cruce con "r".

71 Estudie la posición relativa de la recta "r" y el plano Π según los valores del parámetro "k":

$$r \equiv \begin{cases} x - 2.y + z = 1 \\ 2.x - y + z = 2 \end{cases} \;;\; \Pi \equiv k.x - y + 2.z - 4 = 0$$

72 Considere la recta "r" y el plano Π definidos como

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 2.y = -12 \end{cases} \;;\; \Pi \equiv 2.x - y + 3.z - 2 = 0$$

Estudie su posición relativa y calcula la distancia del plano a la recta.

73 Calcule la distancia del punto $P = (1;0;1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 2.x - y - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

74 Halle el plano Π que contiene a la recta "r" y es paralelo a la recta "s":

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{3} \;;\; s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3.\lambda \\ y = 1 + 2.\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

75 Determine el valor de "a" para que las rectas "r" y "s" sean perpendiculares:

$$r \equiv \begin{cases} 2.x - y - 3 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \;;\; s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{a} = \frac{z+2}{2}$$

76 Para $a \neq 0$ se consideran los planos

$$\Pi_1 \equiv -x + 2.a.y - 2.a.z = 0 \;;\; \Pi_2 \equiv x + a.y - a.z = 0$$

Estudie su posición relativa y halle la recta paralela a ambos que pasa por el punto $M = (0;0;0)$. ¿Hay algún plano paralelo a ambos que pase M?

77 Sea "r" la recta que pasa por los puntos $A = (1;1;1)$ y $B = (1;-1;0)$. Entre los planos que contienen a la recta $s \equiv x - 1 = 2.(y+2) = z$, determine (si existen) los que son paralelos a "r" y los que son perpendiculares a "r".

78 Calcule la distancia del punto $P = (1;1;1)$ a la recta "r" que pasa por los puntos $A = (1;2;3)$ y $B = (-1;0;1)$.

79 Sea el punto $P=(4;2;-8)$ y la recta $r\equiv(1;5;1)+\lambda\bullet(4;1;-1),\ \lambda\in\Re$. Halle la distancia del punto P a la recta "r" mediante el siguiente procedimiento: tome un punto Q en "r" de modo que el vector $\overline{QP}$ forme un ángulo α con el vector de la recta, $\overline{v}$. Observe que la distancia de P a Q varía según variamos α, siendo la más corta cuando el ángulo es recto. Plantee la condición de ortogonalidad de los vectores $\overline{QP}$ y $\overline{v}$ para determinar el punto Q, y halle la distancia pedida como módulo del vector $\overline{QP}$. Utilice el método anterior para hallar la distancia entre las rectas

$$s\equiv(9;-1;0)+\rho\bullet(-4;1;1),\ \rho\in\Re$$
$$t\equiv(-1;0;13)+\sigma\bullet(2;1;-2),\ \sigma\in\Re$$

80 Determine el ángulo que forma el plano $x+y=0$ con el plano que pasa por los puntos $(1;1;0), (1;0;0)$ y $(0;1;1)$.

81 Calcule las coordenadas de la intersección del plano $\Pi\equiv x+y+z=1$ con la recta perpendicular a él que pasa por el punto $A=(1;1;1)$.

82 Estudie la posición relativa de las rectas "r" y "s" según los valores de "k"

$$r\equiv x-k=\frac{y+1}{2.k-1}=\frac{z}{2}\ ;\ s\equiv\frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2$$

83 Halle los puntos de la recta "r" que equidistan de los planos Π_1 y Π_2:

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}\ ;\ \Pi_1\equiv 3.x+4.y=1\ ;\ \Pi_2\equiv 4.x-3.z=1$$

84 Estudie la posición relativa de la recta "r" y el plano Π:

$$r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+3\ ;\ \Pi\equiv 3.x-2.y+z-3=0$$

85 Determine un plano que sea paralelo a la recta definida por los puntos $A=(2;0;0)$ y $B=(0;1;0)$ y contenga a la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=z$

86 Halle los valores de "m" y "n" para que las rectas "r" y "s" sean paralelas

$$r\equiv\begin{cases}x=5+t\\ y=3+t\\ z=-t\end{cases}\ ;\ s\equiv\frac{x}{m}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{n}$$

87 Halle el valor del parámetro "k" para que los puntos A, B, C y D estén en el mismo plano, siendo $A=(k;0;1), B=(0;1;2), C=(1;2;3)$ y $D=(7;2;1)$.

88 Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1;-2;3)$ y es paralela a los planos $x-2.y=1,\ x+2.z=2$.

89 Determine la posición relativa de los planos de ecuaciones

$$2.x+y+4.z=0\ ;\ 4.x-y+2.z+4=0\ ;\ 3.x-y+z+2=0$$

90 Determine los valores de "k" para que la distancia del punto $(4;6;5)$ al plano $3.x+4.y-12.z-k=0$ sea 1.

91 Sean $\overline{v}_1 = (3;1;2)$; $\overline{v}_2 = (2;1;1)$; $\overline{v}_3 = (0;1;1)$. Halle un vector $\overline{w} = (x;y;1)$ contenido en el plano determinado por $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ y sea perpendicular a $\overline{v}_3$.

92 Determine el plano que contiene a las rectas $r \equiv x = y = z$; $s \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{5}$

93 Halle la distancia del punto $H = (12;-1;1)$ a la recta "r" que pasa por el punto $P = (1;1;1)$ y cuyo vector director es el $\overline{v} = (3;4;0)$. Halle el punto (o puntos) de "r" que junto con A y P definen un triángulo de área 50.

94 Los puntos $P = (2;1;2)$ y $Q = (0;5;4)$ son vértices opuestos de un cuadrado contenido en el plano $x + y - z = 1$. Determine las coordenadas de los otros dos vértices. Calcule la ecuación de la recta que contiene al origen de coordenadas y es paralela a la que contiene a los puntos P y Q.

95 Halle el plano que pasa por $P = (1;1;1)$ y es perpendicular a la recta "r" correspondiente a las ecuaciones $x + y - z = 2$, $2.x - y + z = 1$.

96 Calcule la distancia del punto $P = (1;2;0)$ a la recta "r" de intersección de los planos $\Pi_1 \equiv x + y - z = 4$, $\Pi_2 \equiv x + 3.y + z = 46$

97 Sea "r" la recta que pasa por el origen y por el punto $T = (a;1;1)$ y "s" la recta de intersección de los planos $a.y - z + 1 = 0$, $x - y + a = 0$. Halle, en función de "a", la distancia de "r" al punto de intersección de "s" con el plano $y = 0$. Determine "a" para que "r" y "s" sean paralelas.

98 Estudie la posición relativa de los siguientes planos según el valor de "k":

$$\Pi_1 \equiv x + k.y - z = k \; ; \; \Pi_2 \equiv y + k.z = 2 \; ; \; \Pi_3 \equiv k.x + 2.y + k.z = 3$$

99 Considérese el prisma (no recto) de base triangular determinada por los vectores $\overline{OA} = (3;0;0)$, $\overline{OC} = (0;4;0)$ y $\overline{OD} = (0;2;4)$, y complétese a un prisma de base rectangular OABC y DEFG. Dibuje la figura resultante y halle las coordenadas de los puntos B, E, F y G. Halle las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{DF}$ y calcule el área del triángulo que determinan M, A y C. Determine un punto P en el segmento $\overline{EG}$ que con A y C forme un triángulo isósceles.

100 Sea "r" la recta que pasa por los puntos $A = (2;1;1)$ y $B = (2;-1;1)$ y "s" la recta cuyas ecuaciones paramétricas son $(1;1+\lambda;3+2.\lambda)$. Estudie la posición relativa de "r" y "s". Determine el punto o puntos P de "s" para los que el triángulo APB es rectángulo con hipotenusa AB.

101 Sobre los puntos $A = (1;0;0)$, $B = (1;1;0)$, $C = (1;1;1)$, $D = (1;5;3)$ y $E = (1;3;2)$ hay dos opiniones: Pepe dice que están en el mismo plano, pues el plano que contiene a los tres primeros puntos es el $x = 1$, y los otros dos puntos tienen su coordenada "x" igual a uno; luego los cinco están en el mismo plano. Juan dice que no están en el mismo plano, pues los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son LI, y por ello, los puntos A, B, C y D no pueden estar en el mismo plano. ¿Quién tiene razón?

01 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & \text{si } x \le 0 \\ 2.(a+x) & \text{si } 0<x<1 \\ b/x^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Halle "a" y "b" de modo que "f" sea continua para todo valor real de "x".

02 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\left|x^2-4\right|$

¿Es "f" continua en el intervalo $[-1;3]$?

Enuncia un teorema en virtud del cual se pueda afirmar que "f" alcanza sus extremos absolutos en el intervalo $[-1;3]$.

Dibuja la gráfica de "f". ¿En qué puntos alcanza "f" sus extremos absolutos?. Especifica el valor del máximo absoluto y del mínimo absoluto de "f".

03 Determine "a" y "b" sabiendo que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es continua:

$$f(x)=\begin{cases} x.e^{x^2} & \text{si } x \le 0 \\ a.x+b & \text{si } 0<x<1 \\ 1+x.\text{Ln}\,x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

04 La función "f" definida como $f(x)=\dfrac{x^2-2.x+a}{x^3+b.x^2-14.x}$ posee una discontinuidad evitable en $x=2$ para ciertos valores de "a" y "b". Determine dichos valores de "a" y "b", y analiza el resto de discontinuidades de la función.

05 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ la función tal que:

$$f(x)=\begin{cases} -3.\text{sen}\,x & \text{si } x \le -\pi/2 \\ b+a.\text{sen}\,x & \text{si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos x & \text{si } x \ge \pi/2 \end{cases}$$

Determine "a" y "b" de modo que "f" sea continua en $\pi/2$ y en $-\pi/2$

06 Sea la función $f(x)=\dfrac{3.x-4}{x^3+b.x^2+8.x-4}$.

Determine "b" sabiendo que "f" es discontinua en el punto $x=2$.

Estudie y clasifique todas sus discontinuidades.

07 Calcula los límites en el infinito ($+\infty$ y $-\infty$) de $f(x)=-\text{Ln}(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.\text{arc tg}\,x)$.

08 Pruebe que existe $c \in (0;\pi/6)$ tal que $\frac{1}{2}.\text{sen}\,c=(1-\frac{\sqrt{3}}{2}).\cos c$.

09 ¿Se puede afirmar que la función $f(x)=x^3-3.x^2+5$ toma el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo $[1;2]$?

10 Pruebe que $e^{-2.x}+2.x-1=0$ tiene solución en el intervalo $[-2;-1]$.

11 La función $f(x)=(x^2-1)/(x^2+2.x-8)$ es discontinua en un único punto de abcisa positiva, halle el punto y clasifique la discontinuidad.

12 Se considera la función $f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2.a & 3.b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Determine "a" y "b" sabiendo que $f(0)=-3, f(1)=f(-1)$.

13 Compruebe que la ecuación $x = x.\text{sen } x + \cos x$ tiene alguna solución en el intervalo $[-\pi;\pi]$. Enuncia el teorema utilizado.

14 Sea la función $f(x)=(x-1)/(x+2)$ para la que es $f(-3)=4$ y $f(-1)=-2$, pero la gráfica de f(x) no corta al eje de abcisas en el intervalo [−3;−1]. Razone si esto contradice el teorema de Bolzano.

01 Demuestre que función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = e^{-\text{tg}\,\pi.(x-(1/2))}$ es positiva y decreciente en el intervalo abierto $(0;1)$.

02 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le a \\ 2.a.x - 2.a + 1 & \text{si } x > a \end{cases}$.

¿Para qué valores de "a" es "f" continua?. Dibuje la gráfica en esos casos.
¿En algún caso "f" es derivable en el punto $x = a$?

03 Estudie la derivabilidad de $f(x) = 2.x + \left|x^2 - 9\right|$, y halle la función derivada correspondiente en los puntos donde exista.

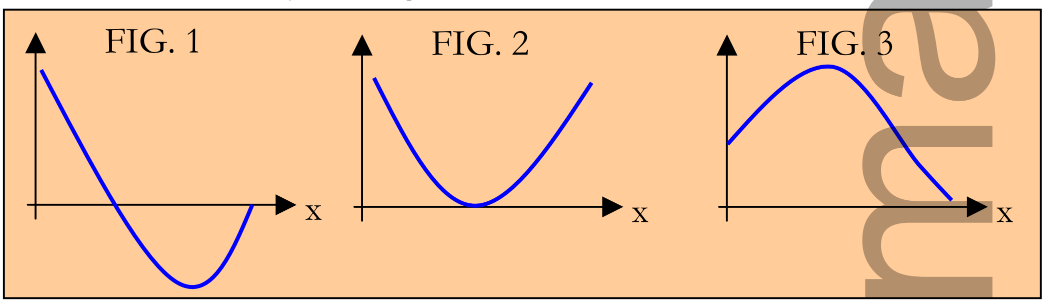
04 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2 + x + 1}\right|$.

Demuestre que "f" no es derivable en $x = 0$, y que "f" presenta el valor mínimo absoluto en dicho punto.

05 Sea la función $f(x) = e^{3.x}$

Calcule la ecuación de la recta tangente en un punto cualquiera $x = a$. Halle "a" para que dicha recta pase por el punto (exterior a la curva) $P = (1;0)$.

06 Las gráficas que se muestran en la figura corresponden a una función "f", a su función derivada primera y a otra función "g", todas ellas definidas en el mismo intervalo. Desafortunadamente, al componer el dibujo (en el que se muestran también los ejes), las gráficas se han colocado al azar.



Determine de modo razonado cuál corresponde a "f", cuál a "g" y cuál a la función derivada primera de "f".

07 Si el lado de un cuadrado aumenta a una velocidad constante de 3 cm/seg. halle la velocidad a la que aumenta el área del cuadrado cuando el lado mide 12 cm, y calcula el valor del lado cuando el área crece a 60 cm^2/seg.

08 Sea la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = e^x$.

Calcule la ecuación de la recta tangente en un punto cualquiera $x = a$.
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de "f" que es paralela a la recta de ecuación $2.x - 2.y + 1 = 0$.
Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1;0)$ y es tangente a la gráfica de "f".

09 Halle "a" si la recta $y = a + 4.x$ es tangente a la gráfica de $f(x) = 5 + 3.x^2$.

10 Demuestre que la ecuación polinómica $x^3 + 6.x^2 - 15.x - 23 = 0$ no puede tener más de una raíz real.
Determine los valores de los parámetros "a" y "b" para que sea derivable la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{b.x} & \text{si } x < 0 \\ a + \text{Ln}\,(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

11 Calcule la diferencial de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \text{tg } x$ en el punto $x = \pi/4$ si la variación de la variable es $h = 0'01$.

12 Si las gráficas de las funciones $y = -x^2$ e $y = x^2 - a.x + a - 2$ son tangentes en un punto, determine el valor de "a" y escriba la ecuación de la recta tangente común (que dos gráficas sean tangentes en un punto significa que tienen un punto en común y que las tangentes en ese punto coinciden).

13 Considere la parábola $y = x^2$.
Escriba la ecuación de su recta tangente en el punto de abcisa $x = a$.
Pruebe que sólo hay dos rectas que pasan por el punto $(3/2;2)$ y son tangentes a la parábola en algún punto.

14 Determine las coordenadas del punto de la curva $y = e^x$ tal que la tangente en dicho punto pase por el origen de coordenadas.

15 Siendo $a \neq 0$, sea $P = (a;b)$ un punto de la parábola $y = x^2/4$.
Calcule la intersección A de la tangente a $y = x^2/4$ en P con la recta $y = -1$.
Pruebe que la recta que pasa por A y por el punto $Q = (0;1)$ es perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

16 Se considera la función continua "f" definida para todo número real "x" de la que sabemos que $f(x) = x.\text{Ln}\left|x\right|$ si $x \neq 0$. Determine $f(0)$ y estudia la derivabilidad de "f", calculando $f'(x)$ cuando exista.

ROLLE, LAGRANGE Y CAUCHY

01 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ (x^2-3)/2 & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$

Pruebe que "f" cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2;0]$.
Determine los puntos cuya existencia afirma dicho teorema.
Determine los valores de "x" donde $f(x)$ alcanza sus máximos y mínimos en su intervalo de definición.

02 Pruebe que $f(x)=|x+1|$ no verifica el teorema de Rolle en $[-2;0]$.

03 Aplicando Lagrange a $f(x)=\sqrt{x}$, demuestre que $\frac{1}{9} < \sqrt{66}-8 < \frac{1}{8}$

04 Sea la función "f" tal que $f(x)=(\frac{\pi}{2}-x)^7.e^x.\text{sen}^3 x$.

Pruebe que existe al menos un número real $c \in (0;\pi/2)$ tal que $f'(c)=0$.

05 Sea la función $f(x)=x^{2/3}$. ¿Existe algún intervalo $[a;b]$ en el que se pueda aplicar el teorema de Rolle a esta función?

06 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ con función derivada $f'(x)=\text{sen}\,(\text{sen}\,x)$. Si $f(0)=0$, ¿puede ser $f(1)=2$?. Utilice el teorema del valor medio o de Lagrange.

07 Sea la función "f" tal que $f(x)=\begin{cases} x^3-12.x+1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ a.x^2+b.x+c & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

Determine los valores de "a", "b" y "c" para que se le pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0;2]$, y calcule el valor o valores de la variable "x" a los que se refiere el teorema.

08 De una función $f:\Re \mapsto \Re$ se sabe que es derivable y que los valores mínimo y máximo de su función derivada en el intervalo $[2;5]$ son 7 y 9 respectivamente. Razone cuál de las siguientes situaciones no puede darse:
1) $f(2)=6$ y $f(5)=8$; 2) $f(2)=6$ y $f(5)=30$; 3) $f(2)=6$ y $f(5)=300$

09 Pruebe que para todo valor del parámetro "a" la ecuación $2.x^5+x+a=0$ tiene una única raíz real.
Calcule aproximadamente (dos iteraciones) dicha raíz si $a=1$.

10 Analice si la función "f" verifica las condiciones del teorema de Rolle en $[0;1]$; en caso afirmativo halle el punto al que hace referencia dicho teorema.

$$f(x)=\begin{cases} 1-2.x & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ 2.x-1 & \text{si } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

11 Analice si las funciones $f(x)=x+x^3$ y $g(x)=x+3$ verifican las condiciones del teorema de Cauchy en el intervalo $[0;2]$; en caso afirmativo determinar el punto al que hace referencia dicho teorema.

12 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\begin{cases} 2.x-x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1+3.(x-1)^2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Pruebe que a "f" se le puede aplicar el teorema Lagrange en $[0;2]$.
Determine los puntos cuya existencia afirma dicho teorema.

13 Sea la función $f(x) = 3 + (x+1)^3.(x-2)^2$.
¿Tiene $f'(x) = 0$ alguna solución en el intervalo $(-1;2)$?.

14 Analice si la función $f(x) = |\text{sen } x|$ verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$.

15 Sean "m" y "n" números naturales y $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \dfrac{x^n.(1-x)^m}{x^2 + (x-1)^4}$

Demuestre que $f'(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0;1)$ cualesquiera que sean los valores de "m" y "n".

16 Sea la función "f" tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 + a.x & \text{si } x \le 3 \\ b.x + c & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determine los valores de "a", "b" y "c" para que se le pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-1;7]$.

17 Pruebe que $f(x) = x^4 - 5.x^2 - 12.x + 3$ tiene exactamente dos raíces reales. Determine el menor entero positivo "a" para el que $g(x) = a + f(x)$ no tiene ninguna raíz real.

18 ¿Es cierto que las funciones $\text{sen } x$ y $\cos x$ satisfacen las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo $[0;\pi/2]$? En caso afirmativo determine el valor intermedio garantizado por el teorema.

19 Compruebe si la función $f:[0;2.\pi] \mapsto \Re$ definida como $f(x) = 2.x + \text{sen } x$ cumple las hipótesis del teorema de Lagrange y determina los puntos a los que hace referencia dicho teorema.

20 Aplicando el teorema de Rolle, demuestre que la ecuación $x^3 - 3.x - 5 = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $(-1;1)$.

21 Compruebe que $f(x) = \cos^2 x$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[\pi/2;3\pi/2]$ y determine el punto a que se refiere la tesis del teorema.

22 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \begin{cases} a.x & \text{si } x < -1 \\ (x^2 - b)/2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

Analice si existen valores de "a" y "b" para los que "f" cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[-2;2]$. En caso afirmativo, determine los puntos a que se refiere dicho teorema.

23 Justifique que la función $f(x) = 2.x + \cos 2.x$ tiene una única raíz real.
¿Es positiva dicha raíz?, ¿por qué?

24 Sea "f" tal que $f(x) = \begin{cases} 4 + 2.x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 4 - 2.x & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$

¿Se anula la derivada de "f" en algún punto del intervalo $(-2;2)$?
¿Contradice el resultado anterior el teorema de Rolle?

REGLA DE L'HOSPITAL

01 Calcule los siguientes límites:

$$1)\ \lim_{x\to +\infty} (e^{3.x} - 5.x)^{1/x} \ ;\ 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{tg\ x - sen\ x}{x - sen\ x}$$

02 Calcule los siguientes límites:

$$1)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Ln\ x} \right) \ ;\ 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 - \cos\ x}{2.x^2}$$

03 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{Ln\ (1+|x|)}{x}$

04 Calcule los siguientes límites:

$$1)\ \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos\ x}{1 - sen\ x} \ ;\ 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\ x}{x^2} \ ;\ 3)\ \lim_{x\to 1} \frac{sen\ (x-1)}{x^2 - 3.x + 2}$$

05 Es sabido que $\lim_{x\to \infty} \frac{x - sen\ x}{x + \cos\ x} = 1$

¿Se puede aplicar la regla de L'Hospital para calcular el anterior límite?

06 Determine el tipo de discontinuidad que en el punto $x = 0$ presenta la función

$$f(x) = \frac{x.Ln\ (x+1)}{3.x^2}$$

07 Sabiendo que la función "f" es continua en todos los puntos y que si $x \neq 0$ es $f(x) = (e^x - 1)/x$, calcule $f(0)$ y analiza si "f" es derivable en $x = 0$.

08 Estudia razonadamente la continuidad y derivabilidad de la función "f" definida como

$$f(x) = \begin{cases} x/(e^x - 1) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

OPTIMIZACIÓN

01 Halle el punto "Q" de la parábola $y = x^2$ más próximo al punto $P = (3;0)$. Compruebe que la recta QP es perpendicular a la tangente a la parábola en el punto "Q".

02 Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en el semicírculo determinado por $x^2 + y^2 = 25,\ y \geq 0$.

03 Si $k_1, \ldots, k_n$ son números fijados, determine el número real "x" de modo que la suma $(x - k_1)^2 + \ldots + (x - k_n)^2$ sea mínima.

04 Herón descubrió que el área de un triángulo de lados "a", "b" y "c" es:

$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)},\ \text{siendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Utilizando la fórmula de Herón, o por otro método, determine el triángulo de área máxima cuyo perímetro es de 32 cm y cuya base mide 12 cm.

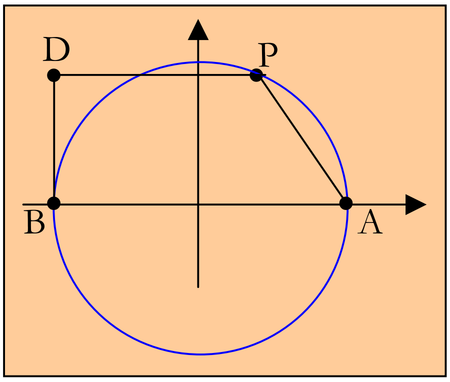
05 Sea la parábola $y = x^2 - 4.x + 4$ y un punto $(p;q)$ sobre ella, con $0 \leq p \leq 2$. Formamos un rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices opuestos $(0;0)$ y $(p;q)$. Halle "p" y "q" para que el área de este rectángulo sea máxima.

06 Un sólido formado por un cilindro a cuyas bases se han pegado dos conos iguales está inscrito en una esfera de 10 cm de radio. Determine la altura del cilindro si se pretende que el volumen del sólido sea máximo.

07 Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa determine el de área máxima.

08 De todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1;-3)$, determine la que forma con un triángulo de área mínima con la parte positiva del eje de abcisas y la negativa del eje de ordenadas.

09 Si la circunferencia de la figura tiene radio unidad, determine las coordenadas del punto "P" de modo que el trapecio ABDP tenga área máxima.



REPRESENTACIÓN DE CURVAS

01 Para la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = x/(1+x^2)$, estudie las asíntotas, las zonas de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las zonas de concavidad y convexidad. Realice un esbozo de la gráfica de "f".

02 Calcule las asíntotas de $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = (x^2 - 3)/(x - 2)$.

03 Si $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$, estudie su dominio y asíntotas, y los puntos de corte de la gráfica con las asíntotas, si las hay. Crecimiento y decrecimiento. Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

04 Estudie y represente la función tal que $f(x) = x/((x-1).(x-3))$

05 Estudia la gráfica de $f(x) = x^2.e^x$, y explique por qué la ecuación $x^2.e^x = 1$ sólo tiene una solución. Pruebe que esta solución está entre $1/2$ y 1.

06 Determine el dominio de definición, las asíntotas y los máximos y mínimos relativos de la función tal que $f(x) = (x^3 + x^2 + 2.x + 1)/(x^2 + 2.x + 1)$.

07 Siendo $g(x) = e^x + (1/x)$, calcule sus límites si $x \to +\infty$ y si $x \to -\infty$; indique si tiene alguna asíntota. Utilizando el apartado anterior, explique por qué hay un único valor de "x" que anula la derivada $g'(x)$. Estudie el crecimiento y decrecimiento de $g(x)$, y dibuja su gráfica.

08 Represente gráficamente la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = e^x/(1 + e^{2.x})$

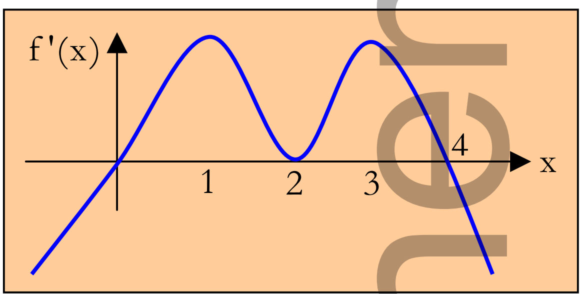
09 Estudie y represente gráficamente la función $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$

11 Estudie y represente gráficamente $f(x) = x^2/(x^2 + 2.x - 3)$.

11 Estudie y represente gráficamente la función $f(x) = x + (4/(x-1)^2)$.

12 Para la función $f(x) = (x^2 - 3.x + 2)/(x+1)^2$, estudie sus asíntotas, sus extremos y sus puntos de inflexión. Dibuje su gráfica.

13 La gráfica de la derivada de $f(x)$ en el intervalo $(-1;5)$ es la de la figura. Si $f(0) = 0$, dibuje de modo aproximado la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $(-1;5)$. Indique los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de $f(x)$.



14 Halle la función $f(x) = x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ si en $(1;0)$ tiene tangente horizontal y el punto $(-1;-32)$ es de inflexión. Halle los extremos relativos.

15 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = ((3.x^2 + x)/(3.x^2))^{a.x+2}$. Halle "a" si la gráfica de "f" tiene como asíntota horizontal la recta $y = 2$.

16 Calcule recta la tangente a $f(x) = x^3 - 3.x + 2$ en su punto de inflexión.

17 Represente la función $f(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ si en el punto $(1;4)$ tiene un máximo relativo y su recta tangente en el punto $(0;0)$ es $y = 6.x$

18 Determine el dominio de definición, las asíntotas y los extremos relativos de la función $f:\Re \mapsto \Re$ definida como $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2 - 1}$

19 Demuestre que la función $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ tiene un único punto de inflexión y determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de "f" en él.

20 Halle las asíntotas verticales y horizontales y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 1/(x^2 - 2.x - 3)$. Represente su gráfica.

21 Represente la gráfica de $f(x) = (x-3).(x-5)/(x^2 - 4)$

22 Represente la gráfica de $f(x) = x/(1 + x^2)$

23 Sea $f(x) = n.x - x^n$, siendo "n" un número entero distinto de 0 y de 1. Compruebe que la función "f" tiene un extremo relativo en $x = 1$ para cualquier valor de "n". Estudie si depende o no del valor de "n" el que este extremo sea máximo o mínimo. Suponiendo ahora que $n > 1$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de "f" según los valores de "n". Utilice los resultados para probar que $n.x - x^n \leq n - 1$ si $x \geq 0$ y $n > 1$.

24 Halle las asíntotas verticales y horizontales y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = (x^2 - 4.x)/(x^2 - 1)$. Represente su gráfica.

25 Siendo $f(x) = (a.x^3 + b.x^2 + 5)/(x^2 - c)$, calcule "a", "b" y "c" sabiendo que las rectas $x = 2$ e $y = 3.x + 2$ son asíntotas. ¿Tiene otras asíntotas?, en caso afirmativo determínelas.

26 Represente gráficamente la función $f:\Re \mapsto \Re$ definida como $f(x) = e^{-x^2}$, y determine el punto en que sea máxima la pendiente de la recta tangente.

27 Represente gráficamente la función $f(x) = \text{sen } x + \cos x$ determinando sus máximos y mínimos relativos.

28 Calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2.x^3 - 6.x^2 + 4$ en su punto de inflexión. Haga una gráfica de la función en un entorno de dicho punto.

29 Represente gráficamente la función $f(x) = x - \text{Ln}\,(1 + x^2)$.

30 Represente la gráfica de $f(x) = (x-1).(x-2)/(1 + x^2)$ determinando sus máximos y mínimos absolutos y los puntos de corte con sus asíntotas.

31 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f'(x) > 0, \forall x$. Analice el crecimiento y decrecimiento de $g(x) = f(e^x)$ y determine los extremos relativos de $h(x) = e^{-f(x)}$.

32 Sea $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2.x & \text{si } x < 0 \\ a.x^3 - (3/2).x^2 + b.x + c & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + d.(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Halle "a", "b", "c" y "d" para que "f" sea continua y derivable en todo punto. Represente las gráficas de f' y f'', indicando los puntos en que no están definidas.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

01 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int (1+x^2).\text{Ln}\,x.dx\ ;\ 2)\ \int \frac{e^x}{e^{2.x}+e^x-2}.dx$$

02 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int \frac{x^3-x}{x^2+4.x+13}.dx\ ;\ 2)\ \int e^x.\cos x.dx$$

03 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}.(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\ ;\ 2)\ \int x.(\text{Ln}\,x)^2.dx\ ;\ 3)\ \int \frac{x.dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

04 Calcule $\int \frac{x^2+3.x+2}{(x-1).(x^2+2.x+2)}.dx$

05 Calcule $\int dx/(\cos^4 x)$ mediante el cambio de variable $\text{tg}\,x = z$

06 Halle una función "f" tal que $f(0)=0$; $f'(0)=5$; $f''(0)=1$; $f'''(x)=x+1$.

07 Calcule $\int \frac{2.x+5}{(x-1).(x+3)^2}.dx$ y $\int \frac{dx}{1+e^x}$

08 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}.dx\ ;\ 2)\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\ ;\ 3)\ \int (x^2.\text{Ln}\,x - x.\text{Ln}\,x^2).dx$$

09 Determine una primitiva de $f(x)=x.(1-\text{Ln}\,x)$ que pase por el punto $(1;1)$.

10 Determine $f(x)$ sabiendo que $f'(x)=e^{2.x}.\text{sen}\,x$ y que $f(\pi/2)=1$

11 Determine $f:(1;+\infty)\mapsto \Re$ si $f'(x)=\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}$ y $f(2)=\text{Ln}\,4$.

12 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int \frac{\text{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x.\text{sen}\,x}}.dx\ ;\ 2)\ \int x^2.\sqrt{x+1}.dx\ ;\ 3)\ \int (1+x^2).\text{sen}\,x.dx$$

13 Calcule una función que valga 0 en 0 y cuya derivada sea $f(x)=\text{sen}\,x.\cos x$

14 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int dx/(x^4-1)\ ;\ 2)\ \int dx/(x^2+x+1)$$

15 Determine todas las funciones cuya segunda derivada es $f''(x)=x.e^x$, obteniendo la que pasa por los puntos $(0;2)$ y $(2;0)$.

16 Determine $f(x)$ sabiendo que $f'(x)=\frac{2.x}{x^2+x-2}$ y que $f(2)=(\text{Ln}\,4)/3$.

17 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int \frac{\sqrt{5.x^3}+\sqrt[3]{3.x^2}}{\sqrt{2.x}}.dx\ ;\ 2)\ \int \frac{x.dx}{e^x}\ ;\ 3)\ \int \frac{dx}{1-e^x}\ ;\ 4)\ \int (x^2+x).e^{-2.x}.dx$$

18 Calcule las siguientes primitivas:

$$1)\ \int \frac{dx}{x^3+x}\ ;\ 2)\ \int x.\sqrt{1-x^2}.dx\ ;\ 3)\ \int x.\cos x.dx$$

INTEGRALES DEFINIDAS

01 Calcule $\int_0^2 f(x).dx$, siendo $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<1 \\ 1+x.\text{Ln}\,x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

02 Calcule $\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2}.dx$ haciendo el cambio $x=\text{sen}\,z$.

03 Calcule $\int_0^{1/2} x^3.dx/\sqrt{1-x^2}$

04 Calcule una primitiva de "f" y $\int_0^2 x.f(x).dx$ siendo $f(x)=1+|x-1|$.

05 Sea la función definida como $f(x)=(x+\sqrt{x^2})^2/4$, donde el símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada positiva. Analice la continuidad y la derivabilidad de "f" en $x=0$. Determine los intervalos de crecimiento de "f". Calcule la integral de "f" en el intervalo $[-3;3]$.

06 Calcule $\int_0^{\pi/2} x.\text{sen}\,x.dx$ y $\int_1^e x.\text{Ln}\,x.dx$.

07 Se sabe que la función $f:\Re\mapsto\Re$ tal que $f(x)=a.x^2+b.x+c$ verifica que:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0\ ;\ \lim_{x\to 1} f(x)=1\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2$$

Determine los valores de "a", "b" y "c" y calcula $\int_0^1 3.f(x).dx$

08 Determine para qué valores de "x" existe $f(x)=x.\sqrt{1-4.x^2}$ y calcule la integral de "f" en el intervalo $[0;1/2]$.

09 Sea la función "f" tal que $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ x-1 & \text{si } 1<x\leq 2\end{cases}$

Se define una nueva función $a[f]$ de modo que si $0\leq x_0\leq 2$ entonces $a[f](x_0)$ es el área limitada por el grafo de "f", el eje de abcisas y las rectas $x=0$ y $x=x_0$. Compruebe que la función $a[f]$ es continua. Si se repite la construcción para la función $a[f]$, razone si la función $a[a[f]]$ es derivable.

10 Si $F:[5;+\infty)\mapsto\Re$ es tal que $F(x)=\int_5^x \sqrt{1+e^z}.dz$, calcule $F'(x)$.

11 Sean las funciones $F(x)=\int_0^x e^{z^2}.dz$ y $g(x)=x^2$.

Calcule las derivadas de las funciones compuestas $F\bullet g$ y $g\bullet F$.

12 Calcule $\int_1^3 |(x-2).(x-4)|.dx$

13 Sea "f" una función continua y derivable en toda la recta real tal que

$$f(0)=0\ ;\ f(1)=0\ ;\ f'(0)=1\ ;\ f'(1)=2$$

Calcule $g'(1)$ si $g(x)=f\left(\int_1^x f(t+1).dt\right)$, y calcula también $\lim_{x\to 1} g(x)/f(x)$

14 Calcule $\int_0^1 (x^3+3.x^2-3.x).dx/(x^2+3.x+2)$

ÁREAS Y VOLÚMENES

01 Siendo $f(x) = x.\cos x$, consideremos los recintos del plano

$$D_1 = \left\{(x;y) \,/\, 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le f(x)\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x;y) \,/\, \frac{3.\pi}{2} \le x \le 2.\pi,\ 0 \le y \le f(x)\right\}$$

Compruebe que la suma de sus áreas es $2.\pi$.

02 El segmento AB de 5 cm de longitud, gira alrededor del eje OX, y se sabe que las respectivas ordenadas de A y B son 2 y 5. Calcule el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por dicho segmento, el eje OX y las rectas verticales que pasan por A y por B.

03 Dibuje en el mismo plano las gráficas de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \text{sen } 2.x$ en el intervalo $[0;2.\pi]$ y halle el área encerrada entre ellas.

04 Represente el recinto que limita la curva de ecuación $y = x^2 + x$ con la recta perpendicular a su tangente en el punto $x = 0,\ y = 0$. Calcule su área.

05 Sea la función $y = x.e^{a.x}$ donde "a" es una constante no nula. Halle "a" si el área limitada por $y = x.e^{a.x}$ y las rectas $y = 0,\ x = 0$ y $x = 1$ es $1/a^2$.

06 Halle el área del dominio que limitan $y = x^2 - 4.x - 5$ e $y = -x^2 + 6.x + 7$.

07 Calcule el área encerrada por la curva $a^2.y^2 = x^2.(a^2 - x^2)$, siendo $a > 0$.

08 Calcule el área determinada por la curva $f(x) = (x-1)/(x+2)$, el semieje positivo del eje de abcisas y el semieje negativo del eje de ordenadas.

09 Siendo $a > 0$, calcular "a" para que $\int_{-a}^{a} \big||x| - 1\big|.dx = 4$.

10 Se considera la función $f(x) = |x - 4|$ en el intervalo $[0;6]$ y la partición de dicho intervalo dada por $P = \{0, 1, 4, 6\}$. Calcule la suma integral superior de la función "f" correspondiente a la partición dada del intervalo $[0;6]$.

11 Halle el área que encierran la funciones $f(x) = 1/x^2$, $g(x) = x/8$ y $h(x) = x$ en el primer cuadrante.

12 Halle el volumen obtenido al girar alrededor del eje de abcisas la superficie limitada por $y = 1/(x+2)$ y las rectas $x = 2,\ x = 4$ e $y = 0$.

13 Dibuje las gráficas de las funciones $f(x) = |\text{sen } 2.x|$ y $g(x) = \cos 2.x$ en el intervalo $[0;2.\pi]$. Si "a" y "b" son los dos valores menores de "x" en los que se cortan las dos gráficas, determine el área comprendida entre ellas en el intervalo $[a;b]$.

14 Determine el área del recinto limitado por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 4/x^2$.

15 Determine el área del recinto que limitan $f(x) = 6.x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2.x$ en el primer cuadrante.

16 Determine el área del recinto limitado por $f(x) = x^2 + 4.x$ el eje de abcisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

17 Determine el área de la región que limita la curva $y = (x-1)^2.(x+1)$ con las rectas $x = -2,\ x = 1$ e $y = 0$.

18 Calcule el volumen al girar alrededor del eje de abcisas el dominio limitado por las funciones $f(x) = 4.x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 4.x + 6$.

19 Determine el área del recinto limitado por $y = 4.x$ e $y = 3.x^2$.

20 Calcule el área de un circulo de radio "r".

21 Calcule el área limitada por la parábola $y = 1 + x^2$ y la recta $y = 1 + 2.x$

22 Calcule el área que limitan $f(x) = x^2 - x - 2$ y $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

23 Determine el área que limita $f(x) = (x-1)/(x^2-4)$ con el eje de abcisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

24 Halle el área que limita $f(x) = -2.x^3 + 6.x$ con el eje OX en el primer cuadrante.

25 Sea "a" una constante y "f" la función definida como $f(x) = a + x^2$.
Calcule "a" para que las respectivas rectas tangentes a la gráfica de "f" en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ pasen por el origen de coordenadas. Determine el área del recinto limitado por la gráfica de "f" y las rectas tangentes indicadas.

26 Calcule el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje de abcisas de la superficie limitada por dicho eje y $f(x) = \text{sen}\ x$ en $[0;\pi]$.

27 Calcule el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje de abcisas de la superficie limitada por dicho eje y $f(x) = x - x^3$.

28 Calcule el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2 - x^2$

29 Se considera la función $f(x) = x.\sqrt{5 - x^2}$. Determine su dominio, los cortes con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule el área encerrada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abcisas.

30 Determine los valores de "a", "b" y "c" para los que $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ verifica que $f(-2) = f(2) = 0$, tiene un máximo relativo en $x = 0$ y el área limitada por la gráfica de "f" y el eje de abcisas es 32.

31 Halle el área del dominio que limitan $y = x^2 - 2.x$ e $y = -x^2 + 4.x$

32 Dibuje el dominio que limitan $y = x$ e $x = y^2$. Calcule su área.

33 Calcule el área del dominio que limitan las curvas $y = x^2/2,\ y = 1/(1 + x^2)$

34 Dibuje el dominio que en el primer cuadrante limitan la curva $y = \text{Ln}\ x$, la recta $y = 2$ y los ejes de coordenadas. Calcule el área de dicho dominio.

35 Dibuje el recinto del plano limitado por el eje de abcisas, la recta $x = 4$ y la gráfica de la función $f : \Re \mapsto \Re$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcule el área de dicho recinto.

36 Calcule el área limitada por las parábolas $y = -x^2 - 2.x$ e $y = x^2 + x + 1$

37 Calcule el área del dominio limitado por la curva $y = 1/(1 + x^2)$, el eje de abcisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de la curva.

38 Calcule el área de la región que limitan la parábola $y^2 = x$ y el segmento cuyos extremos son los puntos $P = (1; -1)$ y $Q = (4; 2)$.

39 Calcule el área del dominio limitado por las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ y la recta que pasa por los puntos $(2; 4)$ y $(4; 2)$.

40 Calcule el área del dominio limitado por el eje de abcisas, las rectas $x = -5$ y $x = 5$ y la semicircunferencia obtenida al considerar los puntos de la circunferencia $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ que verifican $y \geq 5$. Determine el volumen engendrado por dicho dominio al girar alrededor del eje de abcisas.

41 Determine $k > 0$ de modo que sea 1 el área que limita la recta $x = k$ con las gráficas de las funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

01 En una zapatería hay tres estanterías A, B y C; la primera tiene 50 pares de zapatos negros y 25 marrones, la segunda tiene 40 de cada color y la última 20 negros y 30 marrones. Si un cliente que no tiene preferencia especial respecto a las estanterías ni respecto al color elige al azar un par de zapatos y es marrón, calcule la probabilidad de que proceda de la estantería B.

02 El 80 % de la población es morena y el 70 % es de ojos oscuros.
Calcule la probabilidad de no ser moreno o tener los ojos claros.
Calcule la probabilidad de ser moreno y tener los ojos claros.

03 Dos seres humanos y ocho elefantes se sientan al azar entorno a una mesa circular. Calcule la probabilidad de que los humanos estén juntos.

04 Si "A" y "B" son sucesos tales que $P(A)=0'6$ y $P(B)=0'7$, calcule $P(A\cup B)$ y $P(A\cap B)$ sabiendo que $P(A\cup B).P(A\cap B)=0'4$.

05 Sacamos al azar tres cartas de una baraja española de 40 naipes.
Calcule la probabilidad de que las tres cartas sean copas.
Calcule la probabilidad de que dos de las cartas sean ases y la otra sea un rey.

06 De una urna con 3 bolas blancas y 4 negras se extraen 3 bolas con reposición.
Calcule la probabilidad de que las tres sean del mismo color.
Calcule la probabilidad de que dos sean blancas y la otra sea negra.

07 Disponemos de 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. De ellas, hemos marcado con un punto 3 blancas, 2 rojas y 2 negras. Introducimos las doce bolas en una urna. Si se extraen dos bolas, calcular la probabilidad de que alguna esté punteada. Si al sacar una bola resulta punteada, calcule la probabilidad de que sea blanca.

08 La urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y la urna B contiene seis bolas numeradas del 1 al 6. La urna A tiene el doble de probabilidad de ser elegida que la B. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.
Calcule la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 1.
Si la bola extraída tiene el número 1, calcule la probabilidad de que proceda de la urna A.

09 Al lanzar un dado al aire, sea A el suceso de obtener un múltiplo de 3 y B el suceso de obtener un número par. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

10 Una urna U_1 contiene una bola roja y otra negra. Otra urna U_2 contiene tres bolas rojas y una negra. Se saca una bola de U_1 y se introduce en U_2, después se extrae una bola de U_2. Se pide:
Probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.
Probabilidad de que la 1ª bola sea roja sabiendo que la 2ª es negra.

11 Se extraen al azar dos bolas de una urna con 6 bolas rojas y 4 blancas. Describa el espacio muestral y calcule la probabilidad de cada suceso elemental.

12 En un colegio hay tres grupos A, B y C de 2º de bachiller. En el grupo A hay 40 alumnos y ha suspendido el 25 %, en el grupo B hay 50 alumnos y ha suspendido el 20 %, y en el grupo C hay 60 alumnos y ha suspendido el 30 %.

Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya aprobado.

13 Un jugador lleva en el bolsillo dos monedas, una normal y otra con dos caras. Elige una al azar, la lanza y sale cara. Calcule la probabilidad de que haya elegido la moneda normal.

14 Si de un dominó con 28 fichas de las que 7 son dobles se extraen cuatro fichas, calcule la probabilidad de que al menos una sea doble.

15 En el proceso de fabricación de ordenadores, la probabilidad de que el disco duro sea defectuoso es $0'15$ y la probabilidad de que sea defectuoso el monitor (incluido el teclado) es $0'2$. Calcule la probabilidad de que un ordenador sea defectuoso.

16 Siendo A, B y C sucesos de un experimento aleatorio, exprese los sucesos:

1) Al menos dos de los tres sucesos ocurren.
2) No ocurre ninguno de los tres sucesos.
3) Ocurre alguno de los tres sucesos.
4) Ocurren exactamente dos de los tres sucesos.

17 En una fábrica de autobuses se descubrió que uno de cada cien autobuses tiene problemas con el cierre de la puerta, por lo que, antes de la venta, cada autobús es sometido a un test de verificación. El test no es completamente fiable, pues si el autobús tiene problemas con la puerta se detecta en un 95 % de los casos, mientras que si no lo tiene, en un 2 % de las veces indica que sí tiene.

Calcule la probabilidad de que un autobús tenga problemas con la puerta y no se detecte en el test.

Si el test indica problemas con la puerta de un autobús, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga?

18 Un tipo de negociación obrero-patronal ha concluido con la firma de un convenio al cabo de dos semanas de conversaciones el 50 % de las veces. También se sabe que el fondo de ayuda monetaria ha sido suficiente para soportar la huelga el 60 % de las veces y que ambas condiciones se han verificado el 30 % de las veces.

Calcule la probabilidad de que en una negociación determinada se llegue a la firma del convenio después de dos semanas, supuesto que se tiene garantizado el fondo de ayuda monetaria.

Calcule la probabilidad de que el fondo de ayuda monetaria haya sido suficiente, supuesto que se ha firmado el convenio al cabo de dos semanas.

19 En una ciudad hay un 55 % de mujeres y un 45 % de hombres. El 60 % de las mujeres y el 40 % de los hombres sufren dolores de cabeza. Calcule la probabilidad de que una persona de esa ciudad padezca dolores de cabeza.

20 Se tienen 2 bolas blancas y 2 bolas negras que han de distribuirse entre dos urnas idénticas de manera que cada urna contenga alguna bola. ¿Cómo han de distribuirse las bolas en las urnas para que sea mínima la probabilidad de obtener bola negra al extraer al azar una bola de una urna elegida también al azar?.

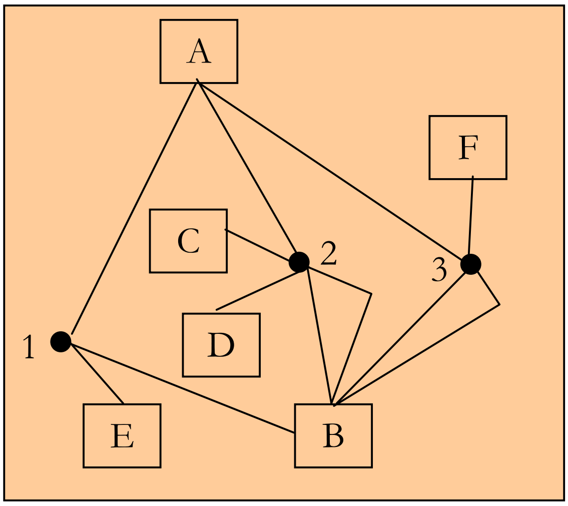
21 Se van a sortear 4 jamones entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una de las que ha obtenido un rey gana un jamón. Halle la probabilidad de que gane un jamón la primera persona que recibe carta, y la probabilidad de que gane un jamón la segunda persona que recibe carta.

22 Sean dos sucesos A y B con probabilidades $P(A) \in (0;1)$ y $P(B) \in (0;1)$. Calcule $P(B/A)$ y $P(A \cup B)$ en función de $P(A)$, $P(B)$ y $P(A/B)$.

23 Una aseguradora clasifica a los conductores en tres grupos: B (buenos), R (regulares) y M (malos), y según sus datos, el 20 % de los asegurados son de la clase B, el 30 % de la clase R y el resto de la clase M. La probabilidad de tener un accidente en un año es del 1 % en la clase B, del 5 % en la clase R y del 10 % en la clase M. Calcule la probabilidad de que un asegurado tenga un accidente en el primer año. En ese caso, calcula la probabilidad de que sea de la clase M. Si un asegurado no tiene ningún accidente en el primer año, calcule la probabilidad de que sea de la clase B.

24 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se vuelve a introducir, repitiendo esta operación tres veces. Calcule la probabilidad de sacar tres oros. Si se extraen tres cartas a la vez, calcule la probabilidad de todas sean copas.

25 Un caminante parte del pueblo A. Si en cada cruce de caminos (1, 2 ó 3) elige un camino al azar exceptuando el que ha traído, determine la probabilidad de que llegue al pueblo B.



26 En una fiesta de 85 mujeres y 95 hombres se eligen 4 personas al azar.
Calcule la probabilidad de que ninguna sea hombre.
Calcule la probabilidad de haya exactamente un hombre.
Calcule la probabilidad de haya más de un hombre.

27 De una urna con diez bolas numeradas del 1 al 10 se eligen sucesivamente dos bolas con reposición. Calcule la probabilidad de que los números difieran menos de 4.

28 ¿Cuántas veces hay que lanzar un dado de seis caras al aire para que la probabilidad de que salga un múltiplo de 3 al menos una vez sea $0'9$?

29 Mario participa en un juego de baloncesto que consiste en intentar encestar una entrada, un tiro libre y un triple, disponiendo de un único intento en cada caso. Si encesta al menos dos veces gana un apartamento en la Manga y si encesta una vez gana una ilusión. Sus porcentajes de acierto para las entradas, los tiros libres y los triples son respectivamente el 80 %, el 70 % y el 50 %.
¿Cuál es la probabilidad de que gane el apartamento?
¿Cuál es la probabilidad de que no gane nada?

30 Calcule la probabilidad de un suceso sabiendo que el cuadrado de ésta menos el cuadrado de la probabilidad del suceso complementario es igual a $0'3$.

31 Se tienen 3 urnas numeradas del 1 al 3, con 2 bolas blancas y 3 bolas negras cada una de ellas. Se extrae una bola de la primera urna y se echa en la segunda. Después se extrae una bola de la segunda y se echa en la tercera, y finalmente se extrae una bola de la tercera. Calcule la probabilidad de que esta tercera bola sea blanca.

32 En una caja hay 3 tuercas y 7 tornillos. Si se extraen dos piezas al azar, calcule la probabilidad de que sean distintas.

33 La urna A contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna B contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Se extrae una bola de la urna A y se deposita en la B, después se extrae una bola de B.
Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.
Calcule la probabilidad de que la segunda sea blanca si la primera es negra.

34 Con los sucesos A, $\overline{A}$ (complementario de A) y B, obtenga $P(A/B)$ en función de los valores de $P(A), P(\overline{A}), P(B/A)$ y $P(B/\overline{A})$.

35 Un dado está trucado de modo que las respectivas probabilidades de sus caras son:

$$P(1)=P(2)=\frac{1}{20}\ ;\ P(3)=P(4)=\frac{1}{10}\ ;\ P(5)=\frac{1}{5}\ ;\ P(6)=\frac{1}{2}$$

Calcule la probabilidad de que al lanzar el dado tres veces, las dos primeras sean 6 y la tercera un 1.

36 Si se lanzan "n" dados al aire, calcula la probabilidad P de que la suma de puntos sea "$n+1$". Halle para qué valores de "n" dicha probabilidad es menor que $0'01$.

37 Una urna contiene 10 bolas blancas y 6 bolas negras. Se extraen tres bolas al azar sin reposición. Calcule la probabilidad de que salgan más bolas blancas que negras y la probabilidad de que salgan más bolas negras que blancas. Justifique el valor de la suma de los dos resultados anteriores.

VARIABLES ALEATORIAS

01 Existe una probabilidad del 90 % de que un componente de un aparato se comporte de modo adecuado. Si el aparato en que se usa el componente tiene en total cuatro de ellos, calcule la probabilidad de que:

1) Todos los componentes se comporten de forma adecuada y, por tanto, el aparato funcione bien.
2) El aparato no funcione porque falla uno de los cuatro componentes.
3) El aparato no funcione porque falla uno o más componentes.

02 El tiempo de fabricación (en horas) de una pieza mecánica es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} (3.x + 1)/8 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule la función de distribución de esta variable.

Si se eligen tres piezas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todas hayan tardado en fabricarse más de una hora?

03 Se lanza un dado cargado en el que las caras con número múltiplo de 3 tienen triple probabilidad de salir que cada una de las otras. Halle la probabilidad de obtener un número menor o igual que 3 al lanzar el dado una vez.

04 En una urna hay 8 bolas negras y 4 blancas. Si se van extrayendo bolas una a una, ¿cuál es la probabilidad de que la última sea negra?

05 En una reunión de cuatro matrimonios se eligen al azar cuatro personas.

1) Calcule la probabilidad de que todas sean mujeres.
2) Calcule la probabilidad de que dos sean hombres y dos mujeres.
3) Calcule le probabilidad de que entre las cuatro personas haya al menos un matrimonio.

06 Se lanza un dado cargado en el que las caras con número múltiplo de 3 tienen doble probabilidad de salir que cada una de las otras. Halle la probabilidad de obtener un número mayor que 4 al lanzar el dado una vez.