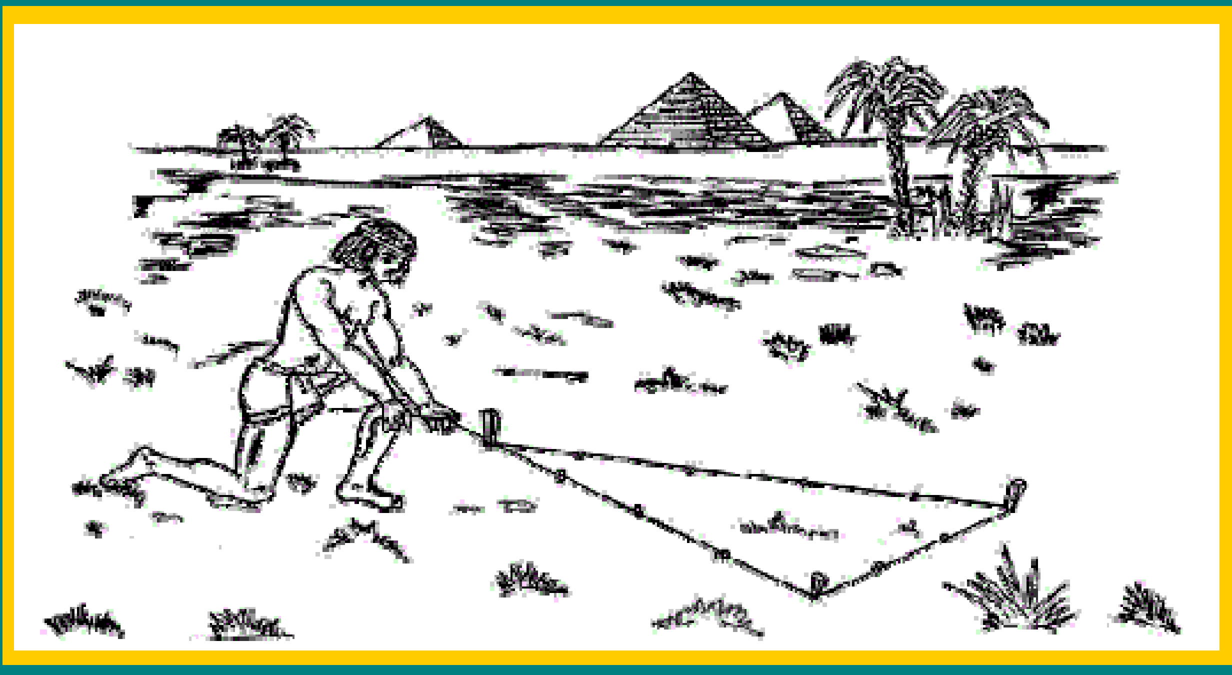
BACHILLERATO

MATEMATICAS 2



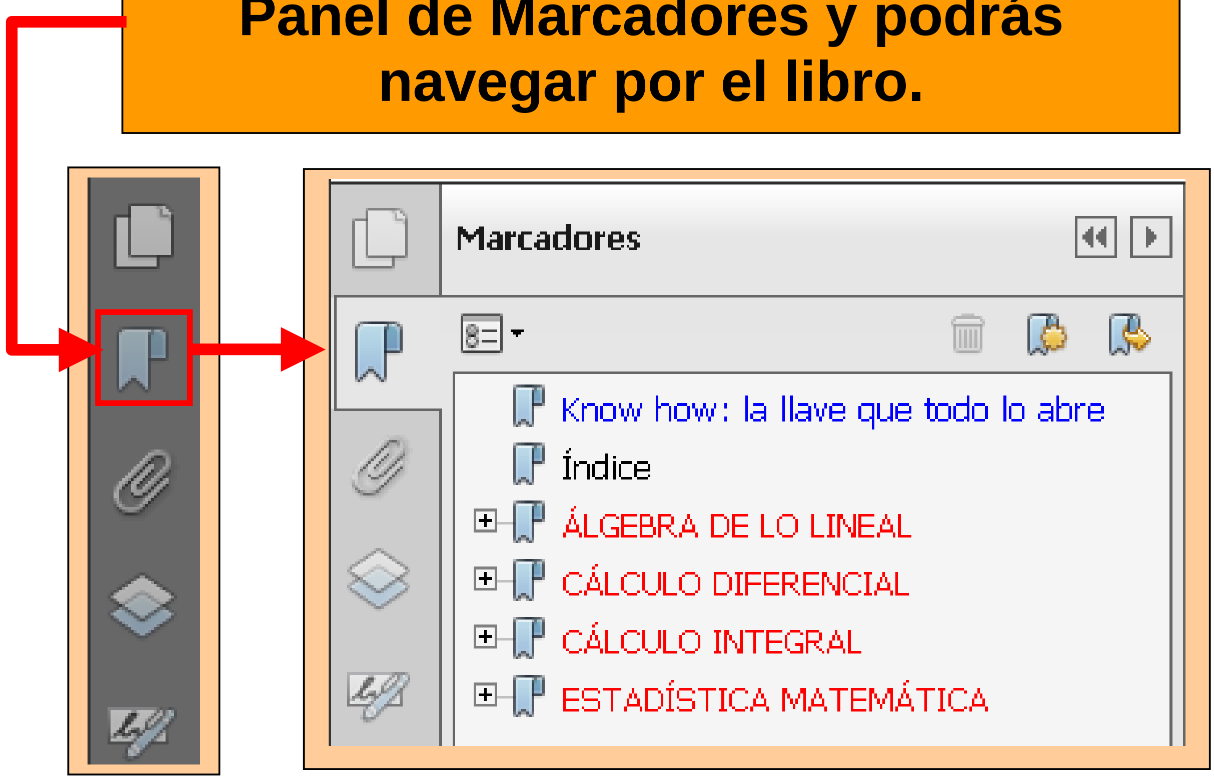
Rafael Cabrejas Hernansanz

fonemato.com

Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO

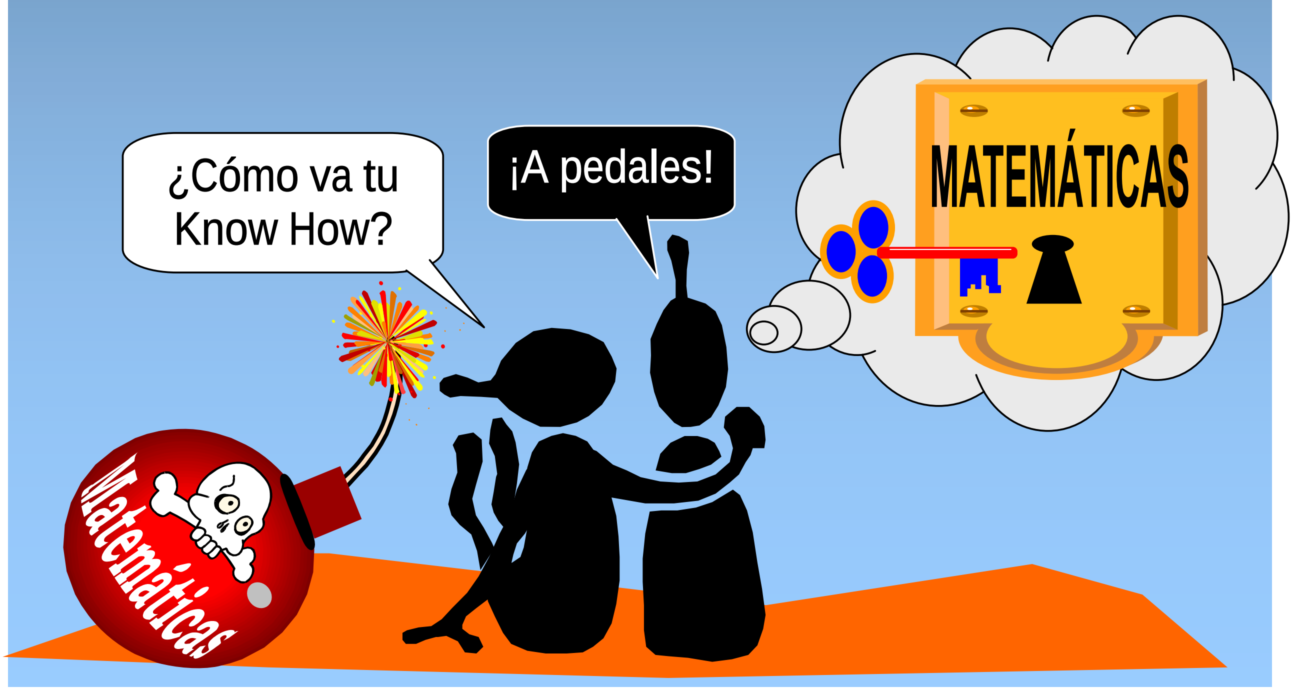
Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



KNOW HOW

La llave que todo lo abre

Lo importante de este libro no son los números, lo importante tiene que ver con el arte de deslumbrar a tus profesores; o sea, tiene que ver con estar entre los mejores, con espabilar y amueblar la cabeza, con aprender a aprender y a razonar, con la disciplina mental y la tracción a todas las neuronas, con no chuparse el dedo y cazarlas al vuelo, con entropía neuronal nula, con aprender a diferenciarse envolviendo los caramelos con primor... y con todas esas cosas intangibles de las que nadie habla y sin embargo conforman el mágico KNOW HOW que te posibilitará el tránsito rápido y feliz por la Universidad.



ÍNDICE

Tema 1: Cálculo Matricial

Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Tema 3: Espacios vectoriales

Tema 4: Espacio afín tridimensional

Tema 5: Funciones reales de variable real

Tema 6: Límites de funciones

Tema 7: Continuidad de funciones

Tema 8: Derivabilidad de funciones

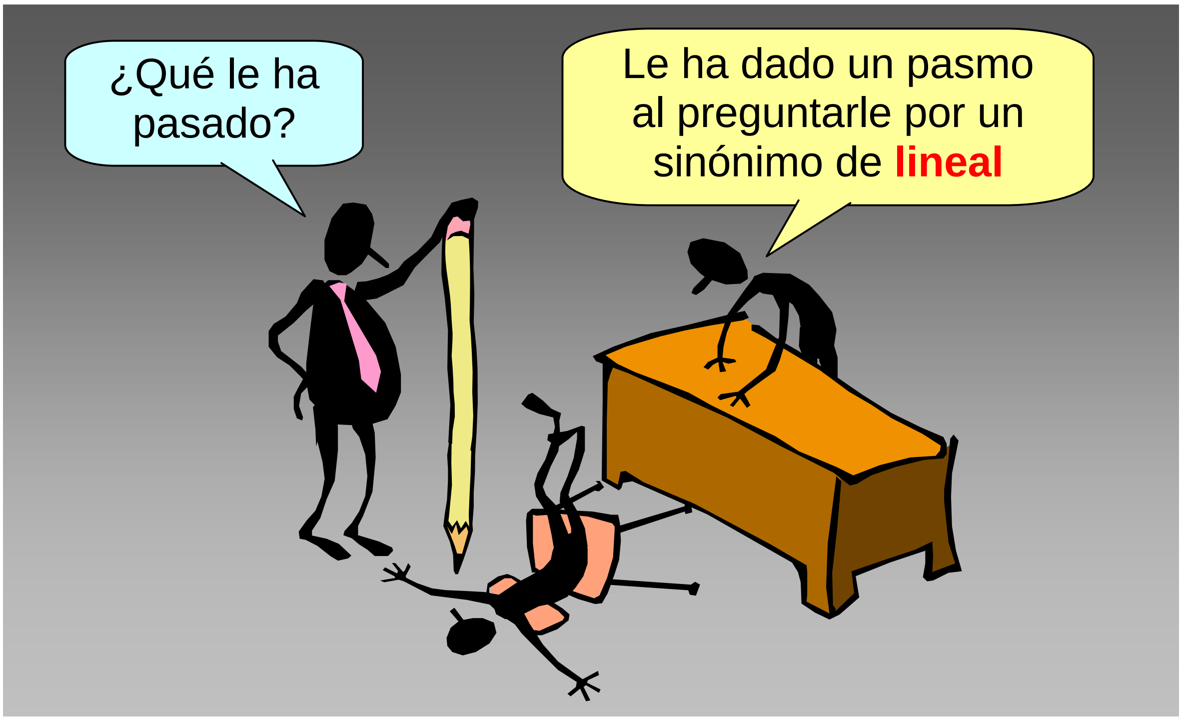
Tema 9: Cálculo de primitivas

Tema 10: Integrales definidas

Tema 11: Probabilidad

Tema 12: Variables aleatorias

ALGEBRA DE LO LINEAL



Números indoarábigos

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Independientemente de cualquier otra consideración, el Álgebra de lo Lineal es una estupendísima gimnasia mental para dotarte de un cerebro razonablemente analítico, riguroso y cartesiano... que es lo que necesitas para tener éxito en una Carrera de Ciencias.

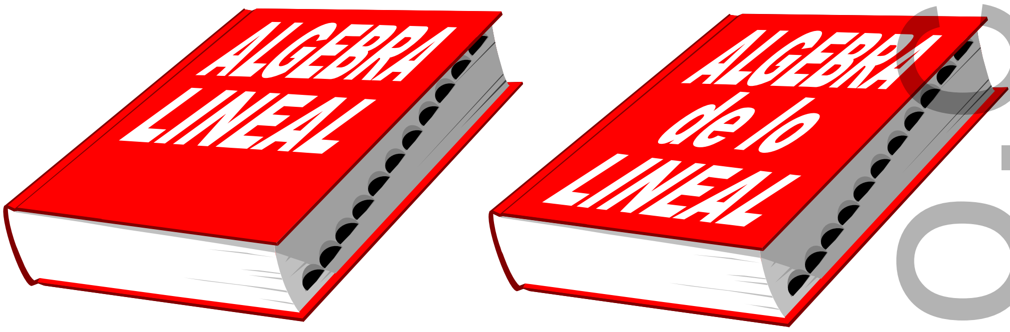
Tema 1
Cálculo matricial

El Álgebra de lo Lineal posibilita la creación de modelos matemáticos que ayudan a comprender y gestionar los fenómenos lineales... y el asunto es tan importante que en tu primer año de Carrera deberás lidiar un curso de Álgebra de lo Lineal, para ampliar los conocimientos adquiridos durante el Bachillerato. Naturalmente, cuanto más sepas de estas cosas al llegar a la Universidad, más cómodo y seguro será tu aterrizaje en ella.

El artículo neutro "lo"

El artículo neutro lo se ha inventado porque es necesario según qué cosa queramos decir. ***Por ejemplo,*** no es lo mismo decir caótico que **lo** caótico... y es claro que la supresión inadecuada del neutro lo puede generar notable confusión, porque, por ejemplo, no es lo mismo decir estudio caótico que decir estudio de lo caótico.

Así las cosas, para que lo sustancial se asimile adecuadamente desde el principio, sería bueno que los profesores de Matemáticas dejáramos de hablar de Álgebra Lineal y habláramos de Álgebra de lo Lineal, pues de inmediato los alumnos nos preguntarían por lo lineal y se sorprenderían de que lo lineal sea tan importante como para dedicarle decenas de horas de estudio.



Ojo con la palabra "lineal"

En el lenguaje coloquial la palabra lineal se usa a veces como sinónimo de constante: cuando se dice que los salarios de una empresa han sufrido una subida lineal de "k" euros, quiere decirse que todos aumentan su salario la misma cantidad "k"; o sea, para todos sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = k + (\text{Salario Viejo})$$

No obstante, si buscas la palabra lineal en el diccionario de la Real Academia, verás que dice:

Lineal: (adjetivo) perteneciente a la línea

El diccionario dedica a la palabra línea casi una página, pero entre el montón de cosas que se dicen sobre línea no hay nada que permita usar la palabra lineal como sinónimo de constante.

¡ESCÚLPELO EN EL CEREBRO!

En Matemáticas, lineal es sinónimo de proporcional.

Por ejemplo, una subida lineal del 25 % en el salario significa que si ganas 120, te suben 30 (pues el 25 % de 120 es 30) y pasas a ganar 150; y si ganas 300, te suben 75 (pues el 25 % de 300 es 75) y pasas a ganar 375; es decir, para todos sucede que:

$$\text{Salario Nuevo} = 1'25 \times (\text{Salario Viejo})$$

O sea, la proporción entre el Salario Nuevo de cada trabajador y su Salario Viejo es 1'25:

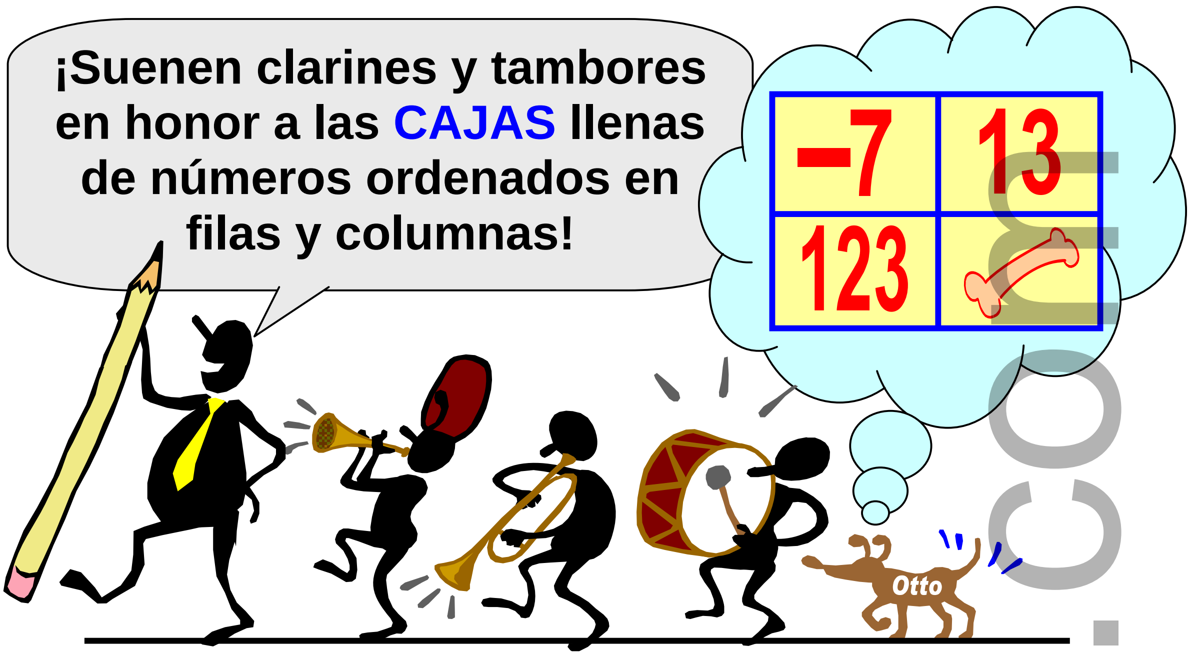
$$\frac{\text{Salario Nuevo}}{\text{Salario Viejo}} = 1'25$$

O al revés: la proporción entre el Salario Viejo de cada trabajador y su Salario Nuevo es 0'8:

$$\frac{\text{Salario Viejo}}{\text{Salario Nuevo}} = \frac{1}{1'25} = 0'8$$

Aunque sea increíble, entre las cosas que dice el diccionario sobre línea, tampoco hay nada que permita usar lineal como sinónimo de proporcional. Sin duda eso se debe a que la aportación del castellano a la construcción del "edificio" de la Matemática ha sido practicamente nula a los largo de los últimos diez siglos... y para que tan penosa situación no dure otros diez siglos, sería bueno que la próxima edición del diccionario pusiera su granito de arena, diciendo que, en Matemáticas, las palabras lineal y proporcional son sinónimas; por tanto, hablar de lo lineal es igual que hablar de lo proporcional.

Las cajas llenas de números



Atent@s: imagina que eres tú quien a final de mes se encarga de pagar a la gente de una empresa que tiene "n" trabajadores cuyos salarios base respectivos son $x_1, x_2, \dots, x_n$, siendo $y_1, y_2, \dots, y_n$ los respectivos complementos salariales.

Para gestionar la información que contienen los "n" números $x_1, x_2, \dots, x_n$ y los "n" números $y_1, y_2, \dots, y_n$, seguro que se te ocurriría ponerlos ordenadamente en sendas cajas "A" y "B":

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots\dots & x_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de salarios base}$$

$$B = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots\dots & y_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de complementos salariales}$$

Aunque no tuvieras ni idea de Álgebra de lo Lineal, seguro que te inventarías la operación consistente en sumar cajas, pues eso te permitiría obtener una tercera caja "P" que te diría lo que debes pagar a cada trabajador a final de mes:

$$P = A + B = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots\dots & x_n \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots\dots & y_n \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & \dots\dots & x_n+y_n \end{bmatrix} \equiv \text{caja de salarios totales}$$

En este contexto, si en la negociación del convenio colectivo se pactan respectivas subidas lineales del 25 % y el 50 % en los salarios base y en los complementos salariales, deberás cambiar las cajas que almacenan la información relativa a esos asuntos: la nueva caja de salarios base será

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & \dots\dots & 1'25.x_n \end{bmatrix}$$

y la nueva caja de complementos salariales será

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1'5.y_1 & 1'5.y_2 & \dots\dots & 1'5.y_n \end{bmatrix}$$

Además, incluso sin saber nada de Álgebra de lo Lineal, seguro que te inventarías la operación consistente en multiplicar una caja por un número, pues dirías que la caja A_1 se obtiene multiplicando la caja "A" por el número 1'25, y la caja B_2 se obtiene multiplicando la caja "B" por el número 1'5... y sin ningún pudor escribirías:

$$A_1 = 1'25 \bullet A \;\; ; \;\; B_1 = 1'5 \bullet B$$

Incluso dirías que la caja A_1 es proporcional a la caja "A", pues cada elemento de A_1 se obtiene multiplicando por 1'25 su correspondiente elemento de "A"; también dirías que "A" es proporcional a A_1, pues cada elemento de "A" se obtiene multiplicando por 0'8 su correspondiente elemento de A_1 .... y lo mismo para las cajas "B" y B_1, pero con los números 1'5 y 1/1'5.

Así, llegado fin de mes, podrías obtener la nueva caja P_1 de salarios totales

$$P_1 = A_1 + B_1 =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1'25.x_1 & 1'25.x_2 & ..... & 1'25.x_n \end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1'5.y_1 & 1'5.y_2 & ..... & 1'5.y_n \end{bmatrix}}_{B_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1'25.x_1{+}1'5.y_1 & 1'25.x_2{+}1'5.y_2 & ..... & 1'25.x_n{+}1'5.y_n \end{bmatrix} =$$

$$= 1'25 \bullet A + 1'5 \bullet B$$

El Álgebra, para expresar de modo rápido y eficiente que la información contenida en la caja P_1 es suma de las respectivas informaciones obtenidas al multiplicar la caja "A" por un número (el 1'25) y la caja "B" por otro número (el 1'5), dirá que la caja P_1 es combinación lineal de las cajas "A" y "B".

Como escribir $P_1 = A_1 + B_1$ es lo mismo que escribir $P_1 = 1 \bullet A_1 + 1 \bullet B_1$, también diremos que la caja P_1 es combinación lineal de las cajas A_1 y A_2, pues la información contenida en P_1 es suma de las respectivas informaciones obtenidas al multiplicar la caja A_1 por un número (el 1) y la caja B_1 por otro número (el 1). Del mismo modo, para expresar que $P = A + B = 1 \bullet A + 1 \bullet B$, diremos que la caja "P" es combinación lineal de las cajas "A" y "B".

¿Por qué estudiamos Álgebra de lo Lineal?

Estudiamos Álgebra de lo Lineal porque la vida está llena de fenómenos lineales que tienen que ver con todas las ramas de la Ciencia y del quehacer humano... nadie puede sustraerse a lo lineal o proporcional.

Por ejemplo: si vas de compras a un hiper, eres protagonista de un fenómeno lineal, pues siendo $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ los precios unitarios (sin impuestos) de los "n" bienes (tomates, pan, etc.) que compras, y $K_1, K_2, \dots, K_n$ las correspondientes cantidades compradas de cada uno de ellos, el valor "V" de tu compra es $V = \gamma_1.K_1 + \gamma_2.K_2 + \dots + \gamma_n.K_n$, que es suma de un número $\gamma_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\gamma_2.K_2$ proporcional a K_2... y de un número $\gamma_n.K_n$ proporcional a K_n.

Del mismo modo, si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son los respectivos beneficios unitarios que obtiene el hiper por cada unidad que compras, el beneficio total "B" obtenido gracias a tu compra es $B = \delta_1.K_1 + \delta_2.K_2 + \dots + \delta_n.K_n$, que es suma de un número $\delta_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\delta_2.K_2$ proporcional a K_2... y de un número $\delta_n.K_n$ proporcional a K_n.

La cantidad "C" que al hiper le cuesta tu compra es:

$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + (\gamma_2 - \delta_2).K_2 + \dots + (\gamma_n - \delta_n).K_n =$$
$$= \varepsilon_1.K_1 + \varepsilon_2.K_2 + \dots + \varepsilon_n.K_n$$

por comodidad, hacemos $\gamma_1 - \delta_1 = \varepsilon_1, \gamma_2 - \delta_2 = \varepsilon_2, \dots, \gamma_n - \delta_n = \varepsilon_n$

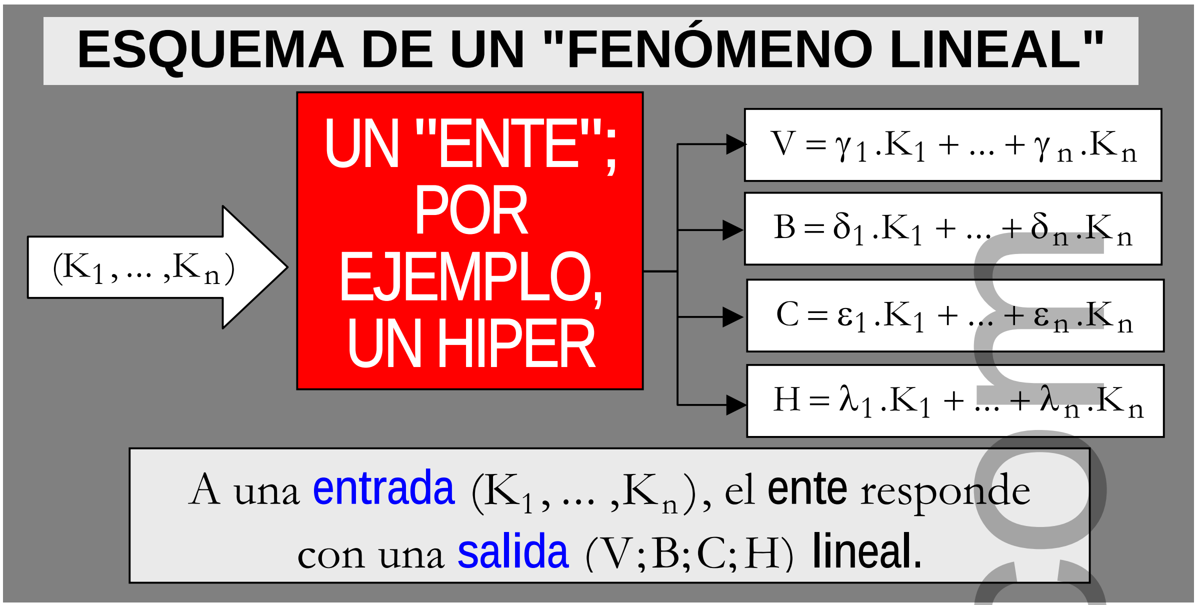
que es suma de un número $\varepsilon_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\varepsilon_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\varepsilon_n.K_n$ proporcional a K_n.

La Hacienda Pública no se queda atrás, pues si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ son los respectivos tipos de IVA (expresados en "tanto por uno") que soportan los productos que compras, la cantidad "H" que ingresa Hacienda gracias a tu compra:

$$H = \theta_1.\gamma_1.K_1 + \theta_2.\gamma_2.K_2 + \dots + \theta_n.\gamma_n.K_n =$$
$$= \lambda_1.K_1 + \lambda_2.K_2 + \dots + \lambda_n.K_n$$

por comodidad, hacemos $\theta_1.\gamma_1 = \lambda_1, \theta_2.\gamma_2 = \lambda_2, \dots, \theta_n.\gamma_n = \lambda_n$

que es suma de un número $\lambda_1.K_1$ proporcional a K_1, y de un número $\lambda_2.K_2$ proporcional a K_2 .... y de un número $\lambda_n.K_n$ proporcional a K_n.



Como en el hiper no se chupan el dedo, meten en una caja con diversas filas toda la información relativa a cantidades compradas, precios unitarios, beneficios unitarios y tipos de IVA, y ello con el fin de gestionar más eficientemente el negocio.

	Artículo	Cantidad comprada	Precio unitario	Beneficio unitario	....	Tipo de IVA
1	Malocotones	K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
2	Servesita	K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:	::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
n	Perejil	K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Así, las cosas, aunque no se tenga ni idea de Álgebra de lo Lineal, todo el mundo alcanza a entender que:

- El valor "V" de la compra se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la segunda, y sumando después los productos realizados:

$$V = \gamma_1 . K_1 + ... + \gamma_n . K_n$$

- El beneficio "B" que obtiene el hiper se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por su correspondiente de la tercera, y sumando después los productos realizados:

$$B = \delta_1 . K_1 + ... + \delta_n . K_n$$

- El ingreso "H" de Hacienda se obtiene multiplicando cada elemento de la primera columna por sus correspondientes de las columnas segunda y última, y sumando después los productos realizados:

$$H = \theta_1 . \gamma_1 . K_1 + ... + \theta_n . \gamma_n . K_n$$

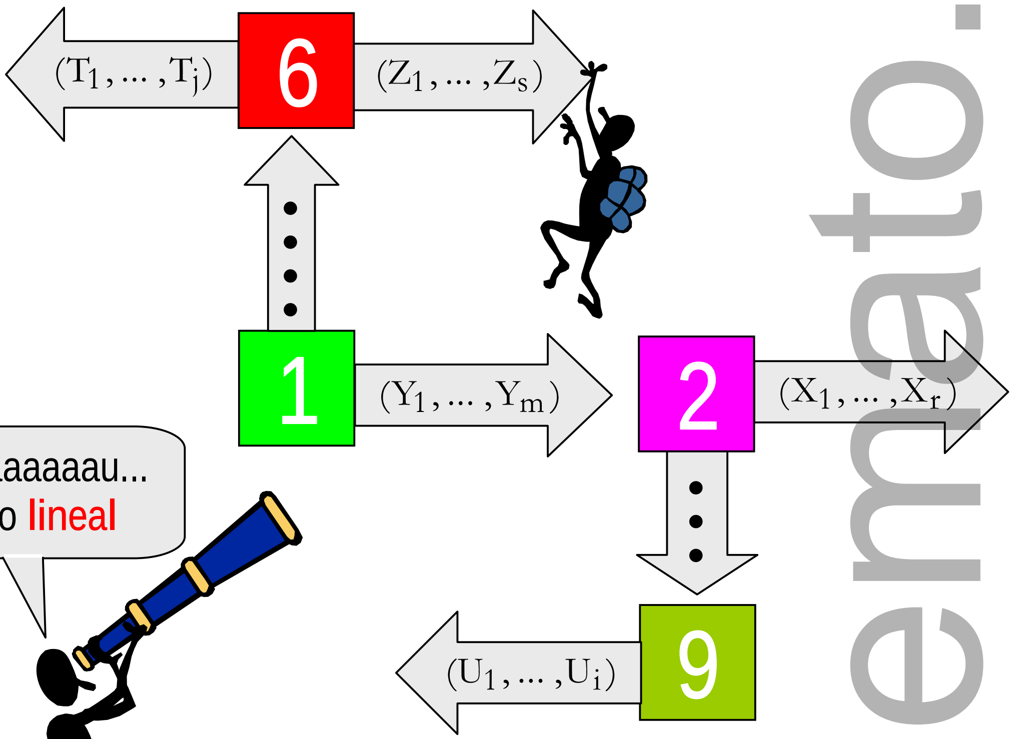
- Multiplicando cada elemento de la 1ª columna por su correspondiente de la columna obtenida al restar la 3ª columna de la 2ª, y sumando después los productos realizados, obtenemos la cantidad "C" que al hiper le cuesta tu compra:

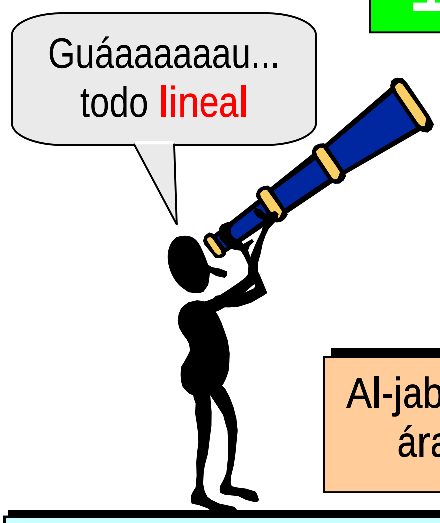
$$C = (\gamma_1 - \delta_1).K_1 + \ldots + (\gamma_n - \delta_n).K_n$$

Como vemos, a partir de una tabla con números ordenados en filas y columnas puede obtenerse **información** muy interesante para según qué cosas:

K_1	γ_1	δ_1	....	θ_1
K_2	γ_2	δ_2	....	θ_2
:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::	:::::::::
K_n	γ_n	δ_n	....	θ_n

Además, la realidad es tan compleja que hay en ella **cadenas o redes** de **fenómenos lineales** relacionados unos con otros.





Al-jabr w'al-muqabalah es el nombre del escrito árabe que dio origen a la palabra álgebra.

El Álgebra Lineal posibilita la creación de **modelos matemáticos** que ayudan a comprender y gestionar los **fenómenos lineales...** y el asunto es tan importante que en tu primer año de Carrera debes lidiar un curso de Álgebra Lineal, donde se amplían los conocimientos adquiridos en el Bachillerato.

1.1 RECORDANDO LA REGLA DE RUFFINI

LA PREGUNTA DEL MILLÓN

Todo el mundo es capaz de explicar qué es una casa sin emplear jerga de arquitecto; sin embargo, las neuronas de muchos estudiantes se congelan al preguntarles por lo que dirían a su anciana abuelita si tuvieran que explicarle qué es una ecuación, advirtiéndoles que en su respuesta no deben emplear jerga matemática, pues de lo contrario la abuelita no entenderá un pimiento.

> No entiendes **realmente** algo si no eres capaz de explicárselo a tu abuel@.
>
> ***Einstein***

Regla infalible para medir tu solvencia con algo

Dicho congelamiento es síntoma de notable candidez matemática, pues evidencia que a pesar de llevar muchos años trabajando con ecuaciones, estos estudiantes no han aprehendido lo esencial; y ya se sabe: si la esencia no se comprende es imposible comprender los detalles... ¿Quién podría comprender realmente qué es una ventana sin antes comprender qué es una casa o habitáculo?

> Una ecuación es la expresión matemática de una **condición de igualdad.**

Hay condiciones que son difícilmente expresables en términos matemáticos; como la condición que impone la ratoncita al ratoncito cuando éste le pregunta:

¿Te quieres casar conmigo?

y ella contesta:

Me casaré contigo si te embelesa el aroma de los narcisos en las noches de plenilunio

Pero a veces la historia es menos poética y la condición puede expresarse en términos matemáticos, como cuando la ratoncita contesta:

Me casaré contigo si al sumar seis al cuadrado de tu peso resulta el quíntuplo del mismo

En este caso, rápidamente, el ratoncito pone nombre a su peso (por ejemplo, lo llama "x") ..... y al traducir a lenguaje matemático la condición impuesta por su amada, obtiene una hermosa ecuación:

$$6 + x^2 = 5.x$$

Si, por comodidad, queremos que el número 0 aparezca en el segundo miembro de la ecuación, escribimos $x^2 - 5.x + 6 = 0$. Además, también por comodidad, denotando "$f(x)$" al pedrusco $x^2 - 5.x + 6$ que queda en el primer miembro, la ecuación puede escribirse $f(x) = 0$.

> Cuando te encuentres con una ecuación f(x) = 0, tu trabajo consistirá en resolverla; o sea, deberás determinar, si existen, los valores de "x" que la satisfacen. De esos valores de "x" se dice que son las soluciones o raíces de la ecuación.

Por ejemplo, el número 4 no es solución de la ecuación $x^2 - 5.x + 6 = 0$, pues $4^2 - 5.4 + 6 = 2 \neq 0$; el número 7 tampoco es solución, pues $7^2 - 5.7 + 6 = 13 \neq 0$. Pero, el número 2 es raíz o solución de la ecuación, pues $2^2 - 5.2 + 6 = 0$.

Observa: la condición impuesta por la ratita se refiere a una única característica de los ratones (el peso), pero podría referirse a varias características; así sucedería si la ratita dijera:

Me casaré contigo si el producto de tu peso por tu altura coincide con tu edad

En tal caso, denotando "x" el peso, "z" la altura y "u" la edad, al traducir a lenguaje matemático esta nueva condición, obtenemos otra ecuación:

$$x.z = u$$

Naturalmente, escribimos $x.z - u = 0$ para que el número cero aparezca en el segundo miembro. Además, denotando $f(x;z;u)$ al pedrusco $x.z - u$ que queda en el primer miembro de la ecuación, puede escribirse $f(x;z;u) = 0$.

REGLA DE RUFFINI

VERY, VERY IMPORTANT

Muchísimas veces te verás ante el problema de resolver una ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x)$ un polinomio; o sea, deberás determinar los valores de "x" que cumplen la condición $f(x) = 0$. De esos valores de "x" se dice que son las soluciones o raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

1) Si el polinomio es de grado 1, o sea, $f(x) = a.x + b$, donde "a" y "b" son constantes $a \neq 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución única, y su cálculo es asunto fácil: $a.x + b = 0 \Rightarrow a.x = -b \Rightarrow x = -b/a$.

2) Si el polinomio es de grado 2, o sea, $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, donde "a", "b" y "c" son constantes y $a \neq 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene 2 soluciones, y las calcularemos usando la formulita hiperfamosa que todos conocemos:

$$a.x^2 + b.x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Por ejemplo:

$$2.x^2 - 5.x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2.3}}{2.2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

- Debes estar atent@ al caso en que el coeficiente de "x" (o sea, "b") es un número par (por ejemplo, $b = 2.k$), pues en tal circunstancia podrás usar otra formulita más cómoda:

$$a.x^2 + 2.k.x + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-(2.k) \pm \sqrt{(2.k)^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - a.c}}{a}$$

Por ejemplo:

$$1.x^2 + 6.x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 1.5}}{1} = -3 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

El coeficiente de "x" es par $\Rightarrow$ "formulita" cómoda $(2.k = 6 \Rightarrow k = 3)$

Por ejemplo:

$$1.x^2 - 4.x + 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1.13}}{1} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm \sqrt{(-1).9} =$$

El coeficiente de "x" es par $\Rightarrow$ formulita cómoda $(2.k = -4 \Rightarrow k = -2)$

$$= 2 \pm \sqrt{-1}.\sqrt{9} = 2 \pm 3.\sqrt{-1} = 2 \pm 3.i$$

$\sqrt{-1}$ no es "real", se llama "unidad imaginaria" y se denota "i"

- También debes estar atent@ al caso en que el término independiente "c" de la ecuación es cero, pues en tal caso no necesitamos formulitas, y podremos apostar la vida a que una de las soluciones es $x = 0$:

$$a.x^2 + b.x = 0 \Rightarrow x.(a.x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a.x + b = 0 \Rightarrow x = -b/a \end{cases}$$

Para que el producto de dos números sea 0 basta que alguno sea 0

3) En general, si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 3$, el cálculo de las "n" soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ es un petardo, pues no hay ninguna formulita que nos ayude. No obstante, en todos los casos que encontremos (normalmente será $n = 3$ ó $n = 4$), el polinomio f(x) estará preparado para que las soluciones sean números enteros .. y Ruffini nos permitirá determinarlas.

FONEMATO 1.1.1 (TODAS LAS RAÍCES ENTERAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=2.x^5-10.x^3+8.x$.

SOLUCIÓN

Debemos determinar los valores de "x" que satisfacen la ecuación o condición $f(x)=0$. Como $f(x)$ es un polinomio de grado 5, la ecuación $f(x)=0$ tiene 5 soluciones, pudiendo estar repetida alguna de ellas.

¡Qué suerte!: como el término independiente de la ecuación es 0, podemos garantizar que x = 0 es una de las soluciones:

$$2.x^5-10.x^3+8.x=0 \Rightarrow x.(2.x^4-10.x^2+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2.x^4-10.x^2+8=0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $2.x^4-10.x^2+8=0$, y de nuevo tenemos la suerte de cara, pues como la suma $(2-10+8)$ de los coeficientes de la ecuación es 0, podemos apostar tranquilamente la vida a que x = 1 es una de sus soluciones; es decir, podemos garantizar que el polinomio de grado cuatro $g(x)=2.x^4-10.x^2+8$ es divisible por $x-1$. La Regla de Ruffini nos permite calcular los coeficientes del polinomio h(x) que se obtiene como cociente de dicha división:

coeficientes de g(x)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -10 & 0 & 8 \\ x=1 & & 2 & 2 & -8 & -8 \\ \hline & 2 & 2 & -8 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

Coeficientes de h(x) = g(x)/(x − 1) Resto

Así, es $h(x)=g(x)/(x-1)=2.x^3+2.x^2-8.x-8$; o sea:

$$g(x)=(x-1).h(x)=(x-1).(2.x^3+2.x^2-8.x-8)$$

En consecuencia:

$$g(x)=0 \Rightarrow (x-1).(2.x^3+2.x^2-8.x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2.x^3+2.x^2-8.x-8=0 \end{cases}$$

un producto es nulo cuando es nulo alguno de los factores

Ahora debemos resolver la ecuación $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$; y como la suma $2+2-8-8$ de los coeficientes de ésta no es 0, podemos apostar la vida a que $x=1$ no es una de sus soluciones. No obstante, si la ecuación tiene raíces enteras, deben ser divisores del término independiente -8, que son los números $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y -8.

Por tanto, debemos armarnos de paciencia e ir probando con todos (excepto el 1, que no es solución de $h(x)=2.x^3+2.x^2-8.x-8=0$), rezando para que haya suerte y alguno de ellos sea solución. Es $h(2)=2.2^3+2.2^2-8.2-8=0$, lo que garantiza que $x = 2$ es solución de $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$ y que el polinomio $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8$ es divisible por $x - 2$; la Regla de Ruffini nos permitirá calcular los coeficientes del polinomio t(x) que se obtiene como cociente de dicha división:

coeficientes de h(x)

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 2 & -8 & -8 \\ x=2 & & 4 & 12 & 8 \\ \hline & 2 & 6 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Coeficientes de $t(x) = h(x)/(x-2)$ Resto

Por tanto, es $t(x) = h(x)/(x-2) = 2.x^2 + 6.x + 4$; o sea:

$$h(x) = (x-2).t(x) = (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4)$$

En consecuencia:

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2.x^2 + 6.x + 4 = 0 \end{cases}$$

un producto es nulo cuando es nulo alguno de los factores

Las soluciones de $2.x^2 + 6.x + 4 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 2.4}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Por tanto, las cinco soluciones de la ecuación $2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = 0$ son:

$$x = 0\ ;\ x = 1\ ;\ x = 2\ ;\ x = -1\ ;\ x = -2$$

El que así sean las cosas nos permite escribir la descomposición factorial del polinomio $2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$:

$$2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = 2.(x-0).(x-1).(x-2).(x+1).(x+2)$$

El "2" es el coeficiente del término de mayor grado de f(x)

NOTA: si un polinomio f(x) es tal que $f(x) = (x-a)^k.p(x)$, siendo el polinomio p(x) tal que $p(a) \neq 0$, se dice que $x = a$ es una raíz múltiple de orden "k" de la ecuación $f(x) = 0$.

Por ejemplo:

$$x^6 - 4.x^4 = 0 \Rightarrow x^4.(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (cuádruple)} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Por tanto, las 6 raíces de la ecuación $x^6 - 4.x^4 = 0$ son:

$$x = 0 \text{ (cuádruple)}\ ;\ x = 2\ ;\ x = -2$$

Así, la descomposición factorial del polinomio $x^6 - 4.x^4$ es:

$$x^6 - 4.x^4 = (x-0)^4.(x-2).(x-(-2))$$

<u>FONEMATO 1.1.2</u> (TODAS LAS RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=12.x^3-4.x^2-3.x+1$

<u>SOLUCIÓN</u>

La ecuación $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ carece de raíces enteras, pues ninguno de los divisores del término independiente "1" es solución.

> Si la ecuación admite raíces fraccionarias de la forma "m/n" (siendo "m" y "n" números enteros y "n" distinto de 0 y de 1), entonces "m" es divisor del término independiente (el número 1 en nuestro caso) y "n" es divisor del coeficiente del término de mayor grado (el número 12 en nuestro caso).

Por tanto, las únicas raíces fraccionarias que puede tener la ecuación dada son:

$$\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{6};-\frac{1}{6};\frac{1}{12};-\frac{1}{12}$$

Ahora hay que armarse de paciencia e ir probando a ver si hay suerte y alguna es solución de $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$... y tenemos suerte, pues $x=1/2$ es solución, ya que $12.(1/2)^3-4.(1/2)^2-3.(1/2)+1=0$. Con Ruffini obtenemos:

$$\frac{12.x^3-4.x^2-3.x+1}{x-(1/2)}=12.x^2+2.x-2$$

Las soluciones de $12.x^2+2.x-2=0$ son $x=1/3$ y $x=-1/2$; así, la descomposición factorial del polinomio $12.x^3-4.x^2-3.x+1$ es:

$$12.x^3-4.x^2-3.x+1=12.\left(x-\frac{1}{2}\right).\left(x-\frac{1}{3}\right).\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Paolo Ruffini, matemático y médico italiano. Nacido en Valentano, ciudad que pertenecía entonces a los Estados Pontificios, cursó estudios de medicina en la Universidad de Módena, pero una vez finalizados se dedicó casi por entero a la investigación matemática.

Desde 1787 ejerció la docencia como profesor de matemáticas en la Universidad de Módena. Ganó la cátedra de análisis de la escuela militar de esta ciudad, que hubo de abandonar en 1798 al ser expulsado por negarse a pronunciar el juramento de fidelidad a la República Cisalpina creada por Napoleón Bonaparte. Fue restituido en su puesto por las tropas austriacas un año más tarde. Tras recuperar sus dominios, el duque de Módena le nombró rector de la Universidad de Módena (1814), en la que ocupó las cátedras de clínica médica, medicina práctica y matemáticas aplicadas.

Paolo Ruffini es conocido como el descubridor del llamado método de Ruffini que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio x–a. Sin embargo, no fue ésta su mayor contribución al desarrollo de la matemática. Hacia 1805 elaboró una demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas de grados quinto y superiores, aunque cometió ciertas inexactitudes que serían corregidas por el matemático noruego Niels Henrik Abel.

1.2 EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto $\Re$ de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales (tienen un número finito de cifras decimales o son periódicos) y del conjunto de los números irracionales (tienen infinitos decimales y no son periódicos, como los números que se denotan $\sqrt{2}$ y π).

Considera que en el conjunto $\Re$ definimos la suma "+" y el producto "." de números reales que conocemos desde la infancia; así, se dice que estas dos operaciones confieren al conjunto $\Re$ la estructura de cuerpo para expresar de modo rápido y eficiente que dichas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

1) La suma es **conmutativa:** $\forall \alpha,\beta \in \Re$ sucede que $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

2) La suma es **asociativa:** $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \Re$ sucede que $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

3) La suma admite **elemento neutro**, que es el número real que llamamos **cero** y denotamos "0"; o sea: $\forall \alpha \in \Re$ sucede que $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

4) Cada número real tiene **simétrico** respecto de la suma:

$$\forall \alpha \in \Re, \exists \lambda \in \Re \text{ tal que } \alpha+\lambda=\lambda+\alpha=0$$

Por ejemplo, el simétrico de "7" es "-7", y el simétrico de "-3" es "3".

5) El producto es **distributivo** respecto de la suma:

$$\forall \alpha,\beta,\gamma \in \Re \text{ sucede que } \begin{cases} \alpha.(\beta+\gamma)=(\alpha.\beta)+(\alpha.\gamma) \\ (\beta+\gamma).\alpha=(\beta.\alpha)+(\gamma.\alpha) \end{cases}$$

6) El producto es **asociativo:** $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \Re$ sucede que $(\alpha.\beta).\gamma=\alpha.(\beta.\gamma)$

7) El producto admite **elemento neutro** en el conjunto $\Re-\{0\}$ que forman los números reales distintos de cero; dicho elemento neutro es el número **uno:**

$$\forall \alpha \in \Re-\{0\} \text{ sucede que } \alpha.1=1.\alpha=\alpha$$

8) Cada elemento del conjunto $\Re-\{0\}$ tiene **simétrico** respecto del producto:

$$\forall \alpha \in \Re-\{0\}, \exists \varepsilon \in \Re-\{0\} \text{ tal que } \alpha.\varepsilon=\varepsilon.\alpha=1.$$

Por ejemplo, el simétrico de "7" es "1/7", y el simétrico de "1/8" es "8".

<u>Observa</u>: el número "0" carece de simétrico respecto al producto, pues el cociente "1/0" carece de sentido, ya que está prohibido dividir por "0".

Se dice que el cuerpo $\Re$ de los números reales es conmutativo para indicar que el producto de números reales es conmutativo: $\forall \alpha,\beta \in \Re$ es $\alpha.\beta=\beta.\alpha$

<u>APÚNTALO</u>: a los elementos de un cuerpo conmutativo se les llama escalares; por eso, es habitual decir que un número real es un escalar.

Como en su momento los conjuntos que se denotan $\Re^2$, $\Re^3$, $\Re^4$ ... $\Re^n$ tendrán protagonismo megaestelar, a continuación se los presentamos al lector.

- El conjunto $\Re^2$ es el **producto cartesiano** de $\Re$ por si mismo 2 veces:

$$\Re^2 = \Re \times \Re = \{(x_1;x_2) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2\}$$

Cada elemento del conjunto $\Re^2$ es un **par ordenado** de números reales.

- El conjunto $\Re^3$ es el **producto cartesiano** de $\Re$ por si mismo 3 veces:

$$\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re = \{(x_1;x_2;x_3) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2,3\}$$

Cada elemento del conjunto $\Re^3$ es una **terna ordenada** de números reales.

- El conjunto $\Re^4$ es el **producto cartesiano** de $\Re$ por si mismo 4 veces:

$$\Re^4 = \Re \times \Re \times \Re \times \Re = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2,3,4\}$$

Cada elemento del conjunto $\Re^4$ es un **cuarteto ordenado** de números reales.

- El conjunto $\Re^n$ es el **producto cartesiano** de $\Re$ por si mismo "n" veces:

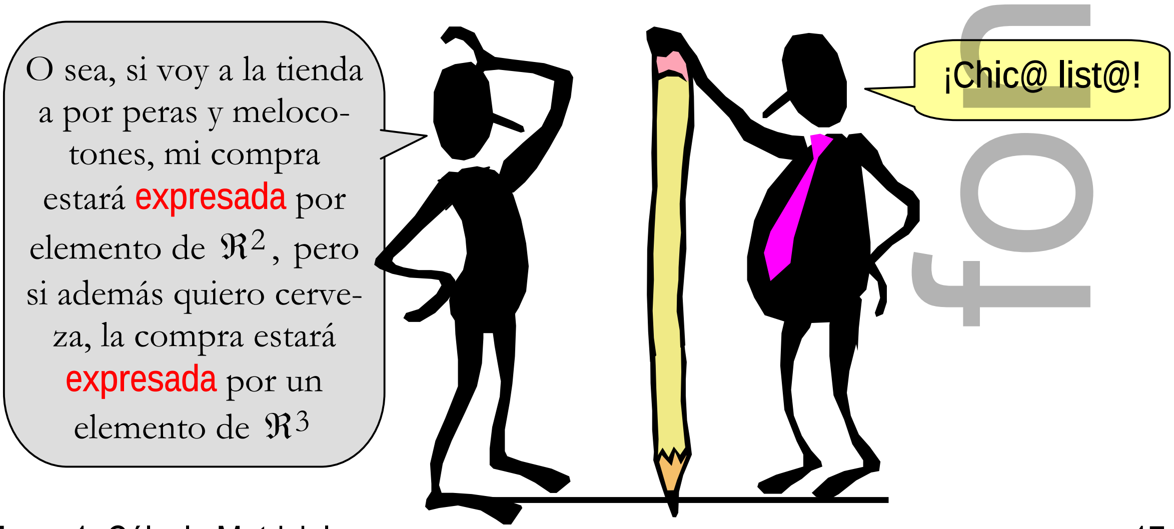
$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \Re \times \ldots \times \Re}_{\text{"n" veces}} = \{(x_1;x_2;\ldots;x_n) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,\ldots,n\}$$

De cada elemento $(x_1;x_2;\ldots;x_n) \in \Re^n$ se dice que es una **n-upla.**

- Hay quien gusta de la verticalidad y escribe **apilados** los "n" números reales que forman cada elemento del conjunto $\Re^n$; o sea, escribe:

$$\Re^n = \underbrace{\Re \times \Re \times \Re \times \ldots \times \Re}_{\text{"n" veces}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / \ x_i \in \Re,\ \forall i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

pero nosotros no lo haremos, porque ocupa mucho espacio y es poco práctico.



- Llamamos **matriz de orden m×n** a toda disposición rectangular de $m \times n$ números reales ordenados en "m" filas y "n" columnas. El conjunto formado por las matrices de orden $m \times n$ se denota $M_{m \times n}$.

  Por ejemplo, al escribir $M_{4 \times 5}$ nos referimos al conjunto formado por todas las matrices de 4 filas y 5 columnas.

- **Las matrices suelen nombrarse con letras mayúsculas.**

  Por ejemplo, si

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}$$

  la matriz "B" es de orden 2×3 (¡ojo!, de orden 2×3, no de orden 6), y "C" es de orden 3×3 (¡ojo!, de orden 3×3, no de orden 9).

- **Para identificar los elementos que forman una matriz "A" usaremos subíndices;** en concreto, al hablar del elemento a_{ij} de "A", nos referimos al elemento de "A" que está en la i-ésima fila y en la j-ésima columna ...... y escribiremos $A = \{a_{ij}\}$ para referirnos genéricamente a los elementos de una matriz "A".

  Por ejemplo, si

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & \pi \end{bmatrix} \in M_{4 \times 3}$$

  es:

$$a_{11} = 4 \; ; \; a_{12} = 7 \; ; \; a_{13} = 8 \; ; \; a_{21} = 9 \; ; \; a_{22} = 5 \; ; \; a_{23} = 6$$

$$a_{31} = 1 \; ; \; a_{32} = 3 \; ; \; a_{33} = 2 \; ; \; a_{41} = 10 \; ; \; a_{42} = 0 \; ; \; a_{43} = \pi$$

- Se dice que una matriz es **cuadrada de orden "n"** si tiene "n" filas y "n" columnas. En tal caso, los **elementos con los dos subíndices iguales** forman la **diagonal principal** de la matriz.

  Por ejemplo, la siguiente matriz es cuadrada de orden 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 8 & 7 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}$$

  La diagonal principal la forman los elementos $a_{11} = 3$, $a_{22} = 0$ y $a_{33} = 7$.

- La **traza** de una matriz cuadrada "A" es la suma de los elementos de la diagonal principal, y se denota Tr(A).

  Por ejemplo, para la anterior matriz "A", es $Tr(A) = 3 + 0 + 7 = 10$.

- Si una matriz es de orden 1×n se dice que es una **matriz fila;** tal es el caso de las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \in M_{1 \times 3} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in M_{1 \times 4}$$

¡Para el carro! ... el conjunto $M_{1\times n}$ que forman las matrices de 1 fila y "n" columnas **es el mismo** que hace un momento hemos llamado $\Re^n$ ... porque, por ejemplo, para referirse a mi cesta de la compra, **no hay ninguna diferencia** entre escribir $(2;4;5)$ ó $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, más allá de separar o no los tres números de la **terna** mediante ";" y encerrarlos en un paréntesis o en un corchete

- Si una matriz es de orden m×1 se dice que es una **matriz columna**; tal es el caso de las siguientes:

$$C=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \in M_{3\times 1} \; ; \; D=\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 1}$$

• Matrices equidimensionales

Diremos que dos matrices son **equidimensionales** si tienen el mismo orden, es decir, si las dos tienen el mismo número de filas y las dos tienen el mismo número de columnas. ***Por ejemplo***, si

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \; ; \; B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \; ; \; C=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 9 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$$

las matrices "A" y "B" son equidimensionales; no así "A" y "C" o "B" y "C".

• Matriz opuesta

La matriz **opuesta** de la matriz "A" se denota −A, y es la matriz obtenida al cambiar el signo de los elementos que "A".

Por ejemplo, si $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$, su matriz opuesta es

$$-A=\begin{bmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$$

• Matriz nula

Se llama **nula** a toda matriz cuyos elementos sean nulos; se denota "0" tenga el orden que tenga.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \in M_{2\times 2} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \in M_{2\times 3}$$

• Igualdad de matrices

Las matrices equidimensionales $A=\{a_{ij}\}$ y $B=\{b_{ij}\}$ son iguales si $a_{ij}=b_{ij}$.

1.4 LAS MATRICES ALMACENAN "INFORMACIÓN"

Es bueno que tengas la percepción de que las historias que estudiaremos sobre las matrices sirven para algo más que dar de comer a profesores de Matemáticas y torturar a estudiantes de "Ciencias". Utilizando brocha gorda y no pincel, diremos que las matrices se han inventado porque son capaces de almacenar información de manera ordenada ... y es sabido que la información y el orden son fundamentales para la buena marcha de todo.

La siguiente historieta ilustra la idea

El Tío Pencho tiene una empresa de comercialización de ferritos hipovaligerables y para controlar mejor el negocio ha decidido que se anoten los ingresos y los gastos trimestrales. A tal fin se usan matrices "fila" de orden 1×2, pues cada matriz de este tipo está formada por 2 números reales. Pencho establece el criterio según el cual el primer número expresa los ingresos y el segundo expresa los gastos, ambos en millones.

Así las cosas, al final de cada trimestre Pencho pide a su gerente la misma información, siempre la misma pregunta: ¿cómo ha ido el trimestre? El gerente consulta sus datos y por toda respuesta entrega a su jefe la matriz de orden 1×2 que expresa los ingresos y los gastos del trimestre en cuestión; así, cuando Pencho recibió ayer un fax con la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$ correspondiente al último trimestre, supo al instante los ingresos fueron de 7 millones y los gastos 4 millones.

Naturalmente, como haría cualquiera en su caso, cada año Pencho agrupa los resultados trimestrales y construye una matriz de 4 filas y 2 columnas que expresa lo sucedido en los cuatro trimestres del año en lo que se refiere a los ingresos y gastos de su empresa.

Por ejemplo, si la matriz correspondiente al último año es

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 2}$$

entonces, el que $a_{32} = 6$ indica que los gastos del tercer trimestre fueron de 6 millones, y el que $a_{41} = 8$ indica que los ingresos de cuarto trimestre fueron de 8 millones.

Como vemos, las matrices sirven para almacenar información.

ERROR MUY EXTENDIDO

No es verdad que para ti tu tiempo sea oro; es mucho más: el oro lo venden en todas partes, pero tu tiempo no puedes comprarlo ni con todo el oro del mundo.

1.5 SUMA DE MATRICES

Si $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ son matrices de orden m×n, su suma, que se denota A+B, es la matriz de orden m×n tal que $A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}$. ***Por ejemplo:***

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+7 & 3+5 & 1+6 \\ 5+1 & 4+2 & 9-4 \\ 1+0 & 8+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 6 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 5+3 & 1+1 \\ 4+2 & 0+4 & 8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

- Si "A" y "B" son matrices cuadradas de igual orden, es:

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

PROPIEDADES

La suma de matrices tiene idénticas propiedades que la suma de números reales:

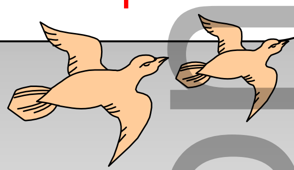
1) Es **conmutativa:** $A + B = B + A$
2) Es **asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) Admite **elemento neutro:** $A + 0 = 0 + A = A$, siendo "0" la matriz nula de igual orden que "A".
4) Cada matriz tiene **simétrica** respecto de la suma: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Hay **cosas** respecto de las que debes tener **igual certeza** que respecto de tu propio nombre... y si el mismísimo Papa de Roma te lleva la contraria con una de esas cosas (por ejemplo, te dice que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ pueden sumarse), debes contestar:

Su Santidad ha tenido un despiste o está mal informado

Y no te arrugues si el Papa insiste en que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ pueden sumarse; con la mayor educación y respeto, debes añadir:

Su Santidad no tiene ni puñetera idea de lo que dice



Seguridad en ti mism@, en la solvencia de tus conocimientos.

1.6 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Recuerda: un **escalar** es un elemento de un cuerpo conmutativo ..... pero para nosotros, escalar será sinónimo de número real.

El producto del escalar "α" por la matriz "A" se denota $\alpha \bullet A$, y es la matriz obtenida al multiplicar por "α" todos los elementos de "A". ***Por ejemplo:***

$$6 \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.2 & 6.3 & 6.4 \\ 6.5 & 6.7 & 6.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 30 & 42 & 48 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1) Siendo "α" un escalar y "A" y "B" matrices equidimensionales, es:

$$\alpha \bullet (A + B) = \alpha \bullet A + \alpha \bullet B$$

2) Siendo "α" y "β" escalares y "A" una matriz, es $(\alpha + \beta) \bullet A = \alpha \bullet A + \beta \bullet A$.

3) Siendo "α" y "β" escalares y "A" una matriz, es $\alpha \bullet (\beta \bullet A) = (\alpha . \beta) \bullet A$.

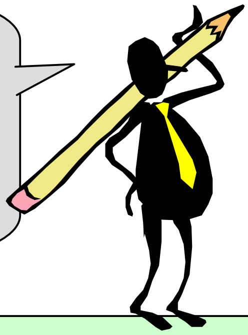
4) Siendo "α" un escalar y "A" una matriz cuadrada, es $Tr(\alpha \bullet A) = \alpha . Tr(A)$.

La "proporcionalidad" entre matrices

Al definir el producto de un escalar por una matriz estamos introduciendo la noción de proporcionalidad entre matrices: si la matriz $C = \{c_{ij}\}$ se obtiene al multiplicar la matriz $A = \{a_{ij}\}$ por el escalar $\alpha \neq 0$, o sea, $C = \alpha \bullet A$, cabe decir que "C" es proporcional a "A", pues cada elemento de "C" se obtiene multiplicando por "α" su correspondiente elemento de "A" (recuerda que $c_{ij} = \alpha . a_{ij}$); también cabe decir que "A" es proporcional a "C", pues cada elemento de "A" se obtiene multiplicando por "$1/\alpha$" su correspondiente elemento de "C":

$$c_{ij} = \alpha . a_{ij} \Rightarrow a_{ij} = \frac{1}{\alpha} . c_{ij} \Rightarrow A = \frac{1}{\alpha} \bullet C$$

A continuación resolvemos sistemas de ecuaciones matriciales en los que las únicas operaciones que intervienen son la suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar o número real



Una ecuación es la expresión matemática de una condición de igualdad... y un sistema de "k" ecuaciones es la expresión matemática de un conjunto de "k" condiciones de igualdad.

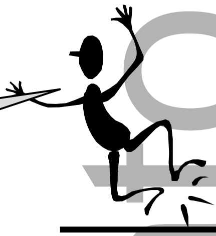
FONEMATO 1.6.1

Determine "A" y "B" si $A - 3 \bullet B = C$ y $2 \bullet A + 3 \bullet B = C$, siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Debemos determinar las matrices "A" y "B" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

¡Yuppy!.... sin más que sumar miembro a miembro las dos ecuaciones dadas, la matriz "B" desaparece del mapa



$$\left.\begin{matrix} A - 3 \bullet B = C \\ 2 \bullet A + 3 \bullet B = C \end{matrix}\right\} \underset{\text{sumando miembro a miembro}}{\Rightarrow} 3 \bullet A = 2 \bullet C \Rightarrow A = \frac{2}{3} \bullet C = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos "B" al sustituir "A" por $\frac{2}{3} \bullet C$ en la primera ecuación:

$$\frac{2}{3} \bullet C - 3 \bullet B = C \Rightarrow -3 \bullet B = \frac{1}{3} \bullet C \Rightarrow B = -\frac{1}{9} \bullet C = \begin{bmatrix} -1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

También así, por sustitución: de una de las ecuaciones (la que resulte más cómoda), despejamos "A" ó "B" (la que resulte más cómoda) y sustituimos en la otra ecuación:

$$\begin{matrix} A - 3 \bullet B = C \longrightarrow A = C + 3 \bullet B \\ 2 \bullet A + 3 \bullet B = C \longrightarrow 2 \bullet (C + 3 \bullet B) + 3 \bullet B = C \longrightarrow \end{matrix}$$

$$\longrightarrow 2 \bullet C + 9 \bullet B = C \longrightarrow B = -\frac{1}{9} \bullet C = \begin{bmatrix} -1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Obtenemos "A" al sustituir "B" por $-\frac{1}{9} \bullet C$ en la primera ecuación:

$$A - 3 \bullet \left(-\frac{1}{9} \bullet C\right) = C \Rightarrow A + \frac{1}{3} \bullet C = C \Rightarrow A = \frac{2}{3} \bullet C = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.6.2

Determine "A" y "B" si $2\bullet A - B = C$ y $2\bullet A + 3\bullet B = C$, siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Debemos determinar las matrices "A" y "B" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

¡Yuppy!... sin más que restar miembro a miembro las dos ecuaciones dadas, la matriz "A" desaparece del mapa

$$\left.\begin{array}{r} 2\bullet A - B = C \\ 2\bullet A + 3\bullet B = C \end{array}\right\} \Rightarrow -4\bullet B = 0 \Rightarrow B = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

restando miembro a miembro

Obtenemos "A" al sustituir "B" por la matriz nula en la primera ecuación:

$$2\bullet C - 0 = C \Rightarrow A = \frac{1}{2}\bullet C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

También así, por sustitución: de una de las ecuaciones (la que resulte más cómoda), despejamos "A" ó "B" (la que resulte más cómoda) y sustituimos en la otra ecuación:

$$\begin{array}{l} 2\bullet A - B = C \longrightarrow B = 2\bullet A - C \\ 2\bullet A + 3\bullet B = C \longrightarrow 2\bullet A + 3\bullet(2\bullet A - C) = C \longrightarrow \end{array}$$

$$\longrightarrow 8\bullet A - 3\bullet C = C \longrightarrow A = \frac{1}{2}\bullet C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos "B" al sustituir "A" por $\frac{1}{2}\bullet C$ en la primera ecuación:

$$2\bullet\left(\frac{1}{2}\bullet C\right) - B = C \Rightarrow C - B = C \Rightarrow B = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EN BOCA CERRADA NO ENTRAN MOSCAS

Cuando "algo" no lo sepas, no debes decir la primera chorrada que se te ocurra, pues la probabilidad de acertar es muy pequeña, y el ridículo que puedes hacer es espantoso... eres dueñ@ de lo que callas y prisioner@ de lo que dices o escribes.

FONEMATO 1.6.3

Determine "A" y "B" si $4 \bullet A - 2 \bullet B = C$ y $3 \bullet A + B = 2 \bullet C$, siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Debemos resolver el sistema de dos ecuaciones matriciales que nos dan.

$$\left.\begin{array}{r} 4 \bullet A - 2 \bullet B = C \\ 3 \bullet A + B = 2 \bullet C \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4 \bullet A - 2 \bullet B = C \\ 6 \bullet A + 2 \bullet B = 4 \bullet C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

multiplicando la segunda ecuación por 2

sumando miembro a miembro

$$\Rightarrow 10 \bullet A = 5 \bullet C \Rightarrow A = \frac{1}{2} \bullet C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos "B" al sustituir "A" por $\frac{1}{2} \bullet C$ en la primera ecuación:

$$4 \bullet \left(\frac{1}{2} \bullet C\right) - 2 \bullet B = C \Rightarrow 2 \bullet C - 2 \bullet B = C \Rightarrow -2 \bullet B = -C \Rightarrow B = \frac{1}{2} \bullet C$$

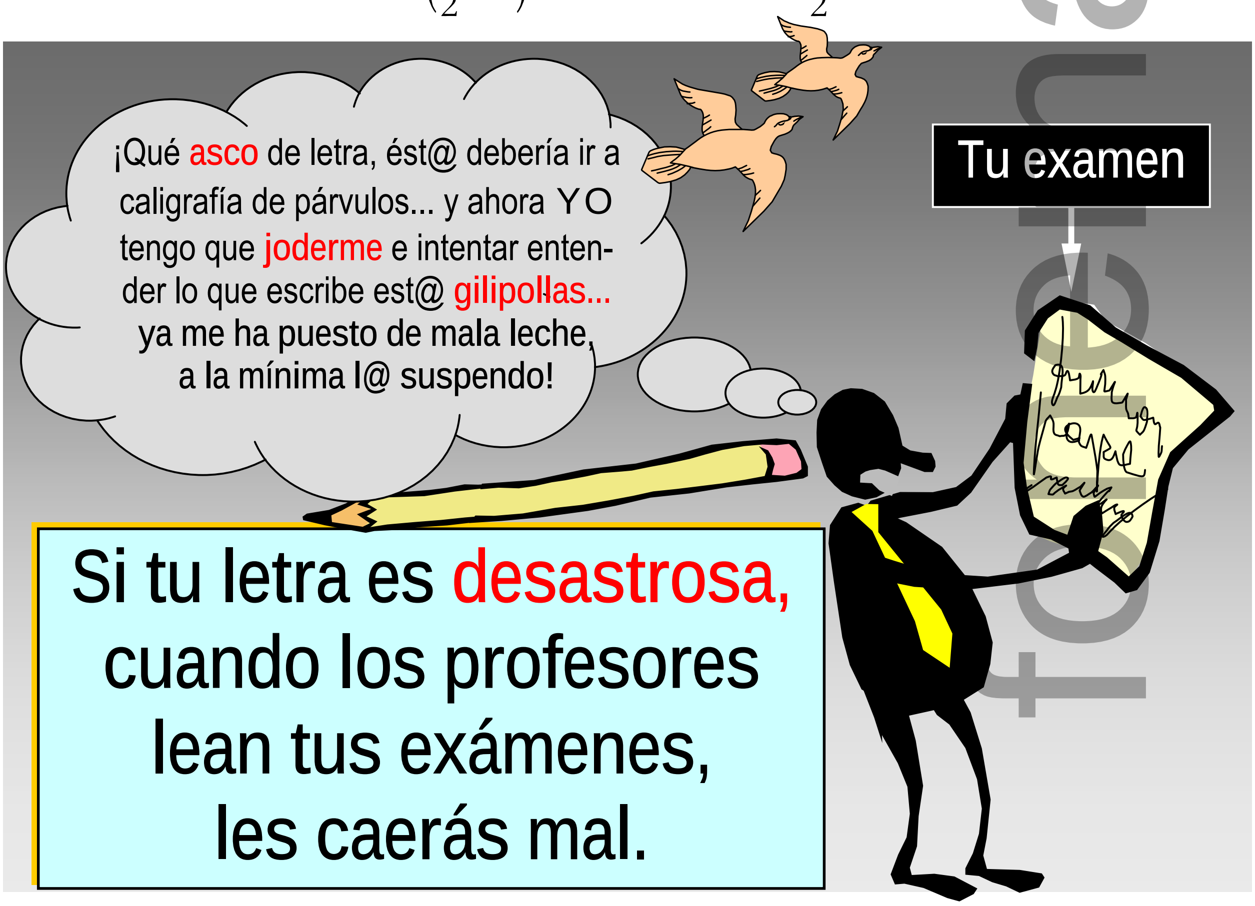
También así, por sustitución: de una ecuación (la que resulte más cómoda), despejamos "A" ó "B" (la que resulte más cómoda) y sustituimos en la otra ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l} 4 \bullet A - 2 \bullet B = C \longrightarrow 4 \bullet A - 2 \bullet (2 \bullet C - 3 \bullet A) = C \longrightarrow \\ 3 \bullet A + B = 2 \bullet C \longrightarrow B = 2 \bullet C - 3 \bullet A \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow 10 \bullet A = 5 \bullet C \longrightarrow A = \frac{1}{2} \bullet C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Obtenemos "B" al sustituir "A" por $\frac{1}{2} \bullet C$ en la segunda ecuación:

$$3 \bullet \left(\frac{1}{2} \bullet C\right) + B = 2 \bullet C \Rightarrow B = \frac{1}{2} \bullet C$$



FONEMATO 1.6.4

Determine "A" y "B" si $4 \bullet A + 2 \bullet B = C$ y $3 \bullet A + 5 \bullet B = C$, siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Debemos resolver el sistema de dos ecuaciones matriciales que nos dan.

multiplicando la 1ª ecuación por 3 y la 2ª por 4

$$\left.\begin{array}{r} 4 \bullet A + 2 \bullet B = C \\ 3 \bullet A + 5 \bullet B = C \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 12 \bullet A + 6 \bullet B = 3 \bullet C \\ 12 \bullet A + 20 \bullet B = 4 \bullet C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

restando miembro a miembro

$$\Rightarrow -14 \bullet B = -C \Rightarrow B = \frac{1}{14} \bullet C = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 \\ 0 & 3/14 \end{bmatrix}$$

Obtenemos "A" al sustituir "B" por $\frac{1}{14} \bullet C$ en la primera ecuación:

$$4 \bullet A + 2 \bullet \left(\frac{1}{14} \bullet C\right) = C \Rightarrow 4 \bullet A + \frac{1}{7} \bullet C = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \bullet A = \frac{6}{7} \bullet C \Rightarrow A = \frac{3}{14} \bullet C$$

FONEMATO 1.6.5

Determine "A" y "B" si $A - B = D$ y $3 \bullet A + 2 \bullet B = C$ siendo:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Debemos determinar las matrices "A" y "B" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

Por sustitución: de la 1ª ecuación se deduce que $A = B + D$, y al sustituir esto en la 2ª, resulta:

$$3 \bullet (B + D) + 2 \bullet B = C \Rightarrow 5 \bullet B = C - 3 \bullet D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{5} \bullet (C - 3 \bullet D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B+D}$$

Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ,θ	teta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ,ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

LA MEMORIA SEGÚN MURPHY

Lo único que no se olvida es lo que se apunta.

1.7 PRODUCTO DE MATRICES

Si $A = \{a_{ij}\}$ es una matriz de orden m×n y $B = \{b_{ij}\}$ es una matriz de orden n×p, el **producto** de la matriz "A" por la matriz "B" se denota $A \bullet B$, y es la matriz $C = \{c_{ij}\}$ de orden m×p tal que c_{ij} es la **suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de la i-ésima fila de "A" por su correspondiente de la j-ésima columna de "B";** es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Un producto de matrices carece de sentido si el número de columnas de la 1ª matriz no coincide con el de filas de la 2ª matriz. ***Por ejemplo:*** si $A_{2\times 3}$ y $B_{3\times 7}$, entonces $A \bullet B$ es una matriz de orden 2×7, pero $B \bullet A$ carece de sentido, pues el número de columnas de la 1ª matriz no coincide con el de filas de la 2ª.

Ejemplos de productos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5+2.7 & 1.6+2.8 \\ 3.5+4.7 & 3.6+4.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+5.8 & 2.4+5.9 & 2.6+5.2 \\ 7.1+3.8 & 7.4+3.9 & 7.6+3.2 \\ 5.1+0.8 & 5.4+0.9 & 5.6+0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 53 & 22 \\ 31 & 55 & 48 \\ 5 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2+5.7+6.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \text{absurdo} \; ; \; \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{absurdo}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES

1) Asociativa: $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
2) Distributiva respecto de la suma: $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$
3) Como queda dicho, puede suceder que el producto $A \bullet B$ tenga sentido matemático y no lo tenga el $B \bullet A$; por tanto, en general, el producto de matrices no es conmutativo.

   Observa: aunque $A \bullet B$ y $B \bullet A$ tengan sentido (sucede eso si "A" es de orden m×n y "B" de orden n×m, en cuyo caso $A \bullet B$ es de orden m×m y $B \bullet A$ es de orden n×n), pueden no ser del mismo orden.

   Y aunque $A \bullet B$ y $B \bullet A$ sean del mismo orden (lo que sucede sólo si $m = n$; o sea, sólo si "A" y "B" son cuadradas de igual orden), en general no es cierto que $A \bullet B = B \bullet A$ ..... pero puede suceder que $A \bullet B = B \bullet A$, y en tal caso se dice que las matrices "A" y "B" **conmutan.**

   Por ejemplo: las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ conmutan, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.7.1

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcúlense "x" e "y" de modo que:

$$A^2 + x \bullet A + y \bullet I = 0$$

SOLUCIÓN

Es: $$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcularemos "x" e "y" al exigir que $A^2 + x \bullet A + y \bullet I = 0$:

$$A^2 + x \bullet A + y \bullet I = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} + x \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + y \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + y - 5 & 2.x + 10 \\ -3.x - 15 & 4.x + y + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + y - 5 = 0 \\ 2.x + 10 = 0 \\ -3.x - 15 = 0 \\ 4.x + y + 10 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 10 \end{cases}$$

FONEMATO 1.7.2

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, halle "B" si su primera fila es $(1, 0)$ y $A \bullet B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

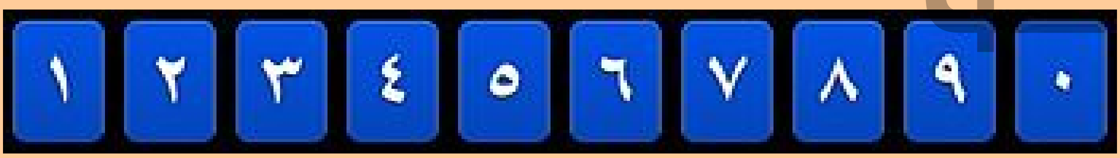
Como "A" es de orden 2×3, para que el producto $A \bullet B$ sea de orden 2×2, la matriz "B" debe ser de orden 3×2:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 + 2.a + 2.c & 2.b + 2.d \\ 2 + a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 + 2.a + 2.c = 1 \\ 2.b + 2.d = 0 \\ 2 + a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Números arábigos y europeos en una señal de tráfico en Abu Dabi.

Números indoarábigos



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

FONEMATO 1.7.3

Determine para qué valores de "a", "b", "c" y "d" se verifica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ c.a + c.d & c.b + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b.c = 0 & (1) \\ a.b + b.d = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 & (2) \\ a + d = 0 & (3) \end{cases} \\ c.a + c.d = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 & (4) \\ a + d = 0 & (5) \end{cases} \\ c.b + d^2 = 0 & (6) \end{cases}$$

El desdoblamiento de las ecuaciones segunda y tercera origina el desdoblamiento del sistema en los siguientes cuatro:

$$(1), (2), (4), (6) :\Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 + b.c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

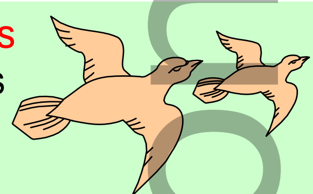
$$(1), (2), (5), (6) :\Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 + b.c = 0 \\ b = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$(1), (3), (4), (6) :\Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 + b.c = 0 \\ a + d = 0 \\ c = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$(1), (3), (5), (6) :\Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 + b.c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 + b.c = 0 \\ a + d = 0 \\ c.b + d^2 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = -a \\ b.c = -a^2 \end{cases}$$

de la 2ª ecuación resulta $d = -a$, y al sustituir en la 3ª, ésta queda como la 1ª

El Álgebra de lo Lineal posibilita la creación de modelos matemáticos que ayudan a comprender y gestionar los fenómenos lineales... y el asunto es tan importante que en tu primer año de Carrera deberás lidiar un curso de Álgebra de lo Lineal, para ampliar los conocimientos adquiridos durante el Bachillerato. Naturalmente, cuanto más sepas de estas cosas al llegar a la Universidad, más cómodo y seguro será tu aterrizaje en ella.



FONEMATO 1.7.4

Determine las matrices "X" de la forma $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{X} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}}_{X^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b^2=1 \\ b+c=0 \\ c^2=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1,\ b=-1,\ c=1 \\ a=-1,\ b=1,\ c=-1 \end{cases}$$

FONEMATO 1.7.5

Sean $A = \{a_{ij}\}$ y $B = \{b_{ij}\}$ matrices cuadradas de orden 3, siendo $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
¿Podemos afirmar que $A \bullet B = B \bullet A$ para cualquier matriz "B"?
¿Cómo debería ser "A" para que $A \bullet B = B \bullet A$ para cualquier matriz "B"?

SOLUCIÓN

Siendo $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, veamos bajo qué condiciones es $A \bullet B = B \bullet A$ para toda matriz "B":

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Es $A \bullet B = \begin{bmatrix} a_{11}.x & a_{12}.x & a_{13}.x \\ a_{21}.y & a_{22}.y & a_{23}.y \\ a_{31}.z & a_{32}.z & a_{33}.z \end{bmatrix}$ y $B \bullet A = \begin{bmatrix} a_{11}.x & a_{12}.y & a_{13}.z \\ a_{21}.x & a_{22}.y & a_{23}.z \\ a_{31}.x & a_{32}.y & a_{33}.z \end{bmatrix}$.

Por tanto, es falso que $A \bullet B = B \bullet A$, salvo si $x = y = z$.

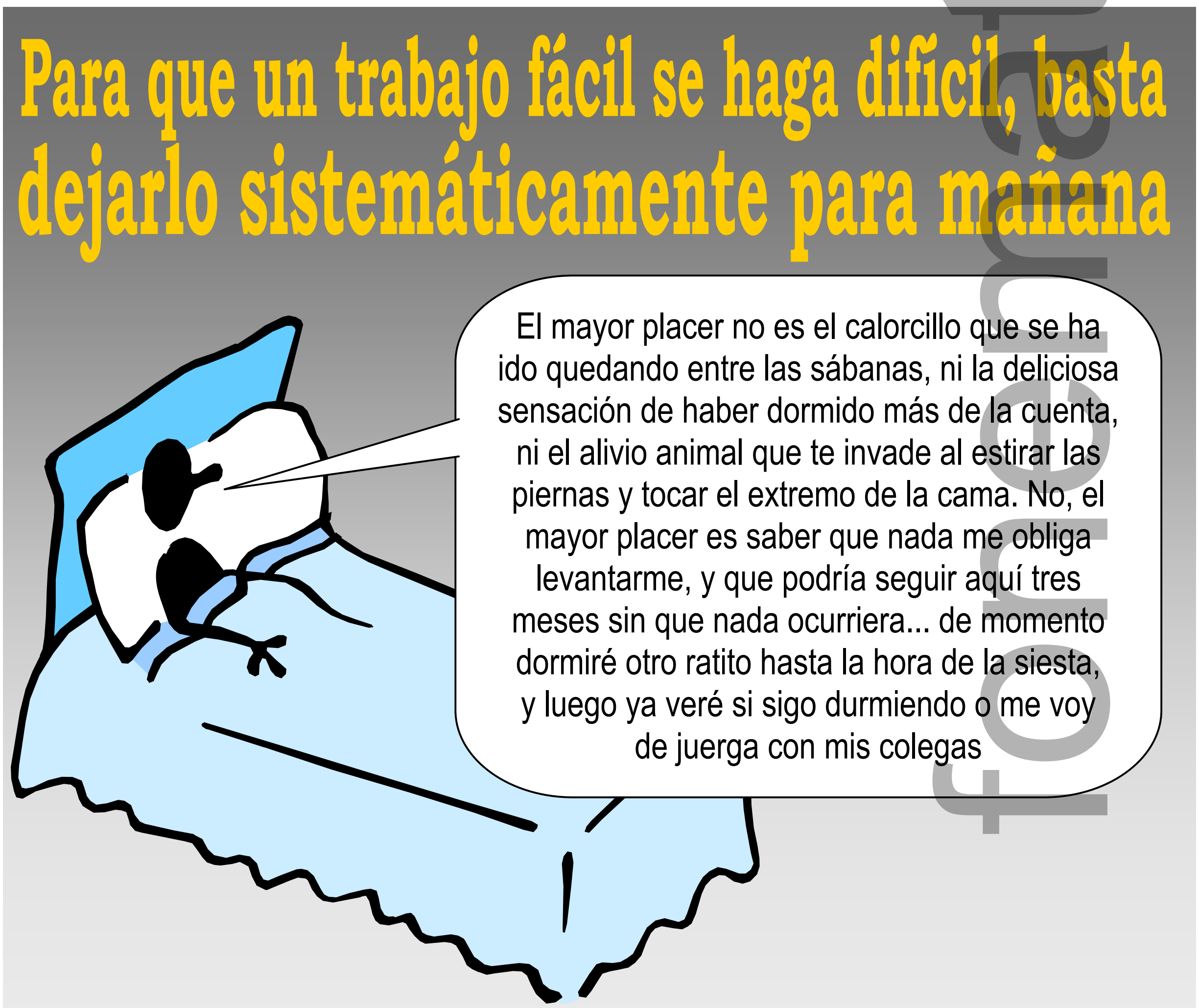
FONEMATO 1.7.6

Si "A" es una matriz cuadrada de orden dos tal que $A^2 = A$, determínese un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda \bullet A - I)^2 = I$, siendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$(\lambda \bullet A - I)^2 = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda \bullet A - I) \bullet (\lambda \bullet A - I) = I \Rightarrow$$
$$\boxed{A \bullet I = I \bullet A = A \,;\, I \bullet I = I}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 \bullet A^2 - 2 \bullet \lambda \bullet A + I = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda^2 \bullet A^2 - 2 \bullet \lambda \bullet A = 0 \Rightarrow$$
$$\boxed{\text{pues } A^2 = A}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 \bullet A - 2 \bullet \lambda \bullet A = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda^2 - 2.\lambda) \bullet A = 0 \Rightarrow$$
$$\boxed{\text{si "A" no es la matriz nula}}$$
$$\Rightarrow (\lambda^2 - 2.\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ 2$$

Por tanto, el valor no nulo pedido es $\lambda = 2$.



1.8 TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

Si en una matriz "A" permutamos filas por columnas conservando el orden de ellas, resulta otra matriz que se llama **traspuesta** de "A" y se denota A^t.

Por ejemplo, si:

$$A=\begin{bmatrix}1&7&8&5\\7&3&2&0\\9&9&2&4\end{bmatrix}\in M_{3\times 4}\ ;\ B=\begin{bmatrix}8&7&6\\5&4&3\end{bmatrix}\in M_{2\times 3}\ ;\ C=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\in M_{3\times 3}$$

sus respectivas traspuestas son:

$$A^t=\begin{bmatrix}1&7&9\\7&3&9\\8&2&2\\5&0&4\end{bmatrix}\in M_{4\times 3}\ ;\ B^t=\begin{bmatrix}8&5\\7&4\\6&3\end{bmatrix}\in M_{3\times 2}\ ;\ C^t=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\in M_{3\times 3}$$

PROPIEDADES

1) La traspuesta de la traspuesta de una matriz "A" es ella misma: $(A^t)^t = A$
2) La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas: $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) Si $\alpha \in \Re$, entonces $(\alpha \bullet A)^t = \alpha \bullet A^t$.
4) La traspuesta de un producto de matrices es el producto de sus traspuestas, pero en orden contrario. ***Por ejemplo:***

$$(A\bullet B\bullet C\bullet D)^t = D^t\bullet C^t\bullet B^t\bullet A^t.$$

1.9 MATRIZ SIMETRICA

Se dice que una matriz cuadrada $A=\{a_{ij}\}$ es **simétrica** si coincide con su matriz traspuesta, lo que sucede sólo si $a_{ij}=a_{ji}$; o sea, "A" es simétrica sólo si los elementos situados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales.

Por ejemplo, son simétricas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}5&6&7\\6&9&2\\7&2&0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}3&8&2&5\\8&0&4&6\\2&4&9&\pi\\5&6&\pi&3\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}4&9\\9&1\end{bmatrix};\ D=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&9&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- Para toda matriz "A", la matriz $H = A\bullet A^t$ es simétrica, pues $H^t = H$.
  En efecto:

$$H^t = (A\bullet A^t)^t \underset{\uparrow}{=} (A^t)^t\bullet A^t = A\bullet A^t = H$$

$\boxed{\text{traspuesta de un producto} = \text{producto de las traspuestas en orden contrario}}$

- Si la matriz "A" es cuadrada, la matriz $N = A + A^t$ es simétrica, pues $N^t = N$.
  En efecto:

$$N^t = (A+A^t)^t \underset{\uparrow}{=} A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = N$$

$\boxed{\text{traspuesta de una suma} = \text{suma de las traspuestas}}$

Una matriz cuadrada "A" es antisimétrica si coincide con su traspuesta cambiada de signo, lo que sucede sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$; o sea: los elementos simétricos respecto de la diagonal principal tiene igual valor absoluto, pero signo distinto.

Observa: los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos: $a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2.a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$. ***Por ejemplo,*** son antisimétricas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -2 & 5 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & -4 & 0 & \pi \\ -5 & 6 & -\pi & 0 \end{bmatrix} ;\ C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

- Toda matriz cuadrada "A" puede descomponerse en suma de una matriz simétrica "S" y otra antisimétrica "H". En efecto, si $A = S + H$, es:

$$A^t = (S+H)^t = S^t + H^t = S - H$$

por ser simétrica "S", es $S^t = S$; por ser antisimétrica "H", es $H^t = -H$

Al sumar miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, resulta:

$$S = (A + A^t)/2 = \left\{(a_{ij} + a_{ji})/2\right\}$$

Al restar miembro a miembro $A = S + H$ y $A^t = S - H$, resulta:

$$H = (A - A^t)/2 = \left\{(a_{ij} - a_{ji})/2\right\}$$

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, entonces:

$$S = (A + A^t)/2 = \left\{(a_{ij} + a_{ji})/2\right\} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$H = (A - A^t)/2 = \left\{(a_{ij} - a_{ji})/2\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo: $S + H = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = A$

1.11 OTRAS MATRICES CUADRADAS

- **MATRIZ UNIDAD:** matriz cuadrada tal que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y los restantes elementos de la matriz son nulos; se denota "I". ***Por ejemplo,*** la matriz unidad de orden 3 es

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ ESCALAR:** matriz cuadrada tal que los elementos de la diagonal principal son iguales, siendo nulos los demás elementos. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ DIAGONAL:** matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos no situados en la diagonal principal. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **MATRIZ TRIANGULAR:** matriz cuadrada en la que todos los elementos a un lado de la diagonal principal son nulos.

  Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  De "A" se dice que es triangular inferior (son nulos los elementos situados debajo de la diagonal principal); de "B" se dice que es triangular superior (son nulos los elementos situados encima de la diagonal principal).

FONEMATO 1.11.1

Sea "A" una matriz cuadrada e "I" la matriz unidad de igual orden que "A".
Calcule $(2 \bullet A - I)^2$ sabiendo que $A^2 = A$.

SOLUCIÓN

$$(2 \bullet A - I)^2 = (2 \bullet A - I) \bullet (2 \bullet A - I) =$$
$$= 4 \bullet A \bullet A - 4 \bullet A + I = 4 \bullet A - 4 \bullet A + I = I$$

nos dicen que $A^2 = A \bullet A = A$

FONEMATO 1.11.2

Sea "A" una matriz cuadrada e "I" la matriz unidad de igual orden que "A".
Calcule $(A + I)^2$ sabiendo que $A^2 = I$.

SOLUCIÓN

$$(A + I)^2 = (A + I) \bullet (A + I) = (A \bullet A + A + A + I) =$$

nos dicen que $A^2 = A \bullet A = I$

$$= (I + A + A + I) = 2 \bullet A + 2 \bullet I = 2 \bullet (A + I)$$

1.12 TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Las **transformaciones elementales**, que nos facilitarán muchos cálculos que están por venir (cálculo del determinante de una matriz cuadrada y cálculo del rango de una matriz, cuadrada o no), son las siguientes:

1) Trasposición de una matriz.
2) Cambio entre sí de dos filas o columnas de una matriz.
3) Multiplicación de todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz un mismo número $k \neq 0$.
4) Adición a los elementos de una fila (columna) de una matriz de los elementos correspondientes de otra fila (columna) multiplicados por un mismo número.

1.13 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

A cada matriz cuadrada "A", por el simple hecho de ser cuadrada, le asociamos un número que llamamos **determinante** de "A" y denotamos $|A|$. Si $|A| \neq 0$ se dice que "A" es **regular,** y si $|A| = 0$ se dice que "A" es **singular.**

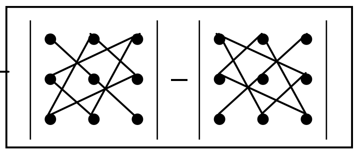
CÁLCULO DE DETERMINANTES

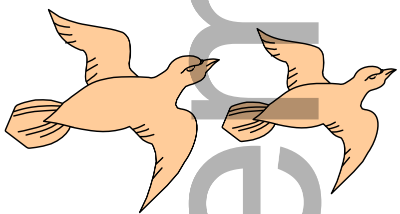
- Si $A = [a_{11}]$, es $|A| = a_{11}$. ***Por ejemplo,*** si $A = [6]$, es $|A| = 6$.
- Si $A = \{a_{ij}\} \in M_{2\times 2}$, es $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$. ***Por ejemplo:***

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2.(-5) - (-3).4 = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (-4).7 - 2.(-5) = -18$$

- **Regla de Sarrus:** si $A = \{a_{ij}\} \in M_{3\times 3}$, es:





$$|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{32}.a_{21} -$$
$$-(a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{21}.a_{12}.a_{33})$$

Por ejemplo: si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, es:

$$|A| = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.8.4 - (7.5.3 + 6.8.1 + 4.2.9) = 0$$

Por ejemplo: si $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 9 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, es:

$$|A| = 0.9.1 + 2.6.5 + 3.(-3).(-4) -$$
$$-(5.9.3 + (-3).6.0 + 1.(-4).2) = \text{lo que sea}$$

Para poder calcular determinantes de matrices de orden mayor que 3, debemos definir antes los conceptos de menor complementario y de cofactor o adjunto de un elemento de una matriz cuadrada.

MENOR COMPLEMENTARIO. COFACTOR

Si $A \in M_{n\times n}$, el menor complementario del elemento a_{ij} de "A" se denota α_{ij}, y es el determinante de la matriz cuadrada de orden "n−1" obtenida al suprimir en "A" la i-ésima fila y la j-ésima columna. El cofactor o adjunto del elemento a_{ij} se denota A_{ij}, siendo $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$. ***Por ejemplo,*** si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

el menor complementario α_{32} del elemento $a_{32} = 6$ es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la tercera fila y la segunda columna de "A"; o sea:

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.8 = -19$$

determinante de la matriz obtenida al eliminar 3ª fila y 2ª columna de "A"

El cofactor o adjunto A_{32} de $a_{32} = 6$ es $A_{32} = (-1)^{3+2}.\alpha_{32} = (-1).(-19) = 19$.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 19 & 2 & 3 \\ 4 & 41 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 8 & 9 \\ 23 & 34 & -1 & 14 \end{bmatrix}$, se tiene que:

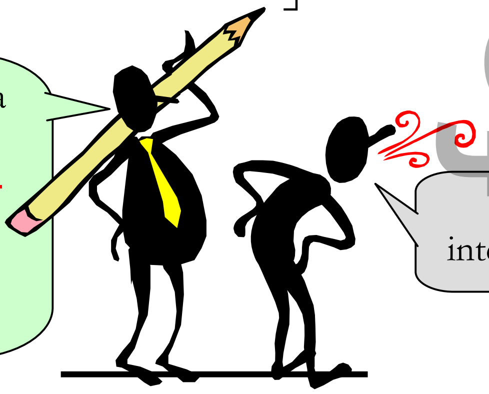
$$\alpha_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A_{42} = (-1)^{4+2}.\alpha_{42} = 0$$

determinante de la matriz obtenida al eliminar 4ª fila y 2ª columna de "A"

Observa: el valor de $(-1)^{i+j}$ es 1 ó −1 según que el número natural "i+j" sea par o impar; por tanto, la secuencia de los signos de los adjuntos respecto de los menores complementarios es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & . & . \\ - & + & - & + & - & . & . \\ + & - & + & - & + & . & . \\ - & + & - & + & - & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

A continuación aprendemos a efectuar el desarrollo de un determinante por los elementos de una línea, lo que nos permitirá calcular el determinante de cualquier matriz



¡Muy interesante!

DESARROLLO POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento de una cualquiera de las líneas de la matriz por su cofactor o adjunto. Por comodidad, la línea elegida para hacer el desarrollo será la que contenga mayor número de ceros.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la 3ª columna

$$\Rightarrow |A| = a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33} =$$

$$= 7.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 8.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -53$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

desarrollamos por los elementos de la 2ª fila

$$\Rightarrow |A| = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} + a_{24}.A_{24} =$$

$$= 4.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{2+4}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -29$$

Observa: el determinante de una matriz **triangular** es el producto de los elementos de su diagonal principal, y lo mismo sucede si la matriz es **diagonal.**

Por ejemplo:

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.7.6$$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna

Por ejemplo:

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 9.8.7.6$$

Desarrollamos por los elementos de la primera fila

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

El uso de las siguientes propiedades te **facilitará** el cálculo de determinantes.

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} \pi & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Si todos los elementos de una línea son cero, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la segunda columna está formada por ceros}$$

3) Al cambiar el orden de dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Cambiamos la primera fila por la segunda

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Cambiamos la primera columna por la segunda

4) Si dos líneas paralelas son iguales o proporcionales, el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues las filas primera y tercera son iguales}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0, \text{ pues la segunda columna es el triple de la primera}$$

5) Si los elementos de una línea se multiplican (dividen) por un mismo número, el determinante correspondiente se multiplica (divide) por ese número.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \text{ entonces } \begin{vmatrix} 9.2 & 9.3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9.5$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 23, \text{ entonces } \begin{vmatrix} 3 & 4/7 \\ 1 & 9/7 \end{vmatrix} = 23/7$$

De cajón: siendo "A" una matriz cuadrada de orden "n" y "k" un número real, es $|k \bullet A| = k^n . |A|$, pues para multiplicar "A" por "k" debemos multiplicar por "k" las "n" líneas de "A".

6) Un determinante no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos o restamos otras líneas paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A la 1ª fila le sumamos el doble de la 2ª más el triple de la 3ª

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A la 3ª columna le restamos el doble de la 1ª

7) Un determinante es cero si una de sus líneas puede obtenerse como suma de otras líneas paralelas a ella, multiplicadas cada una de éstas por un número.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$ pues la tercera columna es suma de las dos primeras

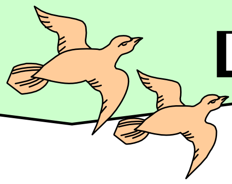
8) Si todos los elementos de una línea de |A| están formados por dos sumandos, |A| puede descomponerse en suma de otros dos determinantes idénticos a |A| salvo en dicha línea, que en el primero (segundo) de los nuevos determinantes está formada por los primeros (segundos) sumandos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+7 & 3 \\ 4 & 5+9 & 6 \\ 7 & 8+4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

9) Siendo "A" y "B" matrices cuadradas del mismo orden, es:

$$|A \bullet B| = |A| . |B| .$$

Para calcular determinantes de matrices "gordas", conviene manipular sus líneas (hacer transformaciones elementales) de modo que aparezcan muchos ceros.



• ***Por ejemplo:***

Para que en la primera fila "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
• A la segunda columna le restamos el triple de la primera
• A la tercera columna le restamos el cuádruple de la primera
• A la cuarta columna le restamos el doble de la primera

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera fila

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a la 3ª fila le restamos la 2ª, y a la 2ª fila le restamos el doble de la 1ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera columna

• ***Por ejemplo:***

Para que en la segunda fila "aparezcan" ceros, hacemos lo siguiente:
- A la primera columna le restamos el doble de la segunda
- A la cuarta columna le restamos el triple de la segunda

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la segunda fila

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 . \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

Efectuamos el desarrollo por los elementos de la primera columna

EL PROFESOR QUE CORRIGE TU EXAMEN

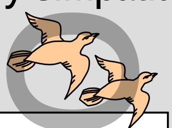
Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en muchos casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.

Así las cosas, no hace falta ser un lince para entender que lo que escribamos en examen debe diferenciarnos positivamente de los demás..., y para conseguir tal diferenciación basta escribir pensando que el profe que te ha de corregir no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano, explicándole todos los aspectos relevantes de las conexiones neuronales (CN) que establezcamos en cada caso.

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía

Pedrusco "A" = Pedrusco "B"



En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" $\Rightarrow$ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

FONEMATO 1.13.1

Resuélvase la ecuación $\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$.

SOLUCIÓN

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor:

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

a la 1ª columna le sumamos la 2ª y la 3ª

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & x-b-c & b \\ x & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

a las filas 2ª y 3ª les restamos la 1ª

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & x-a-b-c & b \\ 0 & 0 & x-a-b-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x.(x-a-b-c)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a+b+c \text{ (doble)} \end{cases}$$

considerando que la incógnita es "x", y que "a", "b" y "c" son constantes

FONEMATO 1.13.2

Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$.

SOLUCIÓN

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ -x-1 & x+1 & 0 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 & 0 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 & 0 \end{vmatrix} =$$

a las filas segunda y tercera les restamos la primera
a la cuarta fila le restamos el triple de la primera

desarrollamos por los elementos de la cuarta columna

$$= \begin{vmatrix} -x-1 & x+1 & 0 \\ -x-1 & 0 & x+1 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = (x+1)^2. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2.x-6 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} =$$

sacamos factor común "x + 1" en las filas primera y segunda

$$= (x+1)^2.(-2.x-6+x-3+x-3) =$$
$$= -12.(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (doble)}$$

En examen hay que dejar escrito todo lo relevante que pase por el cerebro.

FONEMATO 1.13.3

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN

La solución es de idea feliz:

a la tercera fila le sumamos la segunda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

pues la tercera fila es proporcional a la primera

Aunque no se te ocurra la idea feliz, el asunto es una tontería:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b+c+a & a-b & a-c \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda y tercera les restamos la primera

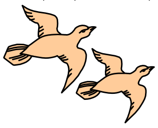
en la segunda columna sacamos factor común "b − a"
en la tercera columna sacamos factor común "c − a"

$$= (b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ b+c+a & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

pues las columnas segunda y tercera son iguales

FONEMATO 1.13.4

Probar que $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a.(b-a).(c-b).(d-c).$



En examen no importa lo que sabes, importa lo que PARECE que sabes.

SOLUCIÓN

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

a las filas 2^a, 3^a y 4^a les restamos la 1^a

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la 1^a columna

a las filas 2^a y 3^a les restamos la 1^a

$$= a.\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = a.(b-a).\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la 1^a columna

$$= a.(b-a).\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ 0 & d-c \end{vmatrix} = a.(b-a).(c-b).(d-c)$$

a la 2^a fila le restamos la 1^a

LETANIA

- Inteligencia, dime el nombre exacto de las cosas.
- Astucia, dime qué errores no debo cometer.
- Sabiduría, resista yo la dulce tentación de lo fácil.
- Lucidez, asísteme en los momentos de pánico.
- Estrategia, dime qué batallas no han de preocuparme.
- Supervivencia, identifique yo al mortal enemigo.
- Estupidez, no dé yo valor a lo que nada vale.
- Fortaleza, dame sombra en el desierto.
- Inmadurez, no te poses en mi hombro.
- Desaliento, no serás mi confidente.
- Miedo, sólo a ti temeré.

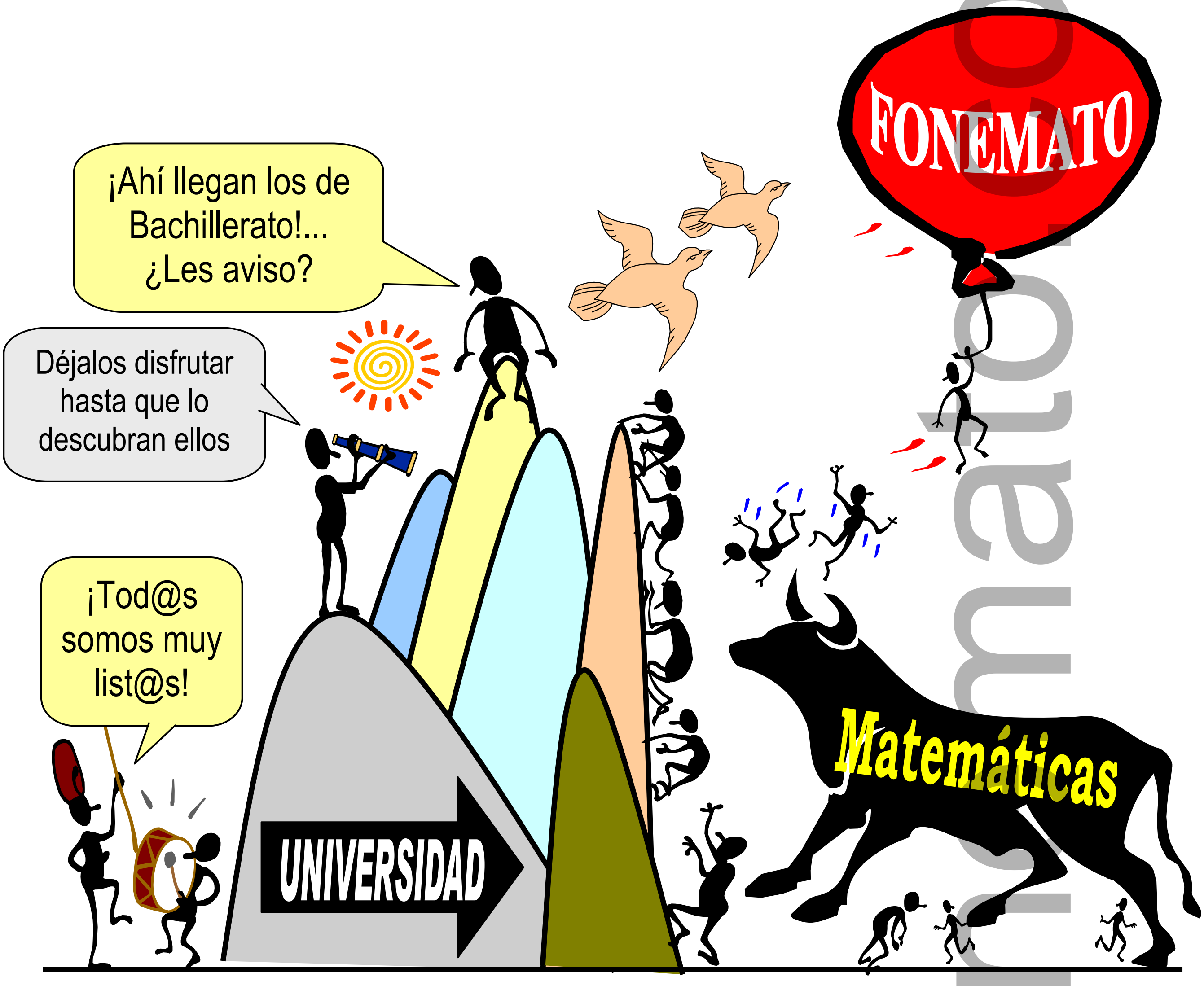
FONEMATO 1.13.5

Aplicando las propiedades de los determinantes (o sea, sin desarrollar el determinante), calcúlese una solución de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & 8 \\ 1 & 8 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN

Nuestra astucia nos hace ver que las columnas 2ª y 3ª son proporcionales si $x = 4$; por tanto, podemos garantizar que el determinante se anula si $x = 4$.



FONEMATO 1.13.6

Determínese la raíz múltiple de la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

SOLUCIÓN

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 8 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+10 & x+10 & x+10 & x+10 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

a la primera fila le sumamos las restantes

sacamos factor común "x + 10" en la primera fila

$$= (x+10).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 8 \\ 8 & 1 & x & 1 \\ 1 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+10).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 7 \\ 8 & -7 & x-8 & -7 \\ 1 & 7 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

a las columnas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera

desarrollamos por los elementos de la primera fila

$$= (x+10).\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 7 \\ -7 & x-8 & -7 \\ 7 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+10).(x-8).\begin{vmatrix} x-1 & 7 \\ 7 & x-1 \end{vmatrix} =$$

desarrollamos por los elementos de la segunda columna

$$= (x+10).(x-8).\left((x-1)^2 - 49\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+10=0 \Rightarrow x=-10 \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \\ (x-1)^2-49=0 \Rightarrow x=6,\ x=8 \end{cases}$$

un producto de diversos factores es 0 siempre que sea 0 algún factor

Por tanto, la única raíz múltiple es $x = 8$.

FONEMATO 1.13.7

Si $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ halla, sin desarrollarlo, el valor de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2.x+5 & 2.y & 2.z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN

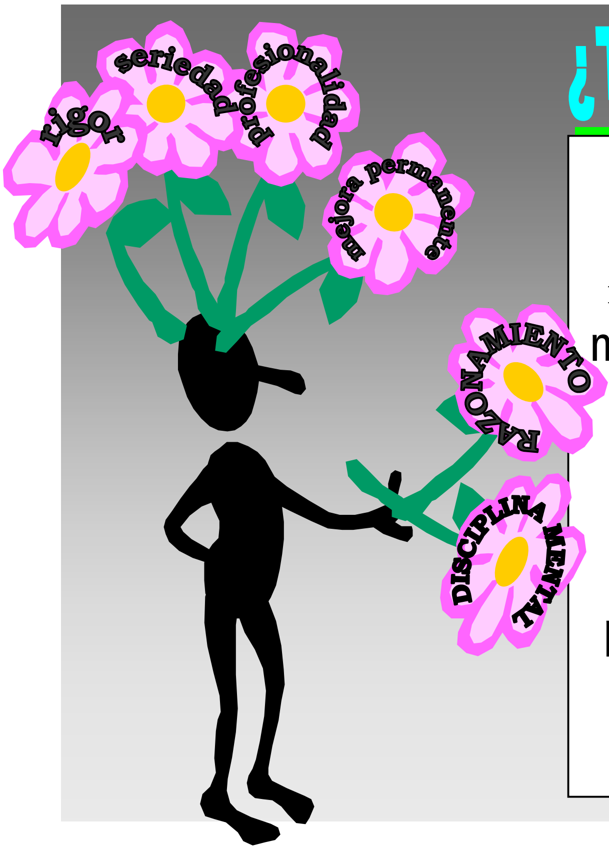
el primer determinante es 0, pues sus filas 1ª y 2ª son proporcionales

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2.x+5 & 2.y & 2.z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2.x & 2.y & 2.z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =$$

CN: Si todos los elementos de una línea de |A| están formados por dos sumandos, |A| puede descomponerse en suma de otros dos determinantes idénticos a |A| excepto en dicha línea, que en el primero (segundo) de los nuevos determinantes está formada por los primeros (segundos) sumandos.

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

el primer determinante es 0, pues sus filas 1ª y 3ª son iguales



¿TE GUSTAN LAS FLORES?

Con los **números** el cerebro se puebla de las más hermosas florecillas: amapolas de **disciplina mental**, corazoncillos de **capacidad de abstracción y razonamiento**, maripepas de **rigor**, alarises de **seriedad**, azaleas de **profesionalidad**, amarantos de **mejora permanente** y tomasillos **de gusto por el trabajo bien hecho...** o sea, todo ventajas.

FONEMATO 1.13.8

Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0.$

SOLUCIÓN

CN: Para facilitar el cálculo del determinante, realizamos transformaciones elementales que no alteran su valor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

a las columnas 2ª y 3ª les restamos la primera

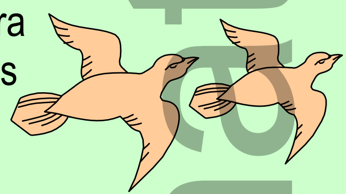
sacamos factor común "b − a" en la 2ª columna y "c − a" en la 3ª

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b+a).(b-a) & (c+a).(c-a) \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

desarrollo por los elementos de la 1ª fila

$$= (b-a).(c-a).(c-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b-a=0 \\ c-a=0 \\ c-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c$$

OJO AL PARCHE: en todo examen de Álgebra hay una proporción no pequeña de almas cándidas que hablan del determinante de una matriz no cuadrada; incluso, no se sabe cómo, llegan a calcularlo. Naturalmente, si perpetras tan descomunal barbaridad, serás suspendido ipso facto ... y además serás objeto de todo tipo de rechiflas, porque tu profe congregará a toda su familia ante tu examen, y se pasarán la tarde tronchándose de tus conocimientos de Álgebra.



FONEMATO 1.13.9

Demostrar que si $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, es $A^2-(a+d)\bullet A+|A|\bullet I=0$, siendo:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ 0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

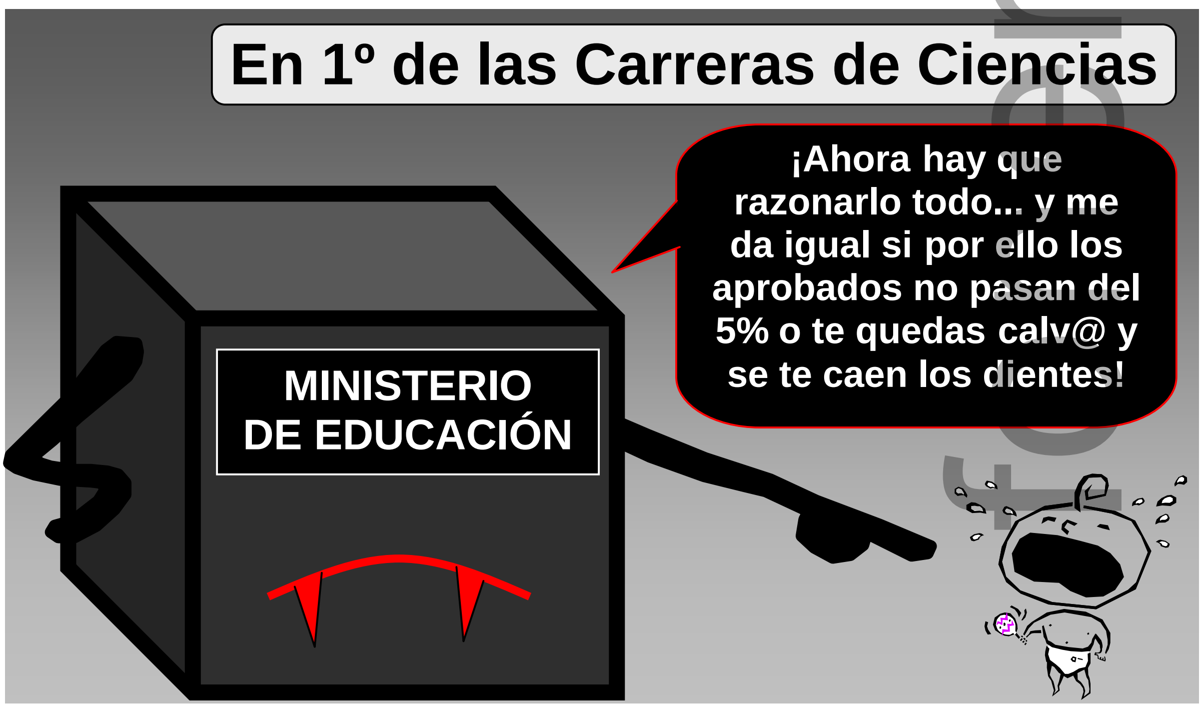
SOLUCIÓN

Como $|A|=a.d-b.c$, es:

$$A^2-(a+d)\bullet A+|A|\bullet I=$$

$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-(a+d)\bullet\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+(a.d-b.c)\bullet\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} a^2+b.c & a.b+b.d \\ a.c+c.d & b.c+d^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a^2+a.d & a.b+b.d \\ a.c+d.c & a.c+d^2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a.d-b.c & 0 \\ 0 & a.d-b.c \end{bmatrix}}_{\text{Cualesquiera que sean los valores de "a", "b", "c" y "d", al sumar estas tres matrices resulta la matriz nula}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



FONEMATO 1.13.10

Dadas $A=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{bmatrix}$, determine una matriz simétrica "P" que sea regular y tal que $P\bullet B = A\bullet P$, siendo:

SOLUCIÓN

Sea $P=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ la matriz simétrica regular; o sea: $|P| = a.c - b^2 \neq 0$.

Exijamos que se satisfaga la condición dada $P\bullet B = A\bullet P$:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}4 & -3\\ 6 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -6\\ 3 & -5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4.a+6.b & -3.a-5.b\\ 4.b+6.c & -3.b-5.c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4.a-6.b & 4.b-6.c\\ 3.a-5.b & 3.b-5.c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}12.b & -3.a-9.b+6.c\\ 9.b+6.c-3.a & -6.b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}12.b=0\\ -3.a-9.b+6.c=0\\ 9.b+6.c-3.a=0\\ -6.b=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}b=0\\ -3.a+6.c=0\\ 6.c-3.a=0\\ b=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}b=0\\ a=2.c\end{array}\right\}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}2.c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix}$$

Hay infinitas matrices simétricas tales que $P\bullet B = A\bullet P$; si elegimos $c=1$ (para que P sea regular basta que $c\neq 0$), obtenemos una de ellas: $P=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

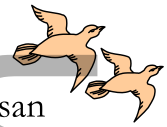
LA CRISIS

La crisis es la mejor bendición que puede sucederle a personas y países, porque la crisis trae progresos. La creatividad nace de la angustia como el día nace de la noche oscura. Es en la crisis que nace la inventiva, los descubrimientos y las grandes estrategias. Quien supera la crisis se supera a sí mismo sin quedar *superado*. Quien atribuye a la crisis sus fracasos y penurias, violenta su propio talento y respeta más a los problemas que a las soluciones. La verdadera crisis es la crisis de la incompetencia. El inconveniente de las personas y los países es la pereza para encontrar las salidas y soluciones. Sin crisis no hay desafíos, sin desafíos la vida es una rutina, una lenta agonía. Sin crisis no hay méritos. Es en la crisis donde aflora lo mejor de cada uno, porque sin crisis todo viento es caricia. Hablar de crisis es promoverla, y callar en la crisis es exaltar el conformismo. En vez de esto trabajemos duro. Acabemos de una vez con la única crisis amenazadora que es la tragedia de no querer luchar por superarla. En los momentos de crisis, sólo la imaginación es más importante que el conocimiento.

Albert Einstein

APRENDER A ESCRIBIR

El uso de "sea"... y de los verbos exigir y satisfacer



El asunto de aprender **a** escribir no es ninguna tontería, porque en la Carrera tendrás que superar no pocos exámenes escritos donde pelearás con muchos problemas sobre fenómenos que se expresan mediante números. Así las cosas, para que tus exámenes estén siempre entre los mejores, es esencial que aprendas a escribir sobre los números de modo que parezcas un profesional, y no el pardillete que, por no saber expresarse con soltura en lenguaje matemático, tiene notables dificultades para expresarse con todo lo relacionado con los números.

> Los profesionales emplean constantemente el verbo exigir y después el verbo satisfacer... y tú debes aprender a usarlos cuanto antes, porque te darán prestigio y solvencia en millones de ocasiones.

Para resolver un problema hay que suponerlo resuelto, poniendo nombre (por ejemplo "X") a la solución buscada (que puede ser un número, un vector, un tensor, un campo, un... cualquier cosa), y lo haremos diciendo

Sea "X" el ....

> Escribimos lo que sea menester para que el ente "X" quede perfectamente identificado; es decir, para que ni el más tonto del planeta pueda confundirlo con ningún otro ente del universo.

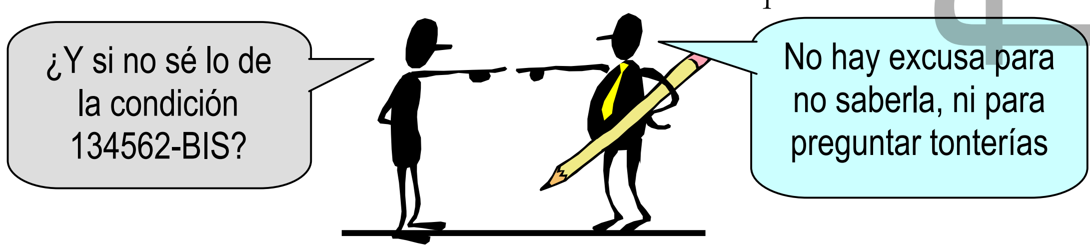
y después llegará un momento en que escribirás:

.... y "X" se determina al exigir que se satisfaga la condición .....

> La condición que sea; por ejemplo, la 134562-BIS.

$$\overbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\iiint_{D\subset\Re^3}\frac{\nabla f(X)}{\partial f/\partial\theta}=\sqrt{b^2-4ac}\prod_{k=1}^{\infty}\oiint_X dt}^{\text{CONDICIÓN 134562−BIS}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ....\Rightarrow X = \text{lo que sea}$$



1.14 MATRIZ ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA

La adjunta de una matriz cuadrada "A" se denota Adj.(A), y es la matriz cuadrada que resulta al sustituir cada elemento de la matriz traspuesta de "A" por su adjunto o cofactor. ***Por ejemplo,*** si:

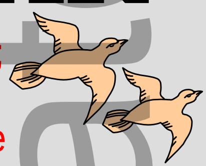
$$A=\begin{bmatrix}2 & 8\\ 7 & 6\end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix}5 & -9\\ 2 & -3\end{bmatrix}\ ;\ C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

al sustituir en sus traspuestas cada elemento por su cofactor o adjunto, resulta:

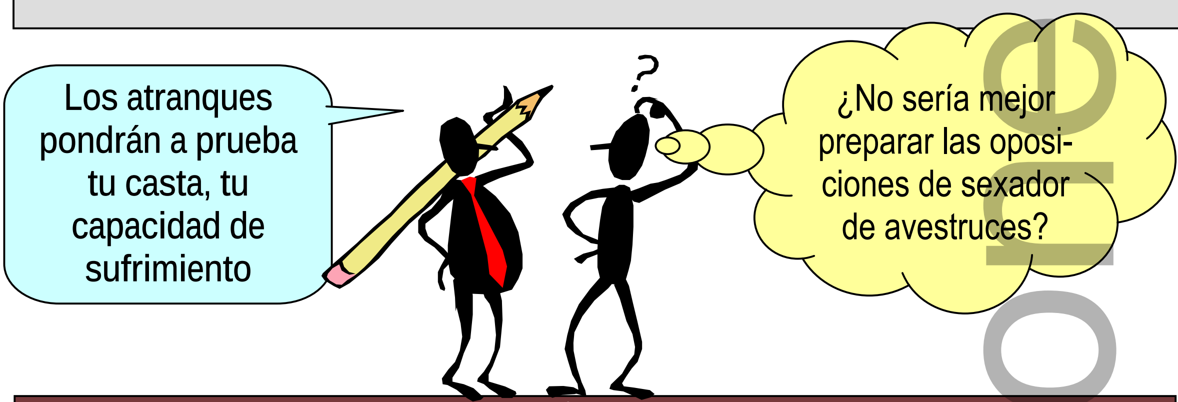
$$\text{Adj.}(A)=\begin{bmatrix}6 & -8\\ -7 & 2\end{bmatrix};\ \text{Adj.}(B)=\begin{bmatrix}-3 & 9\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\text{Adj.}(C)=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -3\\ 6 & -12 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}$$

SABER ESTUDIAR



Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees; es decir, tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de llenarlo de contenido pleno. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero en caso de atranque para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte; o sea, si no eres capaz de llenar de contenido pleno una palabra o símbolo, invierte el tiempo que sea menester (dos minutos, dos horas, dos semanas, dos meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.



OBSERVACIÓN DE MURPHY

Nunca hay tiempo para hacerlo bien, pero siempre lo hay para hacerlo dos veces.

1.15 MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si "A" es una matriz cuadrada de orden "n" e "I" es la matriz unidad del mismo orden que "A", se llama **inversa** de "A" y se denota A^{-1} a la matriz cuadrada de orden "n" tal que $A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I$. Se demuestra que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj.}(A)$$

Como está prohibido dividir por cero, la expresión anterior no tiene sentido si $|A| = 0$; es decir, toda matriz **singular** carece de inversa.

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \text{Adj.}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A| = -1 \ ; \ \text{Adj.}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1) $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
2) Si "A" es simétrica, A^{-1} también lo es, si existe A^{-1}.
3) La inversa de un producto de matrices regulares del mismo orden es el producto de las inversas en orden contrario: $(A \bullet B \bullet C)^{-1} = C^{-1} \bullet B^{-1} \bullet A^{-1}$.
4) Si "A" tiene inversa, es $|A^{-1}| = 1/|A|$; en efecto:

$$A \bullet A^{-1} = I \Rightarrow |A \bullet A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A|.|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$$

LEY DE SIMPLIFICACIÓN DE NÚMEROS

Si "a" es un número real **no nulo** y los números reales "b" y "c" son tales que $a.b = a.c$, entonces $b = c$... pero eso no es cierto si $a = 0$, pues el que sea $0.b = 0.c$ no garantiza que $b = c$. Por ejemplo, $0.3 = 0.7$, pero $3 \neq 7$.

5) Si $|A| \neq 0$, es válida la ley de simplificación: si "B" y "C" son matrices cuadradas del mismo orden que "A" y $A \bullet B = A \bullet C$, entonces $B = C$.

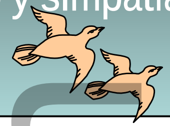
"DESPEJAR" EN UN PRODUCTO DE MATRICES

En la ecuación matricial $P \bullet X = Q$, sólo es posible **despejar** "X" si "P" tiene inversa ($\Leftrightarrow$ "P" es cuadrada y $|P| \neq 0$); en tal caso, **premultiplicando** (multiplicando por la izquierda) ambos miembros por P^{-1}, resulta $X = P^{-1} \bullet Q$:

$$P \bullet X = Q \Rightarrow \underbrace{P^{-1} \bullet P}_{I} \bullet X = P^{-1} \bullet Q \Rightarrow X = P^{-1} \bullet Q$$

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" ⇒ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

FONEMATO 1.15.1

Determine "a" para que "A" tenga inversa. Calcule la inversa de "A" si a = 4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al exigir que la matriz "A" sea regular (o sea, $|A| \neq 0$), resulta:

$$|A| = a^2 + 4.a - 21 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

Si $a = 4$, es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{11} \bullet \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Si $a = 4 \Rightarrow |A| = 4^2 + 4.4 - 21 = 11$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

Ventana donde, para facilitar a tu profe la lectura de lo escrito, y diferenciarnos nítidamente de los demás, metemos los calculotes necesarios para resolver la papeleta.

FONEMATO 1.15.2

Determine "a" para que "B" tenga inversa. Calcule la inversa de "B" si $a = 1$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al **exigir** que la matriz "B" sea regular (o sea, $|B| \neq 0$), resulta:

$$|B| = a.(a^2 - 4) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 2 \end{cases}$$

desarrollamos el determinante por los elementos de la 3ª columna

Si $a = 1$, es $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Es:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \bullet \mathrm{Adj}(B) = \frac{1}{-3} \bullet \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

VENTANA

Si $a = 1 \Rightarrow |B| = 1.(1^2 - 4) = -3$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(B) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

en B^t sustituimos cada elemento por su adjunto

FONEMATO 1.15.3

Determine "a" para que "C" tenga inversa. Calcule C^{-1}.

$$C = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

Al **exigir** que la matriz "C" sea regular, resulta: $|C| = a^3 - a + 1 \neq 0$.

Siendo $a^3 - a + 1 \neq 0$, es:

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \bullet \mathrm{Adj}(C) = \frac{1}{a^3 - a + 1} \bullet \begin{bmatrix} a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 - 1 & 1 \\ 1 - a & -a & a^2 \end{bmatrix}$$

VENTANA

$$C^t = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(C) = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & -a \\ -a & a^2 - 1 & 1 \\ 1 - a & -a & a^2 \end{bmatrix}$$

en C^t sustituimos cada elemento por su adjunto

FONEMATO 1.15.4

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&b\end{bmatrix}$.

1) ¿Cuándo el determinante de "A" es el seno de algún número real?
2) Calcula la inversa de "A" cuando exista.
3) Determina todos los pares (a,b) para los que "A" coincide con su inversa.

SOLUCIÓN

1) **CN:** El seno toma valores entre -1 y 1, por lo que $|A|=b$ será el seno de algún número real siempre que $-1\le b\le 1$.

2) **CN:** La matriz "A" tiene inversa sólo si $|A|=b\neq 0$, y en tal caso:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\bullet \mathrm{Adj}(A)=\frac{1}{b}\bullet\begin{bmatrix}b&0&0\\0&b&0\\-a&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-a/b&0&1/b\end{bmatrix}$$

VENTANA

$$A^t=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&0&b\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix}b&0&0\\0&b&0\\-a&0&1\end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

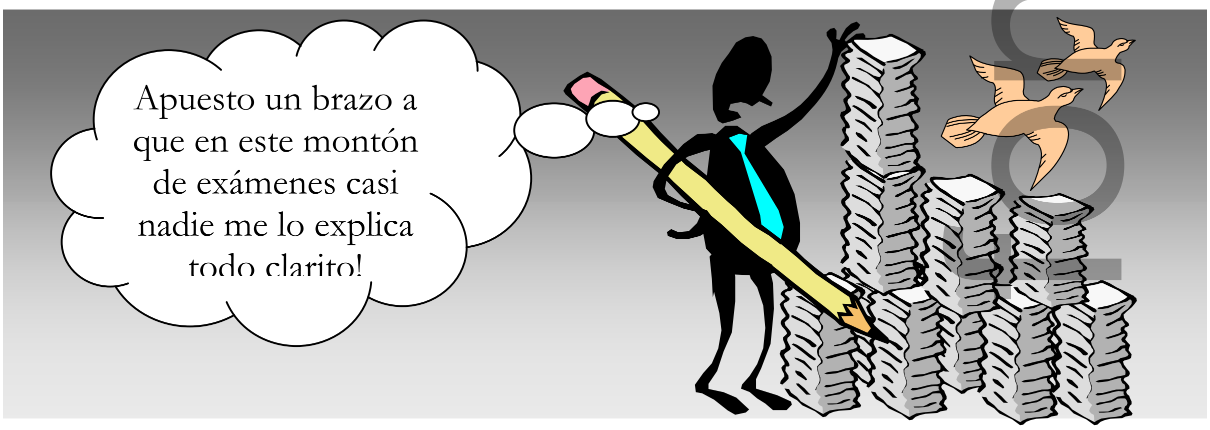
3) Al **exigir** que $A=A^{-1}$, resulta:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-a/b&0&1/b\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-a/b\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\\ b=1/b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}a=0\\b=1/b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm1\end{cases}\\ \begin{cases}b=-1\\b=1/b\end{cases}\Rightarrow b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}b=\pm1\\b=1\end{cases}\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

Por tanto, es $A=A^{-1}$ si $b=-1$ o si $a=0$ y $b=\pm1$.



FONEMATO 1.15.5

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Si existe, calcule la inversa de "A".

2) Determine una matriz "X" que verifique la ecuación $A \bullet B = A \bullet X \bullet A$.

SOLUCIÓN

1) **CN:** Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular.

En nuestro caso existe A^{-1}, pues $|A| = 9 \neq 0$. Es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{9} \bullet \begin{bmatrix} -4 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

VENTANA

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

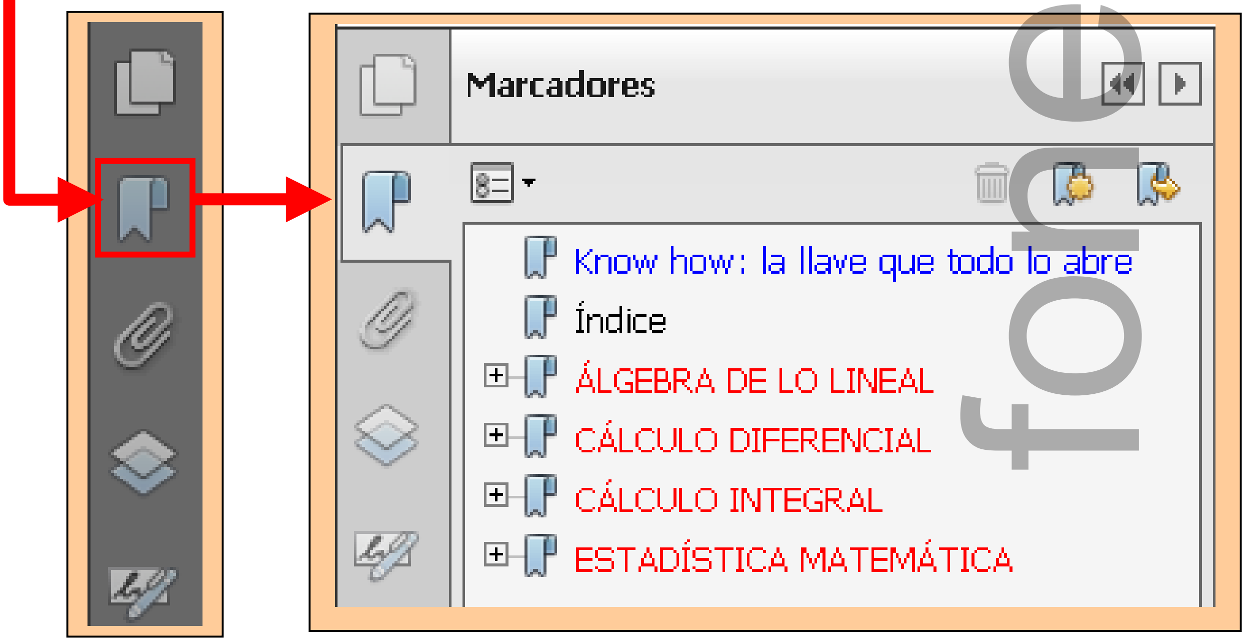
2) Se tiene:

premultiplicamos y postmultiplicamos por A^{-1}

$$A \bullet B = A \bullet X \bullet A \Rightarrow A^{-1} \bullet A \bullet B \bullet A^{-1} = X \Rightarrow X = B \bullet A^{-1}$$

como $A^{-1} \bullet A = I \Rightarrow A^{-1} \bullet A \bullet B \bullet A^{-1} = I \bullet B \bullet A^{-1} = B \bullet A^{-1}$

Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



FONEMATO 1.15.6

Para cada número entero "n" se considera la matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix} \; ; \; x \in \Re$$

Comprueba que $A_n A_m = A_{n+m}$, y como aplicación de lo anterior calcula A_n^{-1}.

SOLUCIÓN

Es:

$$A_n \bullet A_m = \begin{bmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos mx & \operatorname{sen} mx \\ -\operatorname{sen} mx & \cos mx \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos nx.\cos mx - \operatorname{sen} nx.\operatorname{sen} mx & \cos nx.\operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx.\cos mx \\ -\operatorname{sen} nx.\cos mx - \cos nx.\operatorname{sen} mx & -\operatorname{sen} nx.\operatorname{sen} mx + \cos nx.\cos mx \end{bmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \cos a.\operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b \end{array}}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(nx+mx) & \operatorname{sen}(nx+mx) \\ -\operatorname{sen}(nx+mx) & \cos(nx+mx) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(n+m)x & \operatorname{sen}(n+m)x \\ -\operatorname{sen}(n+m)x & \cos(n+m)x \end{bmatrix} = A_{n+m}$$

La matriz A_n tiene inversa para todo "n", pues es regular para todo "n":

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{vmatrix} = \cos^2 nx + \operatorname{sen}^2 nx = 1$$

Como $A_0 = \begin{bmatrix} \cos 0 & \operatorname{sen} 0 \\ -\operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, entonces:

$$A_n \bullet A_{-n} = A_{n+(-n)} = A_0 = I \Rightarrow$$

si el producto de las matrices cuadradas regulares A_n y A_{-n} es la matriz unidad, entonces A_n y A_{-n} son inversas una de otra

$$\Rightarrow A_n^{-1} = A_{-n} = \begin{bmatrix} \cos(-nx) & \operatorname{sen}(-nx) \\ -\operatorname{sen}(-nx) & \cos(-nx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos nx & -\operatorname{sen} nx \\ \operatorname{sen} nx & \cos nx \end{bmatrix} = A_n^t$$

$$\boxed{\cos(-a) = \cos a \; ; \; \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a}$$

FONEMATO 1.15.7

Si "A" es una matriz invertible tal que $|A+I| \neq 0$ y $|A-I| \neq 0$, demuéstrese que la matriz "B" es singular si se verifica que $A \bullet B = A^{-1} \bullet B$.

SOLUCIÓN

$$A \bullet B = A^{-1} \bullet B \Rightarrow A \bullet A \bullet B = A \bullet A^{-1} \bullet B \Rightarrow A^2 \bullet B = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 \bullet B - B = 0 \Rightarrow (A^2 - I) \bullet B = 0 \Rightarrow (A+I) \bullet (A-I) \bullet B = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 - I = (A+I) \bullet (A-I)}$$

$$\Rightarrow |A+I| . |A-I| . |B| = 0 \Rightarrow |B| = 0$$

$$\boxed{\text{Es } |A+I| \neq 0 \text{ y } |A-I| \neq 0}$$

FONEMATO 1.15.8

Compruébese que la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{bmatrix}$ carece de inversa.

SOLUCIÓN

CN: Para comprobar que "M" carece de inversa debemos comprobar que su determinante es nulo:

$$\boxed{\text{A la tercera fila le sumamos la segunda}}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+`c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+`c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\text{Pues las filas primera y tercera son proporcionales}}$$

FONEMATO 1.15.9

Calcule "k" para que $N = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}$ tenga inversa y, en su caso, calcule N^{-1}.

SOLUCIÓN

CN: Para que "N" tenga inversa ha de ser regular (o sea, $|N| \neq 0$):

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = 3 - k^2 \neq 0 \text{ siempre que } k \neq \pm\sqrt{3}$$

Si $k \neq \pm\sqrt{3}$, es:

$$N^{-1} = \frac{1}{|N|} \bullet \mathrm{Adj.}(N) = \frac{1}{3-k^2} \bullet \begin{bmatrix} 9-k^2 & -k & k^2-6 \\ -2.k & 1 & k \\ k^2-3 & 0 & 3-k^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{Adj.}(N) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & k \\ k & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & k \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 3 \\ 2 & k \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} k & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & k \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & k \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}}$$

FONEMATO 1.15.10

Calcúlense "X" e "Y" tales que $2 \bullet X + 3 \bullet Y = A$ y $-3 \bullet X + Y = B$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Se trata de calcular "X" e "Y" de modo que se satisfagan las condiciones (ecuaciones) $2 \bullet X + 3 \bullet Y = A$ y $-3 \bullet X + Y = B$. Como todas las matrices de la historia aparecen únicamente multiplicadas por constantes, podremos resolver la papeleta multiplicando las ecuaciones por números adecuados para que, tras sumarlas o restarlas, desaparezca alguna de las incógnitas "X" o "Y":

$$\left.\begin{matrix} 2 \bullet X + 3 \bullet Y = A \\ -3 \bullet X + Y = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Multiplicamos por } -3 \text{ la segunda ecuación}}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2 \bullet X + 3 \bullet Y = A \\ 9 \bullet X - 3 \bullet Y = -3 \bullet B \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11 \bullet X = A - 3 \bullet B \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro}}$$

$$\Rightarrow 11 \bullet X = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} - 3 \bullet \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ -22 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

De la segunda ecuación dada se deduce que:

$$Y = B + 3 \bullet X = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + 3 \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 1.15.11

Calcúlense "X" e "Y" tales que $X + A \bullet Y = I$ y $X - 3 \bullet Y = 0$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; \; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \; 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Se trata de calcular "X" e "Y" de modo que se satisfagan las condiciones (ecuaciones) $X + A \bullet Y = I$ y $X - 3 \bullet Y = 0$... y no hace falta ser un lince para darse cuenta de que como "X" aparece sola en ambas ecuaciones, si restamos las ecuaciones miembro a miembro desaparece la incógnita "X":

$$\left.\begin{array}{r} X + A \bullet Y = I \\ X - 3 \bullet Y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A \bullet Y + 3 \bullet Y = I \Rightarrow (A + 3 \bullet I) \bullet Y = I \Rightarrow$$

En este trance, al sacar factor común "Y" por la derecha, siempre hay algún pardillo que escribe $A \bullet Y + 3 \bullet Y = (A + 3) \bullet Y$, con lo que obtiene una suma absurda: la suma de la matriz "A" (cuadrada de orden 2) y el número 3. Lo correcto es:

$$A \bullet Y + 3 \bullet Y = A \bullet Y + 3 \bullet I \bullet Y = (A + 3 \bullet I) \bullet Y$$

$$\Rightarrow (A + 3 \bullet I)^{-1} \bullet (A + 3 \bullet I) \bullet Y = (A + 3 \bullet I)^{-1} \Rightarrow$$

Para despejar "Y" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por $(A + 3 \bullet I)^{-1}$, pues $(A + 3 \bullet I)^{-1} \bullet (A + 3 \bullet I) = I$

$$\Rightarrow Y = (A + 3 \bullet I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow X = 3 \bullet Y = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } H = A + 3 \bullet I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{|H|} \bullet \text{Adj.}(H) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{|H| = 20 \; ; \; \text{Adj.}(H) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}$$

FONEMATO 1.15.12

¿Para qué valores de "k" la matriz "A" carece de inversa? Calcule A^{-1} si $k=4$.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & k & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Una matriz cuadrada tiene inversa sólo si es regular:

$$|A| = 9 - 3.k \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$$

Si $k=4$, es $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{-3} \bullet \begin{bmatrix} 7 & -9 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \\ 12 & -15 & 12 \end{bmatrix}$$

Si $k=4$, entonces es $|A|=-3$

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & -9 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \\ 12 & -15 & 12 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

FONEMATO 1.15.13

Resolver razonadamente la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Debemos determinar la matriz "X" que satisface la ecuación (condición de igualdad) matricial dada:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

para despejar "X" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es regular $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet Adj(A) = \frac{1}{|A|} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

FONEMATO 1.15.14

Encontrar dos matrices "X" e "Y", de orden 2×2 con coeficientes reales tales que $AX + BY = C$ y $AX = Y$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

CN: Debemos determinar las matrices "X" e "Y" que satisfacen las dos ecuaciones (condiciones de igualdad) matriciales dadas.

Sustituyendo AX por Y en la primera ecuación, resulta:

$$Y + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow Y = (I + B)^{-1}C = \ldots.$$

para despejar "Y" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz $I + B$

Como $AX = Y$ e $Y = (I + B)^{-1}C$, resulta ser:

$$AX = (I + B)^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}(I + B)^{-1}C = \ldots.$$

para despejar "X" premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros por la inversa de la matriz A

FONEMATO 1.15.15

Determina las matrices "X" tales que $X \bullet A = B$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$X \bullet A = B \Rightarrow X = B \bullet A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \ldots..$$

para despejar "X" postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros por la inversa de la matriz A

FONEMATO 1.15.16

Sea la ecuación matricial $X \bullet A = B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

1) ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la ecuación anterior?
2) Calcula una solución. ¿Es única la solución? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN

1) Si "X" es de orden $m \times n$, para que el producto $X \bullet A$ tenga sentido debe ocurrir que el número "n" de columnas de "X" sea igual al de filas de "A"; por tanto, debe ser $n = 2$. Siendo "X" de orden $m \times 2$, para que $X \bullet A$ sea una matriz de orden 3×2 (como es "B") debe ocurrir que $m = 3$.

2) **CN:** Se trata de encontrar una matriz "X" que satisfaga la condición (ecuación) dada $X \bullet A = B$; para despejar "X" postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) por A^{-1} los dos miembros de $X \bullet A = B$:

$$X \bullet A = B \Rightarrow X = B \bullet A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \\ 13 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es regular} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} \bullet \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

• La solución es única, pues la matriz "A" es regular.

FONEMATO 1.15.17

Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa, determinando el cuadrado de dichas matrices.

SOLUCIÓN

- Siendo $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ tal que $|A| = a.b \neq 0$, al exigir que $A^{-1} = A$, resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bullet \mathrm{Adj}(A) = \frac{1}{a.b} \bullet \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

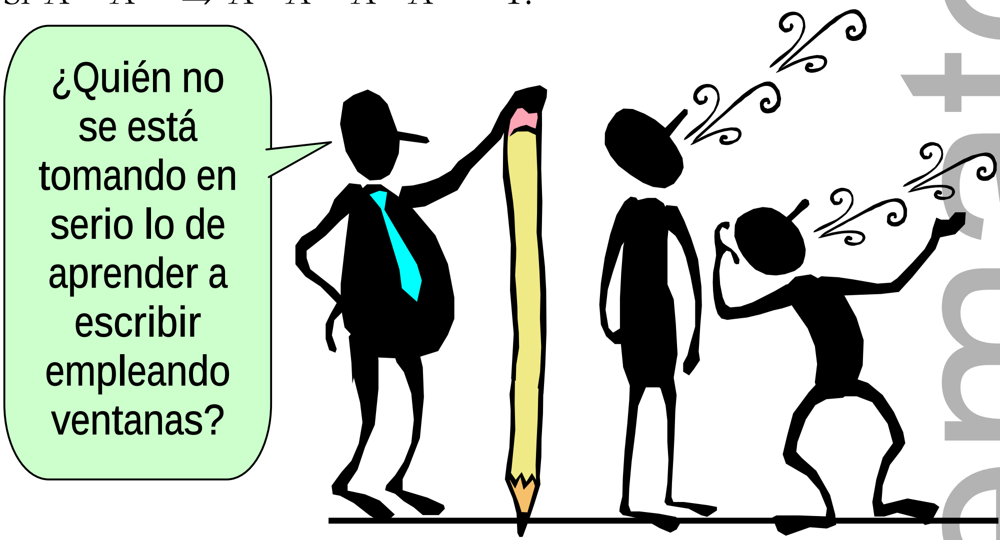
en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/a = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ 1/b = b \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \end{cases}$$

Así, hay cuatro matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};\ A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Si $A = A^{-1} \Rightarrow A \bullet A = A \bullet A^{-1} = I$.



FONEMATO 1.15.18

Despeja X en la ecuación matricial $(A \bullet X - C)^{-1} - B^{-1} = 0$.

SOLUCIÓN

$$(A \bullet X - C)^{-1} - B^{-1} = 0 \Rightarrow (A \bullet X - C)^{-1} = B^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\text{Pepa})^{-1} = (\text{Juana})^{-1} \Rightarrow \text{Pepa} = \text{Juana}}$$

$$\Rightarrow A \bullet X - C = B \Rightarrow A \bullet X = B + C \Rightarrow$$

premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, supuesto que existe A^{-1}

$$\Rightarrow A^{-1} \bullet A \bullet X = A^{-1} \bullet (B + C) \Rightarrow X = A^{-1} \bullet (B + C)$$

$$\boxed{A^{-1} \bullet A = I}$$

FONEMATO 1.15.19

Sean A, B y X matrices cuadradas de orden "n", siendo A regular.
Despeja X en la ecuación matricial $(X - 3 \bullet I) \bullet A - B \bullet A = I$.

SOLUCIÓN

$$(X - 3 \bullet I) \bullet A - B \bullet A = I \Rightarrow (X - 3 \bullet I) \bullet A = I + B \bullet A \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, que existe, pues "A" es regular

$$\Rightarrow (X - 3 \bullet I) \bullet A \bullet A^{-1} = (I + B \bullet A) \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow X - 3 \bullet I = (I + B \bullet A) \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 3 \bullet I + (I + B \bullet A) \bullet A^{-1} = 3 \bullet I + A^{-1} + B$$

FONEMATO 1.15.20

Sean A y B matrices regulares de orden "n".

Despeja X en la ecuación matricial $(X \bullet B^{-1} - I) \bullet A = I$.

SOLUCIÓN

$$(X \bullet B^{-1} - I) \bullet A = I \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por A^{-1}, que existe, pues "A" es regular

$$\Rightarrow (X \bullet B^{-1} - I) \bullet A \bullet A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow X \bullet B^{-1} - I = A^{-1} \Rightarrow X \bullet B^{-1} = I + A^{-1} \Rightarrow$$

postmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) los dos miembros de la ecuación por "A"

$$\Rightarrow X \bullet B^{-1} \bullet B = (I + A^{-1}) \bullet B \Rightarrow X = (I + A^{-1}) \bullet B$$

$$\boxed{B^{-1} \bullet B = I}$$

FONEMATO 1.15.21

Despeja X en la ecuación matricial $(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1}$.

SOLUCIÓN

$$(A^t \bullet A \bullet X)^{-1} = (A^t \bullet B)^{-1} \Rightarrow A^t \bullet A \bullet X = A^t \bullet B \Rightarrow$$

$$\boxed{(\text{Pepa})^{-1} = (\text{Juana})^{-1} \Rightarrow \text{Pepa} = \text{Juana}}$$

Supuesto que "A" es regular ($\Rightarrow A^t$ también lo es $\Rightarrow$ existe $(A^t)^{-1}$), premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) los dos miembros de la ecuación por $(A^t)^{-1}$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} \bullet A^t \bullet A \bullet X = (A^t)^{-1} \bullet A^t \bullet B \Rightarrow$$

$$\boxed{(A^t)^{-1} \bullet A^t = I}$$

$$\Rightarrow A \bullet X = B \Rightarrow X = A^{-1} \bullet B$$

FONEMATO 1.15.22

Despeja X en la ecuación matricial $B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A$.

SOLUCIÓN

$$B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = A \Rightarrow$$

premultiplicamos los dos miembros por "B"

$$\Rightarrow B \bullet B^{-1} \bullet (X^{-1} \bullet A - B \bullet A) = B \bullet A \Rightarrow X^{-1} \bullet A - B \bullet A = B \bullet A \Rightarrow$$

$$\boxed{B \bullet B^{-1} = I}$$

supuesto que "A" es regular, postmultiplicamos los dos miembros por A^{-1}

$$\Rightarrow X^{-1} \bullet A = 2 \bullet B \bullet A \Rightarrow X^{-1} \bullet A \bullet A^{-1} = 2 \bullet B \bullet A \bullet A^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\boxed{Pepa = Juana \Rightarrow (Pepa)^{-1} = (Juana)^{-1}}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = 2 \bullet B \Rightarrow (X^{-1})^{-1} = (2 \bullet B)^{-1} \Rightarrow X = (2 \bullet B)^{-1} = \frac{1}{2} \bullet B^{-1}$$

$$(2 \bullet B)^{-1} = \frac{Adj.((2 \bullet B)}{|2 \bullet B|} = \frac{2^{k-1}.Adj.(B)}{2^k.|B|} = \frac{Adj.(B)}{2.|B|} = \frac{1}{2}.B^{-1}$$

Supuesto que "B" es cuadrada de orden "k", se tiene que:

$$|2 \bullet B| = 2^k.|B| \;;\; Adj.(2 \bullet B) = 2^{k-1}.Adj.(B)$$

Siendo $2 \bullet B = \{2.b_{ij}\}$, el adjunto del elemento $2.b_{ij}$ se obtiene al multiplicar por 2 las "$k-1$" líneas del adjunto del elemento b_{ij} de la matriz "B"

LA INEFICIENCIA SEGÚN MURPHY

Para estimar el tiempo que requiere una tarea, estímese el tiempo que debería requerir, multiplíquese por dos y elévese la medición a la mayor unidad subsiguiente. Así, asignamos dos días para una tarea de una hora.

FONEMATO 1.15.23

Despeja X en la ecuación $(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1}$.

SOLUCIÓN

$$(B \bullet A - B \bullet X) \bullet A^{-1} = (A \bullet B^{-1})^{-1} \Rightarrow$$

postmultiplicamos los dos miembros por "A"

$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = (A \bullet B^{-1})^{-1} \bullet A \Rightarrow$$

$$\boxed{(A \bullet B^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1} \bullet A^{-1} = B \bullet A^{-1}}$$

$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = B \bullet A^{-1} \bullet A \Rightarrow$$

$$\boxed{A \bullet A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow B \bullet A - B \bullet X = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \bullet X = B \bullet A - B \Rightarrow X = B^{-1} \bullet (B \bullet A - B) \Rightarrow$$

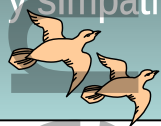
premultiplicamos los dos miembros por B^{-1}

$$\Rightarrow X = B^{-1} \bullet B \bullet A - B^{-1} \bullet B \Rightarrow X = A - I$$

$$\boxed{B^{-1} \bullet B = I}$$

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" $\Rightarrow$ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

FONEMATO 1.15.24

Sea $B \in M_{n\times 1}$ tal que $B^t \bullet B = 1$ e "I" la matriz unidad de orden "n".

Si $A = I - 2 \bullet B \bullet B^t$, demuestre que "A" es simétrica y que $A \bullet A^t = I$.

SOLUCIÓN

- **CN:** Demostraremos que "A" es simétrica si demostramos que $A^t = A$:

La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas; es $I^t = I$

$$A^t = (I - 2 \bullet B \bullet B^t)^t = I - 2 \bullet (B \bullet B^t)^t =$$

Traspuesta de un producto = Producto de las traspuestas en orden contrario

$$= I - 2 \bullet (B^t)^t \bullet B^t = I - 2 \bullet B \bullet B^t = A$$

- Demostremos que $A \bullet A^t = I$:

$$A \bullet A^t = (I-2 \bullet B \bullet B^t) \bullet (I-2 \bullet B \bullet B^t) = I-4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t \bullet B \bullet B^t =$$

$$= I-4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet (B^t \bullet B) \bullet B^t = I-4 \bullet B \bullet B^t + 4 \bullet B \bullet B^t = I$$

Según se nos dice, es $B^t \bullet B = 1$

FONEMATO 1.15.25

Sea "C" una matriz regular tal que $C^{-1} \bullet A \bullet C = D$ y $C^{-1} \bullet B \bullet C = H$, siendo "D" y "H" matrices diagonales. Demuéstrese que $A \bullet B = B \bullet A$.

SOLUCIÓN

CN: Despejemos "A" y "B" y efectuemos los productos $A \bullet B$ y $B \bullet A$:

$$C^{-1} \bullet A \bullet C = D \Rightarrow C \bullet C^{-1} \bullet A \bullet C \bullet C^{-1} = C \bullet D \bullet C^{-1} \Rightarrow A = C \bullet D \bullet C^{-1}$$

Premultiplicamos por "C" y postmultiplicamos por C^{-1}

$$C^{-1} \bullet B \bullet C = H \Rightarrow C \bullet C^{-1} \bullet B \bullet C \bullet C^{-1} = C \bullet H \bullet C^{-1} \Rightarrow B = C \bullet H \bullet C^{-1}$$

Es:

$$\left.\begin{aligned} A \bullet B = (C \bullet D \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet H \bullet C^{-1}) = C \bullet D \bullet H \bullet C^{-1} \\ B \bullet A = (C \bullet H \bullet C^{-1}) \bullet (C \bullet D \bullet C^{-1}) = C \bullet H \bullet D \bullet C^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \bullet B = B \bullet A$$

Siendo "diagonales" las matrices "D" y "H", es $D \bullet H = H \bullet D$

1.16 SUBMATRICES Y MENORES DE UNA MATRIZ

Si en la matriz "A" seleccionamos los elementos que a la vez están en "r" cualquiera de sus filas y en "s" cualquiera de sus columnas, obtenemos una matriz de orden $r \times s$ de la que se dice que es una submatriz de "A".

Por ejemplo, si en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 0 & 9 & \pi \end{bmatrix}$$

seleccionamos los elementos que a la vez están en la segunda o tercera fila y en la segunda o tercera o cuarta columnas, resulta la submatriz "P"; y si en "A" seleccionamos los elementos que a la vez están en la primera o segunda o cuarta fila y en la segunda o tercera o quinta columna, obtenemos la submatriz "M":

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix} \; ; \; M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Se llama menor de orden "k" de una matriz "A" al determinante de toda submatriz cuadrada de "A" formada por "k" filas y "k" columnas.
Obvio: cada elemento "A" es un menor de orden 1.

- ***Por ejemplo,*** si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "A":

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \; ; \; \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \; ; \; \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

El determinante de "A" es el único menor de orden 3 que tiene "A", siendo obvio que "A" carece de menores de orden superior a 3, pues sólo tiene 3 filas.

- ***Por ejemplo,*** si $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$, los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "B":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 22 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 3 de "B":

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 12 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -26 \; ; \; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -144$$

Obvio: "B" carece de menores de orden superior a 3, pues sólo tiene 3 filas.

- ***Por ejemplo,*** si $C=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\2&2&2&0&6\\3&1&3&0&3\\4&1&4&0&0\end{bmatrix}$, los siguientes determinantes son algunos menores de orden 2 de "C":

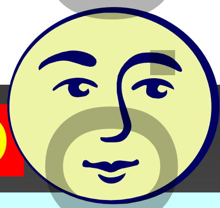
$$\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}=2\ ;\ \begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}2&6\\3&3\end{vmatrix}=-12\ ;\ \begin{vmatrix}3&1\\4&1\end{vmatrix}=-1\ ;\ \begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0$$

Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 3 de "C":

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&2\\3&1&3\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}1&0&0\\2&0&6\\3&0&3\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}2&2&6\\1&3&3\\1&4&0\end{vmatrix}=-12$$

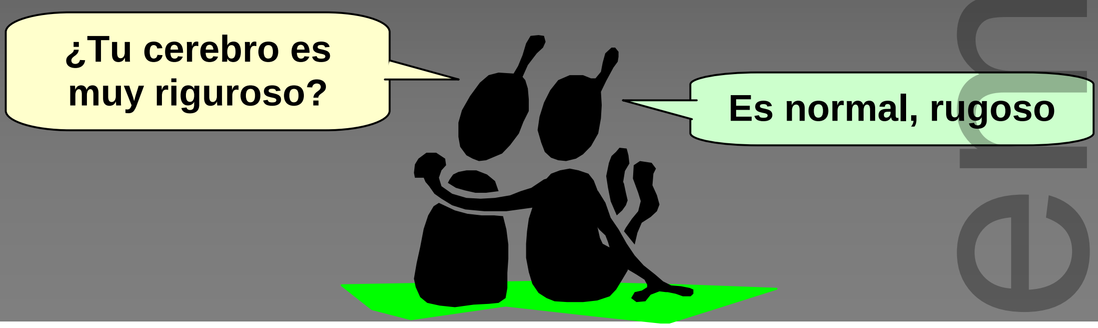
Los siguientes determinantes son algunos menores de orden 4 de "C":

$$\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&2&2&0\\3&1&3&0\\4&1&4&0\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&2&2&6\\3&1&3&3\\4&1&4&0\end{vmatrix}=0$$



EXITO SEGURO

Ese es el premio para l@s que educan su voluntad en el rigor: no contentarse nunca con entender a medias; dedicar el tiempo que haga falta, pero comprender, asimilar, progresar.



1.17 RANGO DE UNA MATRIZ

El **rango** de la matriz "A" se denota rg(A), y es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden.

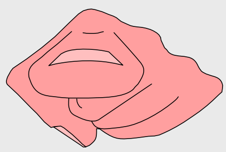
Al afirmar que rg(A) = k se afirma que en "A" hay **al menos** un menor no nulo de orden "k", siendo nulos **todos** los menores de orden superior a "k" (si los hay).

Por ejemplo, el que $\text{rg}(A)=3$ significa que en "A" hay AL MENOS un menor no nulo de orden 3, siendo nulos TODOS los menores de orden superior a 3 (si los hay).

Obvio: es $\text{rg}(A)=0$ sólo si "A" es la matriz nula; y si "A" no es la matriz nula entonces $\text{rg}(A)\geq 1$. Siendo "A" de orden $m\times n$, es $\text{rg}(A)\leq \text{mín.}\{m;n\}$.

PROPIEDADES DEL RANGO

1) El rango de una matriz coincide con el de su matriz traspuesta.
2) El rango de una matriz no varía si cambiamos el orden de filas o columnas.
3) El rango de una matriz no varía si multiplicamos una línea por un número distinto de cero.
4) El rango de una matriz no varía si a una cualquiera de sus líneas le sumamos otras paralelas a ella multiplicadas por números cualesquiera.
5) El rango de una matriz no varía si suprimimos una línea de ceros.
6) Si una línea es suma de otras paralelas a ella multiplicadas por ciertos números, el rango de una matriz no varía si suprimimos dicha línea.



Toma buena nota de las propiedades del rango: te ahorrarán mucho trabajo.

Por ejemplo, sea el problema de calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 9 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Siendo "A" de orden 5×7, es $\mathrm{rg}(A) \le \mathrm{mín.}\{5;7\} = 5$... y vemos que:

- Las columnas 1ª, 3ª y 6ª son iguales; por eso **podemos eliminar** dos de ellas sin que se altere el rango. Eliminamos las columnas 3ª y la 6ª; o sea:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 9 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

- La 3ª columna de A_1 está formada por ceros; por eso **podemos eliminar** dicha columna sin que se altere el rango; o sea:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A_2}$$

- La 3ª columna de A_2 es el triple de la 2ª; por eso **podemos eliminar** una de ellas sin que se altere el rango. Eliminamos la 5ª columna:

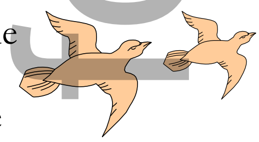
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A_3}$$

- La 3ª columna de A_3 es suma de la 1ª y la 2ª; por eso **podemos eliminar** la 3ª columna sin que se altere el rango:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2) = \mathrm{rg}(A_3) = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}_{A_4} = 2$$

pues $\mathrm{rg}(A_4) \le 2$ y el menor de orden 2 indicado es no nulo

- **Toma muy buena nota:** la matriz "A" tiene un montón de menores de orden 3, un montón de menores de orden 4 y un montón de menores de orden 5... y como sabemos que $\mathrm{rg}(A) = 2$, sin calcular ninguno de dichos menores, podemos apostar tranquilamente la vida a que todos son nulos.



CÁLCULO DEL RANGO

Dada una matriz "A", el cálculo de su rango (orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden) podemos hacerlo calculando ordenadamente menores de "A" (ejercicios 1.17.1 a 1.17.18) o realizando transformaciones elementales con los elementos de "A" (ejercicios 1.17.19 a 1.17.21).

FONEMATO 1.17.1

Calcúlese el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCION

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden. Como "A" es de orden 3×6, carece de menores de orden 4; por tanto, el máximo rango que puede tener es 3. En "A" seleccionamos, si existe, un menor no nulo de orden 2. Por ejemplo, elegimos el menor H_1 correspondiente a la esquina superior izquierda de "A":

$$H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Al haber encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2, podemos afirmar que $rg(A) \geq 2$... y nos importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3, podremos asegurar que $rg(A) = 3$ (ya que $rg(A) < 4$); y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3, podremos afirmar que $rg(A) = 2$.

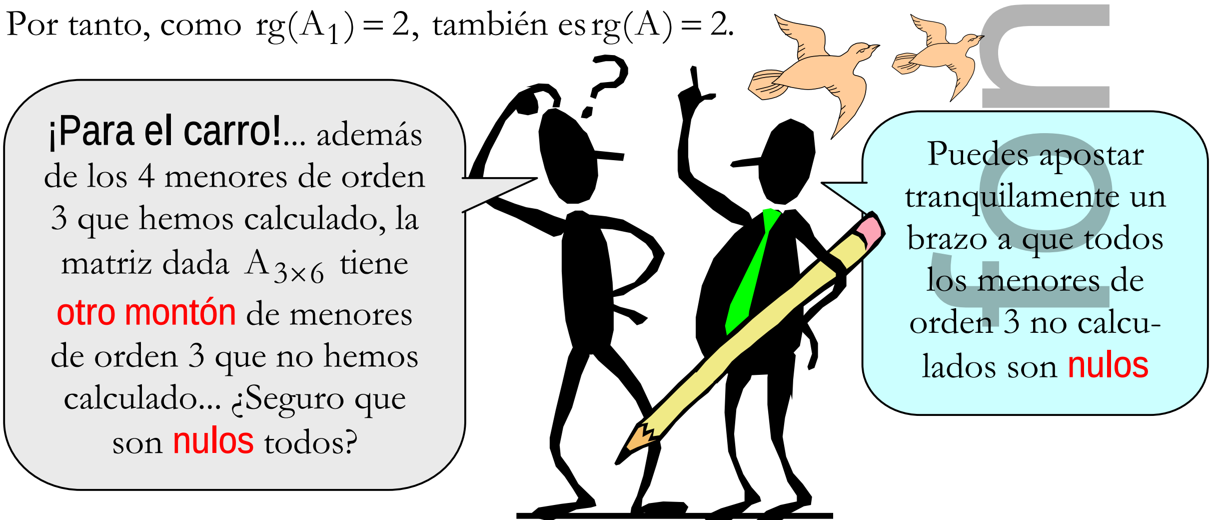
Para construir menores de orden 3, orlamos el menor no nulo H_1 (formado por las filas primera y segunda) con la tercera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A". O sea, a la matriz cuadrada cuyo determinante es H_1 le añadimos la tercera fila de "A" y sucesivamente cada una de las restantes columnas de "A"; así obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A", significa que podemos eliminar dicha tercera fila sin que se altere el rango de la matriz; es decir, las matrices A y A_1 tienen igual rango:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, como $rg(A_1) = 2$, también es $rg(A) = 2$.



FONEMATO 1.17.2

Calcúlese el rango de la matriz $A=\begin{bmatrix}1&1&3&1&3&0\\1&1&3&1&3&1\\3&1&7&5&5&0\end{bmatrix}$.

SOLUCION

El rango de una matriz "A" es el orden del menor no nulo de "A" que tenga mayor orden. Como "A" es de orden 3×6, carece de menores de orden 4; por tanto, el máximo rango que puede tener es 3.

En "A" seleccionamos, si existe, un menor no nulo de orden 2. Por ejemplo, elegimos el menor H_1 correspondiente a la esquina inferior izquierda de "A":

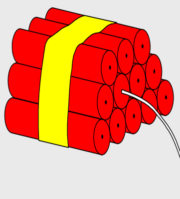
$$H_1=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}\neq 0$$

Habiendo encontrado en "A" un menor no nulo de orden 2, podemos afirmar que rg(A)≥ 2... e importa un pito si en "A" hay o no otros menores no nulos de orden 2; lo que ahora nos preocupa es saber si en "A" hay o no algún menor no nulo de orden 3, pues si encontramos algún menor no nulo de orden 3, podremos asegurar que $rg(A)=3$ (ya que $rg(A)<4$); y si no encontramos ningún menor no nulo de orden 3, podremos afirmar que $rg(A)=2$.

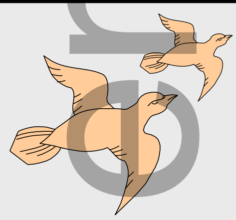
Para construir menores de orden 3, orlamos el menor no nulo H_1 (formado por las filas segunda y tercera) con la primera fila de "A" y cada una de las restantes columnas de "A". O sea, a la matriz cuadrada cuyo determinante es H_1 le añadimos la primera fila de "A" y sucesivamente cada una de las restantes columnas de "A"; así obtenemos los siguientes menores de orden 3:

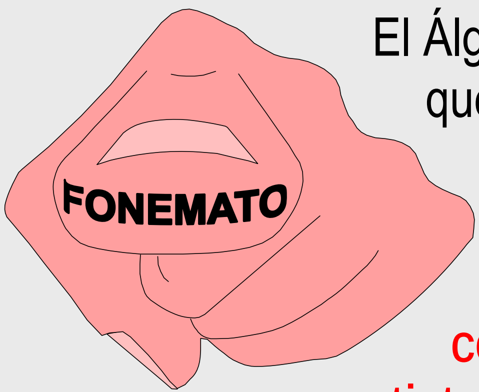
$$\begin{vmatrix}1&1&3\\1&1&3\\3&1&7\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\3&1&5\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}1&1&3\\1&1&3\\3&1&5\end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\3&1&0\end{vmatrix}\neq 0$$

Es $rg(A)=3$, pues hemos localizado un menor no nulo de orden 3.



Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.





El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.17.3

Calcúlese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ 2)\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

1) Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(A)\geq 2$:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila y la tercera columna de "A", resulta el determinante de "A", que es nulo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Así, podemos eliminar la tercera fila de "A" sin que se altere su rango; o sea:

$$\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}=2$$

2) Como "B" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\mathrm{rg}(B)\geq 2$:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(B)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_2 con la primera fila y la tercera columna de "B", resulta el determinante de "B", que es no nulo:

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-6\neq 0$$

Por tanto, $\mathrm{rg}(B)=3$, pues en "B" hay un menor no nulo de orden 3.

FONEMATO 1.17.4

Calcúlese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ 2)\ D=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\ ;\ 3)\ E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

1) Como "C" es de orden 3×4, el máximo rango que puede tener es 3, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $rg(C)\geq 2$:

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow H_1=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow rg(C)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_1 con la tercera fila de "C" y cada una de las restantes columnas de "C", resultan los siguientes menores de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

El que sean nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar H_1 con la tercera fila de "C" y cada una de las restantes columnas de "C", significa que podemos eliminar dicha tercera fila sin que se altere el rango de "C"; o sea:

$$rg(C)=rg\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}=2$$

2) Como "D" es de orden 4×4, el máximo rango que puede tener es 4, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $rg(D)\geq 2$:

$$D=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\Rightarrow H_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow rg(D)\geq 2$$

Al orlar el menor no nulo H_2 con la segunda fila y la tercera columna de "D", obtenemos un menor no nulo de orden 3, lo que garantiza que $rg(D)\geq 3$:

$$H_3=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow rg(D)\geq 3$$

Al orlar el menor no nulo H_3 con la primera fila y la cuarta columna de "D", obtenemos $|D|$, que es no nulo, por lo que $rg(D)=4$:

a las filas primera y segunda les sumamos la tercera

$$|D|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=12\neq 0$$

desarrollamos por los elementos de la primera fila

5) Como "E" es de orden 4×4, el **máximo rango** que puede tener es 4, y siendo no nulo el menor de orden 2 que se indica a continuación, es $\text{rg}(E) \geq 2$:

$$E = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{matrix} \end{bmatrix} \Rightarrow H_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E) \geq 2$$

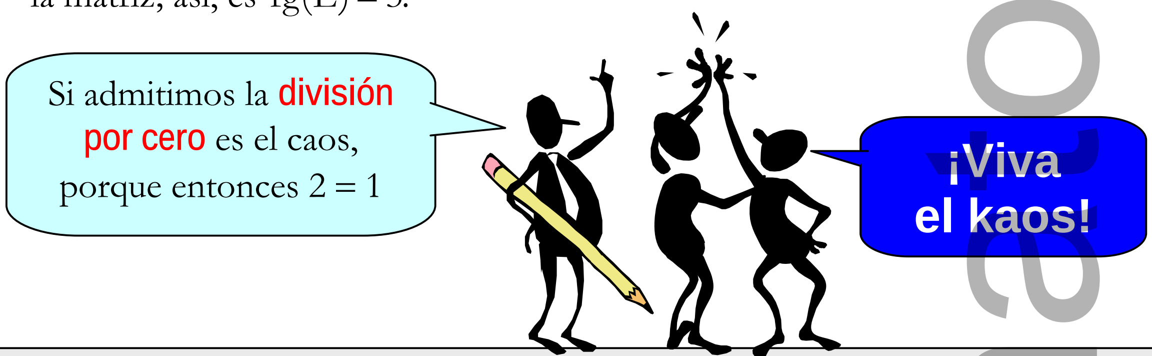
Al **orlar** el menor no nulo H_4 con la tercera fila y la tercera columna de "E", obtenemos un menor no nulo de orden 3, lo que garantiza que $\text{rg}(E) \geq 3$

$$H_5 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E) \geq 3$$

Al **orlar** el menor no nulo H_5 con la cuarta fila y la cuarta columna de "E", obtenemos el determinante de "E", que resulta ser nulo:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, podemos **eliminar** la cuarta fila de "E" sin que se altere el rango de la matriz; así, es $\text{rg}(E) = 3$.



multiplicamos por "x" ambos miembros

$$\text{Si } x = y \Rightarrow x^2 = x.y \Rightarrow$$

restamos y^2 a ambos miembros

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = x.y - y^2 \Rightarrow$$

$(x^2 - y^2) = (x + y).(x - y)$; $x.y - y^2 = y.(x - y)$

$$\Rightarrow (x+y).(x-y) = y.(x-y) \Rightarrow$$

dividimos ambos miembros por "x − y"

EL CAOS

como $x = y$, es $x + y = 2.y$

$$\Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2.y = y \Rightarrow 2 = 1$$

dividimos ambos miembros por "y"

En los siguientes ejercicios, muy importantes, seguiremos calculando rangos de matrices... pero algunos elementos de las matrices estarán locos; es decir, podrán tomar cualquier valor

FONEMATO 1.17.5

Calcula los valores de "a" y "b" para los que la matriz "A" tiene rango 2.

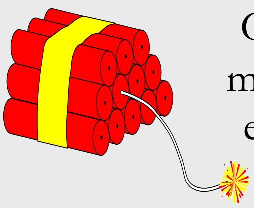
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 1 & 3+b+2.a \\ 1 & 0 & b \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

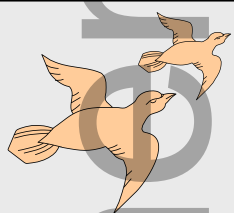
El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

Como $H_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, es $rg(A) \geq 2$. Será $rg(A) = 2$ si son nulos todos los menores de orden 3 que resultan al orlar H_1, lo que sucede sólo si $a = b$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 5 & 1 & 3+b+2.a \end{vmatrix} = b - a = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b - a = 0$$



Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.



El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.17.6

Estúdiese el rango de las siguientes matrices según el valor del número real "k":

$$1)\ A=\begin{bmatrix} 6 & k & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix};\ 2)\ B=\begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ 2 & -1 & -k \\ k & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante: $|A| = 8.k = 0 \Rightarrow k = 0$

- Si $k \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$.
- Si $k = 0$, la matriz "A" se convierte en $A=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Es $rg(A) = 2$, pues $|A| = 0$ y el menor de orden 2 indicado es no nulo.

2) Como "B" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá solo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante:

$$|B| = -k.(k^2+4) = 0 \Rightarrow k = 0$$

La ecuación $k.(k^2+4)=0$ tiene dos raíces imaginarias a las que no hacemos caso, pues se nos dice que $k \in \Re$

- Si $k \neq 0$ es $rg(B) = 3$, pues $|B| \neq 0$.
- Si $k = 0$, la matriz "B" se convierte en $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Como $|B| = 0$ y el menor de orden dos indicado es no nulo, es $rg(B) = 2$.

FONEMATO 1.17.7

Estúdiese el rango de la matriz "C" según el valor del número real "k".

$$C=\begin{bmatrix}2.k+2 & k & 2\\ 2 & 2-k & 0\\ k+1 & 0 & k+1\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El rango de una matriz "P" es el orden del menor no nulo de "P" que tenga mayor orden.

Como "C" es de orden 3×3, el **máximo rango** que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante:

A la primera columna le restamos la tercera

$$|C|=\begin{vmatrix}2.k+2 & k & 2\\ 2 & 2-k & 0\\ k+1 & 0 & k+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2.k & k & 2\\ 2 & 2-k & 0\\ 0 & 0 & k+1\end{vmatrix}=$$

Desarrollamos el determinante por los elementos de la tercera fila

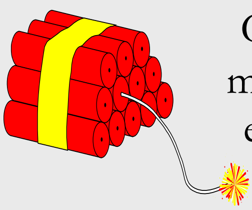
$$=(k+1).\big(2.k.(2-k)-2.k\big)=2.k.(k+1).(1-k)=0\Rightarrow k=0,1,-1$$

- Si "k" es distinto de 0, de 1 y de -1, es $rg(C)=3$, pues $|C|\neq 0$.
- Si $k=0$, la matriz "C" se convierte en $C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

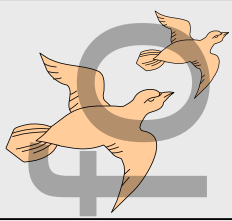
  Como ahora es $|C|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0\Rightarrow rg(C)=2$.
- Si $k=1$, la matriz "C" se convierte en $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

  Como ahora es $|C|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0\Rightarrow rg(C)=2$.
- Si $k=-1$, la matriz "C" se convierte en $C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

  Como ahora $|C|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0\Rightarrow rg(C)=2$.



Cada vez que calcules el rango de una matriz **te juegas la vida:** si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.



FONEMATO 1.17.8

Estúdiese el rango de la matriz "D" según el valor del número real "k".

$$D=\begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como "D" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ k+1 & k+1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

A la tercera fila le sumamos las dos primeras

Muy astutamente, sacamos factor común "k + 1" en la tercera fila

$$=(k+1).\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k+1).\begin{vmatrix} k-2 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

A las columnas primera y segunda les restamos la tercera columna

$$=(k+1).(k-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Se dice que la solución k = 2 es "doble" para poner de manifiesto que el factor "k − 2" aparece elevado al cuadrado

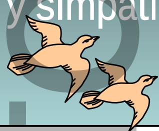
- Siendo "k" distinto de -1 y de 2, es $rg(D)=3$, pues $|D|\neq 0$
- Si $k=-1$, la matriz "D" se convierte en $D=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & -2 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|D|=0$ y el menor de orden 2 indicado es $\neq 0 \Rightarrow rg(D)=2$.
- Si $k=2 \Rightarrow D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(D) = rg\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=1$

  eliminamos las filas 2ª y 3ª, por ser iguales a la 1ª

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.



Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación.

Pedrusco "A" = Pedrusco "B" ⇒ Pedrusco "C" = Pedrusco "D"

FONEMATO 1.17.9

Estúdiese el rango de la matriz "E" según el valor del número real "k".

$$E = \begin{bmatrix} 3 & k & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Como "E" es de orden 4×3, el **máximo rango** que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si "E" si tiene algún menor no nulo de orden 3.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & k & k \\ 2 & -1 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

El menor de orden 2 indicado es no nulo para todo "k"; así es $rg(E) \geq 2$ para todo "k". Al **orlar** ese menor con la 3ª fila y la 3ª columna de "E" se obtiene un menor de orden 3 que es $\neq 0$ para todo "k"; por tanto, $rg(E) = 3,\ \forall\, k \in \Re$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

FONEMATO 1.17.10

Estúdiese el rango de $F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{bmatrix}$ según el valor del real "k".

SOLUCIÓN

Como "F" es de orden 4×4, el máximo rango que puede tener es 4, lo que sucederá solo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "k" que anulan dicho determinante:

$$|F|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{vmatrix}=\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix}}^{M}=$$

A la 2ª fila le restamos el triple de la 1ª
A las filas 3ª y 4ª les restamos la 1ª

desarrollamos por los elementos de la primera columna

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix}=(k+1).\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & k^2-5 \end{vmatrix}=$$

desarrollamos por los elementos de la segunda fila

$$=(k+1).(k^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases} k=1 \\ k=-1\,(\text{doble}) \end{cases}$$

- Siendo "k" distinto de 1 y de -1, es $\operatorname{rg}(F)=4$, pues $|F|\neq 0$.
- Si $k=1$, la matriz "F" se convierte en $F=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|F|=0$ y el menor de orden 3 indicado es $\neq 0\Rightarrow \operatorname{rg}(F)=3$
- Si $k=-1$, la matriz "F" es:

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\Rightarrow \operatorname{rg}(F)=\operatorname{rg}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Eliminamos la tercera fila de "F", por ser igual a la primera

Es $\operatorname{rg}(F)=2$, pues el menor de orden 2 indicado es no nulo, y son nulos todos los menores de orden 3 obtenidos al orlar el citado menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

NOTA: Hemos hecho el pardillo con el rango cuando $k=\pm 1$, pues las matrices "F" y "M" tienen el mismo rango, pero "M" es más cómoda a efectos del cálculo del rango si $k=\pm 1$.

FONEMATO 1.17.11

Estudie el rango de $M=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

SOLUCIÓN

Como "M" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos para qué valores de "a" y "b" se anula dicho determinante:

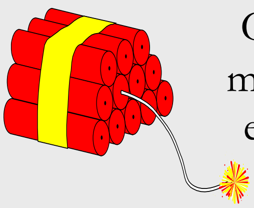
$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & b+1 & 0 \\ 4 & -a-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

A la 2ª fila de restamos la 1ª, y a la 3ª de sumamos la 1ª

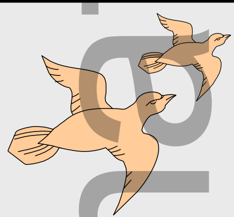
$$= a - 4.b - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 + 4.b$$

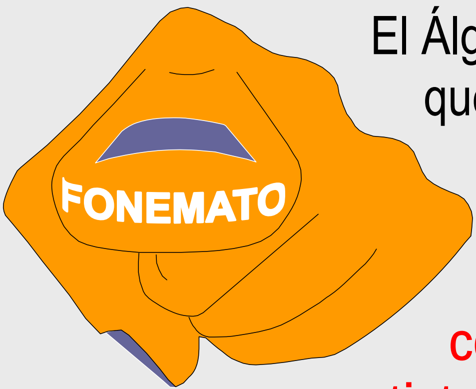
- Si $a \neq 3 + 4.b \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3$.
- Si $a = 3 + 4.b \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & -3-4.b & -1 \end{bmatrix}$.

  Como ahora $|M| = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \forall b$, entonces, si $a = 3 + 4.b$, es $rg(M) = 2$ para todo valor de "b".



Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.





El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.17.12

Estudie el rango de $N=\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$ según los valores de $a,b\in\Re$.

SOLUCIÓN

Como "N" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si su determinante es no nulo. Determinemos los valores de "a" y "b" que anulan dicho determinante:

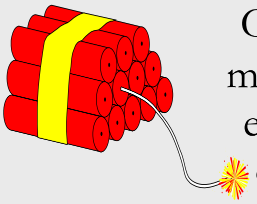
$$|N|=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a.b & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}=b.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=b.(a^3-3.a+2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=0 \\ a^3-3.a+2=0\ \Rightarrow\ a=-2 \text{ ó } a=1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

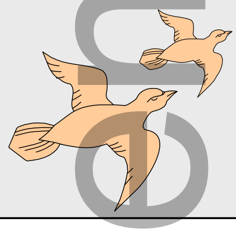
- Si $b\neq 0$ y "a" es distinto de 1 y de -2, es $\text{rg}(N)=3$, pues $|N|\neq 0$.
- Si $b=0\Rightarrow N=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}\Rightarrow \text{rg}(N)=\text{rg}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}=\begin{cases} 1 \text{ si } a=1 \\ 2 \text{ si } a\neq 1 \end{cases}.$

  Por tanto, si $b=0$ y $a=1$ es $\text{rg}(N)=1$, y es $\text{rg}(N)=2$ si $b=0$ y $a\neq 1$.
- Si $a=1\Rightarrow N=\begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow \text{rg}(N)=\text{rg}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=1,\ \forall b.$

  eliminamos la 3ª columna (igual a la 1ª) y la 2ª (proporcional a la 1ª)
- Si $a=-2\Rightarrow N=\begin{bmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2.b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix}$. Como $|N|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0,\ \forall b$, es $\text{rg}(N)=2$ para todo valor de "b".



Cada vez que calcules el rango de una matriz te juegas la vida: si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.



El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.17.13

Estudie el rango de $S=\begin{bmatrix}1 & -b & 1\\ 1 & 1 & -1\\ a & -2 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ según los valores de $a, b \in \Re$.

SOLUCIÓN

Como "S" es de orden 4×3, el **máximo rango** que puede tener es 3, lo que sucederá sólo si en "S" hay algún menor no nulo de orden 3.

$$S=\begin{bmatrix}1 & -b & 1\\ 1 & 1 & -1\\ a & \boxed{\begin{matrix}-2 & -5\\ 1 & 1\end{matrix}}\\ 3 & & \end{bmatrix}$$

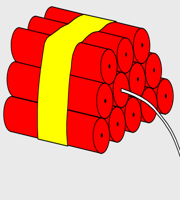
Es $rg(S)\geq 2$, pues menor de orden 2 indicado es no nulo para cualesquiera valores de "a" y "b". Al **orlar** dicho menor con las filas 1ª y 2ª de "S" se obtienen los siguientes menores de orden 3:

$$H_1=\begin{vmatrix}1 & -b & 1\\ a & -2 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=9+a+15.b+a.b$$

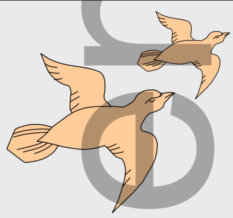
$$H_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ a & -2 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2.a-18$$

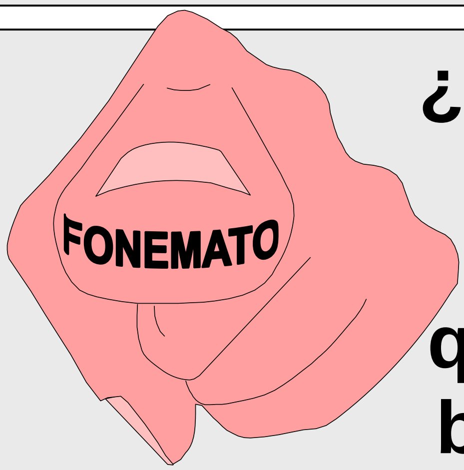
Si ambos son nulos será $rg(S)=2$, y si alguno es no nulo será $rg(S)=3$; así:

- Si $a\neq -9 \Rightarrow H_2\neq 0 \Rightarrow rg(S)=3$.
- Si $a=-9$ es $H_2=0$ y $H_1=9-9+15.b-9.b=6.b$; en consecuencia:
  - ∗ Si $a=-9$ y $b\neq 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix}H_1\neq 0\\ H_2=0\end{Bmatrix} \Rightarrow rg(S)=3$.
  - ∗ Si $a=-9$ y $b=0 \Rightarrow H_1=H_2=0 \Rightarrow rg(S)=2$.



Cada vez que calcules el rango de una matriz **te juegas la vida:** si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.





¿Cuántas veces hay que repetirte algo importante hasta que te dignas tomar buena nota de ello?

FONEMATO 1.17.14

Calcule el rango de $A = \begin{bmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2.a^2-2 & 2.a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$ según los valores de $a \in \Re$.

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 3×3, el **máximo rango** que puede tener es 3, lo que sucede sólo si $|A| \neq 0$. Determinemos los valores de "a" tales que $|A| = 0$:

a las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$|A| = (a^2-1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2.a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a^2-a \end{vmatrix} =$$

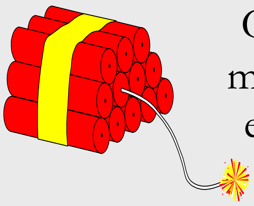
sacamos factor común a^2-1 en la segunda columna

$$= (a^2-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (dobles)}$$

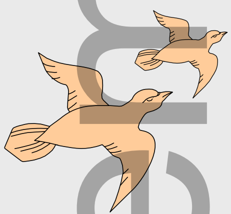
desarrollamos el determinante por los elementos de la 1ª columna

Por tanto:

- Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$.
- Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$.
- Si $a = -1 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2$, pues $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$.



Cada vez que calcules el rango de una matriz **te juegas la vida:** si te equivocas en el cálculo del rango, destrozarás lo que estés haciendo, todo estará mal.



En fonemato.com tienes el videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

FONEMATO 1.17.15

Calcular el rango de $A=\begin{bmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix}$ según los valores de $a \in \Re$.

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 3×4, su máximo rango es 3.

$$H=\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-a^2-a+1=0 \Rightarrow a=\begin{cases} 1 \text{ (doble)} \\ -1 \end{cases}$$

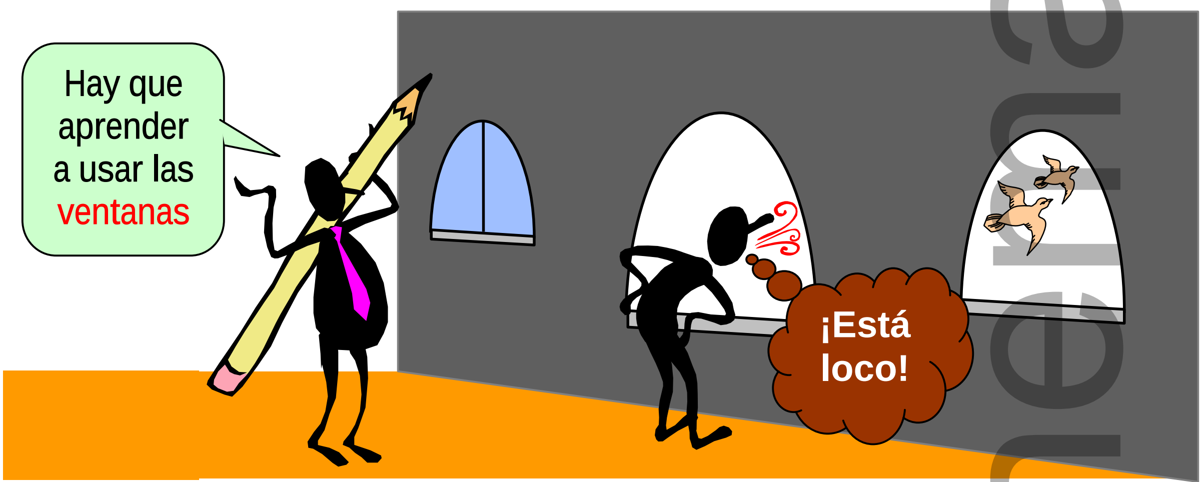
Por tanto:

- Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow H \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3.$
- Si $a=1$ es $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=rg\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=1$

a efectos del cálculo del rango de "A", podemos eliminar las columnas segunda, tercera y cuarta, pues son iguales a la primera

- Si $a=-1$ es $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rg(A)=rg\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2$

a efectos del cálculo del rango de "A", podemos eliminar las columnas tercera y cuarta, pues respectivamente son proporcionales a la primera y la segunda



FONEMATO 1.17.16

Determina la relación que debe existir entre los parámetros "a", "b" y "c" para que "A" y "B" tengan rango 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Es $rg(A) \geq 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$; por tanto, será $rg(A) = 2$ si $|A| = 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow a - c = 0 \quad (I)$$

Es $rg(B) \geq 2$, pues $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$; por tanto, será $rg(B) = 2$ si $|B| = 0$:

$$|B| = 0 \Rightarrow 3.a - 2.b - 2.c = 0 \quad (II)$$

Es $rg(A) = rg(B) = 2$ si los valores de "a", "b" y "c" satisfacen las ecuaciones (I) y (II), lo que sucede cuando $a = c = 2.b$.

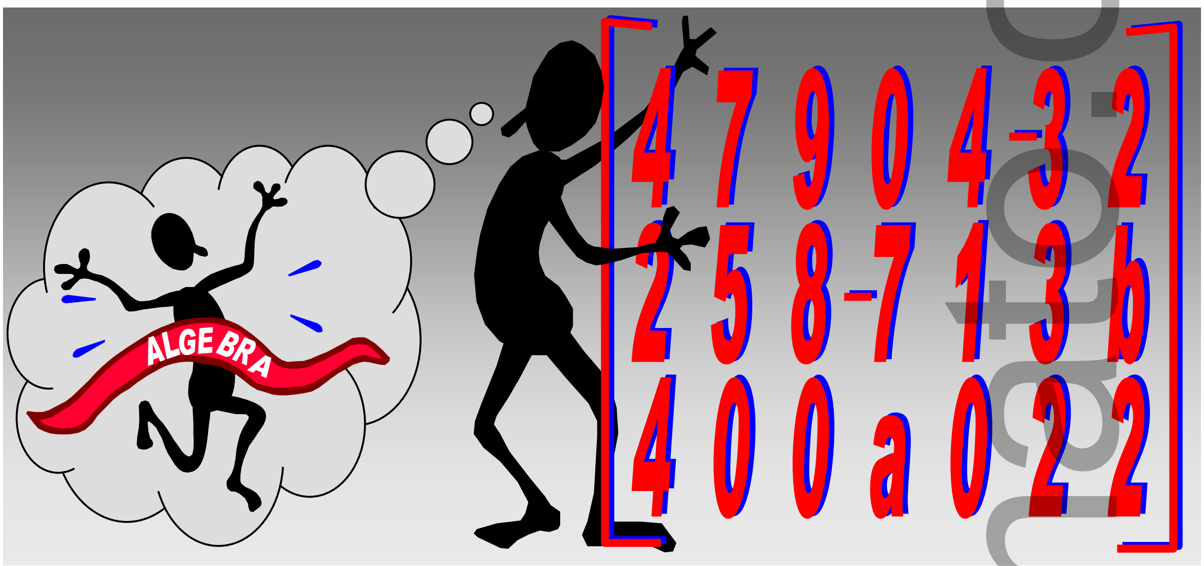
FONEMATO 1.17.17

Determine el rango de $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & k & k\\ -1 & k & -1\end{bmatrix}$ según los valores del parámetro "k".

SOLUCIÓN

Como "A" es de orden 3×3, el máximo rango que puede tener es 3, y sucede tal cosa sólo si $|A|=-k^2-2.k\neq 0\Rightarrow k\neq 0,-2$.

- Si $k=0\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2$, pues $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$ y $|A|=0$.
- Si $k=-2\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow rg(A)=2$, pues $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{vmatrix}\neq 0$ y $|A|=0$.



FONEMATO 1.17.18

Siendo "a", "b" y "c" tres números reales arbitrarios, calcula A^n para todo número natural "n", siendo

$$A=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Sea "B" una matriz 3×3 arbitraria. Indica, justificando la respuesta, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

1) Si el rango de "B" es 2, el rango de B^2 también es 2.
2) Si el rango de "B" es 3, el rango de B^3 también es 3.

SOLUCIÓN

La matriz A^n es la nula si $n\geq 3$:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&a.c\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\bullet A=\begin{bmatrix}0&0&a.c\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

1) Es falso que $rg(B)=2\Rightarrow rg(B^2)=2$. Para demostrarlo vale el siguiente contraejemplo:

$$B=\begin{bmatrix}0&\pi&1\\0&0&7\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B)=2\ ;\ B^2=\begin{bmatrix}0&0&7.\pi\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow rg(B^2)=1$$

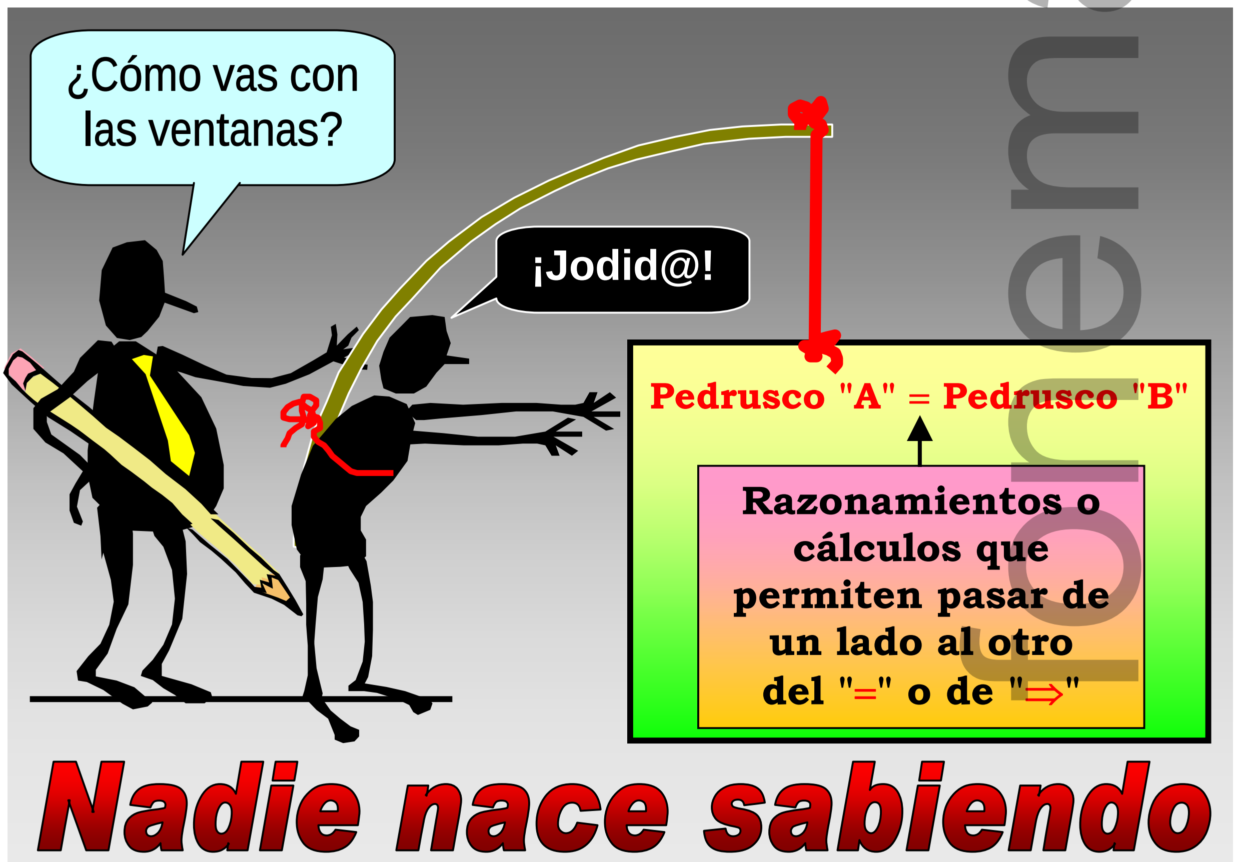
2) Si $B\in M_{3\times 3}$ y $rg(B)=3\Rightarrow|B|\neq 0\Rightarrow|B^3|=|B|.|B|.|B|\neq 0\Rightarrow rg(B^3)=3.$

CALCULO DEL RANGO MEDIANTE TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

Para calcular el rango de una matriz "A" que, por ejemplo, tiene 20 filas y 69 columnas, lo más eficiente es hacer transformaciones elementales con los elementos de "A" para así obtener otras matrices que tienen igual rango que "A" pero que, por contener gran cantidad de ceros, son más cómodas a la hora de calcular de su rango.

La secuencia de trabajo es la siguiente:

1) Haciendo los cambios de filas y columnas que sean menester, colocamos en la posición a_{11} de "A" un elemento no nulo. Mejor que mejor si tal elemento no nulo es el número 1, pues así no hará falta el siguiente paso.
2) Si la matriz "A" es tan perversa que ningún elemento de ella es el número 1, dividimos la primera fila por a_{11}, y así conseguimos que el número 1 sea el elemento que está en la primera fila y en la primera columna.
3) Reducimos a cero los elementos de la primera columna (salvo el número 1 que ocupa la posición a_{11}) restando a las filas segunda, tercera.... n-ésima, los elementos de la primera fila multiplicados respectivamente por los números $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$.
4) Repetimos las operaciones anteriores para las restantes columnas.
5) El proceso acaba cuando sea fácil calcular del rango de alguna de las matrices intermedias que van apareciendo.



FONEMATO 1.17.19

Determínese el rango de las siguientes matrices:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&8&9\end{bmatrix};\ 2)\ B=\begin{bmatrix}3&2&5\\3&3&6\\7&1&8\end{bmatrix};\ 3)\ C=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&3&2\\3&2&1&3\\6&8&7&5\end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

1) Es:

¡Qué suerte!, el elemento a_{11} es el número 1; para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, y a la tercera fila le restamos el triple de la primera

$$\text{rg}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&8&9\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&0\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}=3$$

(tercera fila) – (doble de la segunda)

La última matriz tiene determinante no nulo (observa que es "triangular")

2) Es:

Cambiamos la primera fila por la tercera

$$\text{rg}\begin{bmatrix}3&2&5\\3&3&6\\7&1&8\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}7&1&8\\3&3&6\\3&2&5\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}1&7&8\\3&3&6\\2&3&5\end{bmatrix}=$$

Cambiamos la primera columna por la segunda

Para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el triple de la primera, y a la tercera fila le restamos el doble de la primera

$$=\text{rg}\begin{bmatrix}1&7&8\\0&-18&-18\\0&-11&-11\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}1&7&8\\0&-18&-18\end{bmatrix}=2$$

Eliminamos la tercera fila, por ser proporcional a la segunda

3) Es:

Para que en la primera columna "aparezcan" ceros, a la segunfa fila le restamos el doble de la primera, a la tercera fila le restamos el triple de la primera, y a la cuarta fila le restamos el séxtuplo de la primera

$$\text{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&3&2\\3&2&1&3\\6&8&7&5\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\\0&-4&-11&5\end{bmatrix}=\text{rg}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-3&2\\0&-4&-8&3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}=$$

A la cuarta fila le restamos la tercera

Eliminamos la cuarta fila, por ser igual a la segunda

$$=\text{rg}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&2&3\\0&0&-3\\0&-4&-8\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\2\\3\end{matrix}\end{bmatrix}=3$$

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

FONEMATO 1.17.20

Determínese el rango de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Para que en la 1^{a} columna "aparezcan" ceros, a la 2^{a} fila le restamos el doble de la 1^{a}, a la 3^{a} fila le restamos la 1^{a}, y a la 4^{a} fila le restamos el triple de la 1^{a}

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -13 & 7 & 1 \end{bmatrix} =$$

Para que en la segunda columna "aparezcan" ceros, a la tercera fila le sumamos la segunda, y a la cuarta fila le restamos el doble de la segunda

Eliminamos la cuarta fila, por ser proporcional a la tercera

$$= \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & 5 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & -5 \end{bmatrix} = 3$$

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

El uso de "ventanas", asunto esencial

Debes aprender a usar ventanas, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

Pedrusco "A" = Pedrusco "B"

En esta ventana escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

Pedrusco "A"= Pedrusco "B" $\Rightarrow$ Pedrusco "C"= Pedrusco "D"

El Álgebra Lineal se reduce a poco más que resolver sistemas de ecuaciones lineales, lo que se reduce a poco más que calcular rangos de matrices; por eso, para no sufrir con el Álgebra, es imprescindible ser un artista calculando rangos de matrices.

FONEMATO 1.17.21

Determínese el rango de la matriz $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Cambiamos la primera columna por la cuarta

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

A las filas tercera y cuarta les restamos la primera

Eliminamos la cuarta fila, por ser proporcional a la tercera

$$= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

Cambiamos las filas segunda y tercera

$$= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

A la tercera fila le sumamos el doble de la segunda, y a la cuarta fila le restamos el triple de la segunda

$$= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$$

Eliminamos la cuarta fila, por ser proporcional a la tercera

Pues el menor de orden 3 indicado es no nulo

MAGIA POTAGIA

Considera un número natural "Pepe" de tres cifras que escrito al revés da un número inferior (o sea, la última cifra de "Pepe" es menor que la primera); por ejemplo 584, que escrito al revés da 485. Pues bien, si restamos 584 y 485 (584 – 485 = 099), invertimos la diferencia (o sea, 990) y la sumamos a la resta (o sea, sumamos 099), se obtiene el número 1089... **y eso mismo pasa con cualquier otro natural de tres cifras que escrito al revés dé un número inferior.** Otro ejemplo: 872 – 278 = 594, que invertido es 495, y al sumarlo a la resta 594 también se obtiene de nuevo el número 1089.