# Tema 1

# Funciones reales de variable real



abrir panel

**Dios inventó el número natural, lo demás es obra del hombre**

**Kronecker**

## 1.1 LOS NÚMEROS REALES

Desde nuestra más tierna infancia todos estamos familiarizados con los ***números naturales*** (1, 2, 3, 4, 5, ....), pues con ellos aprendimos a "contar". Podemos visualizar dicho conjunto si, tomando como "soporte" una recta, convenimos en representar cada número natural mediante un punto.

**VISUALIZACIÓN DE LOS NATURALES**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 . . . recta soporte

***Con los números naturales no puede irse muy lejos, pues todos son positivos; así, dados dos naturales "a" y "b", no siempre existe otro número natural "x" tal que a + x = b.*** Por ejemplo, $4 + x = 2 \Rightarrow x = -2$, que no es un número natural. ***Esta limitación del conjunto de los números naturales no se presenta en el conjunto de los números enteros*** (0, 1, $-1, 2, -2, 3, -3, .....$). Consideramos que el número "cero" es entero; el "cero" es tan especial que hasta bien entrado el segundo milenio de nuestra era no se le admitió como número, para los sabios del siglo XI no era un número. Si convenimos en representar cada número entero mediante un punto, podemos visualizar el conjunto de dichos números.

**VISUALIZACIÓN DE LOS ENTEROS**

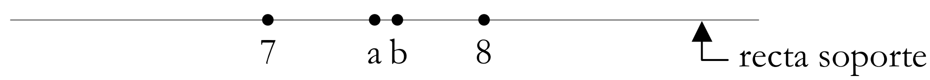
. . $-3$ $-2$ $-1$ 0 1 2 3 . .

Con los números enteros tampoco puede irse muy lejos ni construir puentes muy largos, pues ***dados dos números enteros "a" y "b", no siempre existe otro número entero "x" tal que a.x = b.*** Por ejemplo, $7.x = 5 \Rightarrow x = 5/7$, que no es un número entero. Esta limitación de los enteros no se presenta en el conjunto de los ***números racionales***, que son los que pueden expresarse como cociente entre un número entero y otro natural. Dicho de otro modo: ***son racionales los números que tienen un número finito de cifras decimales, y también los números periódicos*** (todo número periódico se puede expresar como cociente entre un número entero y otro natural). La visualización del conjunto de los números racionales es asunto delicado, pues ***por "parecidos" que sean dos racionales entre ellos hay infinidad de racionales, y eso hace que el sentido de la vista pueda engañarnos al representar cada número ra-***

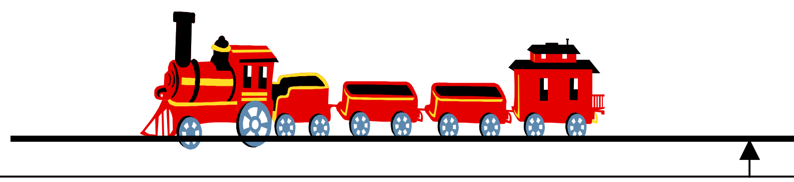
***cional mediante un punto***. Por ejemplo, si consideramos los números racionales

$$a = 7'68673859347827645627838348342723474237412389734987$$
$$b = 7'68673859347827645627838348342723474237412389734988$$

es evidente que son distintos y no muy famosos; además "a" es menor que "b" y ambos están comprendidos entre los números 7 y 8. Por tanto, al visualizar los números 7, 8, "a" y "b" obtendremos algo parecido a lo que sigue:



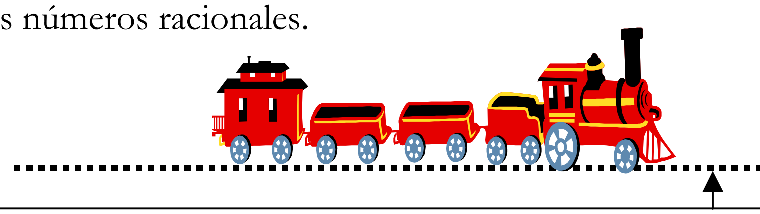

Como entre los números racionales "a" y "b" hay infinidad de números racionales, para visualizarlos todos deberíamos marcar infinidad de puntos entre el punto que representa al número "a" y el que representa al número "b". Así las cosas, es claro que ***los números racionales comprendidos entre "a" y "b" están como sardinas en lata, tan "apretados" que, a simple vista, podría parecer que constituyen un "todo continuo" y que "llenan por completo" la recta soporte,*** podría parecer que la visualización de los racionales es la propia recta soporte, un "raíl continuo" por el que rodaría con sigilo el tren de la figura, sin el escándalo que se produce si los raíles están un poco separados para que la vía no se levante por la dilatación que sufre cuando aprieta la calor, cuando canta la calandria y contesta el ruiseñor.



A simple vista, ***la visualización del conjunto de los números racionales parece una recta, un "todo continuo" ...... pero no lo es***

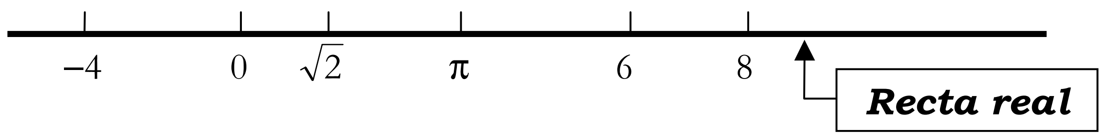
***Si mirásemos con un microscopio veríamos que en realidad los números racionales no forman un "todo continuo"; es decir, no "llenan por completo" la recta soporte, pues "eso" que a simple vista parece un "todo continuo" está infestado de "agujeros": cada uno de ellos corresponde a un número de los llamados "irracionales"*** (un número con infinitas cifras decimales y no periódico), como los números llamados "pi", "raíz cuadrada de dos" (no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, por eso es necesario "inventar" un número que cumpla esa condición, se denota $\sqrt{2}$), etc.

Aunque geométricamente es imposible distinguir un número racional de otro irracional, la siguiente figura es un burdo intento de la imposible visualización del conjunto de los números racionales.



Burdo intento de visualización del conjunto de los números racionales

***Al unir el conjunto de los racionales y el de los irracionales se obtiene el conjunto $\Re$ de los números "reales". Para visualizarlo basta añadir los números irracionales al raíl infestado de agujeros que forman los racionales, con lo que cada agujero es "tapado" por el correspondiente número irracional; al hacer eso la recta soporte se "llena por completo", resultando un "todo continuo" que llamamos "recta real" .... y como cada punto de la recta real representa a un número real, <u>en adelante consideraremos sinónimas las palabras "número" y "punto"</u>.***




## 1.2 LA RECTA REAL AMPLIADA

- Llamamos ***recta real ampliada*** al conjunto que resulta al añadir al conjunto $\Re$ los símbolos $+\infty$ ("más infinito"; o sea, como estar hiperpodrido de dinero) y $-\infty$ ("menos infinito", como estar hiperpodrido de deudas).

***¡Ojo!: $+\infty$ y $-\infty$ no son números, y para todo número real "x", es: $-\infty < x < +\infty$***

- En general, ***con $+\infty$ y $-\infty$ no tienen sentido las operaciones que hacemos con los números; en concreto, carecen de sentido las siguientes expresiones:***

$$(+\infty)+(-\infty) \;\; ; \;\; 0.(+\infty) \;\; ; \;\; 0.(-\infty) \;\; ; \;\; \frac{+\infty}{+\infty} \;\; ; \;\; \frac{+\infty}{-\infty} \;\; ; \;\; \frac{-\infty}{+\infty} \;\; ; \;\; \frac{-\infty}{-\infty}$$

No obstante, ***convenimos*** que:

$$(+\infty).(+\infty)=(-\infty).(-\infty)=+\infty \;\; ; \;\; (+\infty).(-\infty)=(+\infty).(-\infty)=-\infty$$

También ***convenimos*** que, $\forall\, x \in \Re$, es:

$$x+(+\infty)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty \;\; ; \;\; x+(-\infty)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$x.(+\infty)=(+\infty).x=\begin{cases}+\infty \text{ si } x>0\\ -\infty \text{ si } x<0\end{cases} \;\; ; \;\; x.(-\infty)=(-\infty).x=\begin{cases}-\infty \text{ si } x>0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{cases}$$

$$x/+\infty = x/-\infty = 0$$

## 1.3 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

- El ***valor absoluto*** del número real "x" es el número real no negativo que denotamos $|x|$, siendo $|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$.
- Si "x" e "y" son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

$$|x|>0 \text{ si } x\neq 0 \;\; ; \;\; |0|=0 \;\; ; \;\; |x|<k \Rightarrow -k<x<k \;\; (\text{si } k>0)$$

$$|x.y|=|x|.|y| \;\; ; \;\; |x+y|\leq |x|+|y| \;\; ; \;\; |x-y|\geq \big||x|-|y|\big|$$

# 1.4 INTERVALOS DE LA RECTA REAL

Siendo "a" y "b" números reales tales que $a < b$, se llaman ***intervalos de origen "a" y extremo "b"*** a los siguientes subconjuntos de $\Re$:

$$[a;b] = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} \equiv \text{intervalo "cerrado" } [a;b], \text{ incluye a "a" y a "b"}$$

$$(a;b) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \equiv \text{intervalo "abierto" } (a;b), \text{ excluye a "a" y a "b"}$$

$$[a;b) = \{x \in \Re \,/\, a \le x < b\} \equiv \text{intervalo "cerrado" por la izquierda y "abierto" por la derecha}$$

$$(a;b] = \{x \in \Re \,/\, a < x \le b\} \equiv \text{intervalo "abierto" por la izquierda y "cerrado" por la derecha}$$

De "a" también se dice que es el ***extremo inferior*** del intervalo, y de "b" se dice que es el ***extremo superior.*** Del número real positivo "$b - a$" se dice que es la ***amplitud*** del intervalo. ***Por ejemplo:***

$$[4;9] = \{x \in \Re \,/\, 4 \le x \le 9\} \;\; ; \;\; (2;5) = \{x \in \Re \,/\, 2 < x < 5\}$$

$$[-4;2) = \{x \in \Re \,/\, -4 \le x < 2\} \;\; ; \;\; (6;8] = \{x \in \Re \,/\, 6 < x \le 8\}$$

Los cuatro intervalos anteriores tienen amplitud finita, pues el valor absoluto de "x" no se hace infinitamente grande en ningún punto "x" del intervalo; para expresar esto de modo rápido se dice que son ***acotados.*** Se dice que un intervalo es ***compacto*** si es cerrado y acotado, como los intervalos $[-2;3]$, $[1;8]$, $[6;9]$.

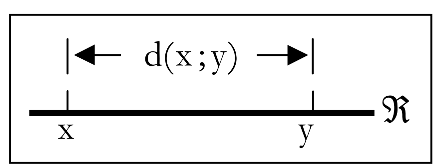
Los cuatro intervalos siguientes tienen amplitud infinita; también se dice que son ***no acotados,*** para así indicar que el valor absoluto de "x" puede hacerse infinitamente grande en puntos "x" del intervalo:

$$[a;+\infty) = \{x \in \Re \,/\, x \ge a\} \;\; ; \;\; (a;+\infty) = \{x \in \Re \,/\, x > a\}$$

$$(-\infty;a] = \{x \in \Re \,/\, x \le a\} \;\; ; \;\; (-\infty;a) = \{x \in \Re \,/\, x < a\}$$

# 1.5 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE $\Re$

Para evaluar la ***proximidad*** entre los puntos "x" e "y" usaremos el número real no negativo llamado ***distancia*** entre "x" e "y", que se denota $d(x;y)$, siendo $d(x;y) = |y - x|$. Así, dos puntos "x" e "y" son muy (poco) próximos si $|y - x|$ es muy (poco) próximo a cero.




# 1.6 ENTORNO DE UN PUNTO DE $\Re$

- Si $c \in \Re$ y "r" es un número real positivo, el ***entorno de centro en "c" y radio "r"*** se denota $B_r(c)$, y es el subconjunto de $\Re$ que forman los números reales (puntos) cuya distancia al punto "c" es inferior a "r"; es decir:

$$B_r(c) = \{x \in \Re \,/\, d(c;x) < r\} = \{x \in \Re \,/\, |x - c| < r\} =$$

$$= \{x \in \Re \,/\, -r < x - c < r\} = \{x \in \Re \,/\, c - r < x < c + r\} = (c - r; c + r)$$

***Por ejemplo,*** el entorno de centro en "5" y radio $0'02$ es el conjunto que forman los números reales (puntos) "x" tales que $\left|x-5\right|<0'02$, que son los del intervalo $(5-0'02;5+0'02)\equiv(4'98;5'02)$. Del intervalo $(4'98;5]$ se dice que es el ***semientorno izquierdo*** de "5" y radio $0'02$, y del intervalo $[5;5'02)$ se dice que es el ***semientorno derecho*** de "5" y radio $0'02$.

- Si del entorno $B_r(c)$ del punto "c" eliminamos el propio punto "c", obtenemos el ***entorno reducido de centro en "c" y radio "r",*** que se denota $B_r^*(c)$; es decir, $B_r^*(c)=\left\{x\in\Re\,/\,0<\left|x-c\right|<r\right\}=(c-r;c)\cup(c;c+r)$.

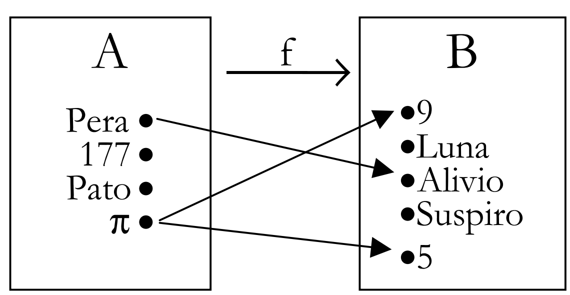
  ***Por ejemplo,*** el entorno reducido de centro en "5" y radio $0'02$ es el conjunto que forman los reales "x" tales que $0<\left|x-5\right|<0'02$, o sea, los "x" tales que $x\in(4'98;5)\cup(5;5'02)$. Del intervalo $(4'98;5)$ se dice que es el ***semientorno reducido izquierdo*** de "5" y radio $0'02$; del intervalo $(5;5'02)$ se dice que es el ***semientorno reducido derecho*** de "5" y radio $0'02$.

- De todo intervalo de la forma $(a;+\infty)$ se dice que es un ***entorno de*** $+\infty$ y de todo intervalo de la forma $(-\infty;b)$ se dice que es un ***entorno de*** $-\infty$. En estos dos casos la palabra "reducido" no quita ni pone nada a la palabra "entorno", pues como $+\infty$ no es un número, hablar de un entorno de $+\infty$ es igual que hablar de un entorno reducido de $+\infty$, y lo mismo con $-\infty$.

## 1.7 CORRESPONDENCIA ENTRE CONJUNTOS

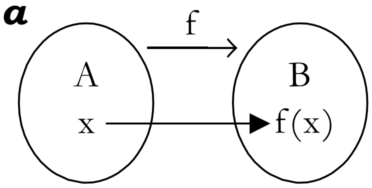
- ***Siendo "A" y "B" conjuntos cualesquiera, se llama "correspondencia" de "A" en "B" a todo criterio o ley que asocie elementos de "A" con elementos de "B";*** si el nombre del criterio es "f", para expresar que "f" es una correspondencia de "A" en "B" escribimos $f:A\mapsto B$. De "A" se dice que es el ***conjunto inicial*** de "f" y de "B" se dice que es el ***conjunto final*** de "f".

  En la definición de "correspondencia" no se impone ninguna restricción o traba al criterio "f" que asocia elementos de "A" con elementos "B"; por tanto, queda definida una "correspondencia" de "A" en "B" en el mismo instante en que se establece un criterio que asocie elementos de "A" con elementos "B", aunque dicho criterio sea muy absurdo o chiripitiflaútico, como el adjunto.




  ***Observa:*** en el conjunto inicial "A" puede haber elementos a los que "f" no les asocia ningún elemento del conjunto final "B", y también puede ocurrir que "f" asocie varios elementos de "B" a un mismo elemento de "A".

- ***Si $x \in A$, para referirnos al elemento del conjunto final "B" que la correspondencia o ley "f" asocia a "x", usaremos la notación "f(x)", que los profesionales leen efe de x, pero tú debes leer imagen de "x" según "f".***



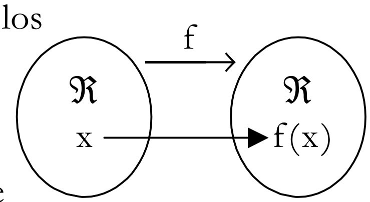

# ¡Que quede claro!

## Tras la notación "f(x)" hay 5 protagonistas

1) Un conjunto "A", que es protagonista "invisible", pues "A" no aparece por ningún lado en la notación "f(x)" ..... ¡pero está!
2) Un conjunto "B", también invisible.
3) Una ley "f" que asocia elementos de "A" con elementos de "B"; es protagonista "visible", pues en la notación "f(x)" hay una "f".
4) El elemento "x" del conjunto "A"; también visible, pues en la notación "f(x)" hay una "x".
5) El quinto protagonista es un elemento del conjunto "B", pero no uno cualquiera, el quinto protagonista es el elemento de "B" que la ley "f" asocia a "x", y para denotarlo nadie ha inventado una notación más clara y concisa que "f(x)", introducida por **Euler** en el año 1734.

***Si "f(x)" lo lees* imagen de "x" según "f"**
***te será más fácil tener a la vez en el cerebro esos cinco protagonistas***

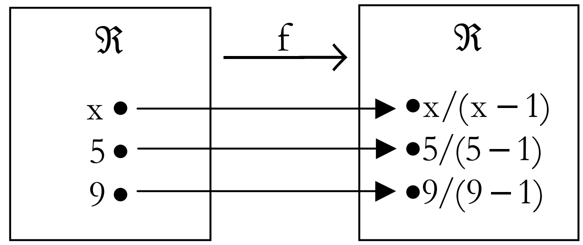
## 1.8 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL




El concepto de ***función*** generó mucha polémica entre los sabios de los siglos XVIII y XIX, y hubo que esperar hasta que Dirichlet zanjó el asunto en el año 1854, llamando ***función real de variable real*** a toda correspondencia $f : \Re \mapsto \Re$; o sea, una función real de variable real es una ley o criterio "f" que asocia números reales con números reales. Para expresar que el número real $x \in \Re_{\text{inicial}}$ puede ser el que nos dé la gana, se dice que "x" es una ***variable independiente;*** y para expresar que el número real $f(x) \in \Re_{\text{final}}$ que "f" asocia a "x" escapa por completo a nuestro control (pues es la ley "f" quien decide el valor de "f(x)"), se dice que el número real que denotamos "f(x)" es una ***variable dependiente.***

Se dice que $f:\Re \mapsto \Re$ es una ***función real*** porque el conjunto final de "f" es el de los reales, y se dice que "f" es de ***variable real*** porque el conjunto inicial de "f" es el de los reales. Siguiendo el criterio de Dirichlet, si el conjunto inicial de "f" fuera el de los números racionales y el conjunto final fuera el de los números complejos, diríamos que "f" es una función compleja de variable racional.

Como sólo trabajaremos con funciones reales de variable real, por razones de economía, cuando queramos referirnos a una de ellas (llamada "f") diremos simplemente *sea la función "f"*. ***Por ejemplo,*** al hablar de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = x/(x-1)$ se está hablando del criterio o ley "f" que al número real "x" le asocia el número real $x/(x-1)$; así, al número real 5 la ley "f" le asocia el número real $5/(5-1)$, y al número real 9 le asocia el número real $9/(9-1)$ ..... y para expresarlo escribimos $f(5) = 5/(5-1)$ y $f(9) = 9/(9-1)$.




Entenderás la importancia de las funciones reales de variable real si piensas que "x" expresa la cantidad de capital que utiliza una empresa y "f(x)" expresa su producción de acero, o que "x" expresa el tiempo transcurrido a partir de un cierto instante y "f(x)" expresa la velocidad de un móvil en el instante "x".

## 1.9 OPERACIONES CON FUNCIONES

Con las funciones podemos hacer las mismas operaciones que con los números reales; así, siendo $u:\Re \mapsto \Re$ y $v:\Re \mapsto \Re$ dos funciones, se tiene que:

1) $f = u + v$ es la función tal que $f(x) = u(x) + v(x)$
2) $f = u.v$ es la función tal que $f(x) = u(x).v(x)$
3) $f = u/v$ es la función tal que $f(x) = u(x)/v(x)$
4) $f = u^v$ es la función tal que $f(x) = (u(x))^{v(x)}$
5) $f = \sqrt[k]{u}$ es la función tal que $f(x) = \sqrt[k]{u(x)}$, $k \equiv \text{constante}$
6) $f = \log_k u$ es la función tal que $f(x) = \log_k u(x)$, $k > 0$, $k \neq 1$

***Por ejemplo,*** si $u:\Re \mapsto \Re$ y $v:\Re \mapsto \Re$ son tales que $u(x) = x^2$ y $v(x) = 1/(1+x)$, entonces:

1) $f = u + v$ es la función tal que $f(x) = x^2 + (1/(1+x))$
2) $f = u.v$ es la función tal que $f(x) = x^2/(1+x)$
3) $f = u/v$ es la función tal que $f(x) = x^2.(1+x)$
4) $f = u^v$ es la función tal que $f(x) = (x^2)^{1/(1+x)}$
5) $f = \sqrt[7]{u}$ es la función tal que $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$
6) $f = \log_5 u$ es la función tal que $f(x) = \log_5 x^2$

# 1.10 LA REGLA DE RUFFINI

***Miles de veces nos encontraremos ante el problema de resolver una ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)$ un polinomio; o sea, deberemos determinar los valores de "x" que cumplen la condición $f(x)=0$. De dichos valores de "x" se dice que son las "soluciones" o "raíces" de la ecuación $f(x)=0$.***

1) Si el polinomio es de grado 1 (o sea, $f(x)=a.x+b$, donde "a" y "b" son constantes y $a \neq 0$), la ecuación $f(x)=0$ tiene una única solución, y su cálculo es fácil:

$$a.x+b=0 \Rightarrow a.x=-b \Rightarrow x=-b/a$$

2) Si el polinomio es de grado 2 (o sea, $f(x)=a.x^2+b.x+c$, donde "a", "b" y "c" son constantes y $a \neq 0$), la ecuación $f(x)=0$ tiene 2 soluciones o raíces, y las calcularemos usando la "formulita" hiperfamosa que todos conocemos:

$$a.x^2+b.x+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

***Por ejemplo:***

$$2.x^2-5.x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4.2.3}}{2.2}=\frac{5 \pm 1}{4}=\begin{cases} 3/2 \\ 1 \end{cases}$$

- ***¡Ojo!,*** si el coeficiente de "x" (o sea, "b") es un número par (por ejemplo, $b=2.k$), hay otra "formulita" más cómoda y rápida:

$$a.x^2+2.k.x+c=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-(2.k) \pm \sqrt{(2.k)^2-4.a.c}}{2.a}=\frac{-k \pm \sqrt{k^2-a.c}}{a}$$

***Por ejemplo:***

✓ $$1.x^2+6.x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-1.5}}{1}=-3 \pm 2=\begin{cases} -1 \\ -5 \end{cases}$$

¡qué suerte!, el coeficiente de "x" es par ($2.k=6 \Rightarrow k=3$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ usamos la "formulita" cómoda

✓ $$1.x^2-4.x+13=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-1.13}}{1}=2 \pm \sqrt{-9}=$$

¡qué suerte!, el coeficiente de "x" es par ($2.k=-4 \Rightarrow k=-2$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ usamos la "formulita" cómoda

$$=2 \pm \sqrt{(-1).9}=2 \pm \sqrt{-1}.\sqrt{9}=2 \pm 3.\sqrt{-1}=2 \pm 3.i$$

el número $\sqrt{-1}$ no es "real", se llama "unidad imaginaria" y se denota "i"

- Si el "término independiente" de la ecuación es cero (o sea, $c = 0$) no necesitaremos ninguna formulita, y podremos apostar la vida a que una de las soluciones de la ecuación es $x = 0$.

$$a.x^2 + b.x = 0 \Rightarrow x.(a.x + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ a.x + b = 0 \Rightarrow x = -b/a \end{cases}$$

para que un producto de dos números sea 0 basta que alguno de ellos sea 0

***En general, si "f" es un polinomio de grado "n" superior a 2, el cálculo de las "n" soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ es un petardo, pues no hay ninguna "formulita" que resuelva la papeleta. No obstante, en todos los casos que encontremos (normalmente $n = 3$ ó $n = 4$), el polinomio estará "preparado" para que las soluciones sean enteras .... y Ruffini nos permitirá determinarlas.***

## FONEMATO 1.10.1 (RAÍCES ENTERAS)

Resuélvase la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$.

## SOLUCIÓN

Debemos determinar los valores de "x" que satisfacen la ecuación (condición de igualdad) $f(x) = 0$. Como f(x) es un polinomio de grado 5, la ecuación en cuestión tiene 5 soluciones, pudiendo estar "repetidas" algunas de ellas.

***¡Qué suerte!, como el término independiente de la ecuación es 0, apostamos un brazo a que $x = 0$ es solución:***

$$2.x^5 - 10.x^3 + 8.x = 0 \Rightarrow x.(2.x^4 - 10.x^2 + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2.x^4 - 10.x^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $2.x^4 - 10.x^2 + 8 = 0$, y de nuevo tenemos suerte, pues ***como la suma*** $(2 - 10 + 8)$ ***de los coeficientes es 0, apostamos tranquilamente la vida a que $x = 1$ es una de las soluciones***, lo que garantiza que el polinomio $g(x) = 2.x^4 - 10.x^2 + 8$ es divisible por $x - 1$ (la Regla de Ruffini permite calcular los coeficientes del polinomio h(x) obtenido como cociente de dicha división):

coeficientes de g(x)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & -10 & 0 & 8 \\ x = 1 & & 2 & 2 & -8 & -8 \\ \hline & 2 & 2 & -8 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

coeficientes de $h(x) = g(x)/(x - 1)$ | resto

Así, es $h(x) = g(x)/(x-1) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8$; o sea:

$$g(x) = (x-1).h(x) = (x-1).(2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8)$$

Por tanto:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x-1).(2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos resolver la ecuación $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$; y como la suma $(2 + 2 - 8 - 8)$ de sus coeficientes no es 0, podemos apostar una pierna a que $x = 1$ no es una de sus soluciones. ***Si la ecuación tiene raíces enteras deben ser divisores del término independiente*** $-8$; como los divisores de $-8$ son $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ y $-8$, debemos armarnos de paciencia e ir probando con todos (excepto el 1, pues sabemos que $x = 1$ no es solución de $2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$), rezando para que alguno de ellos sea solución.

Es $h(2) = 2.2^3 + 2.2^2 - 8.2 - 8 = 0$, lo que garantiza que $x = 2$ es solución de $h(x) = 2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8 = 0$ y que el polinomio $2.x^3 + 2.x^2 - 8.x - 8$ es divisible por $x - 2$; la Regla de Ruffini permite calcular los coeficientes del polinomio t(x) que se obtiene como cociente de dicha división:

coeficientes de h(x)

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 2 & -8 & -8 \\ x = 2 & & 4 & 12 & 8 \\ \hline & 2 & 6 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

coeficientes de t(x) = h(x)/(x − 2) resto

Así, es $t(x) = h(x)/(x-2) = 2.x^2 + 6.x + 4$; o sea:

$$h(x) = (x-2).t(x) = (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4)$$

Por tanto:

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x-2).(2.x^2 + 6.x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2.x^2 + 6.x + 4 = 0 \end{cases}$$

y las soluciones de la ecuación $2.x^2 + 6.x + 4 = 0$ son:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 2.4}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

En definitiva, siendo $f(x) = 2.x^5 - 10.x^3 + 8.x$, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = 0, x = 1, x = 2, x = -1$ y $x = -2$; el que así sean las cosas nos permite escribir la ***descomposición factorial*** del polinomio f(x):

$$f(x) = 2.(x-0).(x-1).(x-2).(x+1).(x+2)$$

el "2" es el coeficiente del término de mayor grado de f(x)

abrir panel

# Raíces múltiples

Si el polinomio "f" es tal que $f(x)=(x-a)^k.p(x)$, siendo el polinomio "p" tal que $p(a)\neq 0$, se dice que "a" es una ***raíz múltiple de orden "k"*** de la ecuación $f(x)=0$.

***Por ejemplo:***

$$f(x)=x^6-9.x^4=0\Rightarrow x^4.(x^2-9)=0\Rightarrow\begin{cases}x^4=0\Rightarrow x=0\text{ (cuádruple)}\\ x^2-9=0\Rightarrow x=\pm 3\end{cases}$$

Por tanto, las 6 raíces de la ecuación $f(x)=x^6-9.x^4=0$ son:

$$x=0\ \text{(cuádruple)}\ ;\ x=3\ \text{(simple)}\ ;\ x=-3\ \text{(simple)}$$

La descomposición factorial es $f(x)=x^6-9.x^4=x^4.(x-3).(x+3)$.

## FONEMATO 1.10.2 (RAÍCES FRACCIONARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$, siendo $f(x)=12.x^3-4.x^2-3.x+1$.

## SOLUCIÓN

La ecuación $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ carece de raíces enteras, pues ningún divisor del término independiente "1" es solución. ***Si la ecuación admite raíces fraccionarias de la forma "m/n" (siendo "m" y "n" números enteros y "n" distinto de 0 y de 1), entonces "m" es divisor del término independiente*** (el número 1 en nuestro caso) ***y "n" es divisor del coeficiente del término de mayor grado*** (el número 12 en nuestro caso); por tanto, las únicas raíces fraccionarias que puede tener la ecuación dada son:

$$\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{6};-\frac{1}{6};\frac{1}{12};-\frac{1}{12}$$

Ahora hay que armarse de paciencia e ir probando una por una, rezando para que alguna sea solución de $12.x^3-4.x^2-3.x+1=0$ ...... y tenemos suerte, pues $x=1/2$ es solución, ya que $12.(1/2)^3-4.(1/2)^2-3.(1/2)+1=0$.

Mediante Ruffini obtenemos $\dfrac{12.x^3-4.x^2-3.x+1}{x-(1/2)}=12.x^2+2.x-2$

Como las soluciones de $12.x^2+2.x-2=0$ son $x=1/3$ y $x=-1/2$, es:

$$12.x^3-4.x^2-3.x+1=12.(x-\frac{1}{2}).(x-\frac{1}{3}).(x+\frac{1}{2})$$

## FONEMATO 1.10.3 (RAÍCES IMAGINARIAS)

Resuélvase la ecuación $f(x)=0$ en los siguientes casos:

$$1)\ f(x)=x^6+64\quad ;\quad 2)\ f(x)=x^6-64$$

## SOLUCIÓN

abrir panel

1) Ninguna de las 6 raíces de la ecuación es real: $x^6 + 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-64} \notin \Re$

- Para calcular $\sqrt[6]{-64}$ consideramos al número $-64$ como elemento del conjunto de los números imaginarios (de la forma $a + b.i$, siendo $i = \sqrt{-1}$); así, $-64$ es el número imaginario $-64 + 0.i$, cuyo módulo es 64 (el módulo de $a + b.i$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$) y cuyo argumento es $\pi$ (el argumento de $a + b.i$ es $\text{arc tg } \frac{b}{a}$).

> Un número imaginario no nulo con módulo "r" y argumento "$\theta$" posee "n" raíces n-ésimas distintas, que tienen como módulo la raíz n-ésima de "r", y sus respectivos argumentos son:
>
> $$\frac{\theta}{n}\ ;\ \frac{\theta}{n} + 2.\frac{\pi}{n}\ ;\ \frac{\theta}{n} + 4.\frac{\pi}{n}\ ;\ \frac{\theta}{n} + 6.\frac{\pi}{n}\ ;\ ....\ ;\ \frac{\theta}{n} + 2(n-1).\frac{\pi}{n}$$

En nuestro caso es $n = 6$; por tanto, el número $-64$ (para el que $r = 64$ y $\theta = \pi$) tiene 6 raíces sextas distintas, que tienen módulo 2 (la raíz sexta de 64), y sus respectivos argumentos son:

$$\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 2.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 4.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 6.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 8.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $5.\frac{\pi}{6}$, $7.\frac{\pi}{6}$ $3.\frac{\pi}{2}$ y $11.\frac{\pi}{6}$; así, teniendo en cuenta que si un número imaginario "x" tiene módulo "r" y argumento "$\theta$" es $x = r.(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$, las 6 raíces sextas de $-64$ (o sea, las 6 soluciones de la ecuación $x^6 + 64 = 0$) son:

$$x = 2.(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{6}) = 2.(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i) = \sqrt{3} + 1.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}) = 2.(0 + 1.i) = 0 + 2.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}) = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.i) = -\sqrt{3} + 1.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{7\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}) = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i) = -\sqrt{3} - 1.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{3\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}) = 2.(0 - 1.i) = 0 - 2.i$$

$$x = 2.(\cos\frac{11\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}) = 2.(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.i) = \sqrt{3} - 1.i$$

En definitiva, $x^6 + 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-64} = \left\{\begin{matrix} \sqrt{3} \pm 1.i \\ 0 \pm 2.i \\ -\sqrt{3} \pm 1.i \end{matrix}\right\}$.

2) Si $x^6 - 64 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{64}$, y para calcular $\sqrt[6]{64}$ consideramos $64 = 64 + 0.i$, cuyo módulo es 64 y cuyo argumento es 0. Las seis raíces sextas de 64 tienen módulo 2 (la raíz sexta de 64), y sus respectivos argumentos son:

$$\frac{0}{6}\ ;\ \frac{0}{6} + 2.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{0}{6} + 4.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{0}{6} + 6.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{0}{6} + 8.\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{0}{6} + 10.\frac{\pi}{6}$$

O sea: $0,\ \frac{\pi}{3},\ 2.\frac{\pi}{3},\ \pi,\ 4.\frac{\pi}{3}$ y $5.\frac{\pi}{3}$; por tanto, las seis raíces sextas de 64 son:

$$x = 2.(\cos 0 + i.\text{sen } 0) = 2.(1 + 0.i) = 2$$

$$x = 2.(\cos \frac{\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = 1 + \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \frac{2\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{2\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = -1 + \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \pi + i.\text{sen } \pi) = 2.(-1 + 0.i) = -2$$

$$x = 2.(\cos \frac{4\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{4\pi}{3}) = 2.(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = -1 - \sqrt{3}.i$$

$$x = 2.(\cos \frac{5\pi}{3} + i.\text{sen } \frac{5\pi}{3}) = 2.(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = 1 - \sqrt{3}.i$$

## 1.11 LAS REGLAS SAGRADAS DEL CÁLCULO

***Hay tres operaciones muy peligrosas que causan muchos disgustos a los principiantes; debes grabarlas en tu cerebro de inmediato.***

# LAS REGLAS SAGRADAS DEL CÁLCULO

peligro de muerte

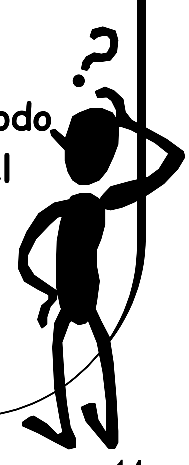
***1) Prohibido dividir por cero; es un gran pardillo todo el que diga que el cociente 7/0 es infinito, pues este cociente de números no tiene sentido matemático.***

***2) El logaritmo de un número no positivo (≤0) no es un número real.***

***3) Toda raíz de índice par de un número negativo no es un número real.***

## SE HACE SABER

Será inmisericordemente suspendido ipso facto todo violador de una Regla Sagrada; caerán sobre él toneladas de desprestigio y deshonor, y el estigma de tan ignominioso acto apestará la honra de su linaje por los siglos de los siglos.

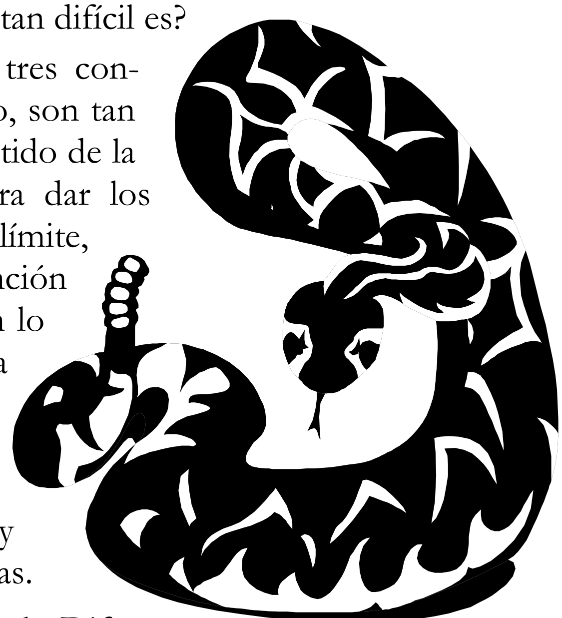


# 1.12 DE LAS FUNCIONES Y LAS SERPIENTES

Es el momento de avisarte sobre lo que se nos viene encima ..... utilizando brocha gorda y no pincel, cabe decir que en las próximas quinientas páginas vamos a ocuparnos de poco más que los siguientes tres conceptos:

1) ***Límite*** de una función $f:\Re \mapsto \Re$ en un punto "a"
2) ***Continuidad*** de una función $f:\Re \mapsto \Re$ en un punto "a"
3) ***Derivabilidad*** de una función $f:\Re \mapsto \Re$ en un punto "a"

***Pregunta:*** quinientas páginas son muchas, ¿tan difícil es?



***Respuesta:*** el problema no es que estos tres conceptos sean difíciles de entender, al contrario, son tan tontorrones que "entran" por los ojos, el sentido de la vista es la única herramienta necesaria para dar los primeros pasos por el proceloso mundo del límite, la continuidad y la derivabilidad de una función "f" en un punto "a". El problema es que, en lo que a estos conceptos se refiere, y debido a las Reglas Sagradas del Cálculo, las funciones son como las serpientes: hay gran variedad de "familias", y sobre todo, y eso es lo más importante, las hay inofensivas y también las hay que pueden ser muy peligrosas.

Para que el Cálculo Infinitesimal (ya sea Cálculo Diferencial o Cálculo Integral) te haga sufrir poco ***debes aprender a "catalogar" la peligrosidad de las diversas "familias" de funciones*** (como haría con las serpientes toda persona sensata que viviera entre infinidad de tan inquietantes animales), ***pues así podrás valorar en unos pocos segundos qué peligros te acecharán al trabajar*** (límite, continuidad, derivabilidad) ***con una función "f" en un punto "a".***

A veces las serpientes de familias extremadamente peligrosas pueden ser inofensivas: ¿quién no ha observado a pocos centímetros de su nariz los movimientos de una temible serpiente de cascabel que para su desgracia y mayor tranquilidad del observador ha sido introducida en una urna de cristal de dos centímetros de espesor?, ¿pero qué pasa con la tranquilidad del observador si la urna cae al suelo y la serpiente de cascabel queda en libertad y de mala leche por el golpe recibido?

Con las funciones pasa un poco lo mismo, el trabajo (límite, continuidad, derivabilidad) con una función "f" puede ser inofensivo (o sea, fácil) en el punto "5" y ser extremadamente peligroso (o sea, difícil) en el punto "7". En definitiva, ***los peligros que te acecharán al trabajar*** (límite, continuidad, derivabilidad) ***con una función "f" en un punto "a" dependen de la "familia" a la que pertenece "f" y del punto "a" en que se desarrolle el trabajo*** (límite, continuidad, derivabilidad) ***con "f".***

# 1.13 CATÁLOGO DE PELIGROS

El siguiente catálogo no es exhaustivo, quedan fuera de él algunas situaciones que de momento no comentamos para no complicar nuestros primeros pasos por el Cálculo Diferencial.

## 1) Las funciones "racionales enteras"

- ***Son de la forma $f(x) =$ polinomio, y son inofensivas sea cual sea el punto "c" en que desarrolle nuestro trabajo con ellas.*** ***Por ejemplo,*** son racionales enteras las siguientes funciones:

$$f:\Re \mapsto \Re \,/\, f(x) = 3.x^7 + x^2 - 3$$
$$g:\Re \mapsto \Re \,/\, g(x) = x^2 + x - 1$$
$$h:\Re \mapsto \Re \,/\, h(x) = -x + 2$$

## 2) Las funciones "racionales fraccionarias"

- ***Son de la forma $f(x) =$ cociente de polinomios; son inofensivas si el punto "c" en que desarrolla el trabajo con ellas no anula al denominador; por el contrario, son peligrosas si en "c" se anula el denominador, pues en ése punto se viola la regla que prohibe dividir por cero.***

***Por ejemplo,*** son racionales fraccionarias las siguientes funciones:

$$f:\Re \mapsto \Re \,/\, f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$
$$g:\Re \mapsto \Re \,/\, g(x) = \frac{x}{x^2 - 3.x + 2}$$
$$h:\Re \mapsto \Re \,/\, h(x) = \frac{1-x}{4+x^6}$$
$$t:\Re \mapsto \Re \,/\, t(x) = \frac{x}{2.x^2 - 1 - x^{369696}}$$

El trabajo con "f" sólo es peligroso en el punto $x = 2$, pues el denominador $x - 2$ de $f(x)$ sólo se anula en dicho punto.

El trabajo con "g" sólo es peligroso en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, pues el denominador $x^2 - 3.x + 2$ de $g(x)$ sólo se anula en dichos puntos.

El trabajo con "h" es inofensivo en todo punto, pues el denominador de $h(x)$ no se anula para ningún valor real de "x" ($4 + x^6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-4} \notin \Re$).

Hay 369696 valores de "x" (unos reales, otros imaginarios) que anulan el denominador de $t(x)$, y su cálculo es asunto infumable incluso para los japoneses. No obstante, es muy fácil analizar lo que sucede en cada punto concreto. Por ejemplo, el trabajo con "t" es inofensivo en el punto $x = 7$, pues en dicho punto no se anula el denominador de $t(x)$; sin embargo, es peligroso en $x = 1$, ya que el denominador de $t(x)$ se anula si $x = 1$, pues $2.1^2 - 1 - 1^{369696} = 0$

abrir panel

## 3) Las raíces de índice impar

- ***Son de la forma $f(x)=\sqrt[impar]{u(x)}$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas o peligrosas en el punto "c" según que la función "u" sea inofensiva o peligrosa en dicho punto.***

  ***Por ejemplo***, sean las funciones:

  $$f:\Re \mapsto \Re \;/\; f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$
  $$g:\Re \mapsto \Re \;/\; g(x)=\sqrt[5]{x/(9-x^2)}$$
  $$h:\Re \mapsto \Re \;/\; h(x)=\sqrt[7]{x/(9+x^2)}$$

  El trabajo con "f" es inofensivo en todo punto, pues el polinomio $u(x)=x-1$ es inofensivo en todo punto.

  El trabajo con "g" sólo es peligroso en los puntos $x=3$ y $x=-3$, pues el cociente de polinomios $v(x)=x/(9-x^2)$ sólo es peligroso en los puntos $x=3$ y $x=-3$ en que se anula su denominador.

  El trabajo con "h" es inofensivo en todo punto, pues el cociente de polinomios $w(x)=x/(9+x^2)$ es inofensivo en todo punto, ya que su denominador $9+x^2$ no se anula para ningún valor real de "x" $(9+x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9}\notin\Re)$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x)=\sqrt[impar]{u(x)}$ en el punto "c" sea inofensivo en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo que se refiere al asunto de la "derivabilidad".*** Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

## 4) Las raíces de índice par

- ***Son de la forma $f(x)=\sqrt[par]{u(x)}$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas en el punto "c" si la función "u" es inofensiva en dicho punto y además es u(c) >0; son peligrosas en el punto "c" si la función "u" es peligrosa en dicho punto o si u(c)<0,*** pues si $u(c)<0$ se viola la segunda Regla Sagrada:

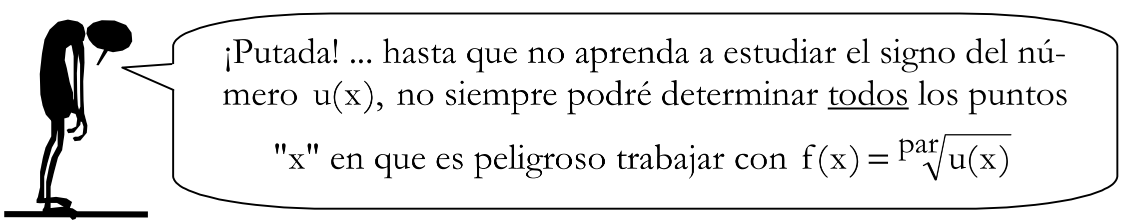
  $$\sqrt[par]{\text{número negativo}}\notin\Re$$

  Si la función "u" es inofensiva en el punto "c" y $u(c)=0$, lo más frecuente es que haya peligro al trabajar en dicho punto, aunque puede no haberlo.

> ***Observa:*** el signo del número real $u(x)$ tiene protagonismo estelar a la hora de evaluar la peligrosidad que en cada punto "x" tiene el trabajo ("límite" y "continuidad") con la función $f(x) = \sqrt[\text{par}]{u(x)}$. Si la expresión matemática de $u(x)$ es tontorrona será muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo es peligroso; a medida que se complique la expresión matemática de $u(x)$ se complicará la detección de los puntos peligrosos.

***Por ejemplo,*** como el polinomio $u(x) = x - 1$ es inofensivo en todo punto, el trabajo con $f(x) = \sqrt{x-1}$ es inofensivo en todo punto "x" tal que $u(x) > 0$ $(\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1)$ y es peligroso en los puntos "x" tales que $u(x) < 0$ $(\Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1)$. Como $u(1) = 0$, lo más probable es que haya peligro en el punto $x = 1$, aunque podría no haberlo. El que la expresión matemática de $u(x)$ sea tontorrona hace que resulte muy sencillo determinar <u>todos</u> los puntos en que el trabajo con $f(x) = \sqrt[\text{par}]{u(x)}$ es peligroso.

***Por ejemplo,*** como el cociente de polinomios $v(x) = x/(x^2 - 4)$ es peligroso sólo en los puntos $x = 2$ y $x = -2$ en que se anula su denominador, el trabajo con $g(x) = \sqrt[4]{x/(x^2-4)}$ es peligroso en dichos puntos y en todos los puntos "x" tales que $v(x) \le 0$. Pero la expresión matemática de $v(x) = x/(x^2 - 4)$ es lo bastante complicada como para que, con lo poco que aún sabemos, nos resulte imposible determinar <u>todos</u> los puntos "x" que satisfacen la condición $v(x) = x/(x^2 - 4) \le 0$. No obstante, es muy fácil analizar qué sucede en cada punto concreto; por ejemplo, el trabajo con $g(x) = \sqrt[4]{x/(x^2-4)}$ es inofensivo en el punto $x = 5$, pues en dicho punto es $v(5) = 5/(5^2 - 4) > 0$, sin embargo, el trabajo es peligroso en el punto $x = 1$, pues $v(1) = 1/(1^2 - 4) < 0$.




***Por ejemplo,*** como el cociente de polinomios $w(x) = (x - 5)/(x^6 + 4)$ es inofensivo en todo punto (pues su denominador no se anula para ningún valor real de "x"), el trabajo con $h(x) = \sqrt[6]{(x-5)/(x^6+4)}$ es inofensivo en los puntos "x" tales que $w(x) > 0$. La expresión matemática de $w(x) = (x - 5)/(x^6 + 4)$ es lo bastante tonta como para que el estudio del signo del número real $(x - 5)/(x^6 + 4)$ sea fácil: para todo "x" es $x^6 + 4 > 0$, por lo que el signo de $w(x) = (x - 5)/(x^6 + 4)$ es el mismo que tiene su numerador $x - 5$, que es positivo sólo si $x > 5$.

abrir panel

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x) = \sqrt[par]{u(x)}$ en el punto "c" sea inofensivo en lo referido a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo referido a la "derivabilidad".*** Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

## 5) Las funciones logarítmicas

- ***Son de la forma $f(x) = \log_k u(x)$, $k > 0$, $k \neq 1$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas en el punto "c" si la función "u" es inofensiva en dicho punto y además es u(c) >0; son peligrosas en el punto "c" si la función "u" es peligrosa en "c" o si u(c) ≤0,*** pues si $u(c) \leq 0$, en "c" se viola la tercera Regla Sagrada:

$$\log_k(\text{número no positivo}) \notin \Re$$

> ***Observa:*** el signo del número real $u(x)$ tiene protagonismo estelar a la hora de evaluar la peligrosidad que en cada punto "x" tiene el trabajo ("límite" y "continuidad") con la función $f(x) = \log_k u(x)$. Si la expresión matemática de $u(x)$ es tontorrona será muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo es peligroso; a medida que se complique la expresión matemática de $u(x)$ se complicará la detección de los puntos peligrosos.

***Por ejemplo,*** como el polinomio $u(x) = x + 3$ es inofensivo en todo punto, el trabajo con $f(x) = \log_5 (x+3)$ es inofensivo en todos los puntos "x" tales que $u(x) > 0$ $(\Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3)$, y es peligroso en los puntos "x" tales que $u(x) \leq 0$ $(\Rightarrow x + 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3)$. El que la expresión matemática de $u(x)$ sea tontorrona hace que sea muy sencillo determinar los puntos en que el trabajo con $f(x) = \log_k u(x)$ es peligroso.

***Por ejemplo,*** como el cociente de polinomios $v(x) = x/(x^2 - 4)$ es peligroso sólo en los puntos $x = 2$ y $x = -2$ en que se anula su denominador, el trabajo con $g(x) = \log_9 x/(x^2 - 4)$ es peligroso en dichos puntos y en todo punto "x" tal que $v(x) \leq 0$. Pero la expresión matemática de $v(x) = x/(x^2 - 4)$ es lo bastante complicada como para que, con lo que sabemos, nos resulte imposible determinar <u>todos</u> los puntos "x" que satisfacen la condición $v(x) = x/(x^2 - 4) \leq 0$. No obstante, es muy fácil analizar lo que sucede en cada punto concreto; así, por ejemplo, el trabajo con $g(x) = \log_9 x/(x^2 - 4)$ es inofensivo en el punto $x = 5$, pues en dicho punto es $v(5) = 5/(5^2 - 4) > 0$; sin embargo, es peligroso en $x = 1$, pues $v(1) = 1/(1^2 - 4) < 0$.


***Por ejemplo,*** como el cociente de polinomios $w(x) = (5-x)/(x^2+4)$ es inofensivo en todo punto (pues su denominador no se anula en ningún punto), el trabajo con $h(x) = \mathrm{Ln}\,(5-x)/(x^2+4)$ sólo es inofensivo en los puntos "x" tales que $w(x) > 0$. La expresión matemática de $w(x) = (5-x)/(x^2+4)$ es lo bastante tonta como para que el estudio del signo del número real $(5-x)/(x^2+4)$ sea fácil: para todo real de "x" es $x^2+4>0$; por tanto, el signo de $w(x) = (5-x)/(x^2+4)$ es el que tiene su numerador $5-x$, que es positivo sólo si $x<5$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x) = \log_k u(x)$ en el punto "c" sea inofensivo en lo referido a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo referido a la "derivabilidad".*** No hay un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

# LOS LOGARITMOS

- Se dice que el número real "a" es el logaritmo en base "k" $(k>0,\ k\neq 1)$ del número real positivo "b" si $k^a = b$; o sea: $\log_k b = a \Leftrightarrow k^a = b$
- Se dice que el logaritmo es ***decimal*** si la base "k" es el número 10. Si la base es el número irracional "e" $(e \cong 2'7182818)$, se dice que el logaritmo es ***neperiano,*** y se denota "Ln", o sea: $\mathrm{Ln}\, b = a \Leftrightarrow e^a = b$.
- ***Propiedades:***

$$\log_k 1 = 0 \ ; \ \log_k k = 1 \ ; \ \log_k k^c = c \ ; \ \log_k b^c = c.\log_k b$$

$$\log_k (m.n) = (\log_k m) + (\log_k n) \ ; \ \log_k (m/n) = (\log_k m) - (\log_k n)$$

$$\text{Cambio de base: } \log_{k_1} m = \frac{\log_{k_2} m}{\log_{k_2} k_1}$$

$$\log_k 0^+ = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0<k<1 \\ -\infty & \text{si } k>1 \end{cases}$$

Al escribir $0^+$ nos referimos a un número muy próximo a cero pero positivo; o sea, si un número positivo es enormemente próximo a 0, su logaritmo es bestialmente positivo si la base "k" es menor que 1, y bestialmente negativo si "k" es mayor que 1

abrir panel

## 6) Las funciones exponenciales

- ***Son de la forma $f(x) = k^{u(x)}$, siendo $k > 0$; en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", son inofensivas o peligrosas en el punto "c" según que la función "u" sea inofensiva o peligrosa en dicho punto.***

  ***Por ejemplo,*** la función $u: \Re \mapsto \Re$ tal que $u(x) = x \equiv$ polinomio es inofensiva en todo punto; por tanto, el trabajo con $f(x) = 3^x$ es inofensivo en todo punto.

  ***Por ejemplo,*** la función $v: \Re \mapsto \Re$ definida como $v(x) = 1/x \equiv$ cociente de polinomios es peligrosa sólo en el punto $x = 0$ en que se anula su denominador; por tanto, el trabajo con $g(x) = 5^{1/x}$ sólo es peligroso en dicho punto.

  ***Por ejemplo,*** la función $w: \Re \mapsto \Re$ tal que $w(x) = \sqrt{x}$ es inofensiva si $x > 0$; por tanto, el trabajo con $h(x) = 2^{\sqrt{x}}$ es inofensivo si $x > 0$.

- ***Puede ocurrir que el trabajo con $f(x) = k^{u(x)}$ en el punto "c" sea inofensivo en lo referido a los asuntos de "límite" y "continuidad" pero sea peligroso en lo referido a la "derivabilidad".*** No hay un criterio general de peligrosidad para los trabajos relacionados con la "derivabilidad".

## 7) El peligro de las sumas y restas

- ***Si la función "f" es el resultado sumar o restar otras funciones, el trabajo con "f" en el punto "c" es inofensivo si todos los sumandos son inofensivos en dicho punto, y es peligroso si algún sumando es peligroso en "c".***

  ***Por ejemplo,*** siendo $f: \Re \mapsto \Re$ tal que

  $$f(x) = x^2 - \frac{4}{x - \pi} + 5^{1/x} + \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{1 - x^4} - \log_3 (x+5)$$

  como:

  $*\ u(x) = x^2 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

  $*\ v(x) = 4/(x - \pi) \equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva si $x \neq \pi$

  $*\ w(x) = 5^{1/x} \equiv 5^{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensiva si $x \neq 0$

  $*\ h(x) = \sqrt{x+3} \equiv \sqrt[\text{par}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva si $x + 3 > 0$ ($\Rightarrow x > -3$)

  $*\ g(x) = \sqrt[3]{1 - x^4} \equiv \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

  $*\ t(x) = \log_3 (x+5) \equiv \log_3$ (polinomio) $\Rightarrow$ inofensiva si $x + 5 > 0$ ($\Rightarrow x > -5$)

  resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" será inofensivo en el punto "x" si $x \neq 0, x \neq \pi, x > -3$ y $x > -5$ (o sea, si $x > -3$ siendo $x \neq 0$ y $x \neq \pi$), y será peligroso en los demás puntos.

abrir panel

## 8) El peligro del producto

- ***Si la función "f" es el resultado multiplicar diversas funciones, el trabajo con "f" en el punto "c" es inofensivo si todos los factores son inofensivos en dicho punto, y es peligroso si algún factor es peligroso en "c".***

***Por ejemplo,*** siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \frac{x}{3-x}.e^x.\log_6(x-7)$, como:

$*\ u(x) = x/(3-x) \equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva si $x \neq 3$

$*\ v(x) = e^x \equiv e^{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x \in \Re$

$*\ h(x) = \log_6(x-7) \equiv \log_6(\text{polinomio}) \Rightarrow$ inofensiva si $x - 7 > 0$ $(\Rightarrow x > 7)$

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" será inofensivo en el punto "x" si $x \neq 3$ y $x > 7$ (o sea, si $x > 7$), y será peligroso en los demás puntos.

***Por ejemplo,*** si $f:\Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \frac{x}{4-x^2}.\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}.9^{1/x}$, como:

$*\ u(x) = x/(4-x^2) \equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva si $x \neq \pm 2$

$*\ v(x) = \sqrt[3]{1/(x-1)} \equiv \sqrt[\text{impar}]{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensiva si $x \neq 1$

$*\ h(x) = 9^{1/x} \equiv 9^{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensiva si $x \neq 0$

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" será peligroso solo si $x = \pm 2$, $x = 1$ y $x = 0$, y será inofensivo en los demás puntos.

***Por ejemplo,*** siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \frac{x}{4+x^2}.7^{1/(2+x^2)}$, como:

$*\ u(x) = x/(4+x^2) \equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el denominador no se anula para ningún valor real de "x".

$*\ v(x) = 7^{1/(1+x^2)} \equiv 7^{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el denominador no se anula para ningún valor real de "x".

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo en todo punto.

***Por ejemplo,*** siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = x^2.\sqrt{4+x^6}$, como:

$*\ u(x) = x^2 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x \in \Re$

$*\ v(x) = \sqrt{4+x^6} \equiv \sqrt[\text{par}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el polinomio $4 + x^6$ sólo toma valores positivos.

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo en todo punto.

# 9) El peligro de la división

- ***Si la función "f" es el cociente entre las funciones "u" y "v" (o sea, es $f(x) = u(x)/v(x)$), el trabajo con "f" es inofensivo en el punto "c" si el numerador $u(x)$ y el denominador $v(x)$ son inofensivos en "c" y además el denominador no se anula en dicho punto; es peligroso si el numerador o el denominador son peligrosos en "c" o el denominador se anula en dicho punto*** (violación de la primera Regla Sagrada).

***Por ejemplo,*** siendo $f: \Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \dfrac{x^3}{3^{x+2} - 1}$, como:

* $u(x) = x^3 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todo punto

* $v(x) = 3^{x+2} - 1 \equiv$ suma de la constante $-1$ (inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues una constante es un polinomio de grado cero) y de la función exponencial $3^{x+2}$ (inofensiva en todos los puntos, pues el exponente $x + 2$ es un inofensivo polinomio) $\Rightarrow v(x) = 3^{x+2} - 1$ es inofensiva en todo punto.

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con $f(x) = u(x)/v(x)$ sólo es peligroso en los puntos que anulen el denominador:

$$3^{x+2} - 1 = 0 \Rightarrow 3^{x+2} = 1 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

***Por ejemplo,*** siendo $f: \Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \log_5 (4 - x)}{x^2 - 9}$, como:

* $u(x) = x^2 - 1 + \log_5 (4 - x) \equiv$ suma del polinomio $x^2 - 1$ (inofensivo en todos los puntos) y de la función logarítmica $\log_5 (4 - x) \equiv \log_5$ polinomio que es peligrosa sólo si $4 - x \leq 0 \Rightarrow u(x) = x^2 - 1 + \log_5 (4 - x)$ es peligrosa sólo si $4 - x \leq 0$.

* $v(x) = x^2 - 9 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todo punto

resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con $f(x) = u(x)/v(x)$ es peligroso en el punto "x" si $4 - x \leq 0$ ($\Rightarrow x \geq 4$) o si $x = \pm 3$ (puntos que anulan el denominador: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$).

***Por ejemplo,*** siendo $f: \Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \dfrac{2^x . \sqrt[5]{1 + x^3}}{x^6 + 7}$, como:

* $u(x) = 2^x . \sqrt[5]{1 + x^3} \equiv 2^{\text{polinomio}} . \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

* $v(x) = x^6 + 7 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensiva en todos los puntos

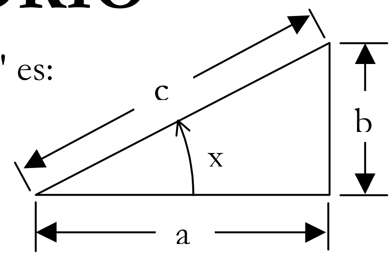
resulta que, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con $f(x) = u(x)/v(x)$ es inofensivo en todo punto, pues el denominador $v(x) = x^6 + 7$ no se anula para ningún valor real de "x".

# 10) Las funciones trigonométricas o "circulares"

## RECORDATORIO

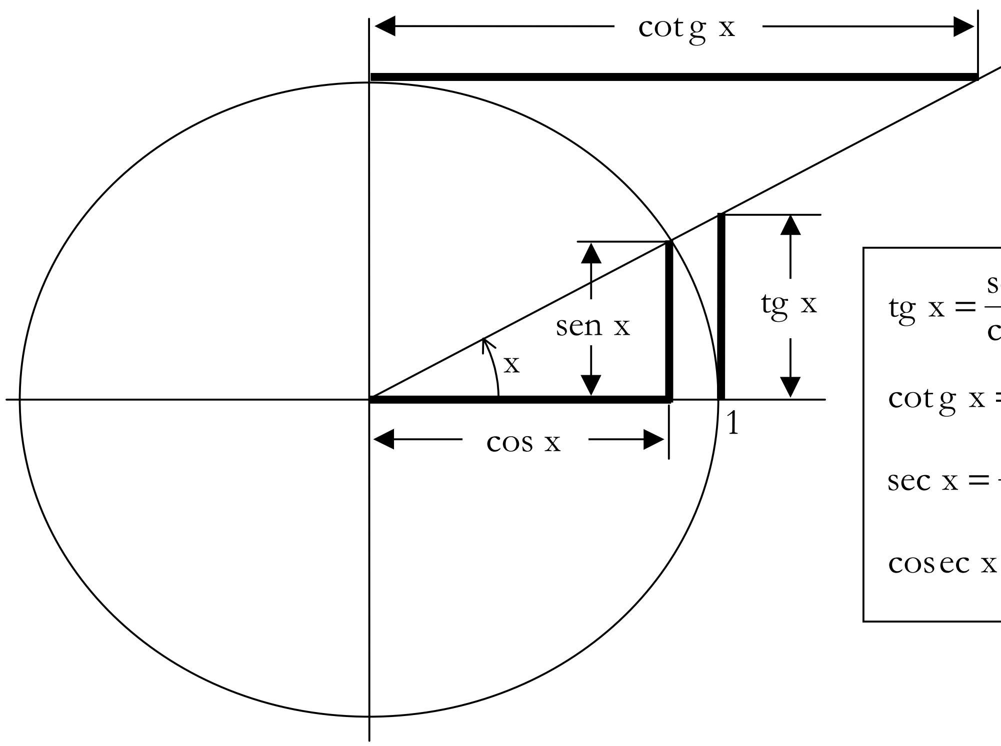
- En un triángulo rectángulo, para el ángulo "x" es:

$$\text{sen } x = b/c \;\; ; \;\; \text{cosec } x = 1/\text{sen } x$$
$$\cos x = a/c \;\; ; \;\; \sec x = 1/\cos x$$
$$\text{tg } x = b/a \;\; ; \;\; \text{cotg } x = 1/\text{tg } x$$




## EL CIRCULO GONIOMÉTRICO

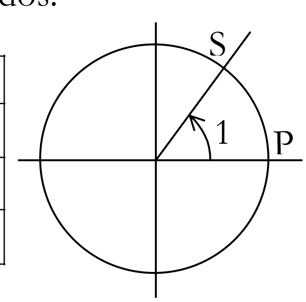
- En un circulo de radio 1, para el ángulo "x" es:




$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$
$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

***Los ángulos siempre se miden en radianes:*** un radián es el ángulo tal que la longitud del arco $\widehat{PS}$ coincide con el radio de la circunferencia. La circunferencia (360 grados) tiene $2.\pi$ radianes; por tanto, expresado en grados, un radián corresponde a $360/(2.\pi) \cong 57'29578$ grados.

| Grados | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 | 270 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi$ | $3.\pi/2$ | $2.\pi$ |
| seno | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| coseno | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |



abrir panel

- ***Si "f" es de la forma $f(x)=\text{sen } u(x)$ ó $f(x)=\cos u(x)$, en lo que se refiere a los asuntos de "límite" y "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo o peligroso en el punto "c" según que la función "u" sea inofensiva o peligrosa en dicho punto. Para las restantes funciones trigonométricas basta tener en cuenta los peligros inherentes a toda división, y saber que, siendo "k" un número entero cualquiera, es:***

$$\text{sen } u(x)=0 \Rightarrow u(x)=k.\pi$$
$$\cos u(x)=0 \Rightarrow u(x)=(2.k+1).\frac{\pi}{2}$$

***Por ejemplo,*** siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\text{sen }(1+x^2)$, la función "f" es inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el polinomio $u(x)=1+x^2$ es inofensivo $\forall\ x \in \Re$.

***Por ejemplo,*** siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\cos(2-x^3)$, la función "f" es inofensiva $\forall\ x \in \Re$, pues el polinomio $u(x)=2-x^3$ es inofensivo $\forall\ x \in \Re$.

***Por ejemplo,*** siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\text{sen }(\text{Ln } x)$, la función "f" sólo es peligrosa si $x \le 0$, pues $u(x)=\text{Ln } x$ sólo es peligrosa si $x \le 0$.

***Por ejemplo,*** siendo $f(x)=\cos 3^{1/x}$, la función "f" sólo es peligrosa en el punto $x=0$, pues $u(x)=3^{1/x}$ sólo es peligrosa en dicho punto.

***Por ejemplo,*** siendo $f(x)=\text{tg }(x-1)=(\text{sen }(x-1))/(\cos(x-1))$, como el numerador y el denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en aquellos puntos "x" en que se anula el denominador: $\cos(x-1)=0 \Rightarrow x-1=(2.k+1).\pi/2 \Rightarrow x=1+(2.k+1).\pi/2$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

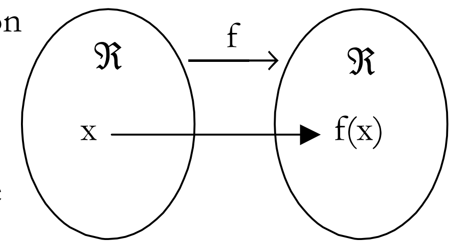
***Por ejemplo,*** siendo $f(x)=\text{cotg } x=(\cos x)/(\text{sen } x)$, como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos "x" que anulen al denominador: $\text{sen } x=0 \Rightarrow\ x=k.\pi$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

***Por ejemplo,*** siendo tal que $f(x)=\sec 2.x=1/(\cos 2.x)$, como el numerador y el denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos "x" en que se anule el denominador: $\cos 2.x=0 \Rightarrow$ $2.x=(2.k+1).\pi/2 \Rightarrow x=(2.k+1).\pi/4$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

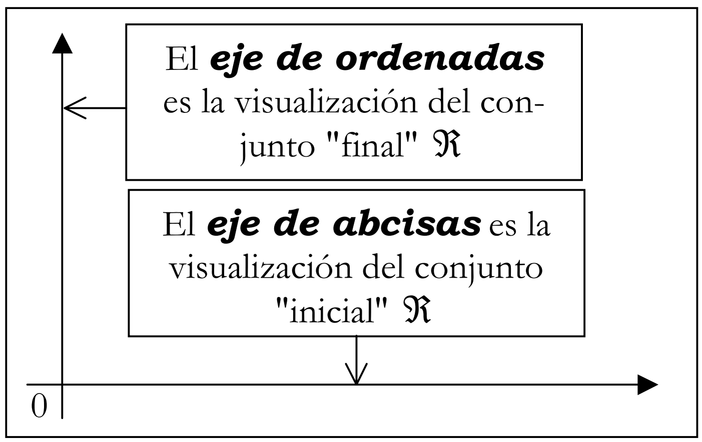
***Por ejemplo,*** si $f(x)=\text{cosec }(x-3)=1/(\text{sen }(x-3))$, como el numerador y el denominador son inofensivos en todo punto, "f" sólo es peligrosa en los puntos "x" que anulen al denominador: $\text{sen }(x-3)=0 \Rightarrow x-3=k.\pi \Rightarrow x=3+k.\pi$, donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

# 1.14 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

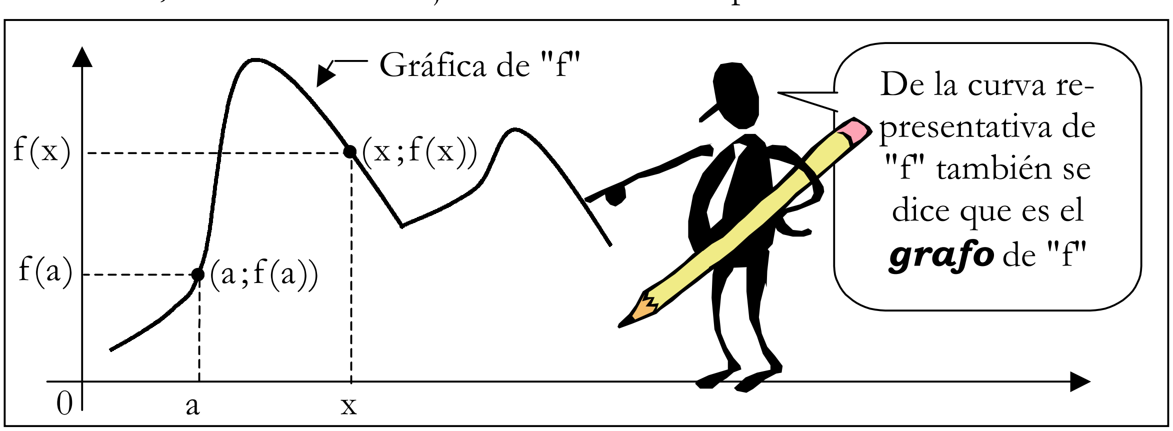
Puesto que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es simplemente un criterio o ley que asocia números reales con números reales, en la visualización de "f" tendrá gran protagonismo la visualización del conjunto $\Re$ de los números reales, que en nuestra historia desempeña dos papeles a la vez, pues hace el papel de conjunto "inicial" de "f" y también hace el papel de conjunto "final" de "f".



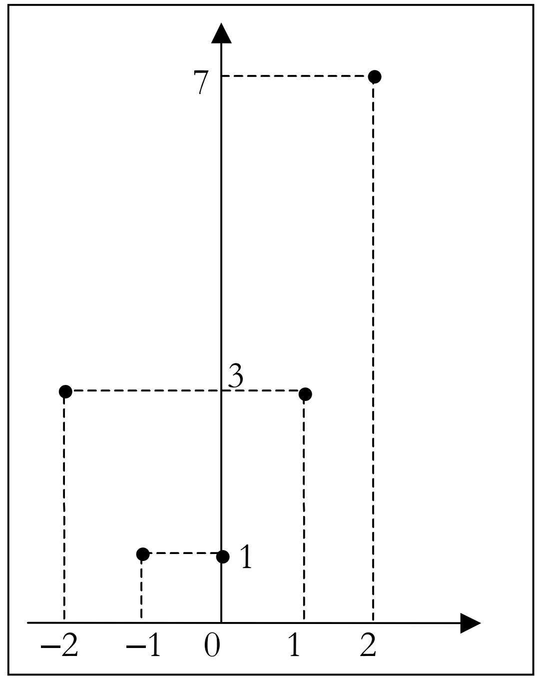

***Llamamos "eje de abcisas" a la recta elegida para visualizar el conjunto "inicial", y llamamos "eje de ordenadas" a la recta elegida para visualizar el conjunto "final".*** Por comodidad, siempre consideraremos que el eje de abcisas y el de ordenadas son perpendiculares y que su punto de corte es el que corresponde al número cero en cada eje.




***La representación gráfica de una función real de variable real es una curva plana.*** En efecto, si "x" es un número real del conjunto "inicial" y "f(x)" es el número real del conjunto "final" que la función $f:\Re \mapsto \Re$ asocia a "x", es claro que los números reales "x" y "f(x)" determinan de manera inequívoca un punto del plano: el punto que tiene coordenadas $(x;f(x))$. Por tanto, si asignásemos a "x" los infinitos valores que puede tomar y fuésemos posicionando en el plano los infinitos puntos $(x;f(x))$ que se van obteniendo, al final nuestros ojos verían una curva plana.



El Cálculo Diferencial no se ha inventado para fastidiar a nadie, se ha inventado porque es una herramienta eficacísima para resolver infinidad de problemas de la vida real. Aunque es prematuro hablar de esos problemas, conviene que sientas que el Cálculo Diferencial sirve para algo; por eso, y ***hasta que abordemos problemas de la vida real, debes considerar que la finalidad del Cálculo Diferencial es la representación gráfica de funciones***. En consecuencia, debes entender que los conceptos que introduciremos en los próximos temas son las herramientas necesarias para ser eficaces al representar la gráfica de una función $f:\Re \mapsto \Re$ con la que se está trabajando ..... porque no puedes ir por la vida representando funciones "punto a punto", como hacías en cursos anteriores, cuando, para que te acostumbraras a posicionar puntos en un sistema de referencia plano y rectangular, tu profesor te daba, por ejemplo, la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = x^2 + x + 1$ y te pedía que ubicaras en el plano unos pocos puntos por los que "pasa" la gráfica de esa función:




| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3 | 1 | 1 | 3 | 7 |

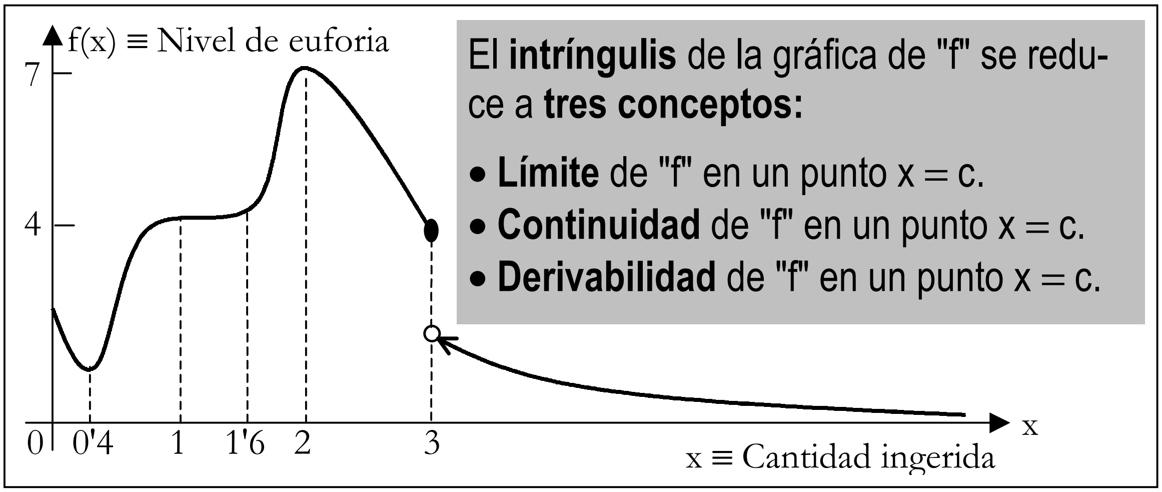
- ***Pregunta:*** ¿por qué nos da la neurosis por representar curvas?

- ***Respuesta:*** nos da la neurosis de representar curvas porque la curva representativa de la función $f:\Re \mapsto \Re$ nos permite tener una visión global del **fenómeno gobernado** por "f".

- ***Pregunta:*** ¿qué es eso del **fenómeno gobernado** por "f"?

- ***Respuesta:*** el Cálculo Diferencial nació ligado a la "Física" que preocupaba a los seres humanos de principios del siglo XVII, pues fueron los grandes físicos de la época los que lo "inventaron" para poder hincarle el diente a **fenómenos** como el del movimiento de los planetas o el de la transmisión del calor; pero desde entonces ha llovido mucho, y para contestar la pregunta planteada podemos poner ejemplos de **fenómenos** que nada tienen que ver con la Física.

***Por ejemplo,*** piensa en el **fenómeno** de la ingesta de cerveza y su influencia en tu nivel de euforia; en concreto, considera que el número real "x" expresa en litros la cantidad de cerveza que bebes un día de juerga y que $f:\Re \mapsto \Re$ es la función que determina o gobierna tu nivel de euforia "$f(x)$" cuando la cantidad ingerida de cerveza es "x". Así las cosas, considera que la gráfica de la función "f" es la representada en la siguiente figura.




El **intríngulis** de la gráfica de "f" se reduce a **tres conceptos:**

- **Límite** de "f" en un punto $x = c$.
- **Continuidad** de "f" en un punto $x = c$.
- **Derivabilidad** de "f" en un punto $x = c$.

A la vista de la gráfica de "f" podemos hacernos una idea global del **fenómeno:** cuando no bebes $(x = 0)$ tu nivel de euforia es 2. Los primeros tragos te deprimen un poco, pues tu nivel de euforia va **disminuyendo** hasta que la cantidad ingerida es 0'4, pero a partir de ahí la cosa cambia, pues el nivel de euforia empieza a **crecer** hasta que alcanza una zona de **meseta** entorno al nivel de euforia 4. La meseta se mantiene hasta que la cantidad ingerida llega a 1'6, que marca el inicio de un subidón que alcanza su **máximo** cuando la cantidad ingerida es 2 ..... y a partir de entonces anda con ojo, porque tu euforia comienza a **disminuir** si sigues bebiendo, y con la gota de cerveza que colme los 3 litros tu euforia se **desplomará** muy bruscamente, lo que puede producirte mareos y desagradables vómitos. Si te empecinas y sigues bebiendo, tu euforia seguirá disminuyendo, **aproximándose** al nivel cero, que es el de las piedras.

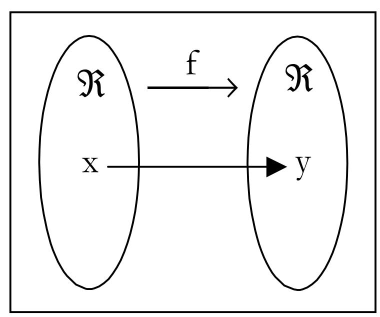
# ***Muy importante: otras notaciones***

A veces se está trabajando con una función $f: \Re \mapsto \Re$ y, para abreviar, se denota "y" al número real "f(x)" que "f" tiene a bien asociar a "x". ***Por ejemplo,*** en vez de escribir

$$f(x) = 3.x - 1 \;;\; f(x) = x.\text{Ln}\, x \;;\; f(x) = \text{sen}\, x^2$$

se escribe

$$y = 3.x - 1 \;;\; y = x.\text{Ln}\, x \;;\; y = \text{sen}\, x^2$$




***Esta notación no es recomendable para los principiantes, porque con ella es más fácil que se les despiste lo esencial, y lo esencial ahora es asimilar que tras la notación "f(x)" hay 5 protagonistas*** (a saber: el conjunto $\Re_{\text{inicial}}$, el $\Re_{\text{final}}$, la correspondencia "f" que asocia elementos de $\Re_{\text{inicial}}$ con elementos de $\Re_{\text{final}}$, el número $x \in \Re_{\text{inicial}}$ y el número $f(x) \in \Re_{\text{final}}$ que "f" tiene a bien asociar a "x"), ***y que nuestro cerebro debe ser capaz de estar pendiente de los cinco simultáneamente.***

# 1.15 LAS RECTAS Y LAS PARÁBOLAS

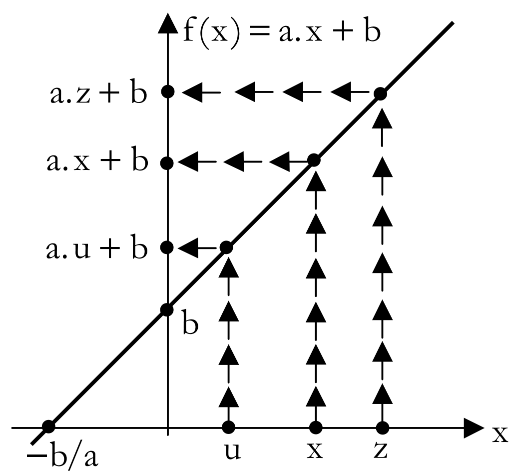
**_Las rectas y parábolas son las "curvas" más famosas; las encontrarás hasta en la sopa_**

***La gráfica de un polinomio de grado no superior a uno es una recta*** (no perpendicular al eje de abcisas). ***De otro modo:*** toda recta no perpendicular al eje de abcisas es la gráfica de una función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = a.x + b$, donde "a" y "b" son constantes.

Sea cual sea el valor de "a", sucede que $f(0) = a.0 + b = b$, por lo que la recta "corta" al eje de ordenadas en el punto "b"; de "b" se dice que es la ***ordenada de la recta en el origen.*** La recta corta al eje de abcisas en el punto "x" tal que $f(x) = 0$:

$$f(x) = a.x + b = 0 \Rightarrow x = -b/a$$

Del número $-b/a$ se dice que es la ***abcisa de la recta en el origen.***



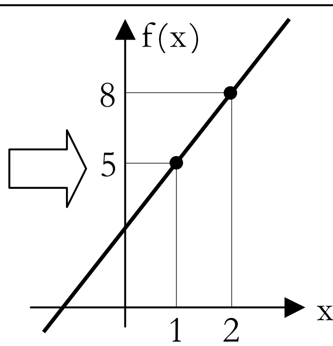

***Para dibujar una recta basta "posicionar" dos puntos de ella. Por ejemplo,*** para dibujar la recta $f(x) = 2 + 3.x$, los pardillos posicionan dos puntos cualquiera de ella:

$$\begin{cases} \text{si } x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 + 3.1 = 5 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (1;5) \\ \text{si } x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 + 3.2 = 8 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (2;8) \end{cases}$$

Pero los que no se chupan el dedo dibujan la recta calculando su abcisa y su ordenada en el origen, pues así tardan menos:

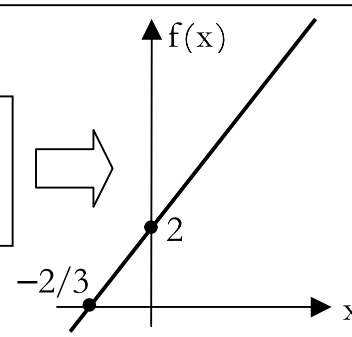
$$\begin{cases} \text{si } x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 + 3.0 = 2 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (0;2) \\ \text{si } f(x) = 2 + 3.x = 0 \Rightarrow x = -2/3 \Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (-2/3;0) \end{cases}$$

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 8 |



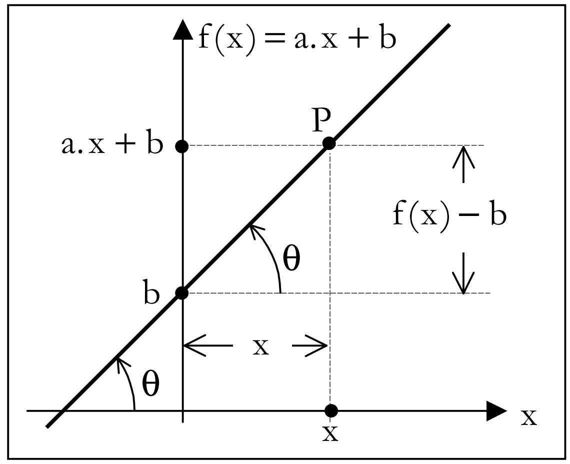

**PARDILLO**

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 2 |
| −2/3 | 0 |




**PROFESIONAL**

# Si una función "f" es un polinomio de grado uno, también se dice que "f" es una función "lineal"



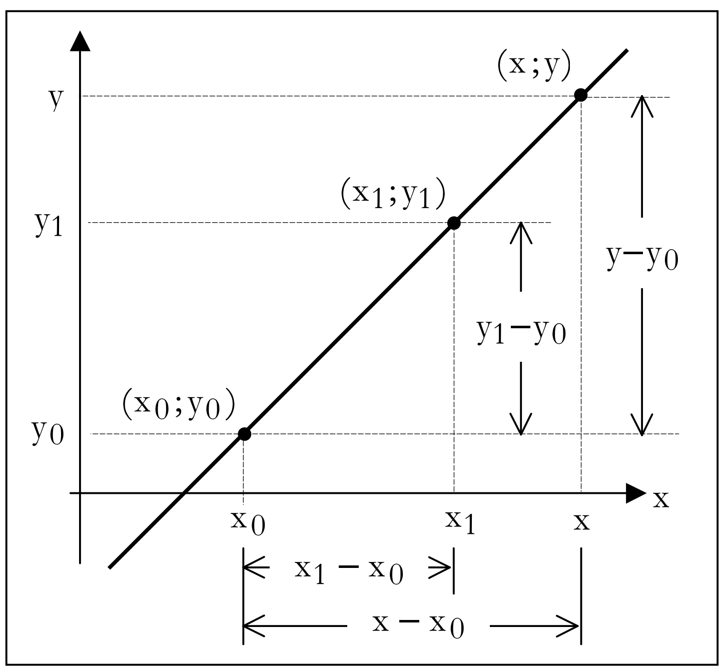

Como en el lenguaje matemático las palabras "lineal" y "proporcional" son sinónimas, sin duda te preguntas dónde está la "proporcionalidad" en esta historia.

***Fíjate:*** si $P=(x;f(x))$ es un punto genérico de una recta, como $f(x)=a.x+b$, sucede que $f(x)-b=a.x$; o sea, la diferencia $f(x)-b$ entre la ordenada "$f(x)$" del punto "P" y la ordenada "b" de la recta en el origen es proporcional a la abcisa "x" de "P". Si miras la figura podrás comprobar que la constante de proporcionalidad (o sea, "a") coincide con la tangente del ángulo "$\theta$" que la recta forma con la dirección positiva del eje de abcisas:

$$f(x)-b=a.x \Rightarrow \frac{f(x)-b}{x}=a=\operatorname{tg}\theta$$

De "a" se dice que es la ***pendiente*** de la recta. Observa: si $a=0 \Rightarrow \theta=0 \Rightarrow$ la recta es paralela al eje de abcisas (o también: $a=0 \Rightarrow f(x)=b \equiv \text{constante}$).

## *Recta que pasa por dos puntos conocidos*




Si $(x;y)$ son las coordenadas de un punto genérico de la recta que pasa por los puntos $(x_0;y_0)$ y $(x_1;y_1)$, de la figura, por semejanza de triángulos, se deduce que:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

***Por ejemplo,*** para la recta que pasa por los puntos (2;3) y (5;–6), es:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-3}{-6-3} \Rightarrow y=9-3.x$$

Así, la expresión matemática de la función lineal $f:\Re \mapsto \Re$ cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos (2;3) y (5;–6), es $f(x)=9-3.x$.

## Recta que pasa por un punto conocido con pendiente conocida

Si $(x;f(x))$ son las coordenadas de un punto genérico de la recta que pasa por el punto conocido $(m;n)$ y tiene pendiente conocida "a", la expresión matemática de la función lineal $f:\Re \mapsto \Re$ cuya gráfica es dicha recta es $f(x) = a.x + b$; el valor de "b" se determina al exigir la recta pase por $(m;n)$, o sea, al exigir que $f(m) = n$:

$$f(m) = n \Rightarrow a.m + b = n \Rightarrow b = n - a.m \Rightarrow f(x) = a.x + n - a.m \Rightarrow$$

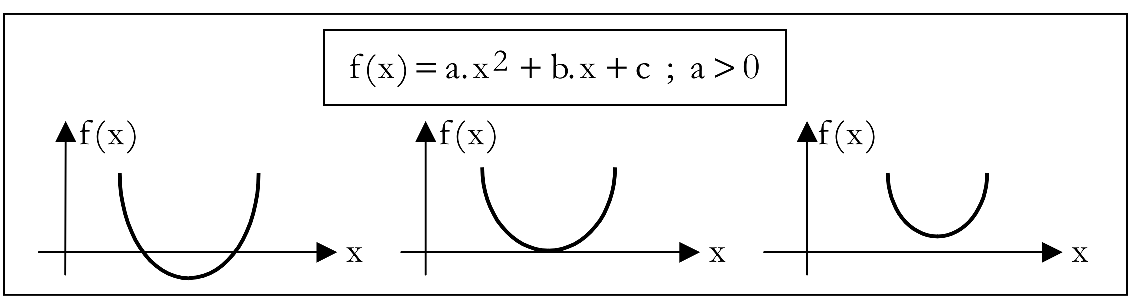
$$\boxed{\text{sustituimos "b" por "}n - a.m\text{" en } f(x) = a.x + b}$$

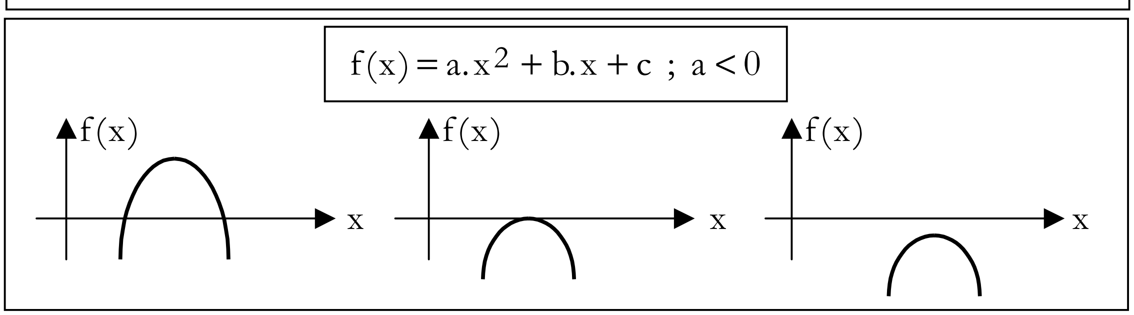
$$\Rightarrow f(x) = n + a.(x - m)$$

***Por ejemplo***, la expresión matemática de la función lineal $f:\Re \mapsto \Re$ que pasa por el punto $(6;-4)$ y tiene pendiente 3 es $f(x) = -4 + 3.(x - 6) = 3.x - 22$, y la expresión matemática de la función lineal $g:\Re \mapsto \Re$ que pasa por el punto $(-5;7)$ y tiene pendiente $-4$ es $g(x) = 7 - 4.(x - (-5)) = -4.x - 13$.

***La gráfica de un polinomio de grado 2 es una parábola;*** o sea, es una parábola la gráfica de toda función $f:\Re \mapsto \Re$ cuya expresión matemática sea $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, siendo "a", "b" y "c" constantes y $a \neq 0$. La parábola tiene sus ***"cuernos" hacia arriba o hacia abajo según que "a" sea positivo o negativo*** ..... y las soluciones de $a.x^2 + b.x + c = 0$ nos dirán si la parábola y el eje de abcisas se "tocan" o no:

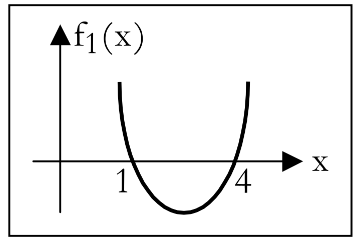
1) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas $x = x_0$ y $x = x_1$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.
2) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ tiene una raíz real doble $x = x_0$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.
3) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



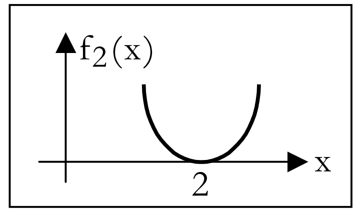



***Ejemplos:***

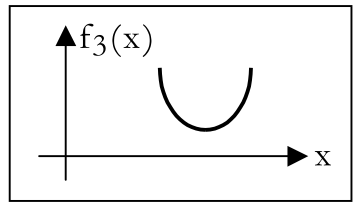
1) La gráfica de $f_1 : \Re \mapsto \Re$ tal que $f_1(x) = x^2 - 5.x + 4$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo); como las soluciones de $x^2 - 5.x + 4 = 0$ son reales y distintas $(x = 1,\ x = 4)$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.



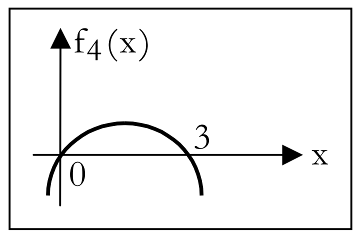

2) La gráfica de $f_2 : \Re \mapsto \Re$ tal que $f_2(x) = x^2 - 4.x + 4$ es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo); como la ecuación $x^2 - 4.x + 4 = 0$ tiene una raíz real doble $(x = 2)$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.



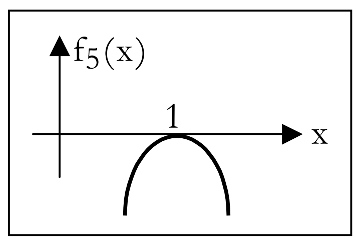

3) La gráfica de $f_3 : \Re \mapsto \Re$ tal que $f_3(x) = x^2 + x + 5$ es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo); como la ecuación $x^2 + x + 5 = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



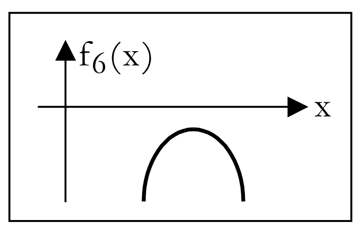

4) La gráfica de $f_4 : \Re \mapsto \Re$ tal que $f_4(x) = -x^2 + 3.x$ es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es negativo); como las soluciones de $-x^2 + 3.x = 0$ son reales y distintas $(x = 0$ y $x = 3)$ la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.




5) La gráfica de la función $f_5 : \Re \mapsto \Re$ definida como $f_5(x) = -x^2 + 2.x - 1$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo (el coeficiente de $x^2$ es negativo); como $-x^2 + 2.x - 1 = 0$ tiene una raíz real doble $(x = 1)$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.




6) La gráfica de la función $f_6 : \Re \mapsto \Re$ definida como $f_6(x) = -x^2 + x - 7$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es negativo); como la ecuación $-x^2 + x - 7 = 0$ no tiene raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.




Si la parábola no "toca" al eje de abcisas (ejemplos 3 y 6) nos quedamos con el culo al aire. En su momento veremos que el punto en que la parábola $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ presenta su máximo (o mínimo) es $x = -b/2.a$; así, la parábola $f_3(x) = x^2 + x + 5$ presenta su mínimo en el punto $x = -1/2$, y la parábola $f_6(x) = -x^2 + x - 7$ presenta su máximo en el punto $x = 1/2$.

abrir panel

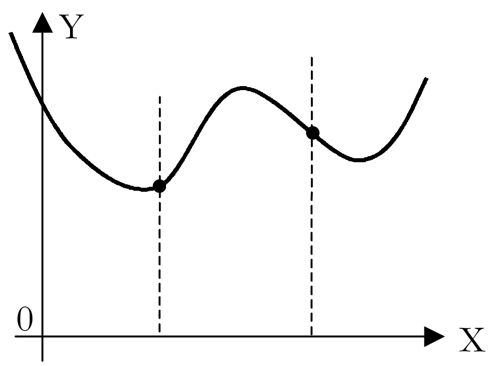
# 1.16 FUNCIONES UNIFORMES

Se dice que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es ***uniforme*** si cada número real "x" del conjunto inicial que tiene imagen en el conjunto final, tiene una única imagen.

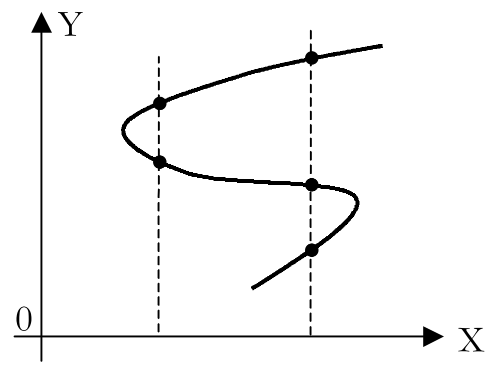
***Por ejemplo,*** la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = 1 + x^2$ es uniforme, pues cada número real "x" que tiene imagen en el conjunto final $\Re$ tiene una única imagen. Sin embargo, no es uniforme la función $g:\Re \mapsto \Re$ tal que $(g(x))^2 = 1 + x^2$, pues $(g(x))^2 = 1 + x^2 \Rightarrow g(x) = \pm\sqrt{1 + x^2}$, lo que indica que cada número real "x" que tiene imagen en el conjunto final $\Re$ tiene dos imágenes; así:

$$g(7) = \pm\sqrt{1 + 7^2} = \pm\sqrt{50} \;\; ; \;\; g(-4) = \pm\sqrt{1 + (-4)^2} = \pm\sqrt{17}$$

El 99'9 % de las funciones con que trabajaremos serán uniformes.



Gráfica de una función uniforme



Gráfica de una función no uniforme

Si la función $f:\Re \mapsto \Re$ es uniforme, las rectas paralelas al eje OY no cortan o cortan en un único punto a la curva representativa de "f"; si "f" no es uniforme hay rectas paralelas al eje OY que cortan a dicha curva en dos o más puntos.

# 1.17 FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

Se dice que una función "f" es ***algebraica*** si las operaciones que deben realizarse para calcular el número "f(x)" son las llamadas algebraicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente constante y radicación de índice constante. Se dice que "f" es ***trascendente*** si no es algebraica.

***Por ejemplo,*** son algebraicas las funciones tales que:

$$f(x) = x^3 - 3.x \;\; ; \;\; f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} \;\; ; \;\; f(x) = \sqrt[3]{x/(1 + x)} \;\; ; \;\; f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{1 - \sqrt[5]{2 + x}}$$

pues en los cuatro casos sucede que las operaciones que deben realizarse para calcular el número "f(x)" son las algebraicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente constante y radicación de índice constante. Son trascendentes las funciones $f(x) = 2^{3.x+1}$, $f(x) = \log_6 (x + 1)$, $f(x) = \text{sen } x^2$.

# 1.18 DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Si $f:\Re \mapsto \Re$ es la función cuya gráfica se quiere dibujar y "a" es un número real del conjunto "inicial", puede suceder que "f" no asigne imagen en el conjunto "final" al número "a", lo que en términos geométricos significa que no hay curva en la vertical del punto "a" (es decir, la recta de ecuación $x = a$, que es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto "a" no tiene ningún contacto con la curva representativa de "f"). Por eso, si nuestro trabajo es representar la gráfica de "f", se entiende que la primera preocupación siempre sea la misma: determinar cuáles son los números reales del conjunto "inicial" a los que "f" sí les asigna imagen y cuáles son los pobrecitos desgraciados a los que "f" no les asigna imagen. Para dar respuesta a esta preocupación el Cálculo Diferencial inventa lo que llama ***dominio de definición*** de "f" (se denota $\text{Dom.}f$), que es el subconjunto de $\Re_{\text{inicial}}$ que forman los números reales a los que la función "f" sí les asigna imagen; es decir: $\text{Dom.}f = \{x \in \Re_{\text{inicial}} \,/\, f(x) \in \Re_{\text{final}}\}$. Si $f(a) \in \Re$ se dice que la función "f" está definida en el punto "a", y si $f(a) \notin \Re$ se dice que "f" no está definida en dicho punto.

**DE PEROGRULLO**

***La función "f" no está definida en el punto "a" si para calcular "f(a)" hay que violar alguna Regla Sagrada del Cálculo***

***Por ejemplo,*** si $f:\Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = x/(x-4)$, entonces "f" está definida en el punto "6", pues $f(6) = 6/(6-4) = 3 \in \Re$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de dicho punto. Pero "f" no está definida en el punto "4", pues $f(4) = 4/(4-4) = 4/0 \notin \Re$ (violación de la primera Regla Sagrada), lo que en términos geométricos significa que no hay curva en la vertical de "4".

***Por ejemplo,*** si $f:\Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \sqrt[5]{x-3}$, entonces "f" está definida en el punto "9", pues $f(9) = \sqrt[5]{9-3} = \sqrt[5]{6} \in \Re$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "9". La función "f" también está definida en el punto "3", pues $f(3) = \sqrt[5]{3-3} = 0 \in \Re$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "3"; también está definida "f" en el punto "2", pues $f(2) = \sqrt[5]{2-3} = \sqrt[5]{-1} = -1 \in \Re$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "2".

***Por ejemplo,*** si $f:\Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \sqrt[4]{x-3}$, entonces "f" está definida en el punto "9", pues $f(9) = \sqrt[4]{9-3} = \sqrt[4]{6} \in \Re$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "9". La función "f" también está definida en el punto "3", pues $f(3)=\sqrt[4]{3-3}=0\in\mathfrak{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "3". Pero "f" no está definida en el punto "2", pues $f(2)=\sqrt[4]{2-3}=\sqrt[4]{-1}\notin\mathfrak{R}$ (violación de la segunda Regla Sagrada), lo que en términos geométricos significa que no hay curva en la vertical de "2".

***Por ejemplo,*** si $f:\mathfrak{R}\mapsto\mathfrak{R}$ es tal que $f(x)=\text{Ln }(x-3)$, entonces "f" está definida en el punto "9", pues $f(9)=\text{Ln }(9-3)=\text{Ln }6\in\mathfrak{R}$, lo que en términos geométricos significa que hay curva en la vertical de "9". Pero "f" no está definida en los puntos "3" y "2", pues es $f(3)=\text{Ln }(3-3)=\text{Ln }0\notin\mathfrak{R}$ y $f(2)=\text{Ln }(2-3)=\text{Ln }-1\notin\mathfrak{R}$, lo que significa que no hay curva en la vertical de "3" ni en la vertical de "2".

## CRITERIOS PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Para no hacer el ridículo con el asunto del "dominio de definición" de una función $f:\mathfrak{R}\mapsto\mathfrak{R}$ debes saber que:

01) Si $f(x)=\text{polinomio}\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R},\ \forall\ x\in\mathfrak{R}$

02) Si $f(x)=u(x)\pm v(x)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$ y $v(x)\in\mathfrak{R}$

03) Si $f(x)=u(x).v(x)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$ y $v(x)\in\mathfrak{R}$

04) Si $f(x)=u(x)/v(x)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$, $v(x)\in\mathfrak{R}$ y $v(x)\neq 0$.
Si $f(x)=$ cociente de polinomios $\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $v(x)\neq 0$.

05) Si $f(x)=k^{u(x)}$ $(k>0)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$

06) Si $f(x)=\sqrt[\text{impar}]{u(x)}\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$

07) Si $f(x)=\sqrt[\text{par}]{u(x)}\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$ y $u(x)\geq 0$

08) Si $f(x)=\log_k u(x)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$ y $u(x)>0$

09) Si $f(x)=\text{sen } u(x)$ ó $f(x)=\cos u(x)\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$

10) Si $f(x)=|u(x)|\Rightarrow f(x)\in\mathfrak{R}$ sólo si $u(x)\in\mathfrak{R}$

***Observa:*** el signo del número real $u(x)$ tiene protagonismo estelar a la hora de determinar el dominio de definición de funciones de la forma

$$f(x)=\sqrt[\text{par}]{u(x)}\ \text{ó}\ f(x)=\log_k u(x)$$

Si la expresión matemática de $u(x)$ es tontorrona, será sencillo determinar los puntos "x" tales que $f(x)\in\mathfrak{R}$; pero el asunto se complicará si se complica la expresión matemática de $u(x)$.

abrir panel

## FONEMATO 1.18.1

Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1)\ f_1(x) = 4/(x-3)\ ;\ 2)\ f_2(x) = 5^{1/x}\ ;\ 3)\ f_3(x) = e^{x^2}$$

$$4)\ f_4(x) = \sqrt[3]{x/(x-7)}\ ;\ 5)\ f_5(x) = \log_3(x+7)\ ;\ 6)\ f_6(x) = \text{Ln}(1+x^8)$$

$$7)\ f_7(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) - f_4(x) - f_5(x) + f_6(x)$$

$$8)\ f_8(x) = f_1(x).f_2(x).f_3(x).f_4(x).f_5(x).f_6(x)$$

## SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = 4/(x-3) \equiv$ cociente de polinomios, es $f_1(x) \in \Re$ en todo punto "x" que no anule su denominador. Por tanto: $\text{Dom.}f_1 = \{x \in \Re \ /\ x \neq 3\}$.

2) Como $f_2(x) = 5^{1/x} \equiv 5^{h(x)}$, es $f_2(x) \in \Re$ sólo si $h(x) \in \Re$; como $h(x) = 1/x \equiv$ cociente de polinomios, es $h(x) \in \Re$ si "x" no anula el denominador de $h(x)$. Por tanto: $\text{Dom.}f_2 = \{x \in \Re \ /\ x \neq 0\}$.

3) Como $f_3(x) = e^{x^2} \equiv e^{g(x)}$, es $f_3(x) \in \Re$ sólo si $g(x) \in \Re$. Como $g(x) = x^2$ es un polinomio, entonces $g(x) \in \Re$ para todo "x". Por tanto: $\text{Dom.}f_3 = \Re$.

4) Siendo $f_4(x) = \sqrt[3]{x/(x-6)} \equiv \sqrt[\text{impar}]{v(x)}$, es $f_4(x) \in \Re$ sólo si $v(x) \in \Re$. Como $v(x) = x/(x-6) \equiv$ cociente de polinomios, es $v(x) \in \Re$ para todo "x" que no anule su denominador. Por tanto: $\text{Dom.}f_4 = \{x \in \Re \ /\ x \neq 6\}$.

5) Como $f_5(x) = \log_3(x+7) \equiv \log_3 u(x)$ es $f_5(x) \in \Re$ sólo si $u(x) \in \Re$ y $u(x) > 0$. Como $u(x) = x + 7 \equiv$ polinomio, entonces $u(x) \in \Re$ para todo valor de "x", y es $u(x) = x + 7 > 0$ si $x > -7$. Por tanto: $\text{Dom.}f_5 = \{x \in \Re \ /\ x > -7\}$.

6) Como $f_6(x) = \text{Ln}(1+x^8) \equiv \log_3 t(x)$, es $f_6(x) \in \Re$ sólo si $t(x) \in \Re$ y $t(x) > 0$. Como $t(x) = 1 + x^8 \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \Re$ para todo "x", y además es $t(x) = 1 + x^8 > 0$ para todo "x". Por tanto: $\text{Dom.}f_6 = \Re$.

7) Como la función $f_7$ es suma de otras funciones, el dominio de definición de $f_7$ es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos; es decir:

$$\text{Dom.}f_7 = \{x \in \Re \ /\ x \neq 3,\ x \neq 0,\ x \neq 6,\ x > -7\}$$

8) Como la función $f_8$ es producto de otras funciones, el dominio de definición de $f_8$ es la intersección de los dominios de definición de los distintos factores; es decir:

$$\text{Dom.}f_8 = \{x \in \Re \ /\ x \neq 3,\ x \neq 0,\ x \neq 6,\ x > -7\}$$

**FONEMATO 1.18.2**

Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1)\ f_1(x)=x/(x^2-9)\ ;\ 2)\ f_2(x)=\sqrt[5]{1/(6-x)}\ ;\ 3)\ f_3(x)=\sqrt[4]{1/(7-x)}$$

$$4)\ f_4(x)=\sqrt[4]{1/(4+x^6)}\ ;\ 5)\ f_5(x)=\log_2\ (x-4)\ ;\ 6)\ f_6(x)=\text{sen}\ (1-x^3)$$

$$7)\ f_7(x)=f_1(x)-f_2(x)+3.f_3(x)-5.f_4(x)-f_5(x)+f_6(x)$$

$$8)\ f_8(x)=f_1(x).f_2(x).f_3(x).f_4(x).f_5(x).f_6(x)$$

**SOLUCIÓN**

1) Como $f_1(x)=x/(x^2-9)\equiv$ cociente de polinomios, es $f_1(x)\in\Re$ para todo "x" que no anule su denominador. Por tanto: $\text{Dom.}f_1=\{x\in\Re\ /\ x\neq\pm 3\}$.

2) Como $f_2(x)=\sqrt[5]{1/(6-x)}\equiv\sqrt[\text{impar}]{h(x)}$, es $f_2(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$. Como $h(x)=1/(6-x)\equiv$ cociente de polinomios, es $h(x)\in\Re$ si "x" no anula el denominador de $h(x)$. Por tanto: $\text{Dom.}f_2=\{x\in\Re\ /\ x\neq 6\}$.

3) Como $f_3(x)=\sqrt[4]{1/(7-x)}\equiv\sqrt[\text{par}]{g(x)}$, es $f_3(x)\in\Re$ sólo si $g(x)\in\Re$ y $g(x)\geq 0$. Como $g(x)=1/(7-x)\equiv$ cociente de polinomios, es $g(x)\in\Re$ si $x\neq 7$ (punto en que se anula el denominador). No existe ningún valor de "x" tal que $g(x)=1/(7-x)=0$, y es $g(x)=1/(7-x)>0$ siempre que $7-x>0$, o sea, siempre que $x<7$. Por tanto: $\text{Dom.}f_3=\{x\in\Re\ /\ x<7\}$

4) Como $f_4(x)=\sqrt[4]{1/(4+x^6)}\equiv\sqrt[\text{par}]{v(x)}$ es $f_4(x)\in\Re$ sólo si $v(x)\in\Re$ y $v(x)\geq 0$. Como $v(x)=1/(4+x^6)\equiv$ cociente de polinomios cuyo denominador no se anula para ningún "x", es $v(x)\in\Re$ para todo "x"; y como $v(x)=1/(4+x^6)$ sólo toma valores positivos, es $\text{Dom.}f_4=\Re$.

5) Como $f_5(x)=\log_2\ (x-4)\equiv\log_2\ u(x)$ es $f_5(x)\in\Re$ sólo si $u(x)\in\Re$ y $u(x)>0$. Como $u(x)=x-4\equiv$ polinomio, es $u(x)\in\Re$ para todo "x"; y $u(x)=x-4>0$ si $x>4$. Por tanto: $\text{Dom.}f_5=\{x\in\Re\ /\ x>4\}$.

6) Como $f_6(x)=\text{sen}\ (1-x^3)\equiv\text{sen}\ t(x)$, es $f_6(x)\in\Re$ sólo si $t(x)\in\Re$, y como $t(x)=1-x^3\equiv$ polinomio, es $t(x)\in\Re$ para todo "x". Por tanto: $\text{Dom.}f_6=\Re$.

7) Como la función $f_7$ es suma de otras funciones, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos, o sea:

$$\text{Dom.}f_7=\{x\in\Re\ /\ x\neq\pm 3,\ x\neq 6,\ x<7,\ x>4\}=\{x\in\Re\ /\ 4<x<7,\ x\neq 6\}$$

8) Como la función $f_8$ es producto de otras funciones, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos factores, o sea:

$$\text{Dom.}f_8=\{x\in\Re\ /\ x\neq\pm 3,\ x\neq 6,\ x<7,\ x>4\}=\{x\in\Re\ /\ 4<x<7,\ x\neq 6\}$$

## FONEMATO 1.18.3

Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1)\ f_1(x)=(x-1)/(x^2+4)\ ;\ 2)\ f_2(x)=(x+1)^{5/3}\ ;\ 3)\ f_3(x)=(x-2)^{5/2}$$

$$4)\ f_4(x)=\frac{x}{\text{Ln}\,(x-3)}\ ;\ 5)\ f_5(x)=\frac{\text{Ln}\,(9-x)}{x-5}$$

## SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x)=(x-1)/(x^2+4)\equiv$ cociente de polinomios cuyo denominador no se anula en ningún punto, es $\text{Dom.} f_1=\Re$.

2) Como $f_2(x)=\sqrt[3]{(x+1)^5}\equiv\sqrt[\text{impar}]{h(x)}$, es $f_2(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$, y como $h(x)=(x+1)^5\equiv$ polinomio, es $h(x)\in\Re$ para todo "x". Así: $\text{Dom.} f_2=\Re$.

3) Como $f_3(x)=(x-2)^{5/2}=\sqrt{(x-2)^5}\equiv\sqrt[\text{par}]{g(x)}$, es $f_3(x)\in\Re$ sólo si $g(x)\in\Re$ y $g(x)\geq 0$. Como $g(x)=(x-2)^5\equiv$ polinomio, es $g(x)\in\Re$ para todo "x", y es $g(x)=(x-2)^5\geq 0$ sólo si $x\geq 2$. Por tanto: $\text{Dom.} f_3=\{x\in\Re\ /\ x\geq 2\}$

4) Como $f_4(x)=\dfrac{x}{\text{Ln}\,(x-3)}\equiv\dfrac{m(x)}{n(x)}$, es $f_4(x)\in\Re$ sólo si:

$$m(x)\in\Re\ ;\ n(x)\in\Re\ ;\ n(x)\neq 0$$

Como $m(x)=x\equiv$ polinomio, es $m(x)\in\Re$ para todo "x".
Como $n(x)=\text{Ln}\,(x-3)\equiv\text{Ln}\,p(x)$, es $n(x)\in\Re$ sólo si $p(x)\in\Re$ y $p(x)>0$. Como $p(x)=x-3\equiv$ polinomio, es $p(x)\in\Re$ para todo "x"; y es $p(x)=x-3>0$ sólo si $x>3$. Por tanto, es $n(x)=\text{Ln}\,(x-3)\in\Re$ sólo si $x>3$.
Determinemos los valores de "x" que anulan a $n(x)=\text{Ln}\,(x-3)$:

$$n(x)=\text{Ln}\,(x-3)=0\Rightarrow x-3=1\Rightarrow x=4$$

En definitiva: $\text{Dom.} f_4=\{x\in\Re\ /\ x>3,\ x\neq 4\}$.

5) Como $f_5(x)=\dfrac{\text{Ln}\,(9-x)}{x-5}\equiv\dfrac{u(x)}{v(x)}$, es $f_5(x)\in\Re$ sólo si:

$$u(x)\in\Re\ ;\ v(x)\in\Re\ ;\ v(x)\neq 0$$

Como $u(x)=\text{Ln}\,(9-x)\equiv\text{Ln}\,t(x)$, es $u(x)\in\Re$ sólo si $t(x)\in\Re$ y $t(x)>0$. Como $t(x)=9-x\equiv$ polinomio, es $t(x)\in\Re$ para todo "x"; y es $t(x)=9-x>0$ sólo si $x<9$. Por tanto, es $u(x)=\text{Ln}\,(9-x)\in\Re$ sólo si $x<9$.

Como $v(x)=x-5\equiv$ polinomio, es $v(x)\in\Re$ para todo "x", y es $v(x)\neq 0$ si $x\neq 5$.

En definitiva: $\text{Dom.} f_5=\{x\in\Re\ /\ x<9,\ x\neq 5\}$.

abrir panel

## FONEMATO 1.18.4

Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1)\ f_1(x) = (x+3)/(x^2-8)\ ;\ 2)\ f_2(x) = (x+1)^{-7/5}\ ;\ 3)\ f_3(x) = (x-2)^{-9/4}$$

$$4)\ f_4(x) = \frac{x+4}{1-6^x}\ ;\ 5)\ f_5(x) = \frac{\text{Ln}\,(2-x)}{\text{sen}\,(x+1)}$$

## SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = (x+3)/(x^2-8) \equiv$ cociente de polinomios cuyo denominador sólo se anula si $x = \pm\sqrt{8}$, es: $\text{Dom.}f_1 = \left\{x \in \Re \ /\ x \neq \pm\sqrt{8}\right\}$.

2) Como $f_2(x) = (x+1)^{-7/5} = \sqrt[5]{1/(x+1)^7} \equiv \sqrt[\text{impar}]{h(x)}$, entonces $f_2(x) \in \Re$ sólo si $h(x) \in \Re$. Como $h(x) = 1/(x+1)^7 \equiv$ cociente de polinomios, es $h(x) \in \Re$ para todo "x" que no anule su denominador. Así: $\text{Dom.}f_2 = \{x \in \Re \ /\ x \neq -1\}$.

3) Como $f_3(x) = (x-2)^{-9/4} = \sqrt[4]{1/(x-2)^9} \equiv \sqrt[\text{par}]{g(x)}$, entonces $f_3(x) \in \Re$ sólo si $g(x) \in \Re$ y $g(x) \geq 0$. Como $g(x) = 1/(x-2)^9 \equiv$ cociente de polinomios, es $g(x) \in \Re$ si $x \neq 2$. No existe ningún "x" tal que $g(x) = 1/(x-2)^9 = 0$, y es $g(x) > 0$ si $x - 2 > 0$ (o sea, $x > 2$). Por tanto: $\text{Dom.}f_3 = \{x \in \Re \ /\ x > 2\}$.

4) Es $f_4(x) = \dfrac{x+4}{1-6^x} \equiv \dfrac{m(x)}{n(x)} \in \Re$ sólo si:

$$m(x) \in \Re\ ;\ n(x) \in \Re\ ;\ n(x) \neq 0$$

Como $m(x) = x + 4 \equiv$ polinomio, es $m(x) \in \Re$ para todo valor de "x".

Como $n(x) = 1 - 6^x$ es suma de una constante y de una función exponencial cuyo exponente es un polinomio, es $n(x) \in \Re$ para todo "x"; y $n(x)$ se anula sólo si $x = 0$ $(n(x) = 0 \Rightarrow 1 - 6^x = 0 \Rightarrow 6^x = 1 \Rightarrow x = 0)$.

En definitiva: $\text{Dom.}f_4 = \{x \in \Re \ /\ x \neq 0\}$.

5) Es $f_5(x) = \dfrac{\text{Ln}\,(2-x)}{\text{sen}\,(x+1)} \equiv \dfrac{u(x)}{v(x)} \in \Re$ sólo si:

$$u(x) \in \Re\ ;\ v(x) \in \Re\ ;\ v(x) \neq 0$$

Como $u(x) = \text{Ln}\,(2-x) \equiv \text{Ln}\ t(x)$, es $u(x) \in \Re$ sólo si $t(x) \in \Re$ y $t(x) > 0$. Como $t(x) = 2 - x \equiv$ polinomio, es $t(x) \in \Re$ para todo "x"; y es $t(x) = 2 - x > 0$ sólo si $x < 2$. Por tanto, $u(x) = \text{Ln}\,(2-x) \in \Re$ sólo si $x < 2$.

Como $v(x) = \text{sen}\,(x+1) \equiv \text{sen}\ p(x)$, es $v(x) \in \Re$ sólo si $p(x) = (x+1) \in \Re$, lo que sucede para todo "x", pues $p(x) \equiv$ polinomio. Además, es $\text{sen}\,(x+1) \neq 0$ siempre que $x + 1 \neq k.\pi$ $(\Rightarrow x \neq k.\pi - 1)$, siendo "k" un número entero cualquiera.

En definitiva: $\text{Dom.}f_5 = \left\{x \in \Re \ /\ x < 2,\ x \neq k.\pi - 1\right\}$.

abrir panel

## FONEMATO 1.18.5

Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1)\ f_1(x)=\frac{x+3}{7+\log_5 x}\ ;\ 2)\ f_2(x)=\sqrt[8]{x-5}\ ;\ 3)\ f_3(x)=\frac{\text{Ln}\,(x-4)}{\cos x}$$

$$4)\ f_4(x)=\sqrt[4]{15-3.x}\ ;\ 5)\ f_5(x)=f_1(x)+7.f_2(x)-3.f_3(x)+9.f_4(x)$$

## SOLUCIÓN

1) Es $f_1(x)=\dfrac{x+3}{7+\log_5 x}\equiv\dfrac{m(x)}{n(x)}\in\Re$ sólo si:

$$m(x)\in\Re\ ;\ n(x)\in\Re\ ;\ n(x)\neq 0$$

Como $m(x)=x+3\equiv$ polinomio, es $m(x)\in\Re$ para todo "x".

Como $n(x)=7+\log_5 x$ es suma de una constante y de una función logarítmica, es $n(x)\in\Re$ para todo "x" tal que $\log_5 x\in\Re$, lo que sucede sólo si $x>0$. Además, $n(x)$ sólo se anula si $x=1/5^7$:

$$n(x)=7+\log_5 x=0\Rightarrow\log_5 x=-7\Rightarrow x=5^{-7}=1/5^7$$

En definitiva: $\text{Dom}.f_1=\left\{x\in\Re\ /\ x>0,\ x\neq 1/5^7\right\}$.

2) Como $f_2(x)=\sqrt[8]{x-5}\equiv\sqrt[\text{par}]{g(x)}$, es $f_2(x)\in\Re$ sólo si $g(x)\in\Re$ y $g(x)\geq 0$. Como $g(x)=x-5\equiv$polinomio, es $g(x)\in\Re$ para todo "x"; y $g(x)=x-5\geq 0$ sólo si $x\geq 5$. Por tanto: $\text{Dom}.f_2=\{x\in\Re\ /\ x\geq 5\}$.

3) Es $f_3(x)=\dfrac{\text{Ln}\,(x-4)}{\cos x}\equiv\dfrac{u(x)}{v(x)}\in\Re$ sólo si:

$$u(x)\in\Re\ ;\ v(x)\in\Re\ ;\ v(x)\neq 0$$

Como $u(x)=\text{Ln}\,(x-4)\equiv\text{Ln}\,t(x)$, es $u(x)\in\Re$ sólo si $t(x)\in\Re$ y $t(x)>0$. Como $t(x)=x-4\equiv$polinomio, es $t(x)\in\Re$ para todo "x"; y es $t(x)=x-4>0$ sólo si $x>4$. Por tanto, $u(x)=\text{Ln}\,(x-4)\in\Re$ sólo si $x>4$.

Como $v(x)=\cos x\equiv\cos p(x)$, es $v(x)\in\Re$ sólo si $p(x)=x\in\Re$, lo que sucede para todo "x", pues $p(x)\equiv$ polinomio. Además, $\cos x\neq 0$ si $x\neq(2k+1).\pi/2$, siendo "k" un número entero cualquiera.

En definitiva: $\text{Dom}.f_3=\left\{x\in\Re\ /\ x>4,\ x\neq(2k+1).\pi/2\right\}$.

4) Como $f_4(x)=\sqrt[4]{15-3.x}\equiv\sqrt[\text{par}]{h(x)}$, es $f_4(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$ y $h(x)\geq 0$. Como $h(x)=15-3.x\equiv$polinomio es $h(x)\in\Re$ para todo "x"; y sucede que $h(x)=15-3.x\geq 0$ sólo si $x\leq 5$. Por tanto: $\text{Dom}.f_4=\{x\in\Re\ /\ x\leq 5\}$.

5) Como la función $f_5$ es suma de otras funciones, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos; o sea:

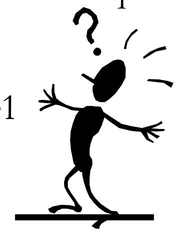
$$\text{Dom}.f_5=\left\{x\in\Re\ /\ x>0,\ x\neq 1/5^7,\ x\geq 5,\ x>4,\ x\neq(2k+1).\pi/2,\ x\leq 5\right\}=$$
$$=\{x\in\Re\ /\ x=5\}$$

abrir panel

## FONEMATO 1.18.6

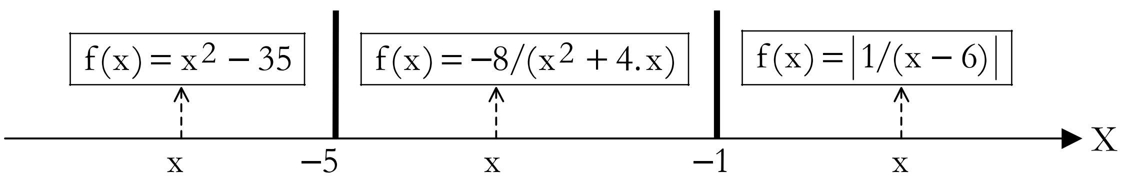
Determínese el dominio de definición de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 35 & \text{si } x \leq -5 \\ -8/(x^2 + 4.x) & \text{si} -5 < x < -1 \\ \left|1/(x-6)\right| & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



## SOLUCIÓN

***Por primera vez encontramos una función "f" definida a intervalos;*** es decir, al contrario de lo sucedido con todas las funciones vistas hasta ahora, la expresión matemática del número real "$f(x)$" que la función "f" asocia al número real "x" no es la misma para todos los valores de "x", pues ***la recta real ampliada se particiona en diversos intervalos disjuntos*** (en nuestro caso la partición es $\Re = (-\infty; -5] \cup (-5; -1) \cup [-1; +\infty)$) ***y la expresión matemática de "f(x)" es una u otra dependiendo de que "x" pertenezca a uno u otro de dichos intervalos.***




***Por ejemplo:***

$$* \text{ como } x = -6 \in (-\infty; -5] \text{ es } f(-6) = (-6)^2 - 35 = 1$$
$$* \text{ como } x = -2 \in (-5; -1) \text{ es } f(-2) = -8/((-2)^2 + 4.(-2)) = 2$$
$$* \text{ como } x = 4 \in [-1; +\infty) \text{ es } f(4) = \left|1/(4-6)\right| = 1/2$$

***Para determinar el dominio de definición de la función "f" iremos viendo qué sucede en cada uno de los intervalos en que se ha particionado la recta real.***

1) Si $x \in (-\infty; -5]$ es $f(x) = x^2 - 35 \equiv$ polinomio $\Rightarrow f(x) \in \Re, \forall\, x \in (-\infty; -5]$.

2) Si $x \in (-5; -1)$ es $f(x) = -8/(x^2 + 4.x) \equiv$ cociente de polinomios, por lo que es $f(x) \in \Re$ en los puntos "x" del intervalo $(-5; -1)$ que no anulen el denominador $x^2 + 4.x$, y como éste se anula sólo si $x = -4 \in (-5; -1)$ y $x = 0 \notin (-5; -1)$, resulta que si $x \in (-5; -1)$ es $f(x) \in \Re$ si $x \neq -4$.

3) Si $x \in [-1; +\infty)$ es $f(x) = \left|1/(x-6)\right| \equiv \left|u(x)\right|$, por lo que $f(x) \in \Re$ en todos los puntos "x" del intervalo $[-1; +\infty)$ tales que $u(x) \in \Re$. Como $u(x) = 1/(x-6) \equiv$ cociente de polinomios, es $u(x) \in \Re$ siempre que $x \neq 6$, pues $x = 6$ es el único punto del intervalo $[-1; +\infty)$ que anula al denominador $x - 6$.

- En definitiva, el dominio de definición de "f" es:

$$\text{Dom.} f = \{x \in \Re \,/\, f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \,/\, x \neq -4,\, x \neq 6\}$$

## FONEMATO 1.18.7

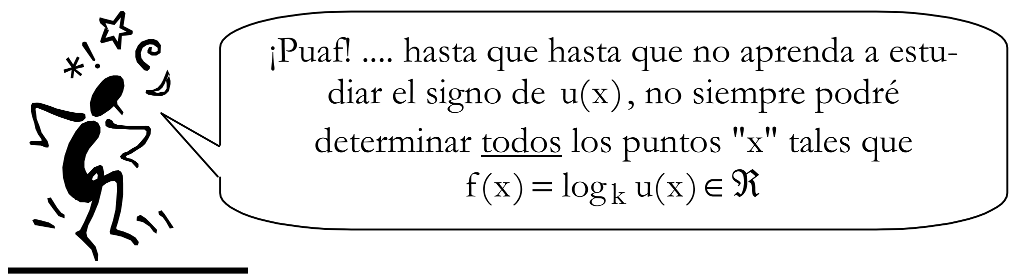
Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

$$1)\ f(x)=\log_4\ (x^3-3.x^2+2.x)\ ;\ 2)\ g(x)=\sqrt[8]{x^4-10.x^2+9}$$

## SOLUCIÓN

1) Es $f(x)=\log_4\ (x^3-3.x^2+2.x)\equiv\log_4\ u(x)\in\Re$ sólo si $u(x)\in\Re$ y $u(x)>0.$ Como $u(x)\equiv$polinomio, es $u(x)\in\Re$ para todo "x".

Pero la expresión matemática de $u(x)=x^3-3.x^2+2.x$ es lo bastante complicada como para que, con lo que sabemos, nos resulte imposible determinar <u>todos</u> los puntos "x" tales que $u(x)=x^3-3.x^2+2.x>0.$ Por tanto, no somos capaces de determinar el dominio de definición de la función "f".



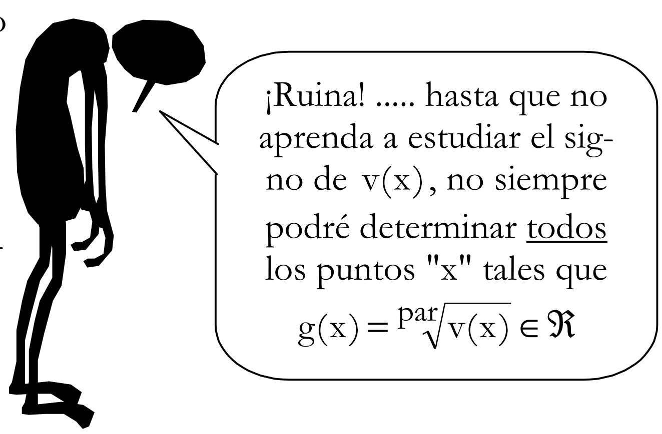

Tu fino olfato matemático sin duda ya te ha hecho tomar conciencia de la gravedad y patetismo de nuestra situación: podemos averiguar si $f(x)\in\Re$ para cada valor concreto de "x", por ejemplo:

$$*\ f(0)=\log_4\ (0^3-3.0^2+2.0)=\log_4\ 0\notin\Re$$
$$*\ f(5)=\log_4\ (5^3-3.5^2+2.5)=\log_4\ 60\in\Re$$

pero como todavía no somos capaces de determinar <u>todos</u> los puntos "x" tales que $u(x)=x^3-3.x^2+2.x>0,$ nos resulta imposible determinar el dominio de definición de la función "f" tal que $f(x)=\log_4\ u(x).$

2) Es $g(x)=\sqrt[8]{x^4-10.x^2+9}\equiv\sqrt[par]{v(x)}\in\Re$ sólo si $v(x)\in\Re$ y $v(x)\geq 0$, y como $v(x)\equiv$polinomio, es $v(x)\in\Re$ para todo "x".

Pero la expresión matemática de $v(x)=x^4-10.x^2+9$ es lo bastante complicada como para que, con lo poquito que sabemos, nos sea imposible determinar <u>todos</u> los "x" tales que $v(x)=x^4-10.x^2+9\geq 0.$ Por lo tanto, de momento no podemos determinar el dominio de definición de la función "g" tal que $g(x)=\sqrt[4]{v(x)}$



## FONEMATO 1.18.8

Determínese el dominio de definición de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que:

$$f(x) = (x^2 - 3.x + 2)/(x - 2)$$

## SOLUCIÓN

Siempre hay algún pardillete que, al ver que el numerador $x^2 - 3.x + 2$ se anula si $x = 1$ y si $x = 2$, por lo que $x^2 - 3.x + 2 = (x - 1).(x - 2)$, escribe:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3.x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1).(x - 2)}{x - 2} = x - 1$$

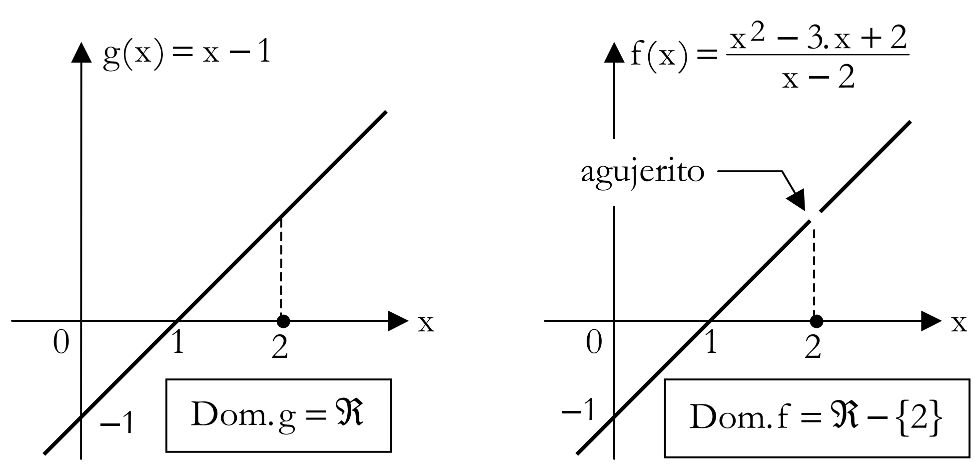
y después dice que como $f(x) = x - 1 \equiv$ polinomio, es $f(x) \in \Re$, $\forall\ x \in \Re$.

Trabajar así no es correcto, pues el resultado obtenido al dividir por el factor "$x - 2$" el numerador y el denominador de $(x^2 - 3.x + 2)/(x - 2)$ sólo es valido si $x \neq 2$, ya que si $x = 2$ el factor "$x - 2$" toma el valor cero, y todo el mundo sabe que la primera Regla Sagrada del Cálculo prohibe dividir por cero.

Lo correcto es escribir:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3.x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1).(x - 2)}{x - 2} \underset{\boxed{\text{sólo si } x \neq 2}}{=} x - 1$$

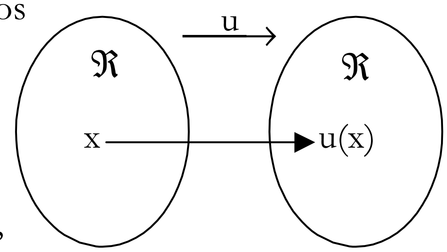
O sea, si $x \neq 2$ el valor que toma la función dada "f" en el punto "x" coincide con el valor que en dicho punto "x" toma la función $g:\Re \mapsto \Re$ definida como $g(x) = x - 1$, lo que en términos geométricos significa que la gráfica de la función "f" coincide con la gráfica de la función "g" si $x \neq 2$. No así en $x = 2$, pues $f(2) = (2^2 - 3.2 + 2)/(2 - 2) = 0/0 \notin \Re$ y sin embargo $g(2) = 2 - 1 = 1 \in \Re$.

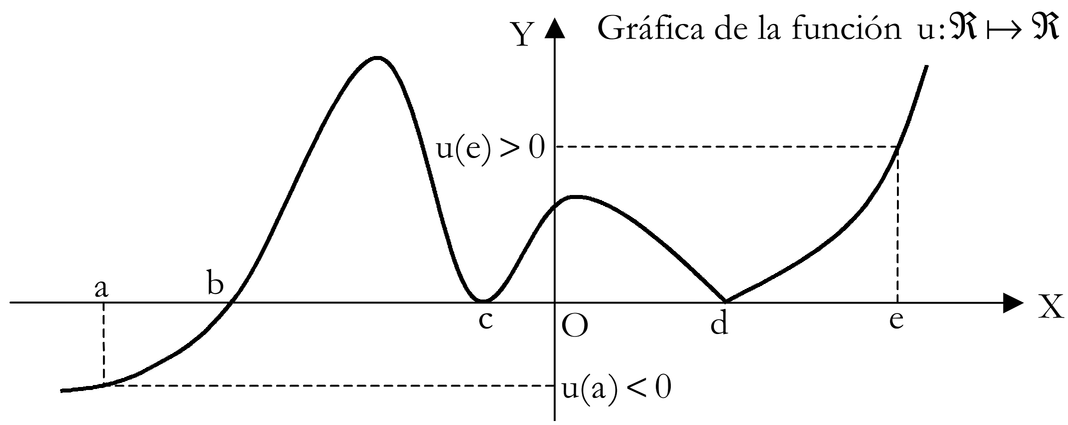



La gráfica de $g(x) = x - 1$ (polinomio de grado uno) es una recta, y la gráfica de $f(x) = (x^2 - 3.x + 2)/(x - 2)$ es la misma recta, salvo en $x = 2$, pues como $f(2) \notin \Re$, la gráfica de $f(x)$ tiene un agujerito en la vertical del punto $x = 2$.

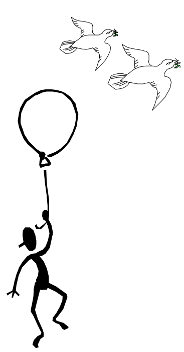
# 1.19 SIGNO DE UNA FUNCIÓN

Si $u:\Re \mapsto \Re$ es una función cuya gráfica queremos representar, aprender a estudiar el signo del número real $u(x)$ es muy importante, pues nos permitirá conocer la posición de la gráfica de "u" respecto al eje de abcisas, porque dicha gráfica está por encima del eje de abcisas en todo punto "x" tal que $u(x) > 0$, estando por debajo de dicho eje en todo punto "x" tal que $u(x) < 0$. Obviamente, en los puntos "x" en que la curva "toca" al eje de abcisas sucede que $u(x) = 0$.




* Es $u(a) < 0 \Leftrightarrow$ la curva está por "debajo" del eje OX en $x = a$
* Es $u(b) = 0$, y la curva "atraviesa" al eje OX en $x = b$
* Es $u(c) = 0$, y la curva es "tangente" al eje OX en $x = c$
* Es $u(d) = 0$, y la curva ni "atraviesa" ni es "tangente" al eje OX en $x = d$
* Es $u(e) > 0 \Leftrightarrow$ la curva está por "encima" del eje OX en $x = e$



Además, y también esencial, cuando sepamos estudiar el signo del número real u(x), desaparecerán las dificultades que a veces encontramos al determinar el dominio de definición de funciones de la forma

$$f(x) = \log_k u(x) \ ; \ f(x) = \sqrt[par]{u(x)}$$

pues:

$$\log_k u(x) \in \Re \text{ sólo si } u(x) \in \Re \text{ y } u(x) > 0$$

$$\sqrt[par]{u(x)} \in \Re \text{ sólo si } u(x) \in \Re \text{ y } u(x) \geq 0$$

¡Brindemos por tan notable avance!

## FONEMATO 1.19.1

1) Estúdiese el signo de la función $u:\Re \mapsto \Re \,/\, u(x) = x^4 - 10.x^2 + 9$.

2) Calcúlese el dominio de definición de las funciones $f:\Re \mapsto \Re$ y $g:\Re \mapsto \Re$ tales que:

$$f(x) = \log_3 (x^4 - 10.x^2 + 9) \;;\; g(x) = \sqrt{x^4 - 10.x^2 + 9}$$

## SOLUCIÓN

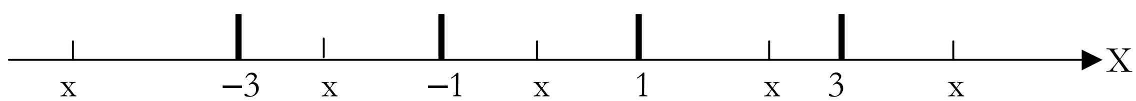
1) Determinemos los números reales "x" cuya imagen según la función polinómica "u" es el número cero; o sea, resolvamos la ecuación $u(x) = 0$:

$$u(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 10.x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \pm 3 \\ \pm 1 \end{cases}$$

La ecuación $x^4 - 10.x^2 + 9 = 0$ es ***bicuadrada*** (de la forma $a.x^4 + b.x^2 + c = 0$, siendo "a", "b" y "c" constantes, $a \neq 0$); haciendo $x^2 = z$ se transforma en una ecuación de segundo grado:

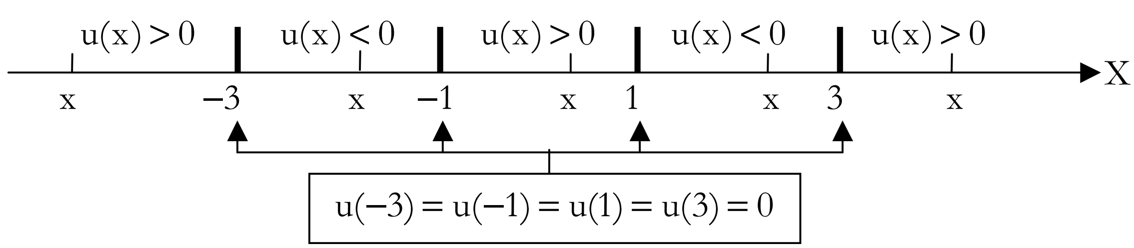
$$x^4 - 10.x^2 + 9 = 0 \Rightarrow z^2 - 10.z + 9 = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} 9 = x^2 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Las cuatro soluciones de la ecuación $u(x) = 0$ dividen al eje de abcisas en cinco intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos "x" de cada uno de ellos.

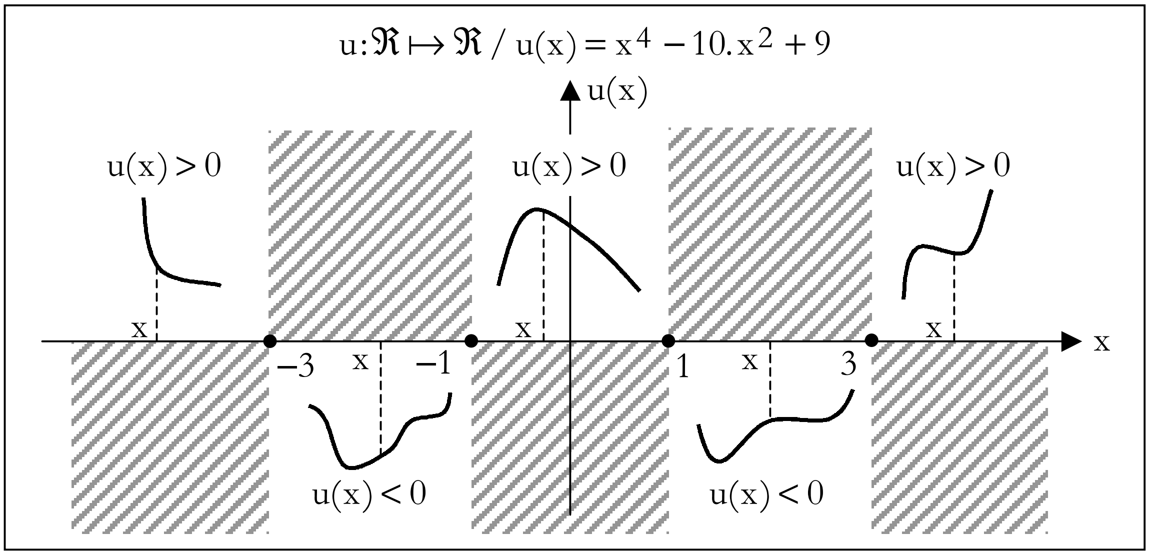



Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

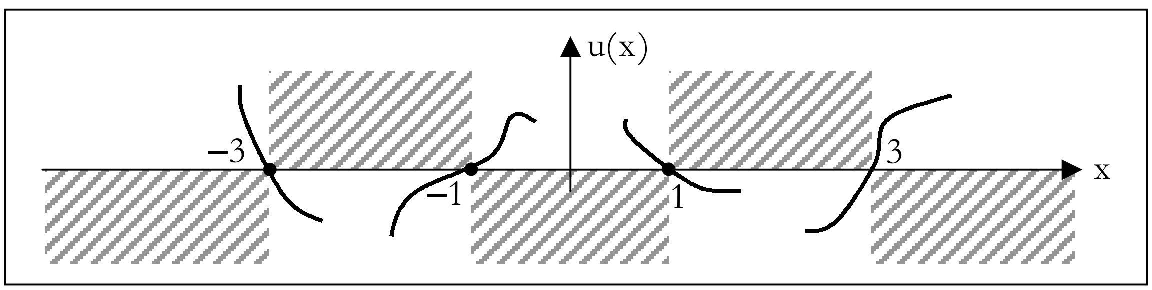
* como $u(-4) = (-4)^4 - 10.(-4)^2 + 9 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall\, x < -3$
* como $u(-2) = (-2)^4 - 10.(-2)^2 + 9 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall\, x \in (-3;-1)$
* como $u(0) = 0^4 - 10.0^2 + 9 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall\, x \in (-1;1)$
* como $u(2) = 2^4 - 10.2^2 + 9 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall\, x \in (1;3)$
* como $u(4) = 4^4 - 10.4^2 + 9 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall\, x > 3$




Si nuestro objetivo fuera dibujar la gráfica de la función "u", la información que acabamos de obtener indica que la curva representativa de "u" está por encima del eje de abcisas si $x < -3$, si $x \in (-1;1)$ y si $x > 3$; dicha curva está por debajo del eje de abcisas si $x \in (-3;-1)$ y si $x \in (1;3)$.

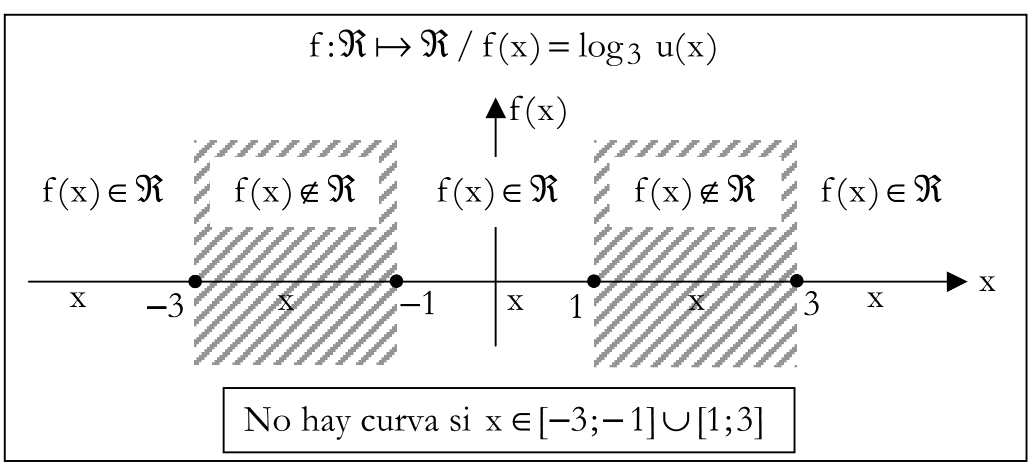



***Observa:*** en los puntos $x = -3, x = -1, x = 1$ y $x = 3$ no sólo ocurre que $u(x) = 0$ (lo que indica que en dichos puntos hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abcisas), también ocurre algo que en general no tiene por qué suceder: como $u(x)$ "cambia de signo" en $x = -3, x = -1, x = 1$ y $x = 3$, el "contacto" entre la gráfica de "u" y el eje de abcisas es tal que la gráfica "atraviesa" dicho eje (lo corta).



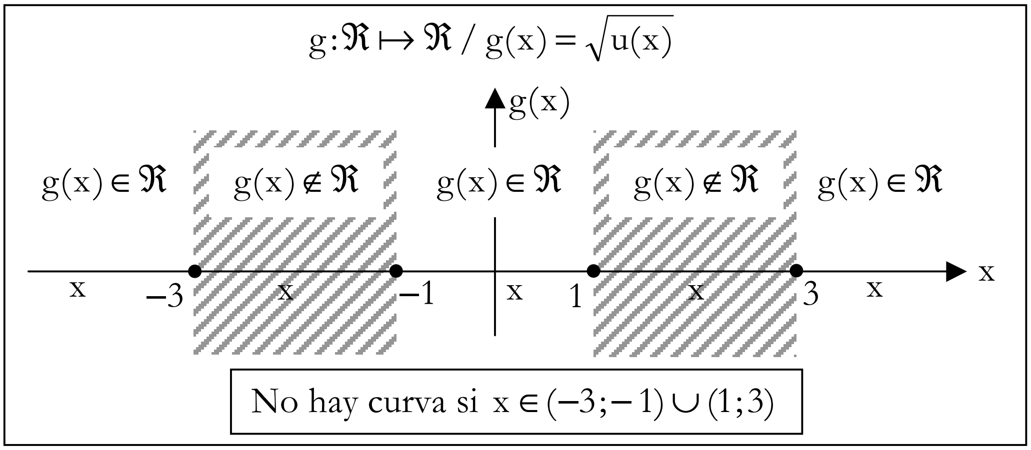

2) Siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \log_3 (x^4 - 10.x^2 + 9) \equiv \log_3 u(x)$, su dominio de definición es:

$$\text{Dom.}f = \{x \in \Re \;/\; f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \;/\; u(x) \in \Re,\, u(x) > 0\} =$$
$$= \{x \in \Re \;/\; x \in (-\infty; -3) \cup (-1;1) \cup (3; +\infty)\}$$

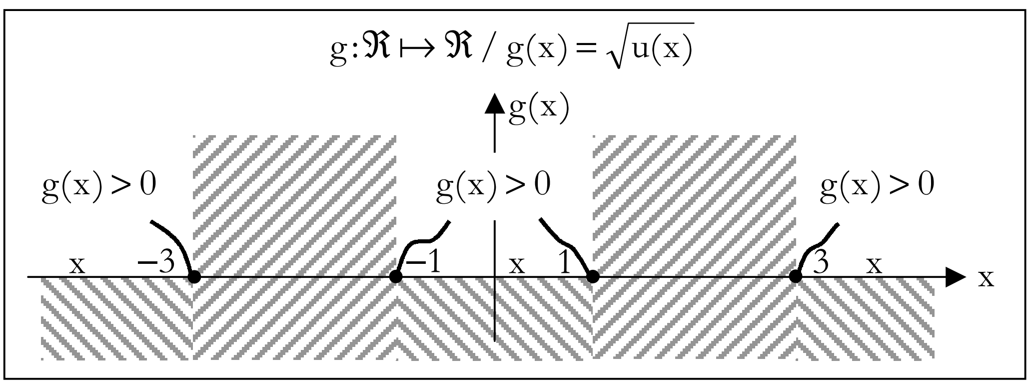


- Siendo $g:\Re \mapsto \Re$ tal que $g(x)=\sqrt{x^4-10.x^2+9} \equiv \sqrt[par]{u(x)}$, su dominio de definición es:

$$\text{Dom.}g=\{x\in\Re \,/\, g(x)\in\Re\}=\{x\in\Re \,/\, u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$
$$=\{x\in\Re \,/\, x\in(-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[3;+\infty)\}$$




Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, consideramos que lleva el signo "+"; así, si $g(x)=\sqrt{u(x)}\in\Re$, es $g(x)=\sqrt{u(x)}\geq 0$, por lo que la gráfica de la función "g" no está por debajo del eje de abcisas. En los puntos $x=-3$, $x=-1$, $x=1$ y $x=3$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en esos puntos hay "contacto" entre dicha gráfica y el eje de abcisas.




## FONEMATO 1.19.2

1) Estúdiese el signo de la función $u:\Re \mapsto \Re \,/\, u(x)=x^3-9.x^2+24.x-20$.

2) Calcúlese el dominio de definición de las funciones $f:\Re \mapsto \Re$ y $g:\Re \mapsto \Re$ tales que $f(x)=\log_7 u(x)$ y $g(x)=\sqrt{u(x)}$.

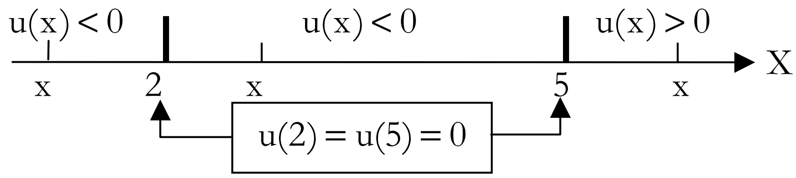
## SOLUCIÓN

1) Determinemos los números reales "x" cuya imagen según la función polinómica "u" es el número cero; o sea, resolvamos la ecuación $u(x)=0$:

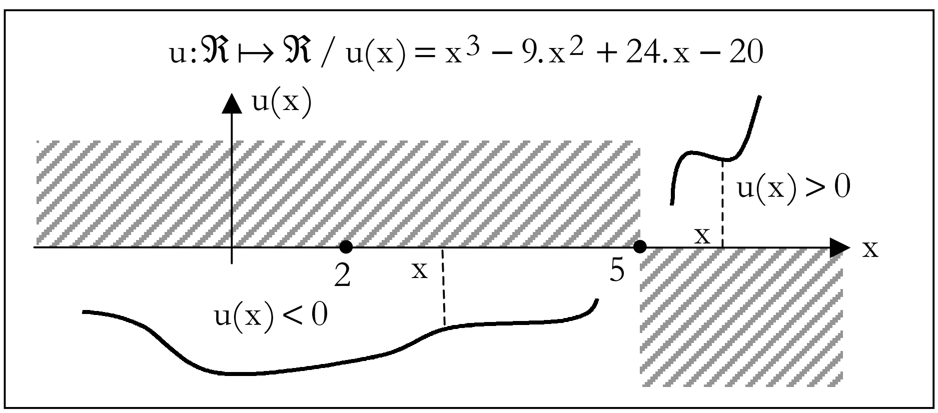
$$u(x)=0 \Rightarrow x^3-9.x^2+24.x-20=0 \Rightarrow x=\begin{cases}5\\2\ (\text{doble})\end{cases}$$

Las soluciones $x = 2$ y $x = 5$ de la ecuación $u(x) = 0$ dividen al eje de abcisas en tres intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

$*$ como $u(0) = 0^3 - 9.0^2 + 24.0 - 20 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall\ x < 2$
$*$ como $u(3) = 3^3 - 9.3^2 + 24.3 - 20 < 0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall\ x \in (2;5)$
$*$ como $u(7) = 7^3 - 9.7^2 + 24.7 - 20 > 0 \Rightarrow u(x) > 0, \forall\ x > 5$

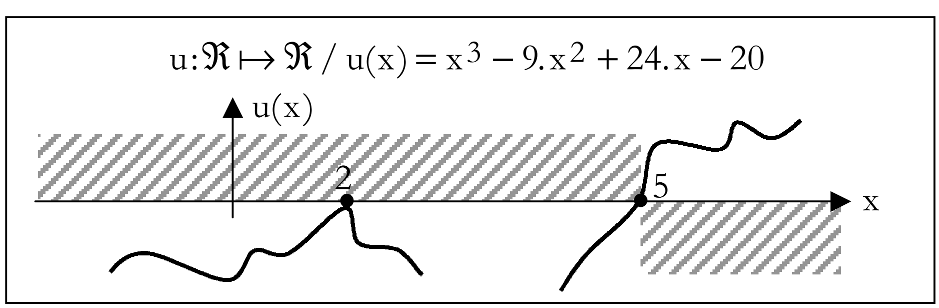



***Observa:*** si nuestro objetivo fuera dibujar la gráfica de la función "u", la información que acabamos de obtener indica que la curva representativa de "u" está por encima del eje de abcisas si $x > 5$, y está por debajo de dicho eje si $x \in (-\infty;2)$ y si $x \in (2;5)$.




En el punto $x = 5$ ocurre que $u(5) = 0$ ($\Rightarrow$ en $x = 5$ hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abcisas) y además $u(x)$ "cambia de signo" en $x = 5$; por tanto, la gráfica "atraviesa" a dicho eje (lo corta).

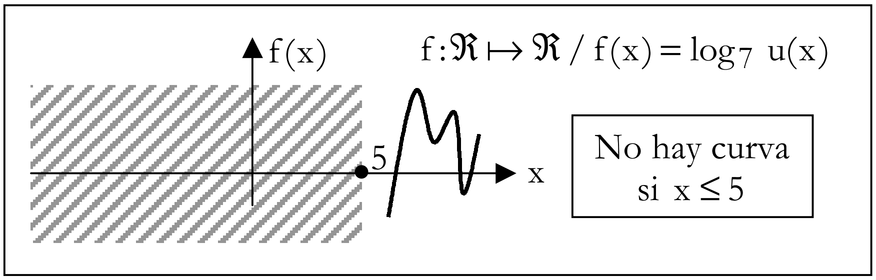
En el punto $x = 2$ ocurre que $u(2) = 0$ ($\Rightarrow$ en $x = 2$ hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abcisas), pero como $u(x)$ no "cambia de signo" en $x = 2$, dicha gráfica no "atraviesa" a dicho eje (no lo corta).



2) Siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \log_7 (x^3 - 9.x^2 + 24.x - 20) \equiv \log_7 u(x)$, su dominio de definición es:

$$\text{Dom.f} = \{x \in \Re \;/\; f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \;/\; u(x) \in \Re,\; u(x) > 0\} =$$

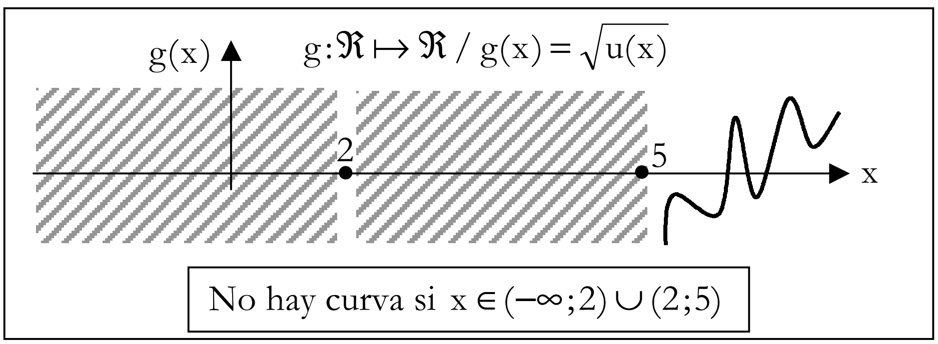
$$= \{x \in \Re \;/\; x > 5\}$$




- Siendo $g(x) = \sqrt{x^3 - 9.x^2 + 24.x - 20} \equiv \sqrt[\text{par}]{u(x)}$, el dominio de definición de la función "g" es:

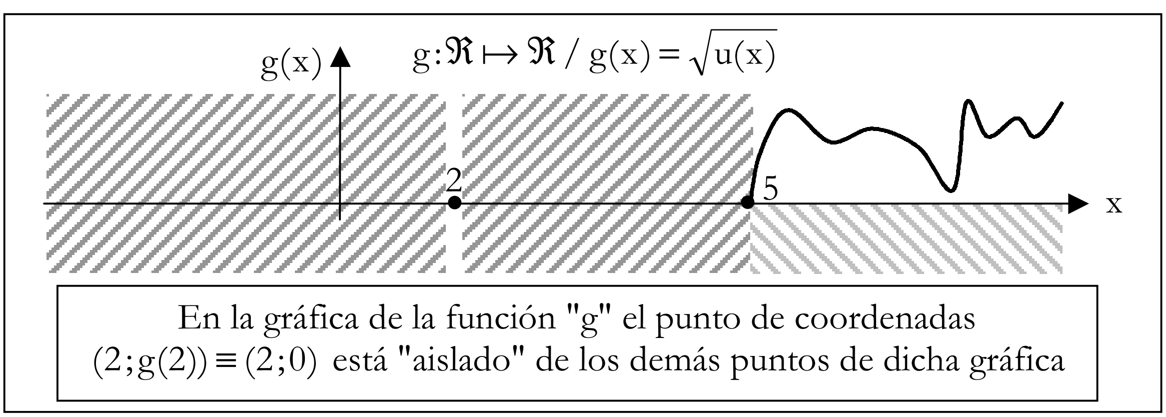
$$\text{Dom.g} = \{x \in \Re \;/\; g(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \;/\; u(x) \in \Re,\; u(x) \geq 0\} =$$

$$= \{x \in \Re \;/\; x = 2 \text{ ó } x > 5\}$$




Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, consideramos que lleva el signo "+"; así, si $g(x) = \sqrt{u(x)} \in \Re$ es $g(x) = \sqrt{u(x)} \geq 0$, por eso la gráfica de "g" no está por debajo del eje de abcisas.

En los puntos $x = 2$ y $x = 5$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en dichos puntos hay "contacto" entre la gráfica de "g" y el eje de abcisas.



## FONEMATO 1.19.3

1) Estúdiese el signo de la función $u:\Re \mapsto \Re \,/\, u(x) = \dfrac{(7+x^2).2^x.(x-6)}{(1+x^4).5^{x^3+1}}$.

2) Calcúlese el dominio de definición de las funciones $f:\Re \mapsto \Re$ y $g:\Re \mapsto \Re$ tales que:

$$f(x) = \text{Ln}\ u(x)\ ;\ g(x) = \sqrt{u(x)}$$

## SOLUCIÓN

1) El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales

$$h_1(x) = 7 + x^2\ ;\ h_2(x) = 2^x\ ;\ h_3(x) = x - 6$$
$$h_4(x) = 1 + x^4\ ;\ h_5(x) = 5^{1+x^3}$$

siendo evidente que:

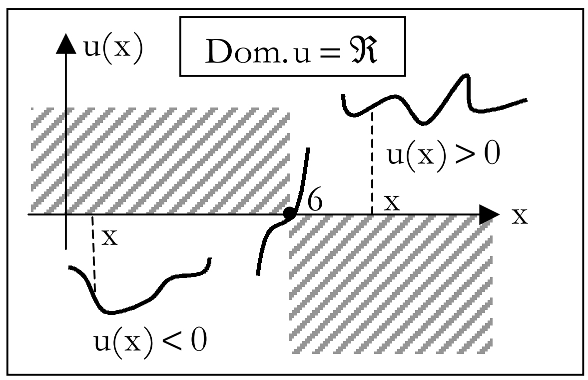
$$h_1(x) = 7 + x^2 > 0,\ \forall\ x \in \Re\ ;\ h_4(x) = 1 + x^4 > 0,\ \forall\ x \in \Re$$

***No lo olvides:*** si $a > 0$ es $a^{v(x)} > 0, \forall\ x \,/\, v(x) \in \Re$

Como también sucede que:

$$h_2(x) = 2^x > 0,\ \forall\ x \in \Re$$
$$h_5(x) = 5^{1+x^3} > 0,\ \forall\ x \in \Re$$

entonces resulta un chollo, pues el signo del número real $u(x)$ es el que tiene el número real $h_3(x) = x - 6$, y éste es positivo si $x > 6$, es negativo si $x < 6$ y es cero si $x = 6$.



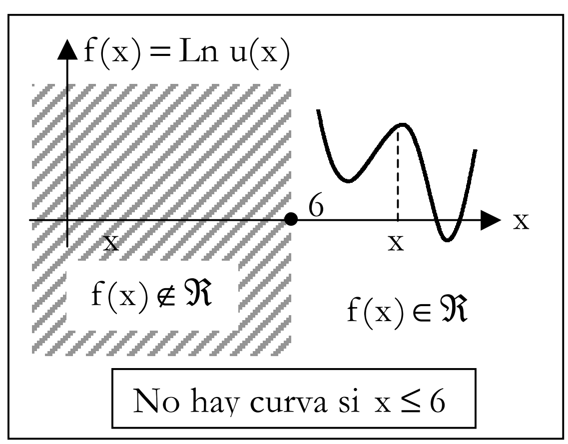

En el punto $x = 6$ ocurre que $u(6) = 0$ ($\Rightarrow$ en $x = 6$ hay "contacto" entre la gráfica de "u" y el eje de abcisas). Como $u(x)$ "cambia de signo" en $x = 6$, dicha gráfica "atraviesa" a dicho eje (lo corta).

2) Siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f(x) = \text{Ln}\,\frac{(7+x^2).2^x.(x-6)}{(1+x^4).5^{1+x^3}} \equiv \text{Ln}\ u(x)$$

su dominio de definición es:

$$\text{Dom.}f = \{x \in \Re \,/\, f(x) \in \Re\} =$$
$$= \{x \in \Re \,/\, u(x) \in \Re,\ u(x) > 0\} =$$
$$= \{x \in \Re \,/\, x > 6\}$$



- Siendo $g:\Re \mapsto \Re$ tal que

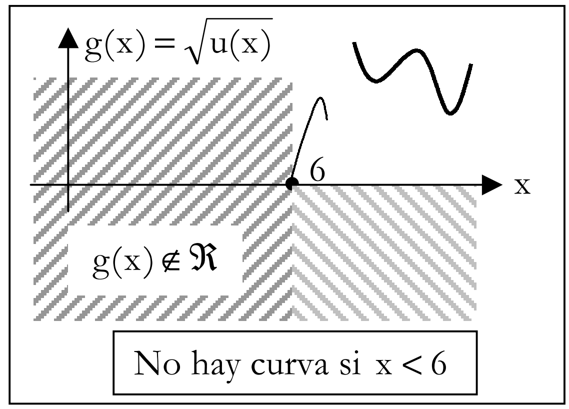
$$g(x)=\sqrt{\frac{(7+x^2).2^x.(x-6)}{(1+x^4).5^{x^3+1}}}\equiv \sqrt[\text{par}]{u(x)}$$

su dominio de definición es:

$$\text{Dom.}g=\{x\in\Re\,/\,g(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\,/\,u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$
$$=\{x\in\Re\,/\,x\geq 6\}$$

Como la raíz no lleva signo delante, consideramos que lleva signo "+"; así, si $g(x)=\sqrt{u(x)}\in\Re$ es $g(x)=\sqrt{u(x)}\geq 0$, por lo que la gráfica de "g" no está por debajo del eje de abcisas.

En el punto $x=6$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en $x=6$ hay "contacto" entre dicha gráfica y el eje de abcisas.




## FONEMATO 1.19.4

1) Estúdiese el signo de la función $w:\Re\mapsto\Re$ tal que $w(x)=(x-2)^4.(9-x)$.

2) Calcúlese el dominio de definición de $f:\Re\mapsto\Re$ y $g:\Re\mapsto\Re$ tales que:

$$f(x)=\text{Ln}\ w(x)\ ;\ g(x)=\sqrt{w(x)}$$

## SOLUCIÓN

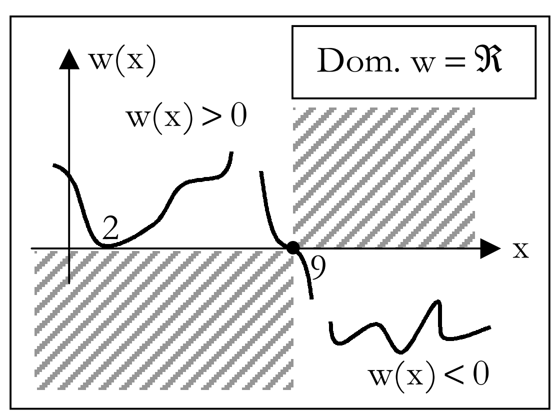
1) El signo del número real $w(x)$ depende del signo que tengan los números reales

$$k_1(x)=(x-2)^4\quad ;\quad k_2(x)=9-x$$

Como $k_1(x)=(x-2)^4$ toma valores positivos si $x\neq 2$ y se anula sólo si $x=2$, el signo de $w(x)$ es el de $k_2(x)=9-x$, salvo si $x=2$, pues en este punto se anula $w(x)$ pero no se anula $k_2(x)$.

Resulta evidente que $k_2(x)=9-x$ toma valores positivos o negativos según sea $x<9$ ó $x>9$, y se anula sólo si $x=9$.

Como $w(9)=0$ y $w(x)$ "cambia de signo" en $x=9$, la gráfica de la función "w" atraviesa al eje de abcisas en $x=9$. Como $w(2)=0$ y $w(x)$ no "cambia de signo" en $x=2$, la gráfica de "w" no atraviesa al eje de abcisas en $x=2$.

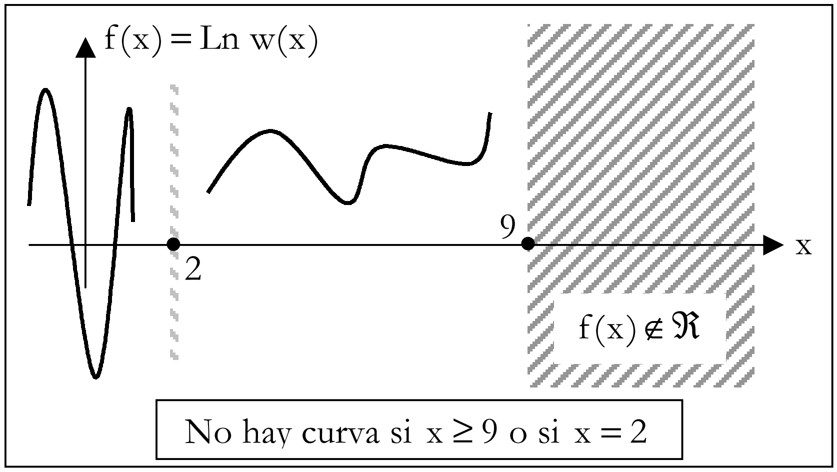


2) Siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f(x) = \text{Ln }(x-2)^4.(9-x) \equiv \text{Ln } w(x)$$

su dominio de definición es:

$$\text{Dom.} f = \{x \in \Re \,/\, f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \,/\, w(x) \in \Re,\ w(x) > 0\} = \\ = \{x \in \Re \,/\, x < 9,\ x \neq 2\}$$




- Siendo $g:\Re \mapsto \Re$ tal que

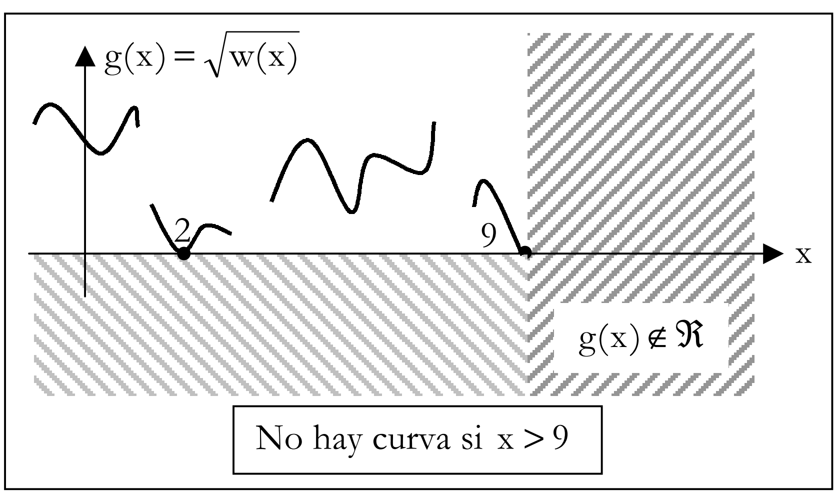
$$g(x) = \sqrt{(x-2)^4.(9-x)} \equiv \sqrt[\text{par}]{w(x)}$$

su dominio de definición es:

$$\text{Dom.} g = \{x \in \Re \,/\, g(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \,/\, w(x) \in \Re,\ w(x) \geq 0\} = \\ = \{x \in \Re \,/\, x \leq 9\}$$

Como la raíz no lleva signo delante, consideramos que lleva el signo "+"; así, si $g(x) = \sqrt{w(x)} \in \Re$ es $g(x) = \sqrt{w(x)} \geq 0$, por lo que la gráfica de la función "g" no está por debajo del eje de abcisas.

En los puntos $x = 2$ y $x = 9$ la función "g" toma el valor 0, lo que indica que en dichos puntos hay "contacto" entre dicha gráfica y el eje de abcisas.



**FONEMATO 1.19.5**

Estúdiese el signo de las siguientes funciones:

1) $f_1 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \,/\, f_1(x) = x^2 - 7.x + 10$
2) $f_2 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \,/\, f_2(x) = x^2 - 6.x + 9$
3) $f_3 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \,/\, f_3(x) = x^2 + x + 1$
4) $f_4 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \,/\, f_4(x) = -x^2 + 4.x$
5) $f_5 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \,/\, f_5(x) = -x^2 + 2.x - 1$
6) $f_6 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \,/\, f_6(x) = -2.x^2 + 2.x - 1$

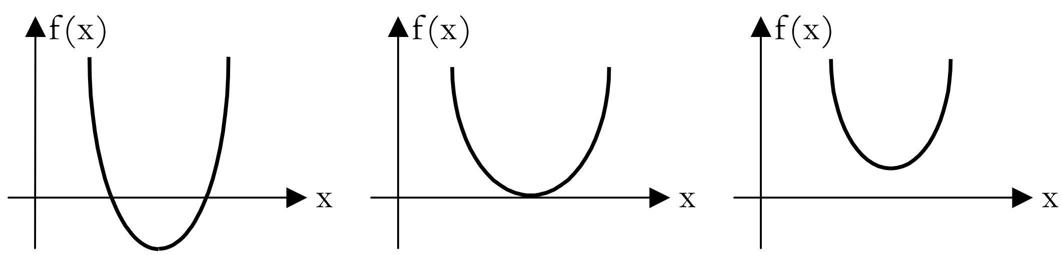
**SOLUCIÓN**

Las seis funciones dadas son polinomios de grado 2, y todo el mundo sabe que si $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ (siendo "a", "b" y "c" constantes y $a \neq 0$), la gráfica de "f" es una parábola con los "cuernos" hacia arriba o hacia abajo según sea $a > 0$ ó $a < 0$.

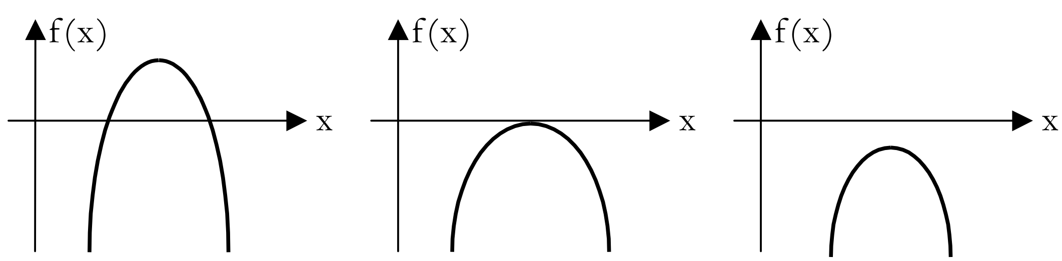
Independientemente de cómo tenga los "cuernos", las soluciones de la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ nos dicen si la parábola y el eje de abcisas se "tocan" o no; en concreto:

1) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas $x = x_0$ y $x = x_1$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.
2) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ tiene una raíz real doble $x = x_0$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.
3) Si la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.

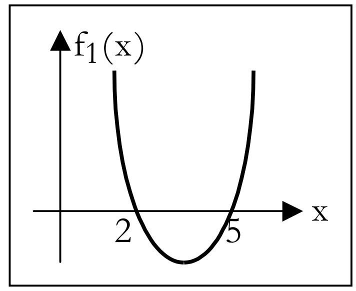
$f(x) = a.x^2 + b.x + c \;;\; \text{caso } a > 0$




$f(x) = a.x^2 + b.x + c \;;\; \text{caso } a < 0$



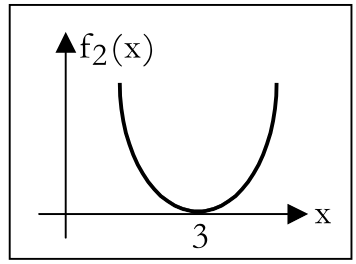
1) La gráfica de la función $f_1:\Re \mapsto \Re$ tal que $f_1(x) = x^2 - 7.x + 10$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba (el coeficiente de $x^2$ es positivo). Como las soluciones de la ecuación $x^2 - 7.x + 10 = 0$ son reales y distintas ($x = 2$ y $x = 5$), la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos, por lo que $f_1(x) > 0$ si $x < 2$ o si $x > 5$, y $f_1(x) < 0$ si $x \in (2;5)$.




2) La gráfica de la función $f_2:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f_2(x) = x^2 - 6.x + 9$$

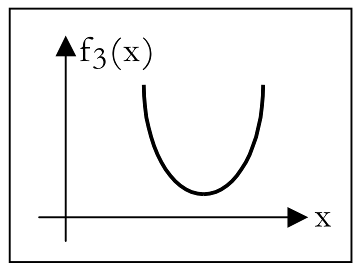
es una parábola con "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo). Como la ecuación $x^2 - 6.x + 9 = 0$ tiene una raíz real doble ($x = 3$), la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto, por lo que $f_2(x) > 0$ si $x \neq 3$, y $f_2(x) = 0$ si $x = 3$.




3) La gráfica de la función $f_3:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f_3(x) = x^2 + x + 1$$

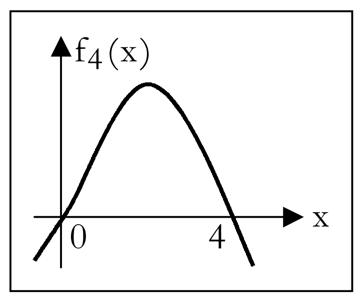
es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo). Como la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas, por lo que $f_3(x) > 0$ para todo valor de "x".




4) La gráfica de la función $f_4:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f_4(x) = -x^2 + 4.x$$

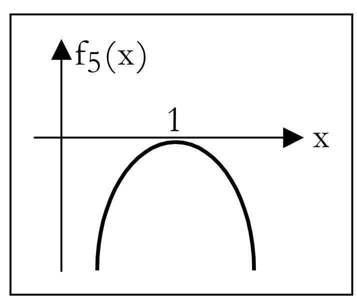
es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es negativo). Como las soluciones de $-x^2 + 4.x = 0$ son reales y distintas ($x = 0$ y $x = 4$) la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos; así, $f_4(x) > 0$ si $x \in (0;4)$, y $f_4(x) < 0$ si $x < 0$ o si $x > 4$.



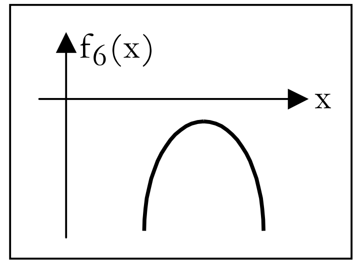

5) La gráfica de la función $f_5:\Re \mapsto \Re$ tal que

$$f_5(x) = -x^2 + 2.x - 1$$

es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es negativo). Como sucede que la ecuación $-x^2 + 2.x - 1 = 0$ tiene una raíz real doble ($x = 1$), la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto; así, $f_5(x) < 0$ si $x \neq 1$, y $f_5(x) = 0$ si $x = 1$.



6) La gráfica de la función $f_6 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ tal que




$$f_6(x) = -2.x^2 + 2.x - 1$$

es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es negativo). Como la ecuación $-2.x^2 + 2.x - 1 = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas, por lo que $f_6(x) < 0$ para todo valor de "x".

***Toma buena muy nota del asunto de las parábolas, porque serán innumerables las veces que estudiarás el signo de un polinomio de grado 2.***

No es de recibo que para estudiar el signo de $f_4(x) = -x^2 + 4.x$ (polinomio de grado dos) necesites montar el siguiente "pollo":

$$-x^2 + 4.x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

y después asignes a "x" un valor concreto en cada uno de los intervalos $(-\infty;0)$, $(0;4)$ y $(4,+\infty)$:

* $f_4(-2) = -(-2)^2 + 4.(-2) < 0 \Rightarrow f_4(x) < 0, \forall\ x < 0$

* $f_4(1) = -1^2 + 4.1 > 0 \Rightarrow f_4(x) > 0, \forall\ x \in (0;4)$

* $f_4(5) = -5^2 + 4.5 < 0 \Rightarrow f_4(x) < 0, \forall\ x > 4$


## FONEMATO 1.19.6

Determínese el dominio de definición de las siguientes funciones:

1) $f_1 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \;/\; f_1(x) = \operatorname{Ln}(x^2 - 4)$
2) $f_2 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \;/\; f_2(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 2.x + 3}$
3) $f_3 : \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R} \;/\; f_3(x) = \log_7 (x^2 - 2.x + 2)$

## SOLUCIÓN

1) Como $f_1(x) = \operatorname{Ln}(x^2 - 4) \equiv \operatorname{Ln} u_1(x)$, es:

$$\text{Dom.} f_1 = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, f_1(x) \in \mathfrak{R}\} = \{x \in \mathfrak{R} \,/\, u_1(x) \in \mathfrak{R},\ u_1(x) > 0\} =$$
$$= \{x \in \mathfrak{R} \,/\, x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)\}$$

La gráfica de $u_1(x) = x^2 - 4$ es una parábola con cuernos hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo) que corta al eje de abcisas en los puntos $x = 2$ y $x = -2$ (pues $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ó $x = -2$). Por tanto, es $u_1(x) > 0$ sólo si $x < -2$ ó $x > 2$.

2) Como $f_2(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 2.x + 3} \equiv \sqrt[\text{par}]{u_2(x)}$, es:

$$\text{Dom.} f_2 = \{x \in \Re \ / \ f_2(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \ / \ u_2(x) \in \Re, \ u_2(x) \geq 0\} =$$

$$= \{x \in \Re \ / \ x \in [-1;3]\}$$

La gráfica de $u_2(x) = -x^2 + 2.x + 3$ es una parábola con cuernos hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es negativo) que corta al eje de abcisas en los puntos $x = -1$ y $x = 3$, (pues $-x^2 + 2.x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ó $x = 3$). Por tanto, es $u_2(x) \geq 0$ sólo si $x \in [-1;3]$

3) Como $f_3(x) = \log_7 (x^2 - 2.x + 2) \equiv \text{Ln } u_3(x)$, es:

$$\text{Dom.} f_3 = \{x \in \Re \ / \ f_3(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \ / \ u_3(x) \in \Re, \ u_3(x) > 0\} = \Re$$

La gráfica de $u_3(x) = x^2 - 2.x + 2$ es una parábola con cuernos hacia arriba (pues el coeficiente de $x^2$ es positivo) que no "toca" al eje de abcisas (pues $x^2 - 2.x + 2 = 0 \Rightarrow x \notin \Re$). Por tanto, es $u(x) > 0, \ \forall \ x \in \Re$

## FONEMATO 1.19.7

1) Estúdiese el signo de $u: \Re \mapsto \Re$ tal que $u(x) = (x + 2)/(x^3 - 7.x^2 + 10.x)$.

2) Calcúlese el dominio de definición de $f: \Re \mapsto \Re$ y $g: \Re \mapsto \Re$ tales que:

$$f(x) = \text{Ln } u(x) \ ; \ g(x) = \sqrt{u(x)}$$

## SOLUCIÓN

1) El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales

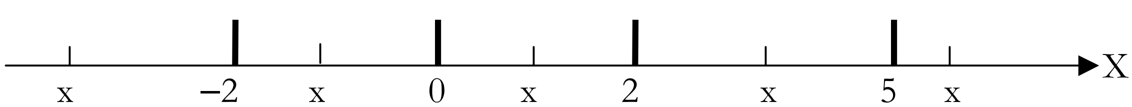
$$k_1(x) = x + 2 \quad ; \quad k_2(x) = x^3 - 7.x^2 + 10.x$$

Determinemos los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$k_2(x) = x^3 - 7.x^2 + 10.x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 5 \end{cases}$$

Los puntos $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ y $x = 5$ dividen al eje de abcisas en cinco intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos.



Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

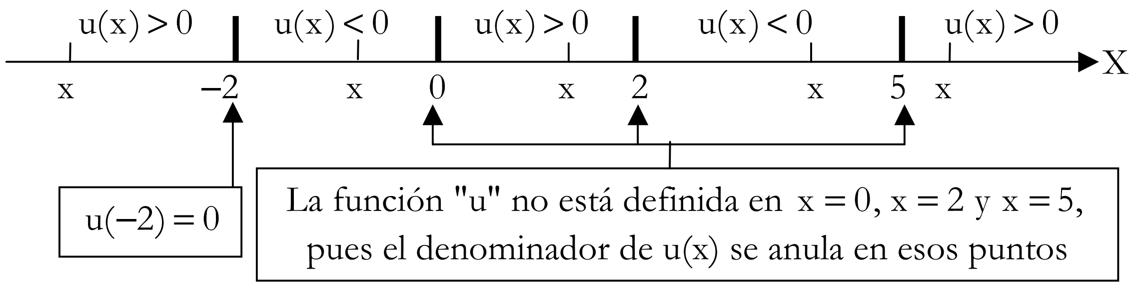
$$* \text{ como } u(-3)=\frac{-3+2}{(-3)^3-7.(-3)^2+10.(-3)}>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x<-2$$

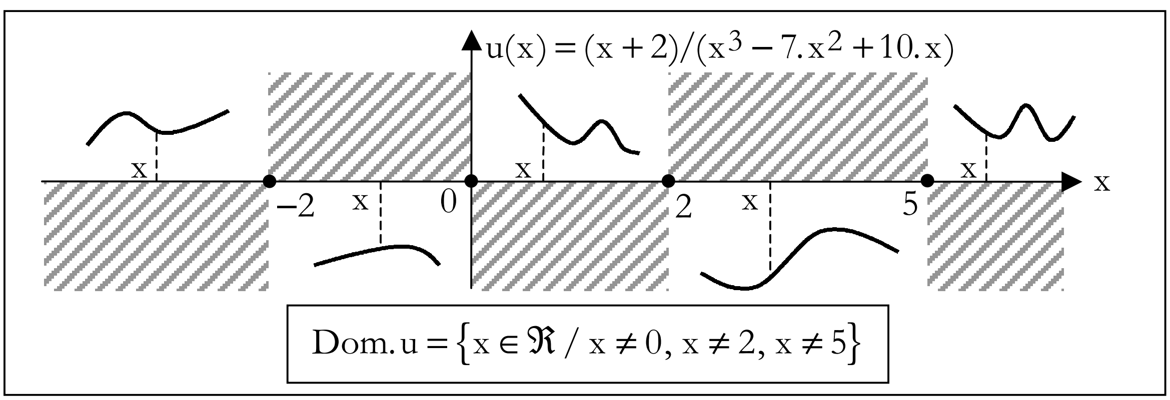
$$* \text{ como } u(-1)=\frac{-1+2}{(-1)^3-7.(-1)^2+10.(-1)}<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x\in(-2;0)$$

$$* \text{ como } u(1)=\frac{1+2}{1^3-7.1^2+10.1}>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(0;2)$$

$$* \text{ como } u(3)=\frac{3+2}{3^3-7.3^2+10.3}<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x\in(2;5)$$

$$* \text{ como } u(6)=\frac{6+2}{6^3-7.6^2+10.6}>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x>5$$




En el punto $x=-2$ ocurre que $u(x)=0$ ($\Rightarrow$ en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "u" y el eje de abcisas) y $u(x)$ "cambia de signo" en $x=-2$ ($\Rightarrow$ la gráfica de "u" atraviesa dicho eje).

2) Siendo $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x)=\text{Ln } u(x)$, su dominio de definición es:

$$\text{Dom.} f=\{x\in\Re \mathbin{/} f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re \mathbin{/} u(x)\in\Re,\ u(x)>0\}=$$

$$=\{x\in\Re \mathbin{/} x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(5;+\infty)\}$$

- Siendo $g:\Re \mapsto \Re$ tal que $g(x)=\sqrt[\text{par}]{u(x)}$, su dominio de definición es:

$$\text{Dom.} g=\{x\in\Re \mathbin{/} g(x)\in\Re\}=\{x\in\Re \mathbin{/} u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$

$$=\{x\in\Re \mathbin{/} x\in(-\infty;-2]\cup(0;2)\cup(5;+\infty)\}$$

## FONEMATO 1.19.8

Estúdiese el signo de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = x^3/(4 - x^2)$.

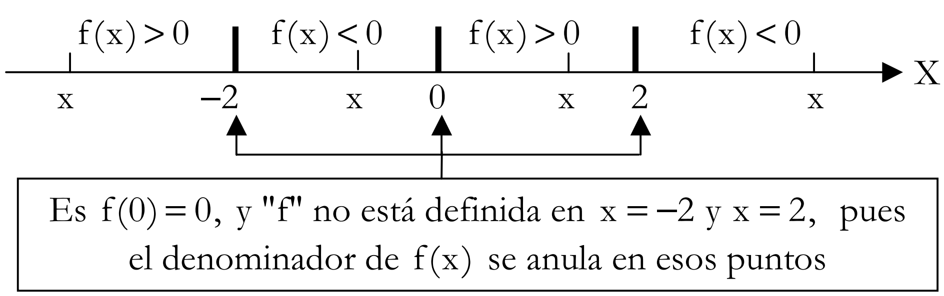
## SOLUCIÓN

Como el signo del número real $f(x)$ depende del signo que tengan los números reales $k_1(x) = x^3$ y $k_2(x) = 4 - x^2$, determinamos los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x) = x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (triple)}$$
$$k_2(x) = 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

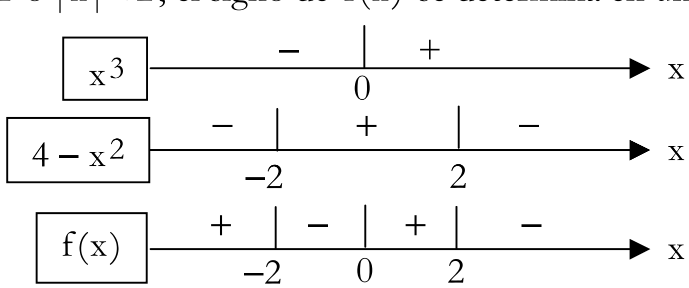
Los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$ dividen al eje de abcisas en cuatro intervalos, y $f(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $f(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de él:

$$\begin{aligned} &* \text{ como } f(-3) = 27/5 > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall\ x < -2 \\ &* \text{ como } f(-1) = -1/3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall\ x \in (-2;0) \\ &* \text{ como } f(1) = 1/3 > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall\ x \in (0;2) \\ &* \text{ como } f(3) = -27/5 < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall\ x \in (2;+\infty) \end{aligned}$$




En el punto $x = 0$ ocurre que $f(0) = 0$ ($\Rightarrow$ en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "f" y el eje de abcisas) y $f(x)$ "cambia de signo" en $x = 0$ ($\Rightarrow$ la gráfica de "f" atraviesa dicho eje).

Como **las moscas no se matan a cañonazos,** con una función tan tonta como nuestra "f", debes ser capaz de estudiar el signo de $f(x)$ sin necesidad de montar el "pollo" precedente: como el numerador $x^3$ es positivo o negativo según que $x > 0$ ó $x < 0$ y el denominador $4 - x^2$ es negativo o positivo según que $|x| > 2$ ó $|x| < 2$, el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:



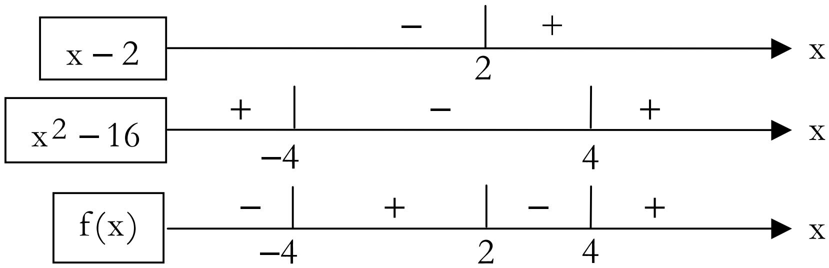
## FONEMATO 1.19.9

Estúdiese el signo de la función $f:\Re \mapsto \Re$ en los siguientes casos:

$$1)\ f(x)=\frac{x-2}{x^2-16}\ ;\ 2)\ f(x)=\frac{e^x.(16-x^2)}{x^2-4}$$

## SOLUCIÓN

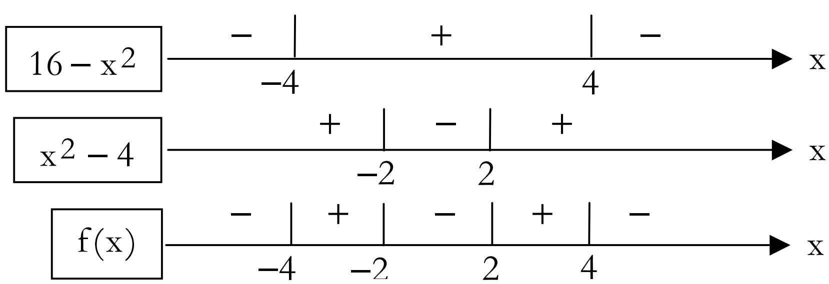
1) Si $f(x)=(x-2)/(x^2-16)$, como el numerador $x-2$ es positivo o negativo según que $x>2$ ó $x<2$ y el denominador $x^2-16$ es positivo o negativo según que $|x|>4$ ó $|x|<4$, el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:




Así, la gráfica de "f" está por debajo del eje de abcisas si $x<-4$ o si $x\in(2;4)$, y está por encima de dicho eje si $x\in(-4;-2)$ o si $x>4$.

En el punto $x=2$ ocurre que $f(2)=0$ ($\Rightarrow$ en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "f" y el eje de abcisas) y $f(x)$ "cambia de signo" en $x=2$ ($\Rightarrow$ la gráfica de "f" atraviesa a dicho eje). La función "f" no está definida en los puntos $x=4$ y $x=-4$, pues en ellos se anula el denominador.

2) Si $f(x)=e^x.(16-x^2)/(x^2-4)$, sucede que el factor $e^x$ siempre toma valores positivos, el factor $16-x^2$ es positivo o negativo según que $|x|<4$ ó $|x|>4$, y el factor $x^2-4$ es positivo o negativo según que $|x|>2$ ó $|x|<2$. Por tanto, el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:




Así, la gráfica de "f" está por encima del eje de abcisas si $x\in(-4;-2)$ y si $x\in(2;4)$, y está por debajo de dicho eje si $x<-4$, si $x\in(-2;2)$ y si $x>2$.

La gráfica de "f" corta al eje de abcisas en los puntos $x=-4$ y $x=4$, pues $f(-4)=f(4)=0$ y $f(x)$ "cambia de signo" en dichos puntos. La función "f" no está definida en los puntos $x=2$ y $x=-2$, pues en ellos se anula el denominador.

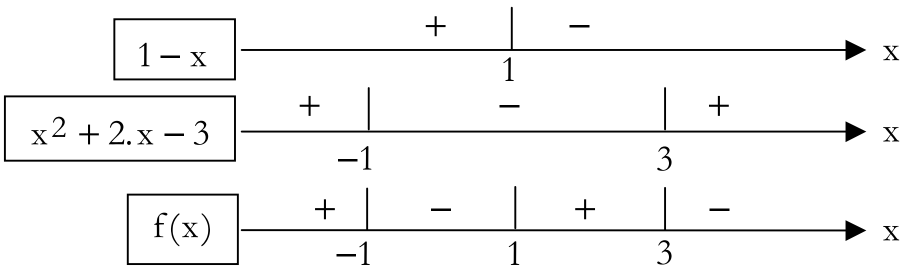
## FONEMATO 1.19.10

Estúdiese el signo de la función $f:\Re \mapsto \Re$ en los siguientes casos:

$$1)\ f(x)=\frac{1-x}{x^2+2.x-3}\ ;\ 2)\ f(x)=\frac{7-x^2}{x^2+x+1}\ ;\ 3)\ f(x)=\frac{x^2-2.x+5}{-x^2+4.x-5}$$

## SOLUCIÓN

1) Si $f(x)=(1-x)/(x^2+2.x-3)$, como el numerador $1-x$ es negativo o positivo según que $x>1$ ó $x<1$, y el denominador $u(x)=x^2+2.x-3$ es negativo si $x\in(-1;3)$ y positivo si $x<-1$ ó $x>3$ (pues $u(x)=x^2+2.x-3$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba que corta al eje de abcisas en los puntos $x=-1$ y $x=3$), el signo de $f(x)$ se determina en un periquete:




Así, la gráfica de "f" está por encima del eje de abcisas si $x<-1$ o si $x\in(1;3)$, y está por debajo de dicho eje si $x\in(-1;1)$ o si $x>3$.

En el punto $x=1$ ocurre que $f(1)=0$ ($\Rightarrow$ en dicho punto hay "contacto" entre la gráfica de la función "f" y el eje de abcisas) y $f(x)$ "cambia de signo" en $x=1$ ($\Rightarrow$ la gráfica de "f" atraviesa dicho eje). La función "f" no está definida en los puntos $x=-1$ y $x=3$, pues en ellos se anula el denominador.

2) Si $f(x)=(7-x^2)/(x^2+x+1)$, como el factor $u(x)=x^2+x+1$ sólo toma valores positivos ($u(x)=x^2+x+1$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba que no corta al eje de abcisas, pues $u(x)=0$ carece de soluciones reales), el signo de $f(x)$ es el de $7-x^2$, que es positivo si $|x|<\sqrt{7}$ y negativo si $|x|>\sqrt{7}$. Así, la gráfica de "f" está encima del eje de abcisas si $|x|<\sqrt{7}$, y está debajo de dicho eje si $|x|>\sqrt{7}$. Dicha gráfica corta al eje de abcisas en $x=-\sqrt{7}$ y $x=\sqrt{7}$, pues $f(-\sqrt{7})=f(\sqrt{7})=0$ y $f(x)$ "cambia de signo" en dichos puntos.

3) Es $f(x)=(x^2-2.x+5)/(-x^2+4.x-5)<0$, pues $u(x)=x^2-2.x+5$ siempre es positivo ($u(x)=x^2-2.x+5$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba que no corta al eje de abcisas, pues $u(x)=0$ carece de soluciones reales), y $v(x)=-x^2+4.x-5$ siempre es negativo ($v(x)=-x^2+4.x-5$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo que no corta al eje de abcisas, pues $v(x)=0$ carece de soluciones reales). Por tanto, la gráfica de "f" está por debajo del eje de abcisas en todos los puntos.

## FONEMATO 1.19.11

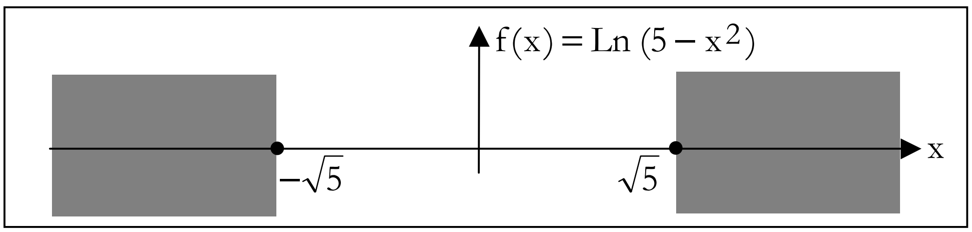
Determínese el dominio de definición y estúdiese el signo de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \text{Ln}\,(5 - x^2)$.

## SOLUCIÓN

Como $f(x) = \text{Ln}\,(5 - x^2) \equiv \text{Ln}\,u(x)$, es:

$$\text{Dom.}f = \{x \in \Re \,/\, f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \,/\, u(x) \in \Re,\ u(x) > 0\} =$$
$$= \{x \in \Re \,/\, x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})\}$$

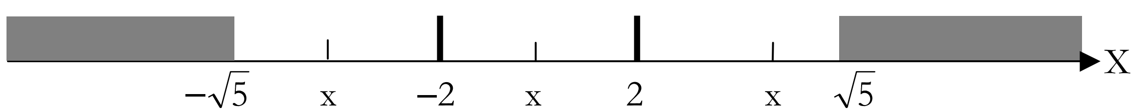
$u(x) = 5 - x^2$ es un polinomio cuya gráfica es una parábola con cuernos hacia abajo (pues el coeficiente de $x^2$ es $< 0$) que corta al eje de abcisas en $x = \pm\sqrt{5}$ (pues $5 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$) $\Rightarrow$ $u(x) > 0$ sólo si $x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$




Para estudiar el signo de $f(x) = \text{Ln}\,(5 - x^2)$ cuando $x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$, determinamos los valores de "x" que anulan a $f(x)$; o sea, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

$$f(x) = \text{Ln}\,(5 - x^2) = 0 \Rightarrow 5 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 2$$

Los puntos $x = -2$ y $x = 2$ dividen al intervalo $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ en tres intervalos, y $f(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos.




Para averiguar el signo de $f(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de él:

* como $f(-2'1) = \text{Ln}\,(5 - (-2'1)^2) = \text{Ln}\,0'59 < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall\ x \in (-\sqrt{5}; -2)$
* como $f(0) = \text{Ln}\,(5 - 0^2) = \text{Ln}\,5 > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall\ x \in (-2; 2)$
* como $f(2'1) = \text{Ln}\,(5 - 2'1^2) = \text{Ln}\,0'59 < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall\ x \in (2; \sqrt{5})$

En definitiva, la gráfica de "f" está por encima del eje de abcisas si $x \in (-2; 2)$, y está por debajo de dicho eje si $x \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5})$.

Como $f(x)$ se anula y cambia de signo en $x = 2$ y en $x = -2$, la gráfica de "f" corta al eje de abcisas en dichos puntos.

## FONEMATO 1.19.12

Determínese el dominio de definición y estúdiese el signo de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = \text{Ln}\,((x^3 + 2.x^2)/(4 - x))$.

## SOLUCIÓN

Como $f(x) = \text{Ln}\,((x^3 + 2.x^2)/(4 - x)) \equiv \text{Ln}\, u(x)$, es:

$$\text{Dom.} f = \{x \in \Re \,/\, f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \,/\, u(x) \in \Re,\, u(x) > 0\} =$$
$$= \{x \in \Re \,/\, x \in (-2;0) \cup (0;4)\}$$

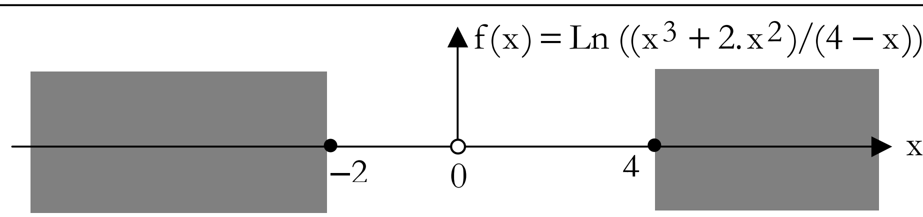
- Como $u(x) = (x^3 + 2.x^2)/(4 - x) \equiv$ cociente de polinomios, es $u(x) \in \Re$ siempre que $x \neq 4$ (único punto en que se anula el denominador de u(x)).
- El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales $k_1(x) = x^3 + 2.x^2$ y $k_2(x) = 4 - x$, por lo que debemos determinar los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x) = x^3 + 2.x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \text{ (doble)} \\ -2 \end{cases}$$
$$k_2(x) = 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$$

Los puntos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 4$ dividen al eje de abcisas en cuatro intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

* como $u(-3) < 0 \Rightarrow u(x) < 0,\ \forall\ x < -2$
* como $u(-1) > 0 \Rightarrow u(x) > 0,\ \forall\ x \in (-2;0)$
* como $u(1) > 0 \Rightarrow u(x) > 0,\ \forall\ x \in (0;4)$
* como $u(5) < 0 \Rightarrow u(x) < 0,\ \forall\ x > 4$

- En definitiva, $u(x) > 0$ sólo si $x \in (-2;0) \cup (0;4)$.

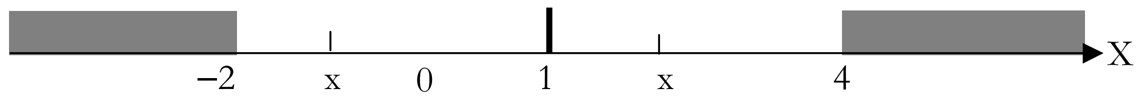



"f" no está definida en el punto $x = 0$, pues $f(0) = \text{Ln}\, 0 \notin \Re$

Para estudiar el signo de $f(x) = \text{Ln}\,((x^3 + 2.x^2)/(4 - x))$ cuando $x \in \text{Dom.}\, f$, determinamos los valores de "x" que anulan a $f(x)$:

$$f(x) = \text{Ln}\,((x^3 + 2.x^2)/(4 - x)) = 0 \Rightarrow (x^3 + 2.x^2)/(4 - x) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 + 2.x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ \text{soluciones imaginarias} \end{cases}$$

El punto $x=1$ divide al dominio de "f" en dos zonas, y $f(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada una de ellas.




Para averiguar el signo de $f(x)$ en una zona concreta basta determinar el signo de $f(x)$ en un punto cualquiera de ella; así:

$$* \text{ como } f(-1)=\text{Ln } 3/4<0 \Rightarrow f(x)<0,\ \forall\ x\in(-2;1),\ x\neq 0$$
$$* \text{ como } f(3)=\text{Ln } 7>0 \Rightarrow f(x)>0,\ \forall\ x\in(1;4)$$

En definitiva, la gráfica de "f" está por encima del eje de abcisas si $x\in(1;4)$, y está por debajo de dicho eje si $x\in(-2;0)\cup(0;1)$. Como $f(x)$ se anula y cambia de signo en $x=1$, la gráfica de "f" corta al eje de abcisas en dicho punto.

## FONEMATO 1.19.13

Determínese el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{(x^3-x^2)/(x-5)}$.

## SOLUCIÓN

Como $f(x)=\sqrt{(x^3-x^2)/(x-5)}\equiv \sqrt[\text{par}]{u(x)}$, es:

$$\text{Dom.}f=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$
$$=\{x\in\Re\ /\ x\in(-\infty;1]\cup(5;+\infty)\}$$

- Como $u(x)=(x^3-x^2)/(x-5)\equiv$cociente de polinomios, es $u(x)\in\Re$ si $x\neq 5$ (único punto en que se anula el denominador de u(x)).
- El signo del número real $u(x)$ depende del signo que tengan los números reales $k_1(x)=x^3-x^2$ y $k_2(x)=x-5$, por lo que debemos determinar los valores de "x" que anulan a $k_1(x)$ o a $k_2(x)$:

$$k_1(x)=x^3-x^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ (doble) ó } x=1$$
$$k_2(x)=x-5=0 \Rightarrow x=5$$

  Los puntos $x=0$, $x=1$ y $x=5$ dividen al eje de abcisas en cuatro intervalos, y $u(x)$ tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos. Para averiguar el signo de $u(x)$ en un intervalo concreto basta determinar el signo de $u(x)$ en un punto cualquiera de él:

$$* \text{ como } u(-3)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x<0$$
$$* \text{ como } u(1/2)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(0;1)$$
$$* \text{ como } u(2)<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x\in(1;5)$$
$$* \text{ como } u(6)>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x>5$$

- En definitiva, es $u(x)\geq 0$ sólo si $x\in(-\infty;1]\cup(5;+\infty)$.

# FONEMATO 1.19.14

Determínese el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{1-\log_5(9-x^2)}$.

## SOLUCIÓN

Como $f(x)=\sqrt{1-\log_5(9-x^2)}\equiv\sqrt[\text{par}]{u(x)}$, es:

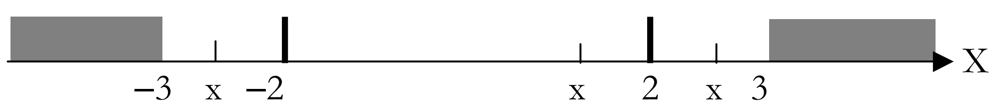
$$\text{Dom.}f=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=$$
$$=\{x\in\Re\ /\ x\in(-3;-2]\cup[2;3)\}$$

- Como $u(x)=1-\log_5(9-x^2)\equiv 1-\log_5 h(x)$, ocurre que $u(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$ y $h(x)>0$. Como $h(x)=9-x^2\equiv$polinomio, es $h(x)\in\Re$ para todo "x"; además, es $h(x)>0$ sólo si $x\in(-3;3)$, pues la gráfica de h(x) es una parábola con "cuernos" hacia abajo (el coeficiente de $x^2$ es negativo) que corta al eje de abcisas en los puntos $x=3$ y $x=-3$. En definitiva, es $u(x)\in\Re$ sólo si $x\in(-3;3)$.

- Para estudiar el signo de $u(x)=1-\log_5(9-x^2)$ cuando $x\in(-3;3)$ determinamos los valores de "x" que anulan a $u(x)$:

$$u(x)=1-\log_5(9-x^2)=0\Rightarrow\log_5(9-x^2)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9-x^2=5\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$$

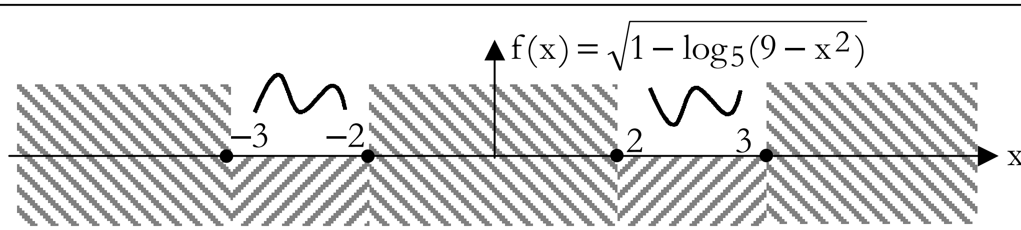
Los puntos $x=-2$ y $x=2$ dividen al intervalo $(-3;3)$ en tres intervalos, y u(x) tiene el mismo signo en todos los puntos de cada uno de ellos.




Para averiguar el signo de u(x) en un intervalo concreto basta determinar el signo de u(x) en un punto cualquiera de él:

* como $u(-2'5)=1-\log_5(9-(-2'5)^2)>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(-3;-2)$
* como $u(1)=1-\log_5(9-1^2)<0\Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x\in(-2;2)$
* como $u(2'5)=1-\log_5(9-2'5^2)>0\Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x\in(2;3)$

- En definitiva, es $u(x)\geq 0$ sólo si $x\in(-3;-2]\cup[2;3)$.




Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, entendemos que lleva el signo "+", por lo que si $x\in(-3;-2]\cup[2;3)$ es $f(x)\geq 0$.

## FONEMATO 1.19.15

Determínese el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{1-\log_7 (x^2-9)}$ .

## SOLUCIÓN

Como $f(x)=\sqrt{1-\log_7 (x^2-9)} \equiv \sqrt[par]{u(x)}$ , es:

$$\text{Dom.} f = \{x \in \Re \,/\, f(x) \in \Re\} = \{x \in \Re \,/\, u(x) \in \Re,\ u(x) \geq 0\} =$$
$$= \{x \in \Re \,/\, x \in [-4;-3) \cup (3;4]\}$$

- Como $u(x)=1-\log_7 (x^2-9) \equiv 1-\log_7 h(x)$, ocurre que $u(x) \in \Re$ sólo si $h(x) \in \Re$ y $h(x)>0$. Como $h(x)=x^2-9 \equiv$ polinomio es $h(x) \in \Re$ para todo valor de "x"; además, es $h(x)>0$ sólo si $x<-3$ ó $x>3$, pues la gráfica de h(x) es una parábola con "cuernos" hacia arriba (el coeficiente de $x^2$ es positivo) que corta al eje de abcisas en los puntos $x=3$ y $x=-3$. En definitiva, es $u(x) \in \Re$ sólo si $x<-3$ ó $x>3$.

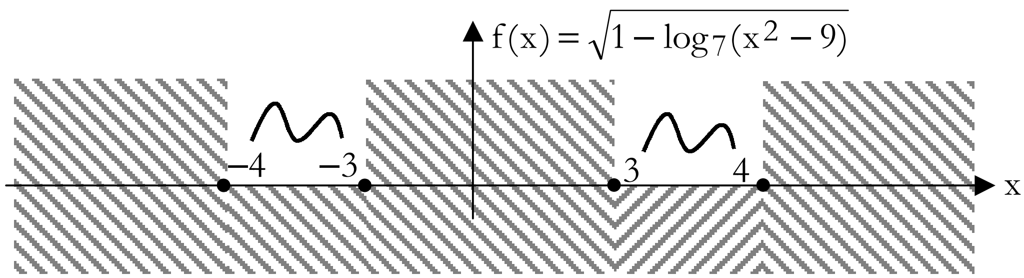
- Para estudiar el signo de $u(x)=1-\log_7 (x^2-9)$ si $x<-3$ ó $x>3$, determinamos los valores de "x" que anulan a u(x):

$$u(x)=1-\log_7 (x^2-9)=0 \Rightarrow \log_7 (x^2-9)=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-9=7 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$


Ahora:

* como $u(-5)=1-\log_7 16<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x<-4$
* como $u(-3'5)=1-\log_7 3'25>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x \in (-4;-3)$
* como $u(3'5)=1-\log_7 3'25>0 \Rightarrow u(x)>0,\ \forall\ x \in (3;4)$
* como $u(5)=1-\log_7 16<0 \Rightarrow u(x)<0,\ \forall\ x>4$

- En definitiva, es $u(x) \geq 0$ sólo si $x \in [-4;-3) \cup (3;4]$.




Como la raíz cuadrada no lleva signo delante, entendemos que lleva el signo "+", por lo que si $x \in [-4;-3) \cup (3;4]$ es $f(x) \geq 0$.

## FONEMATO 1.19.16

Determínese el dominio de definición de $f:\Re \mapsto \Re$ en los siguientes casos:

$$1)\ f(x)=\sqrt{1-\log_7\,(x^2+9)}\ ;\ 2)\ f(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}\,(\pi/x)}$$

## SOLUCIÓN

1) La función "f" no está definida en ningún punto:

$$\boxed{\text{pues } f(x)=\sqrt{1-\log_7\,(x^2+9)}\equiv \sqrt[\text{par}]{u(x)}}$$

$$\text{Dom.}f=\{x\in\Re\ /\ f(x)\in\Re\}=\{x\in\Re\ /\ u(x)\in\Re,\ u(x)\geq 0\}=\varnothing$$

- Como $u(x)=1-\log_7\,(x^2+9)\equiv 1-\log_7\,h(x)$, es $u(x)\in\Re$ sólo si $h(x)\in\Re$ y $h(x)>0$. Como $h(x)=x^2+9\equiv$ polinomio que sólo toma valores positivos, es $u(x)=1-\log_7\,h(x)\in\Re$ para todo valor de "x".
- Es $u(x)=1-\log_7\,(x^2+9)<0$ para todo "x", pues para todo "x" es:

$$x^2+9>7\Rightarrow \log_7\,(x^2+9)>1\Rightarrow u(x)=1-\log_7\,(x^2+9)<0$$

2) Siendo $f(x)=1/(\operatorname{sen}\,(\pi/x))\equiv 1/u(x)$, la función "f" está definida excepto si $x=0$ y $x=1/n$, siendo "n" cualquier número entero no nulo. En efecto, como $u(x)=\operatorname{sen}\,(\pi/x)\equiv\operatorname{sen}$ (cociente de polinomios), es $u(x)\in\Re$ si $x\neq 0$ (pues el denominador de $\pi/x$ sólo se anula si $x=0$), y es $u(x)=\operatorname{sen}\,(\pi/x)=0$ si $x=1/n$, siendo "n" cualquier número entero no nulo.

***Observa:*** en todo entorno reducido de $x=0$ hay infinidad de puntos en los que "f" no está definida, pues en dicho entorno de $x=0$ hay infinidad de puntos en los que se anula el denominador de $f(x)$. ***Por ejemplo,*** en el entorno reducido de $x=0$ formado por los "x" tales que $0<|x-0|<1/3000$, los infinitos puntos en que "f" no está definida son:

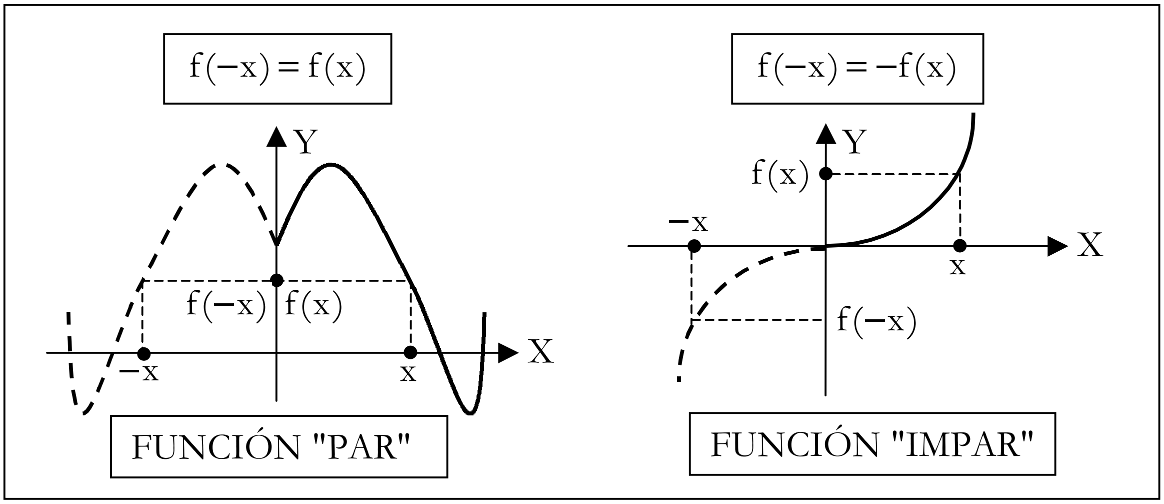
$$\pm\frac{1}{3001}\ ;\ \pm\frac{1}{3002}\ ;\ \pm\frac{1}{3003}\ ;\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

**PROVERBIO ANAMITA**

**Nada tarda tanto como lo que no se empieza**

# 1.20 SIMETRÍAS DE UNA FUNCIÓN

- Se dice que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es ***par*** si en todo punto "x" de su dominio de definición sucede que $f(-x)=f(x)$; en términos geométricos significa que ***la gráfica de "f" es simétrica respecto del eje de ordenadas.***
- Se dice que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es ***impar*** si en todo punto "x" de su dominio de definición sucede que $f(-x)=-f(x)$; en términos geométricos significa que ***la gráfica de "f" es simétrica respecto al origen de coordenadas.***




- ***El que una función "f" sea "par" o "impar" es un chollo, pues en tal caso sólo nos preocupará dibujar su gráfica para valores positivos de "x", ya que lo que sucede para valores negativos de "x" lo deducimos por simetría.***

***Por ejemplo***, son "pares" las funciones tales que

$$f_1(x)=\frac{x^2}{1+x^6}\ ;\ f_2(x)=\frac{\text{sen } x^8}{\sqrt{1-x^2-x^6}}\ ;\ f_3(x)=x^4.e^{x^2}\ ;\ f_4(x)=\text{Ln }(1+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "$-x$", resulta:

$$f_1(-x)=\frac{(-x)^2}{1+(-x)^6}=\frac{x^2}{1+x^6}=f_1(x)$$

$$f_2(-x)=\frac{\text{sen }(-x)^8}{\sqrt{1-(-x)^2-(-x)^6}}=\frac{\text{sen } x^8}{\sqrt{1-x^2-x^6}}=f_2(x)$$

$$f_3(-x)=(-x)^4.e^{(-x)^2}=x^4.e^{x^2}=f_3(x)$$

$$f_4(-x)=\text{Ln }(1+(-x^2))=\text{Ln }(1+x^2)=f_4(x)$$

***Por ejemplo,*** son "impares" las funciones tales que

$$f_5(x)=\frac{x^7}{8-x^4}\ ;\ f_6(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ f_7(x)=x^3.e^{x^2}\ ;\ f_8(x)=x^9.\text{Ln }(1+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "$-x$", resulta:

$$f_5(-x) = \frac{(-x)^7}{8-(-x)^4} = -\frac{x^7}{8-x^4} = -f_5(x)$$

$$f_6(-x) = \frac{(-x)^3}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = -f_6(x)$$

$$f_7(-x) = (-x)^3.e^{(-x)^2} = -x^3.e^{x^2} = -f_7(x)$$

$$f_8(-x) = (-x)^9.\text{Ln}\,(1+(-x^2)) = -x^9.\text{Ln}\,(1+x^2) = -f_8(x)$$

***Por ejemplo,*** no son "pares" ni "impares" las funciones tales que

$$g_1(x) = \frac{1}{x^2+x} \;;\; g_2(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} \;;\; g_3(x) = x^4.e^x \;;\; g_4(x) = \text{Ln}\,(1+x+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "$-x$", resulta:

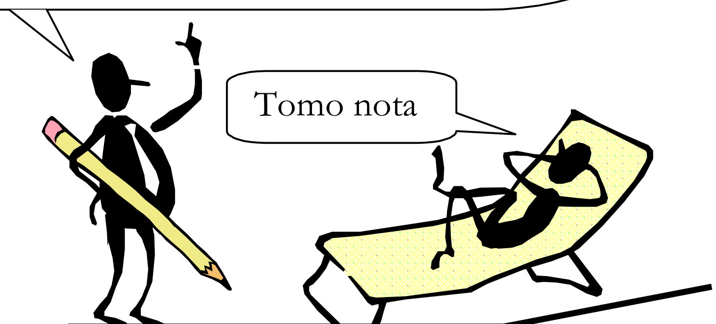
$$g_1(-x) = \frac{1}{(-x)^2+(-x)} = \frac{1}{x^2-x} \neq \begin{cases} g_1(x) \\ -g_1(x) \end{cases}$$

$$g_2(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)}}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \neq \begin{cases} g_2(x) \\ -g_2(x) \end{cases}$$

$$g_3(-x) = (-x)^4.e^{-x} = x^4.e^{-x} \neq \begin{cases} g_3(x) \\ -g_3(x) \end{cases}$$

$$g_4(-x) = \text{Ln}\,(1+(-x)+(-x)^2) = \text{Ln}\,(1-x+x^2) \neq \begin{cases} g_4(x) \\ -g_4(x) \end{cases}$$

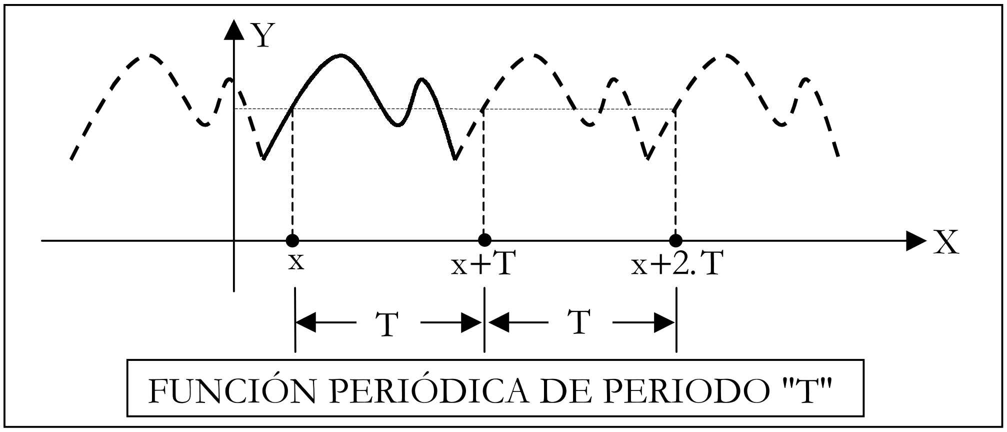
***Si el dominio de definición de una función "f" no es simétrico respecto al punto x = 0, no hay que andar con la puñeta de sustituir "x" por "–x" para analizar las posibles simetrías de "f", pues puedes apostar tranquilamente la vida a que "f" no es "par" ni es "impar". Por ejemplo,*** siendo $f(x) = 1/(x-4)$, la función "f" está definida $\forall\ x \neq 4$, y saber eso es suficiente para garantizar "f" no es "par" ni "impar", pues para que fuera "par" o "impar" sería necesario (no suficiente) que "f" no estuviera definida tampoco en el punto $x = -4$, que es el simétrico del punto $x = 4$ respecto al punto $x = 0$.



abrir panel

# 1.21 FUNCIONES PERIÓDICAS

- Se dice que la función "f" es ***periódica o cíclica de periodo "T"*** si "T" es el menor número positivo tal que en todo punto "x" del dominio de definición de "f" sucede que $f(x+T)=f(x)$.

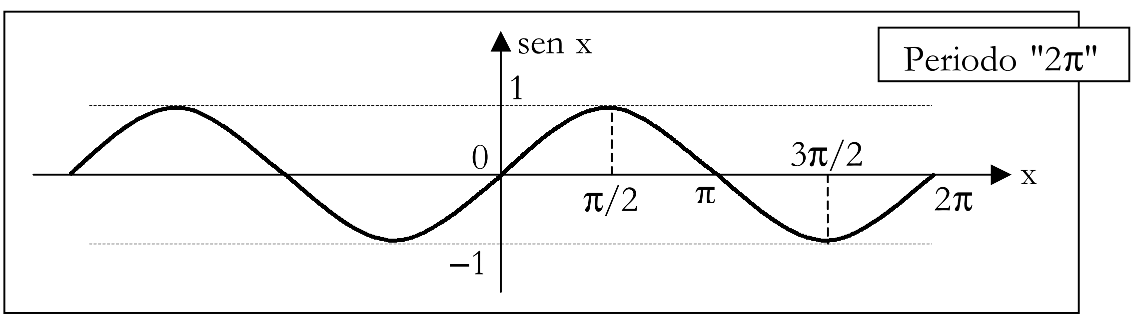


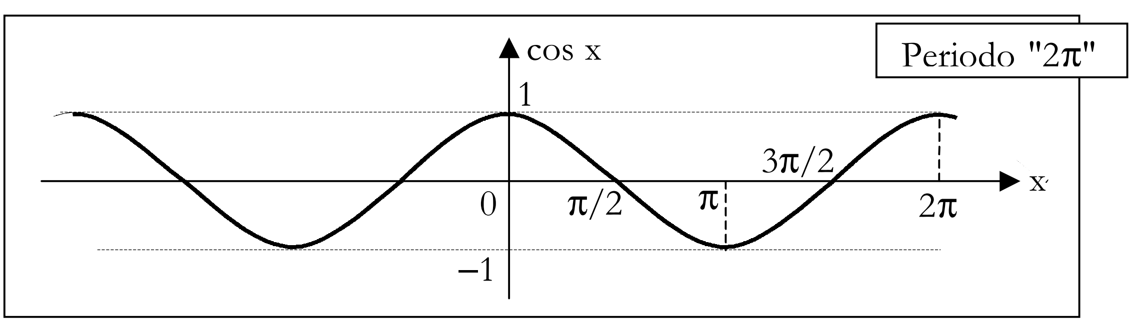

FUNCIÓN PERIÓDICA DE PERIODO "T"

- ***El que una función "f" sea periódica de periodo "T" es un gran chollo, pues así sólo debemos preocuparnos por dibujar su gráfica en el intervalo [a;a+T], siendo "a" un punto cualquiera del dominio de definición de "f".*** Si $0 \in \text{Dom. } f$, suele elegirse el intervalo $[0;T]$.

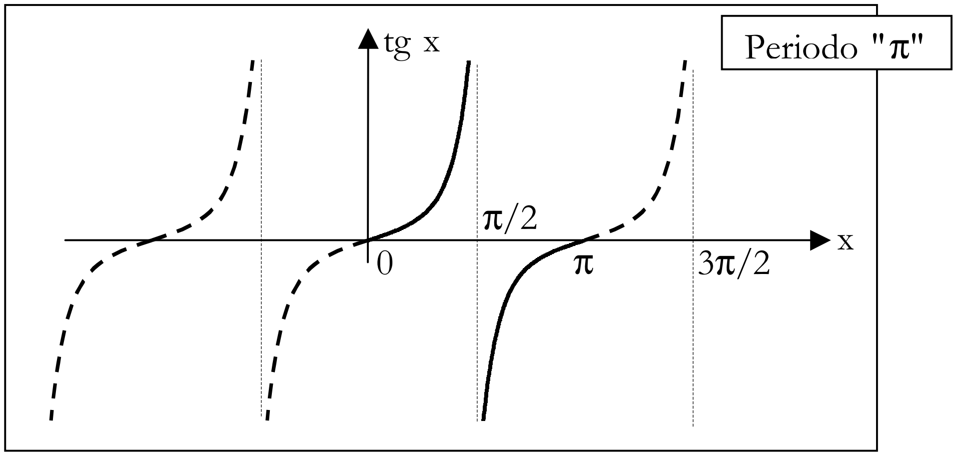
- Las más famosas funciones periódicas son $f(x)=\text{sen } x$ y $f(x)=\cos x$, que tienen periodo "$2\pi$", pues para todo "x" sucede que:

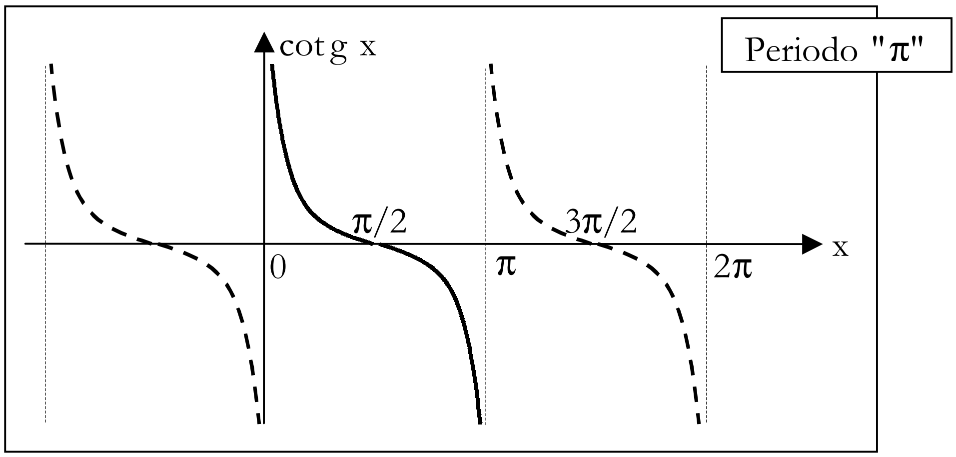
$$\text{sen } x=\text{sen }(x+2\pi)\ ;\ \cos x=\cos (x+2\pi)$$

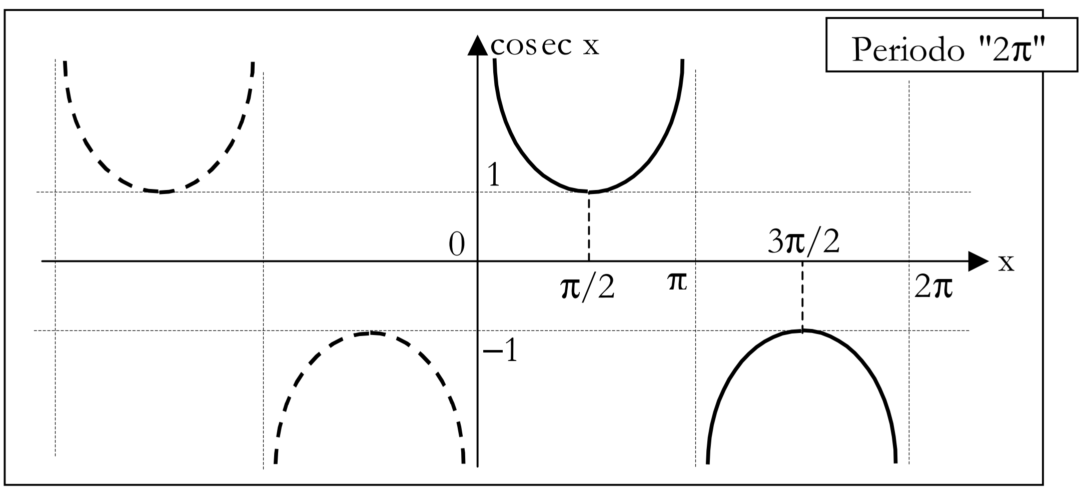


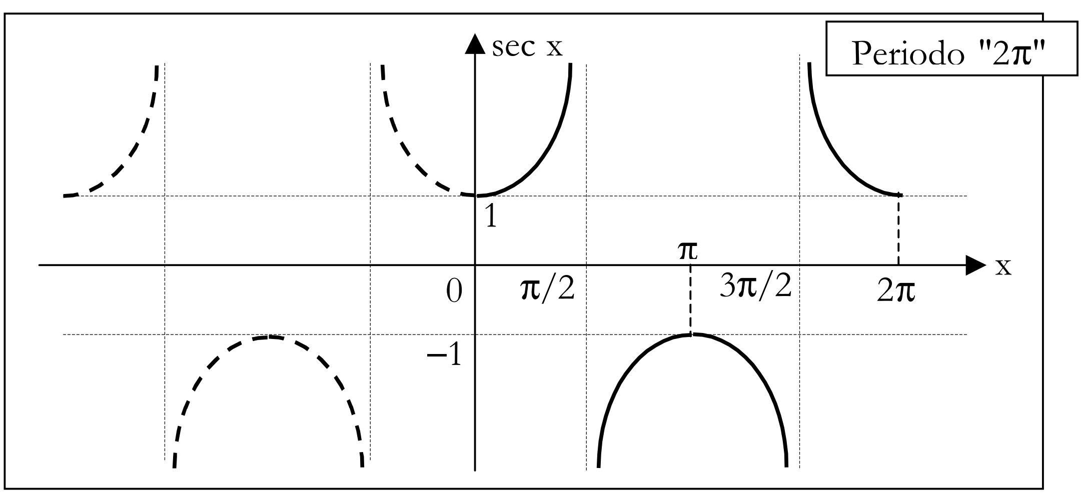




- Las funciones $f(x)=\text{tg } x$ y $f(x)=\text{cotg } x$ son periódicas de periodo "$\pi$", y las funciones $f(x)=\sec x$ y $f(x)=\text{cosec } x$ son periódicas de periodo "$2\pi$".

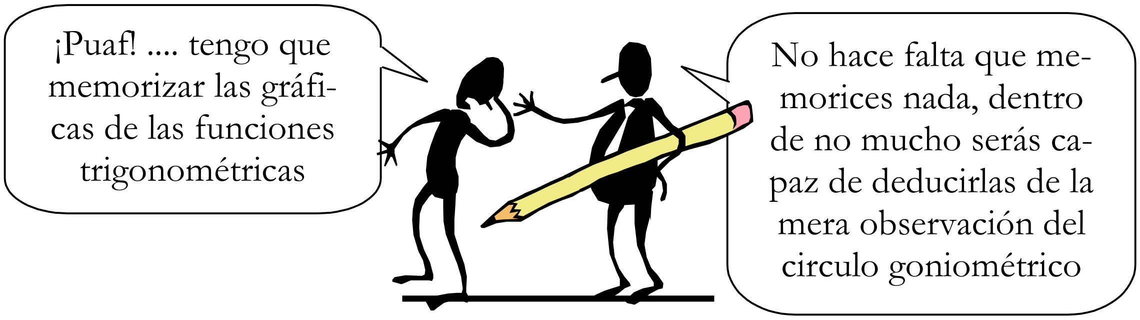

tg x
Periodo "π"
π/2
0
π
3π/2
x


cotg x
Periodo "π"
π/2
3π/2
0
π
2π
x


cosec x
Periodo "2π"
1
0
3π/2
π/2
π
2π
x
−1


sec x
Periodo "2π"
1
π
0
π/2
3π/2
2π
x
−1

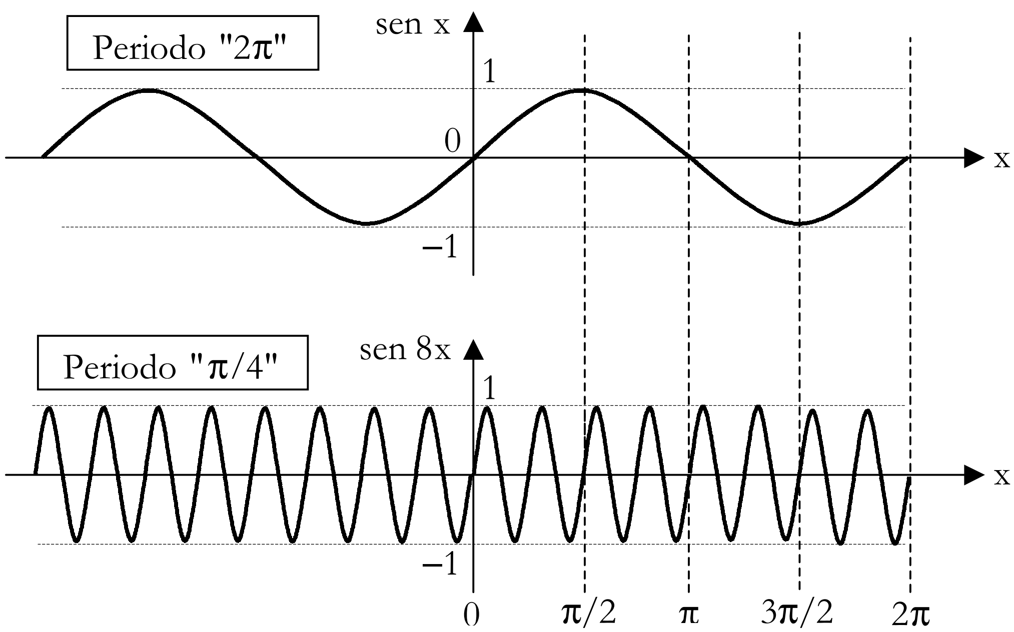
abrir panel




***Por ejemplo***, la función "g" tal que $g(x) = \text{sen } 8.x$ es periódica de periodo $\pi/4$, pues al exigir que se satisfaga la condición $g(x+T) = g(x)$, resulta:

$$\text{sen } 8.(x+T) = \text{sen } 8.x \Rightarrow 8.(x+T) = 8.x + 2.\pi \Rightarrow T = \pi/4$$

pues el "seno" es una función periódica de periodo $2\pi$




En el intervalo $[0;2\pi]$ la función $f(x) = \text{sen } x$ hace un "ciclo", y la función $g(x) = \text{sen } 8.x$ hace ocho ciclos en ese intervalo.

La inversa del periodo se llama ***frecuencia***, y expresa el número de ciclos que se producen por cada unidad de la variable "x". ***Por ejemplo,*** si "x" mide el tiempo en segundos, el que la frecuencia de $g(x) = \text{sen } 8.x$ sea $4/\pi \cong 1'2732395$ indica que en un segundo se producen $1'2732395$ ciclos.

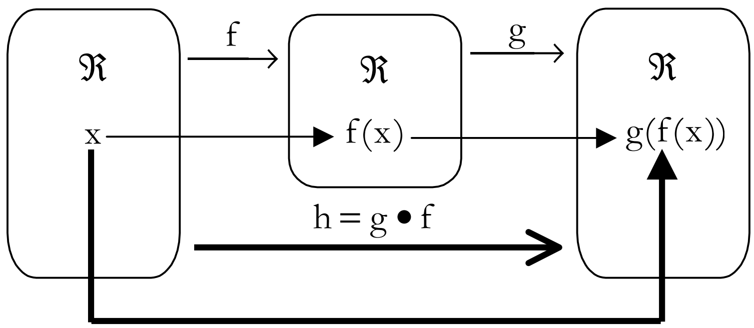
***Por ejemplo***, la función "h" tal que $h(x) = \text{tg } 5.x$ es periódica de periodo $\pi/5$, pues al exigir que se satisfaga la condición $h(x+T) = h(x)$, resulta:

$$\text{tg } 5.(x+T) = \text{tg } 5.x \Rightarrow 5.(x+T) = 5.x + \pi \Rightarrow T = \pi/5$$

pues la "tangente" es una función periódica de periodo $\pi$

# 1.22 FUNCIONES COMPUESTAS

***Aunque ya hemos trabajado con multitud de funciones "compuestas", conviene hablar expresamente de ello:*** si $f:\Re \mapsto \Re$ y $g:\Re \mapsto \Re$ son funciones, se dice que la función $h:\Re \mapsto \Re$ es la ***compuesta*** de "f" y "g" (se denota $h = g \bullet f$) si $h(x) = g(f(x))$; es decir, la imagen de $x \in \Re$ según "h" es la imagen según "g" de la imagen de "x" según "f".




***Por ejemplo***, si $f:\Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = 7 + x^2 + e^x$ y $g:\Re \mapsto \Re$ es tal que $g(y) = \text{sen } y$, la función $h_1 = g \bullet f$ es tal que:

$$\boxed{\text{es } f(x) = 7 + x^2 + e^x}$$

$$h_1(x) = g(f(x)) = f(7 + x^2 + e^x) = \text{sen }(7 + x^2 + e^x)$$

$$\boxed{\text{la función "g" establece que } g(\text{Pepe}) = \text{sen (Pepe)}}$$

La función $h_2 = f \bullet g$ es tal que:

$$\boxed{\text{es } g(y) = \text{sen } y}$$

$$h_2(y) = f(g(y)) = f(\text{sen } y) = 7 + (\text{sen } y)^2 + e^{\text{sen } y}$$

$$\boxed{\text{la función "f" establece que } f(\text{Paco}) = 7 + (\text{Paco})^2 + e^{\text{Paco}}}$$

***Por ejemplo***, si $f:\Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \sqrt{1-x}$ y la función $g:\Re \mapsto \Re$ es tal que $g(y) = \log_7 (y^2 - 9)$, la función $h_1 = g \bullet f$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } f(x) = \sqrt{1-x}}$$

$$h_1(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = \log_7 ((\sqrt{1-x})^2 - 9)$$

$$\boxed{\text{la función "g" establece que } g(\text{Pepe}) = \log_7 ((\text{Pepe})^2 - 9)}$$

La función $h_2 = f \bullet g$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } g(y) = \log_7 (y^2 - 9)}$$

$$h_2(y) = f(g(y)) = f(\log_7 (y^2 - 9)) = \sqrt{1 - \log_7 (y^2 - 9)}$$

$$\boxed{\text{la función "f" establece que } f(\text{Paco}) = \sqrt{1 - \text{Paco}}}$$

***Por ejemplo***, si la función $u:\Re \mapsto \Re$ es tal que $u(z) = 1 - z^2 + \sqrt{z}$ y la función $v:\Re \mapsto \Re$ es tal que $v(t) = \sqrt{t}$, la función $h_1 = v \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } u(z) = 1 - z^2 + \sqrt{z}}$$

$$h_1(z) = v(u(z)) = v(1 - z^2 + \sqrt{z}) = \sqrt{1 - z^2 + \sqrt{z}}$$

$$\boxed{\text{la función "v" establece que } v(\text{Pepe}) = \sqrt{\text{Pepe}}}$$

La función $h_2 = u \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } v(t) = \sqrt{t}}$$

$$h_2(t) = u(v(t)) = u(\sqrt{t}) = 1 - (\sqrt{t})^2 + \sqrt{\sqrt{t}}$$

$$\boxed{\text{la función "u" establece que } u(\text{Paco}) = 1 - (\text{Paco})^2 + \sqrt{\text{Paco}}}$$

***Por ejemplo***, si la función $u:\Re \mapsto \Re$ es tal que $u(\lambda) = 1 - \lambda^3$ y $v:\Re \mapsto \Re$ es tal que $v(\theta) = 1/\theta$, la función $h_1 = v \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } u(\lambda) = 1 - \lambda^3}$$

$$h_1(\lambda) = v(u(z)) = v(1 - \lambda^3) = 1/(1 - \lambda^3)$$

$$\boxed{\text{la función "v" establece que } v(\text{Pepe}) = 1/\text{Pepe}}$$

La función $h_2 = u \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } v(\theta) = 1/\theta}$$

$$h_2(\theta) = u(v(\theta)) = u(1/\theta) = 1 - (1/\theta)^3$$

$$\boxed{\text{la función "u" establece que } u(\text{Paco}) = 1 - (\text{Paco})^3}$$

***Por ejemplo***, si la función $\lambda:\Re \mapsto \Re$ es tal que $\lambda(z) = 1 + \sqrt{z}$ y $\theta:\Re \mapsto \Re$ es tal que $\theta(t) = 1/t$, la función $h_1 = \theta \bullet \lambda$ es la definida como:

$$\boxed{\text{es } \lambda(z) = 1 + \sqrt{z}}$$

$$h_1(z) = \theta(\lambda(z)) = \theta(1 + \sqrt{z}) = 1/(1 + \sqrt{z})$$

$$\boxed{\text{la función "}\theta\text{" establece que } \theta(\text{Pepe}) = 1/\text{Pepe}}$$

La función $h_2 = \lambda \bullet \theta$ es la definida como:

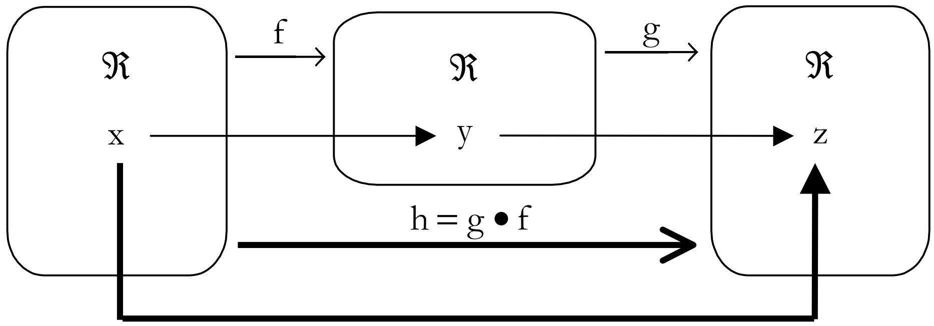
$$\boxed{\text{es } \theta(t) = 1/t}$$

$$h_2(t) = \lambda(\theta(t)) = \lambda(1/t) = 1 + \sqrt{1/t}$$

$$\boxed{\text{la función "}\lambda\text{" establece que } \lambda(\text{Paco}) = 1 + \sqrt{\text{Paco}}}$$

abrir panel

Entenderás la utilidad que en la vida cotidiana tienen las funciones "compuestas" si miras el siguiente esquema




y sintiendo como si el negocio fuera tuyo, piensas que, por ejemplo, las variables "x", "y" y "z" expresan lo siguiente:

$$x \equiv \text{cantidad de capital que utiliza Revilla S.A. para producir chorizo}$$
$$y \equiv \text{producción de chorizo de Revilla S.A}$$
$$z \equiv \text{beneficio de Revilla S.A}$$

Cabe decir que estamos ante dos ***fenómenos encadenados***: el fenómeno consistente en producir chorizo a partir de capital, y el fenómeno consistente en obtener beneficios a partir de la producción de chorizo. Cada uno de los dos fenómenos está gobernado por una "ley": la ley "f" determina la producción "y" $(y = f(x))$ en función de la cantidad "x" empleada de capital, y la ley "g" determina el beneficio "z" en función de la producción "y" $(z = g(y))$. En este contexto, cabe decir que la ley "compuesta" $h = g \bullet f$ "conecta" el inicio y el final del proceso, pues expresa el beneficio "z" en función de la cantidad "x" empleada de capital.

## ***Se pueden "encadenar" más de dos funciones.***

***Por ejemplo,*** si las funciones "u", "v" y "w" son tales que

$$u(x) = 2.x - 1 \;;\; v(z) = 5^{z} \;;\; w(\lambda) = 1/(7 + \lambda)$$

entonces:

1) La función $h_1 = w \bullet v \bullet u$ es la definida como:

$$\boxed{u(x) = 2.x - 1} \qquad \boxed{v(Pepe) = 5^{Pepe}}$$

$$h_1(x) = w(v(u(x))) = w(v(2.x - 1)) = w(5^{2.x-1}) = \frac{1}{7 + 5^{2.x-1}}$$

$$\boxed{w(Pío) = \frac{1}{7 + (Pío)}}$$

2) La función $h_2 = w \bullet u \bullet v$ es la definida como:

$$\boxed{v(z) = 5^{z}}$$

$$h_2(z) = w(u(v(z))) = w(u(5^{z})) = w(2.5^{z} - 1) = \frac{1}{7 + (2.5^{z} - 1)}$$

$$\boxed{u(Paco) = 2.(Paco) - 1} \qquad \boxed{w(Pío) = 1/(7 + Pío)}$$

3) La función $h_3 = v \bullet u \bullet w$ es la definida como:

$\boxed{\text{pues es } w(\lambda) = 1/(7+\lambda)}$ $\boxed{\text{pues es } u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$

$$h_3(\lambda) = v(u(w(\lambda))) = v(u(\frac{1}{7+\lambda})) = v(\frac{2}{7+\lambda} - 1) =$$

$$= 5^{(2/(7+\lambda))-1}$$

$\boxed{\text{pues es } v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$

4) La función $h_4 = v \bullet w \bullet u$ es la definida como:

$\boxed{u(x) = 2.x - 1}$ $\boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7+\text{Pío})}$

$$h_4(x) = v(w(u(x))) = v(w(2.x-1)) = v(\frac{1}{7+(2.x-1)}) = v(\frac{1}{6+2.x}) =$$

$$= 5^{1/(6+2.x)}$$

$\boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$

$$\boxed{x \xrightarrow{u} 2.x - 1 \xrightarrow{w} \frac{1}{6+2.x} \xrightarrow{v} 5^{1/(6+2.x)}}$$

5) La función $h_5 = u \bullet v \bullet w$ es la definida como:

$\boxed{\text{pues es } w(\lambda) = 1/(7+\lambda)}$ $\boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$

$$h_5(\lambda) = u(v(w(\lambda))) = u(v(\frac{1}{7+\lambda})) = u(5^{1/(7+\lambda)}) =$$

$$= 2.5^{1/(7+\lambda)} - 1$$

$\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$

$$\boxed{\lambda \xrightarrow{w} \frac{1}{7+\lambda} \xrightarrow{v} 5^{1/(7+\lambda)} \xrightarrow{u} 2.5^{1/(7+\lambda)} - 1}$$

6) La función $h_6 = u \bullet w \bullet v$ es la definida como:

$\boxed{v(z) = 5^z}$

$$h_6(z) = u(w(v(z))) = u(w(5^z)) = u(\frac{1}{7+5^z}) = 2.\frac{1}{7+5^z} - 1$$

$\boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7+\text{Pío})}$ $\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$

$$\boxed{z \xrightarrow{v} 5^z \xrightarrow{w} \frac{1}{7+5^z} \xrightarrow{u} 2.\frac{1}{7+5^z} - 1}$$

# 1.23 FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA

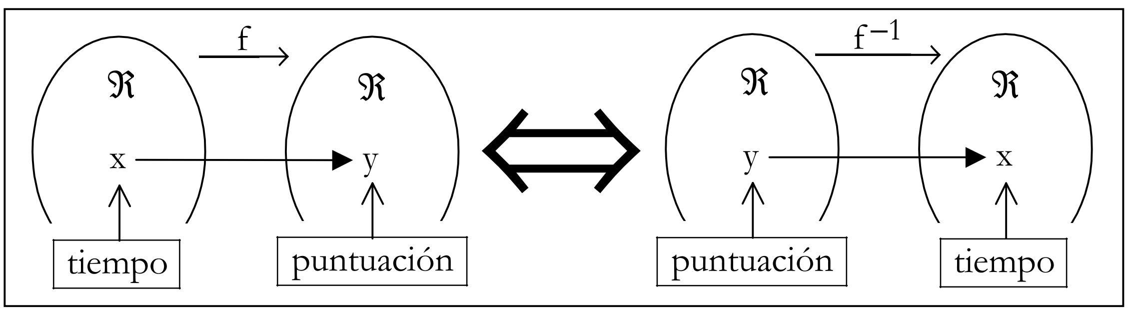
Lo mejor es un ejemplillo con un "fenómeno" de la vida cotidiana: sea "x" el tiempo que dedicas a estudiar un examen y sea "f" la función que al tiempo "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en el examen; es decir, $y = f(x)$:

$$\underbrace{\text{tiempo de estudio "x"}}_{\substack{\text{variable "independiente",}\\ \text{toma el valor que queramos}}} \xrightarrow{f} \underbrace{\text{puntuación "y"}}_{\substack{\text{variable "dependiente",}\\ \text{su valor depende del de "x"}}}$$

- Se llama ***inversa o recíproca*** de "f" (se denota $f^{-1}$) a la función que permite analizar el "fenómeno" dando la vuelta a la tortilla (lo que a veces es muy interesante); es decir, la función $f^{-1}$ es la que a la puntuación "y" le asocia el tiempo de estudio "x".

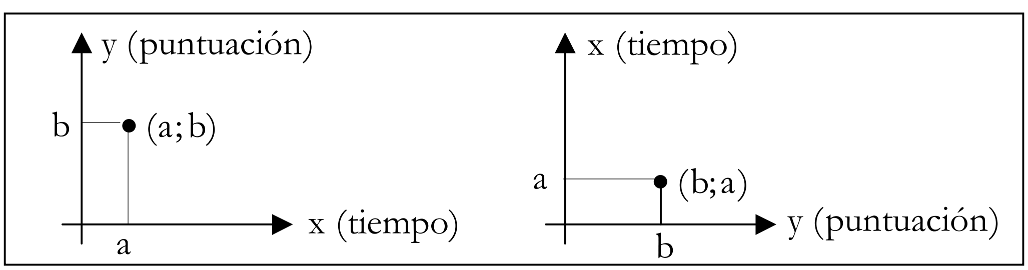
$$\underbrace{\text{puntuación "y"}}_{\substack{\text{variable "independiente",}\\ \text{toma el valor que queramos}}} \xrightarrow{f^{-1}} \underbrace{\text{tiempo de estudio "x"}}_{\substack{\text{variable "dependiente",}\\ \text{su valor depende del de "y"}}}$$

- La "inversa" de $f^{-1}$ es "f", por eso se dice que son "inversas" una de otra.




- **¡Ojo!:** el conjunto inicial (final) de "f" es el final (inicial) de $f^{-1}$.

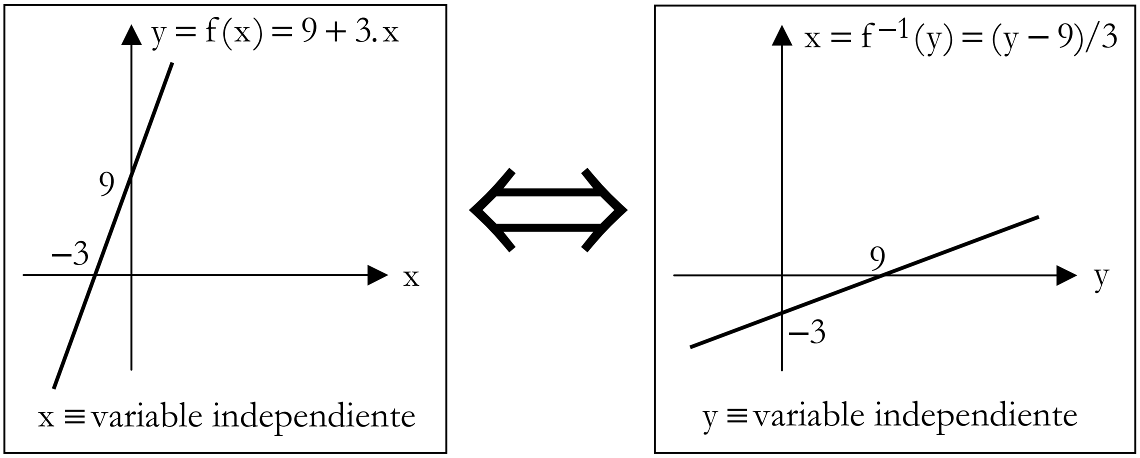
Si $f(a) = b$ (o sea, la gráfica de "f" pasa por el punto $(a;b)$) es $f^{-1}(b) = a$ (o sea, la gráfica de la función $f^{-1}$ pasa por el punto $(b;a)$).



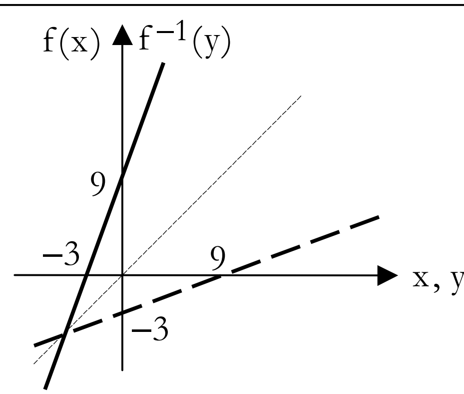

Los puntos $(a;b)$ y $(b;a)$ son simétricos respecto de la bisectriz del primer cuadrante del plano (pues el punto medio del segmento que los une es el $((a+b)/2;(b+a)/2)$ que por tener las dos coordenadas iguales está ubicado en dicha bisectriz); por tanto, la gráfica de $f^{-1}$ es simétrica de la gráfica de "f" respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

***Por ejemplo,*** siendo $y = f(x) = 9 + 3.x$, es $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-9}{3}$

a partir de $y = 9 + 3.x$ despejamos "x":
$$y = 9 + 3.x \Rightarrow y - 9 = 3.x \Rightarrow x = \frac{y-9}{3}$$




Como estaba previsto, al "superponer" las figuras anteriores vemos que las gráficas de las funciones "f" y $f^{-1}$ son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante




***Por ejemplo***, siendo $y = f(x) = e^{x-2}$, es $x = f^{-1}(y) = 2 + \operatorname{Ln} y$

a partir de $y = e^{x-2}$ despejamos "x":
$$y = e^{x-2} \Rightarrow \operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln} e^{x-2} \Rightarrow \operatorname{Ln} y = x - 2 \Rightarrow x = 2 + \operatorname{Ln} y$$

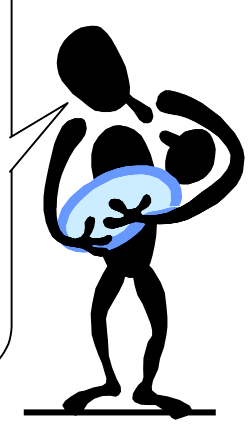
***El "fenómeno" es el que es, pero hay dos formas de "mirarlo" .... y como para gustos están los colores, tú lo "miras" como gustes:***

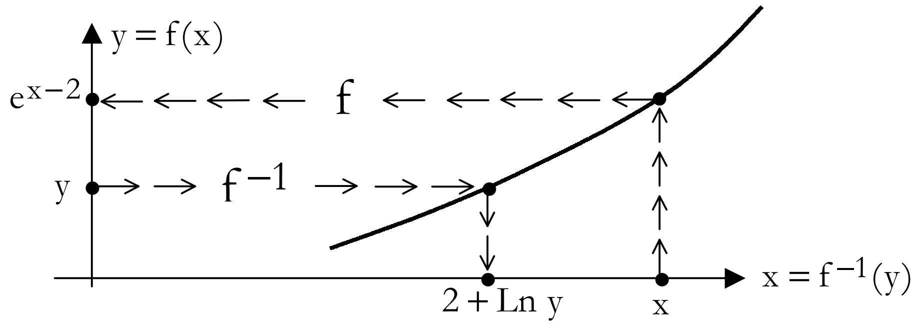
*A "x" horas de estudio les corresponde una nota $e^{x-2}$*

O vuelves la tortilla:

*A la nota "y" le corresponden 2+Ln y horas de estudio*

En el primer caso la variable "independiente" es el tiempo "x" de estudio, y en el segundo caso la "independiente" es la nota "y" del examen .... ¿Te enteras de algo?



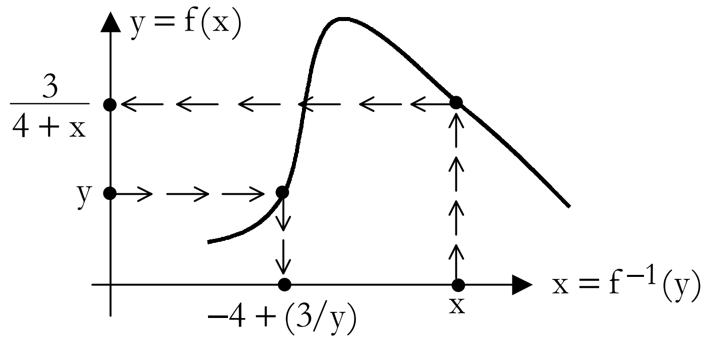



No hace falta andar cambiando los ejes según cuál sea la variable que elijamos como "independiente": si "arrancas" en el punto "x" del eje de abcisas ($\Leftrightarrow$ tomas "x" como independiente), la curva te "lleva" al punto $e^{x-2}$ del eje de ordenadas; si "arrancas" del punto "y" del eje de ordenadas ($\Leftrightarrow$ tomas "y" como independiente), la curva te "lleva" al punto $2 + \text{Ln } y$ del eje de abcisas

***Por ejemplo***, siendo $y = f(x) = \dfrac{3}{4+x}$, es $x = f^{-1}(y) = -4 + \dfrac{3}{y}$

Despejamos "x":

$$y = \frac{3}{4+x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{4+x}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -4 + \frac{3}{y}$$




***Por ejemplo***, siendo $z = f(x) = \log_3(2+x)$, es $x = f^{-1}(z) = 3^z - 2$

a partir de $z = \log_3(2+x)$ despejamos "x":
$z = \log_3(2+x) \Rightarrow 3^z = 2 + x \Rightarrow x = 3^z - 2$

***Por ejemplo,*** siendo $y = f(x) = 4^{x-1}$, es $x = f^{-1}(y) = 1 + \log_4 y$

a partir de $y = 4^{x-1}$ despejamos "x":
$y = 4^{x-1} \Rightarrow \log_4 y = x - 1 \Rightarrow x = 1 + \log_4 y$

Las funciones compuestas $h_1 = f^{-1} \bullet f$ y $h_2 = f \bullet f^{-1}$ son la función identidad (una función se dice que es la "identidad" si a cada número le asocia él mismo $\Rightarrow$ la gráfica de una función identidad es la bisectriz del primer cuadrante):

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f^{-1}} x \qquad h_1 = f^{-1} \bullet f$$

$$y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f} y \qquad h_2 = f \bullet f^{-1}$$

***Por ejemplo***, hemos visto que:

$$y = f(x) = \frac{3}{4+x} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + \frac{3}{y}$$

Comprobemos ahora que la función $h_1 = f^{-1} \bullet f$ es la "identidad":

$$h_1(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3}{4+x}\right) = -4 + \frac{3}{\frac{3}{4+x}} = x$$

$$\boxed{\text{es } f^{-1}(\text{Juan}) = -4 + \frac{3}{\text{Juan}} \text{ ; en nuestro caso: Juan} \equiv \frac{3}{4+x}}$$

Comprobemos que la función $h_2 = f \bullet f^{-1}$, también es la "identidad":

$$h_2(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(-4 + \frac{3}{y}\right) = \frac{3}{4 + \left(-4 + \frac{3}{y}\right)} = y$$

$$\boxed{\text{es } f(\text{Pepe}) = \frac{3}{4+\text{Pepe}} \text{ ; en nuestro caso: Pepe} \equiv -4 + \frac{3}{y}}$$

**¡Ojo con la notación!:** volvemos al ejemplo en que "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y "f" es la función que a "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en él. Hemos visto que, por ejemplo:

$$y = f(x) = 3/(4+x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y)$$

***Hay quien <u>siempre</u> llama "x" a la variable independiente;*** es decir, puedes encontrar quien diga que la "inversa" de la función $f: \Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = 3/(4+x)$ es la función $f^{-1}: \Re \mapsto \Re$ tal que $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, lo que genera notable confusión entre l@s principiantes, pues no se dan cuenta de que la "x" que aparece en $f(x) = 3/(4+x)$ nada tiene que ver con la "x" que aparece en $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$:

- El número "x" que aparece en $f(x) = 3/(4+x)$ expresa el tiempo que estudias, y el número $f(x)$ expresa la correspondiente nota del examen.
- El número "x" que aparece en $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$ expresa la nota del examen, y el número $f^{-1}(x)$ expresa el correspondiente tiempo de estudio.

Habría menos lío si se dijera que la función inversa de la $f: \Re_{\text{tiempo}} \mapsto \Re_{\text{notas}}$ tal que $f(x) = 3/(4+x)$ es la $f^{-1}: \Re_{\text{notas}} \mapsto \Re_{\text{tiempo}}$ tal que $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, pues así se entendería que la "x" que aparece en $f(x)$ es un elemento del conjunto $\Re_{\text{tiempo}}$, y la "x" que aparece en $f^{-1}(x)$ es un elemento del conjunto $\Re_{\text{notas}}$.

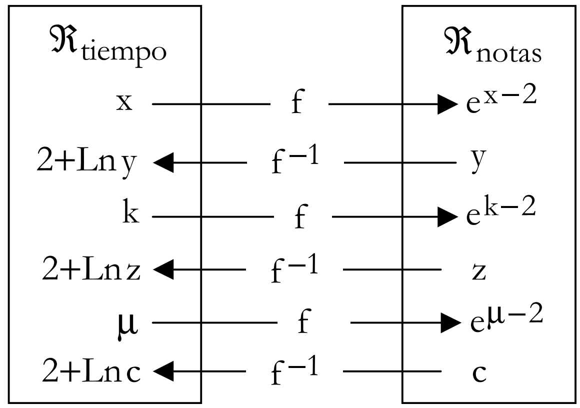
Como los profesionales tienen perfectamente claro que el conjunto inicial (final) de la función "f" es el final (inicial) de $f^{-1}$, no se lían si oyen decir que la "inversa" de

$f(x)=3/(4+x)$ es $f^{-1}(x)=-4+(3/x)$, que es lo mismo que decir:

$$f^{-1}(w)=-4+(3/w)\ ;\ f^{-1}(z)=-4+(3/z)\ ;\ \boxed{f^{-1}(y)=-4+(3/y)}$$

$$f^{-1}(\lambda)=-4+(3/\lambda)\ ;\ f^{-1}(\theta)=-4+(3/\theta)\ ;\ f^{-1}(\eta)=-4+(3/\eta)$$

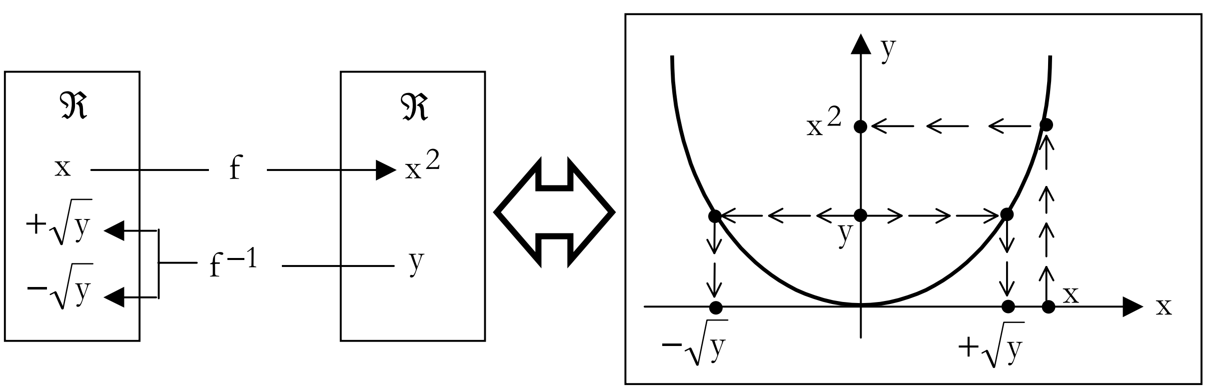
***Observa:*** siendo $f^{-1}:\Re_{notas}\mapsto\Re_{tiempo}$ la "inversa" de $f:\Re_{tiempo}\mapsto\Re_{notas}$, al hablar de $f^{-1}(w)$ estamos llamando "w" a un elemento genérico del conjunto inicial de $f^{-1}$ (que es el final de "f"), y al hablar de $f^{-1}(z)$ estamos llamando "z" a un elemento genérico del conjunto inicial de $f^{-1}$ (que es el final de "f"), y al hablar de ...... lo importante no es el símbolo que usemos para referirnos a un elemento genérico del conjunto "inicial" de $f^{-1}$, lo importante es tener perfectamente claro que tal conjunto es $\Re_{notas}$.




**Recuerda que los principiantes deben leer $f^{-1}$(Paco) como:**

**Imagen de "Paco" según $f^{-1}$**

***A veces una función es "uniforme" y su función "inversa" no lo es.*** Por ejemplo, es uniforme la función $f:\Re\mapsto\Re$ tal que $y=f(x)=x^2$, pero no es uniforme su inversa, que es la $f^{-1}:\Re\mapsto\Re$ tal que $x=f^{-1}(y)=\pm\sqrt{y}$




***Hay funciones que carecen de función "inversa".*** Por ejemplo, la función $f:\Re\mapsto\Re$ tal que $y=f(x)=1$ carece de "inversa".

***Hay funciones cuya inversa no se puede "explicitar":*** si "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y "f" es la función que al tiempo "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en él (o sea, $y=f(x)$), entonces, siendo

$y = f(x) = 3/(4+x)$, sucede que la función $f^{-1}$ se puede "explicitar", lo que quiere decir que a partir de la igualdad $y = 3/(4+x)$ es posible despejar la variable "x":

$$y = f(x) = 3/(4+x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y)$$

Sin embargo, si $y = g(x) = x + 1 + \text{Ln } x$, la función $g^{-1}$ no se puede "explicitar", lo que quiere decir que a partir de la igualdad $y = x + 1 + \text{Ln } x$ resulta imposible despejar la variable "x":

$$y = g(x) = x + 1 + \text{Ln } x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = ?$$

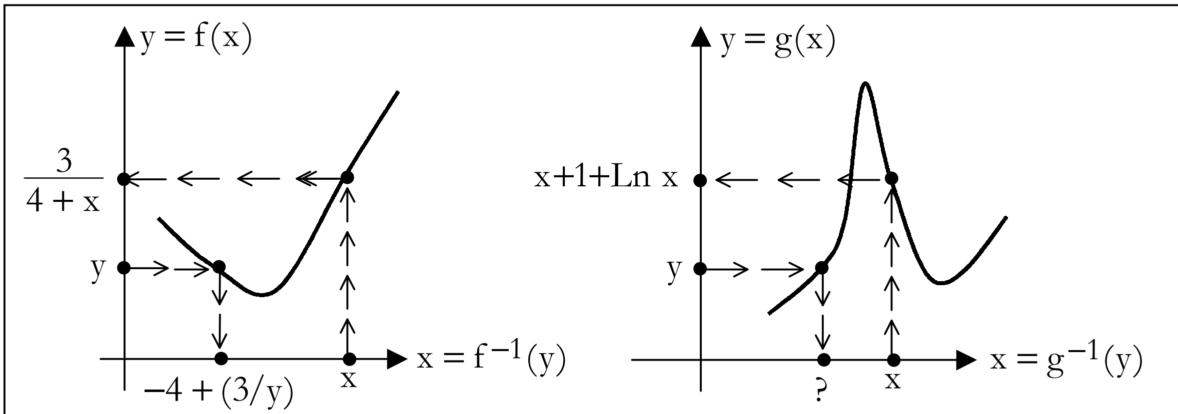
ni los japoneses más listos son capaces de despejar "x"

El que suceda tan desagradable contingencia no significa que en el estudio del "fenómeno" no pueda volverse la tortilla y considerar que la variable independiente es la "y" y la dependiente la "x".

La diferencia entre $f^{-1}$ y $g^{-1}$ es que $f^{-1}$ nos da expresamente (explícitamente) el valor de "x" que corresponde al valor elegido de la variable independiente "y":

$$x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y) \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(1) = -4 + (3/1) \\ f^{-1}(2) = -4 + (3/2) \\ f^{-1}(7) = -4 + (3/7) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Sin embargo, para averiguar el valor de "x" que $g^{-1}$ hace corresponder al valor elegido de "y", debemos resolver una ecuación, cosa que no siempre es fácil. Así, para calcular $g^{-1}(2)$ debemos resolver la ecuación $2 = x + 1 + \text{Ln } x$ (que es fácil, su solución es $x = 1$, por lo que $g^{-1}(2) = 1$), y para calcular $g^{-1}(7)$ debemos resolver la ecuación $7 = x + 1 + \text{Ln } x$, que no es tan fácil.




La función inversa de "f" se puede "explicitar", pues es posible despejar "x" en función de "y". La función inversa de "g" no se puede "explicitar, pues no es posible despejar "x" en función de "y"; en este caso, para averiguar el valor de "x" que corresponde a cada valor dado de "y" deberemos resolver la ecuación $x + 1 + \text{Ln } x = y$.

abrir panel

# 1.24 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas son las inversas o recíprocas de las funciones trigonométricas. ***Recuerda:*** los ángulos se miden en radianes, no en grados.

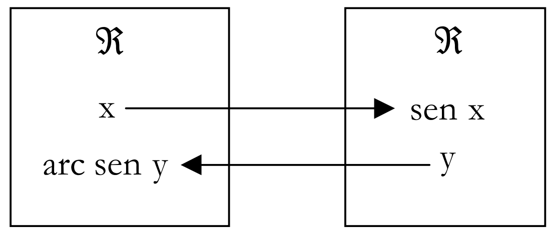
## *La función "arco seno"*

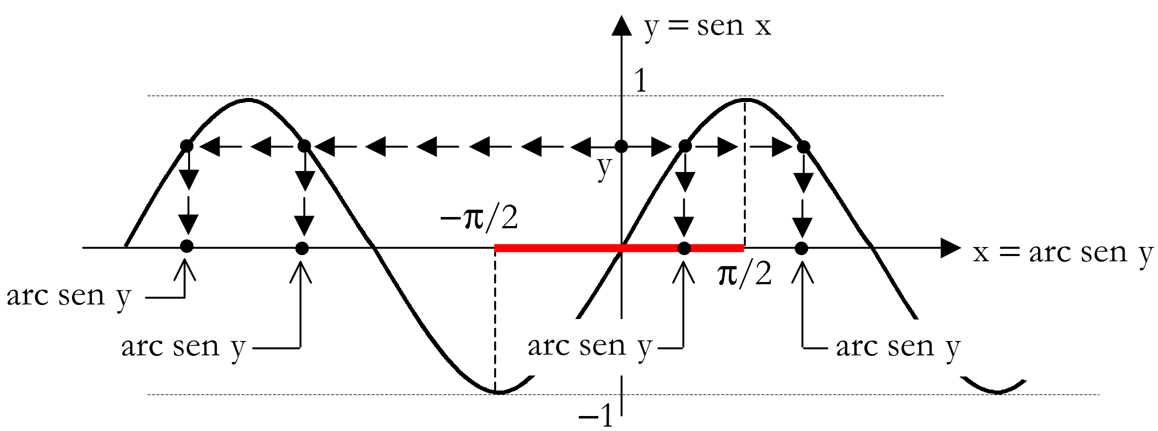
La inversa de la función "seno" se llama "arco seno" y se denota "arc sen". Por ejemplo, como imagen de $\pi/6$ según la función "seno" es el número $1/2$ (o sea, $\text{sen}\,\pi/6 = 1/2$), entonces la imagen del número $1/2$ según la función "arco seno" es el número $\pi/6$, y se escribe $\text{arc sen}\,1/2 = \pi/6$ (se lee: el arco cuyo seno es $1/2$ es $\pi/6$ radianes):

$$\pi/6 \xrightarrow{\text{sen}} 1/2 \;\Leftrightarrow\; 1/2 \xrightarrow{\text{arc sen}} \pi/6$$

O sea:

$$\text{sen}\,\pi/6 = 1/2 \;\Leftrightarrow\; \text{arc sen}\,1/2 = \pi/6$$



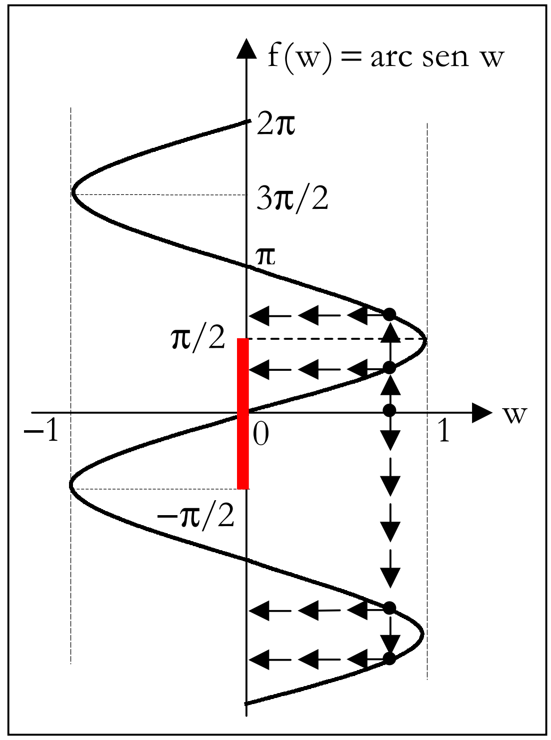

La función "seno" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco seno" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente. Entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$, diciendo de él que es el ***valor principal*** del "arco seno". Del intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$ se dice que es el ***intervalo principal*** (o fundamental) de la función "arco seno".

***Por ejemplo,*** el seno de $\pi/6, 5.\pi/6, 13.\pi/6, -7.\pi/6$ y $-11.\pi/6$ es $1/2$; por tanto:

$$\text{arc sen}\,1/2 = \pi/6 \;;\; \text{arc sen}\,1/2 = 5.\pi/6 \;;\; \text{arc sen}\,1/2 = 13.\pi/6$$
$$\text{arc sen}\,1/2 = -7.\pi/6 \;;\; \text{arc sen}\,1/2 = -11.\pi/6$$

El valor principal de $\text{arc sen}\,1/2$ es $\pi/6$, pues $\pi/6$ es el único ángulo del intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$ cuyo seno es $1/2$.

Llamando "w" a la variable "independiente", la gráfica de la función $f(w) = \text{arc sen } w$ es la de la figura adjunta.




***Observa:*** esta función sólo está definida si $-1 \leq w \leq 1$; por tanto, carece de sentido hablar de $\text{arc sen } 7$, pues no hay ningún ángulo cuyo seno sea 7.

La función $g: \Re \mapsto \Re$ definida como

$$g(w) = \text{arc sen } 3.w$$

sólo está definida si $-1 \leq 3.w \leq 1$; o sea, sólo si $-1/3 \leq w \leq 1/3$.

La función $h: \Re \mapsto \Re$ definida como

$$h(w) = \text{arc sen } (2 - 5.w)$$

sólo está definida si $-1 \leq 2 - 5.w \leq 1$, y se tiene que:

$$-1 \leq 2 - 5.w \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -5.w \leq -1 \Rightarrow 3 \geq 5.w \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq w \leq \frac{3}{5}$$

al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

La función $r: \Re \mapsto \Re$ definida como $r(w) = \text{arc sen } (1 - w^2)$ sólo está definida si $-1 \leq 1 - w^2 \leq 1$, y se tiene que:

$$-1 \leq 1 - w^2 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -w^2 \leq 0 \Rightarrow 2 \geq w^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq w^2 \leq 2 \Rightarrow |w| \leq \sqrt{2}$$

al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

- ***Recuerda:*** al "componer" una función con su inversa siempre se obtiene la función identidad, por tanto: $\text{sen } (\text{arc sen } w) = w$, $\text{arc sen } (\text{sen } w) = w$

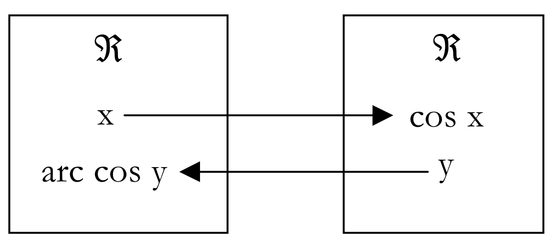
# ***La función "arco coseno"***

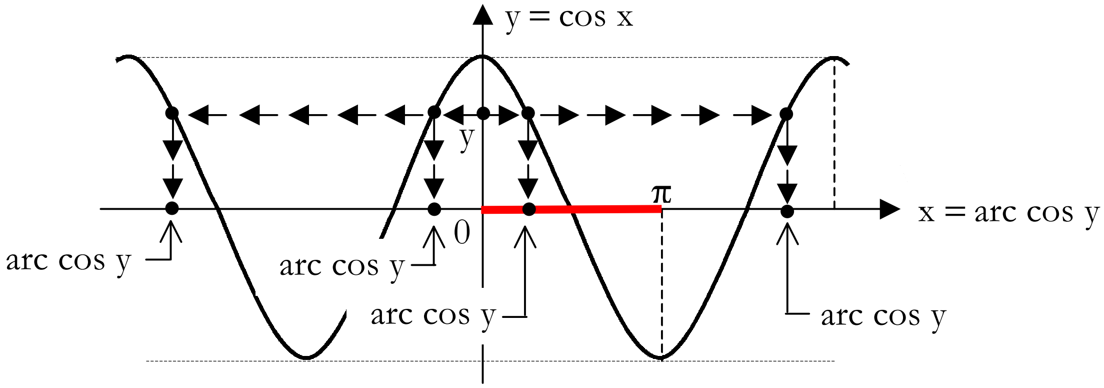
La inversa de la función "coseno" se llama "arco coseno" y se denota "arc cos". Por ejemplo, como imagen de $\pi/3$ según la función "coseno" es el número $1/2$ (o sea, $\cos \pi/3 = 1/2$), entonces la imagen del número $1/2$ según la función "arco coseno" es el número $\pi/3$, y se escribe $\text{arc cos } 1/2 = \pi/3$ (se lee: el arco cuyo coseno es $1/2$ es $\pi/3$ radianes):

$$\pi/3 \xrightarrow{\cos} 1/2 \;\Leftrightarrow\; 1/2 \xrightarrow{\text{arc cos}} \pi/3$$

O sea:

$$\cos \pi/3 = 1/2 \;\Leftrightarrow\; \text{arc cos } 1/2 = \pi/3$$






La función "coseno" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco coseno" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[0;\pi]$, diciendo de él que es el ***valor principal*** del "arco coseno". Del intervalo $[0;\pi]$ se dice que es el ***intervalo principal*** (o fundamental) de la función "arco coseno".

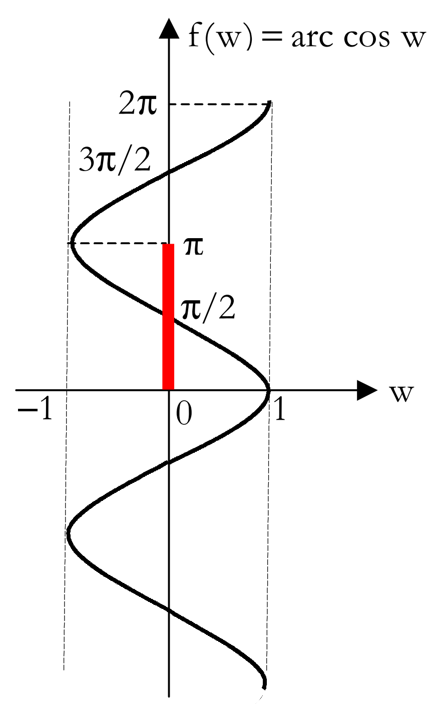
***Por ejemplo***, el coseno de $\pi/3, 7.\pi/3, 13.\pi/3, -\pi/3$ y $-5.\pi/3$ es $1/2$; por tanto:

$$\text{arc cos } 1/2 = \pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = 7.\pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = 13.\pi/3$$

$$\text{arc cos } 1/2 = -\pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = -5.\pi/3$$

El valor principal de $\text{arc cos } 1/2$ es $\pi/3$, pues $\pi/3$ es el único ángulo del intervalo $[0;\pi]$ cuyo coseno es $1/2$.

Llamando "w" a la variable "independiente", la gráfica de la función $f(w) = \text{arc cos } w$ es la de la figura adjunta. ***Observa:*** esta función sólo está definida si $-1 \leq w \leq 1$; por tanto, carece de sentido hablar de $\text{arc cos } 4$, pues no hay ningún ángulo cuyo coseno sea 4.




Si $h(w) = \text{arc cos } (2 - 3.w)$, la función "h" sólo está definida si $-1 \leq 2 - 3.w \leq 1$:

$$-1 \leq 2 - 3.w \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3.w \leq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \geq 3.w \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq w \leq 1$$

al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

Si $r(w) = \text{arc cos } (4 - w^2)$, la función "r" sólo está definida si $-1 \leq 4 - w^2 \leq 1$, y se tiene que:

$$-1 \leq 4 - w^2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq -w^2 \leq -3 \Rightarrow 5 \geq w^2 \geq 3 \Rightarrow$$

al multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad

$$\Rightarrow 3 \leq w^2 \leq 5 \Rightarrow \sqrt{3} \leq |w| \leq \sqrt{5}$$

- ***Recuerda:*** al "componer" una función con su inversa siempre se obtiene la función identidad, por tanto: $\cos(\text{arc cos } w) = w$, $\text{arc cos}(\cos w) = w$

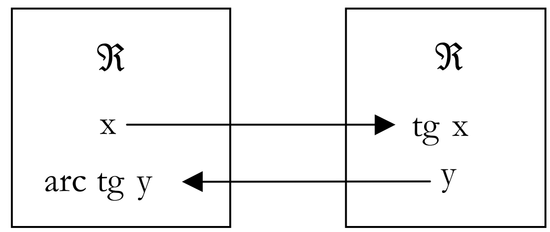
## La función "arco tangente"

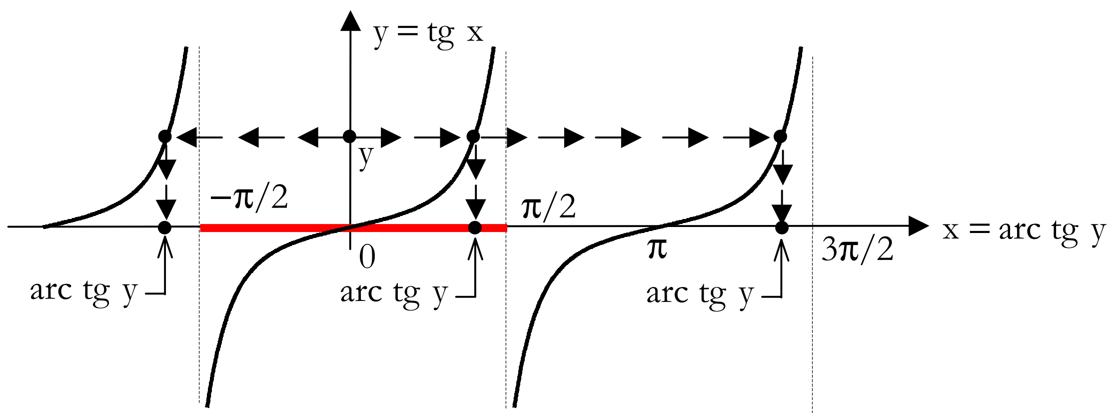
La inversa de la función "tangente" se llama "arco tangente" y se denota "arc tg". Por ejemplo, como imagen de $\pi/4$ según la función "tangente" es el número 1 (o sea, $\text{tg } \pi/4 = 1$), entonces la imagen del número 1 según la función "arco tangente" es el número $\pi/4$, y se escribe $\text{arc tg } 1 = \pi/4$ (se lee: el arco cuyo tangente es 1 es $\pi/4$ radianes):

$$\pi/4 \xrightarrow{\text{tg}} 1 \Leftrightarrow 1 \xrightarrow{\text{arc tg}} \pi/4$$

O sea:

$$\text{tg } \pi/4 = 1 \Leftrightarrow \text{arc tg } 1 = \pi/4$$



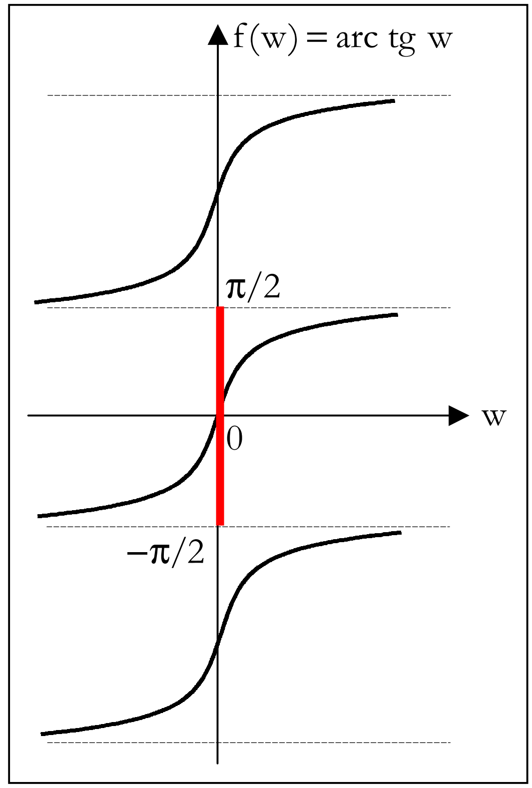

La función "tangente" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco tangente" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$, diciendo de él que es el ***valor principal*** del "arco tangente". Del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ se dice que es el ***intervalo principal*** (o fundamental) de la función "arco tangente".

***Por ejemplo,*** la tangente de $\pi/4$, $5.\pi/4$, $9.\pi/4$, $-3.\pi/4$ y $-7.\pi/4$ es 1; así:

$$\text{arc tg } 1 = \pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = 5.\pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = 9.\pi/4$$
$$\text{arc tg } 1 = -3.\pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = -7.\pi/4$$

El valor principal de $\text{arc tg } 1$ es $\pi/4$, pues $\pi/4$ es el único ángulo del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ cuya tangente es 1.

Llamando "w" a la variable "independiente", la gráfica de la función $f(w) = \text{arc tg } w$ es la de la figura adjunta, que está definida para todo valor de "w" (pues como la función "tangente" toma todos los valores reales, sea cual sea el valor real que se elija para "w" siempre puede encontrarse un ángulo cuya tangente sea "w").




Si $h(w) = \text{arc tg } 1/w$, la función "h" está definida siempre que $w \neq 0$, pues $1/w \in \Re$ siempre que $w \neq 0$.

Si $g(w) = \text{arc tg } (\text{Ln } (1 + w))$, la función "g" sólo está definida sólo si $1 + w > 0$, pues $\text{Ln } (1 + w) \in \Re$ sólo si $1 + w > 0$.

Si $r(w) = \text{arc tg } \sqrt{1 + w}$, la función "r" sólo está definida si $1 + w \geq 0$, pues $\sqrt{1 + w} \in \Re$ sólo si $1 + w \geq 0$.

La "inversas" de las funciones "cotangente", "secante" y "cosecante" son las funciones llamadas "arco cotangente" (se denota "$\text{arc cotg}$"), "arco secante" (se denota "$\text{arc sec}$") y "arco cosecante" (se denota "$\text{arc cosec}$"):

$$y = \text{cotg } x \Leftrightarrow x = \text{arc cotg } y$$
$$y = \sec x \Leftrightarrow x = \text{arc sec } y$$
$$y = \text{cosec } x \Leftrightarrow x = \text{arc cosec } y$$

***Observa:*** es $\text{arc cotg } y = \text{arc tg } 1/y$, pues si la cotangente de un ángulo es "y", su tangente es $1/y$. Es $\text{arc sec } y = \text{arc cos } 1/y$, pues si la secante de un ángulo es "y", su coseno es $1/y$. Es $\text{arc cosec } y = \text{arc sen } 1/y$, pues si la cosecante de un ángulo es "y", su seno es $1/y$.

***Recuerda:*** cuando el Cálculo Diferencial se usa para analizar "fenómenos" de la vida real en los que intervienen dos variables "x" e "y" relacionadas entre sí, el asunto de la función "inversa" permite volver la tortilla, según se elija como "independiente" la variable "x" o la "y".

# 1.25 LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se llaman ***hiperbólicas*** las siguientes funciones:

$$* \ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \equiv \text{seno hiperbólico de "x"} \equiv \text{sh } x$$

$$* \ f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \equiv \text{coseno hiperbólico de "x"} \equiv \text{ch } x$$

$$* \ f(x) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \equiv \text{tangente hiperbólica de "x"} \equiv \text{th } x$$

$$* \ f(x) = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \equiv \text{cotangente hiperbólica de "x"} \equiv \text{coth } x$$

$$* \ f(x) = \frac{1}{\text{ch } x} \equiv \text{secante hiperbólica de "x"} \equiv \text{sech } x$$

$$* \ f(x) = \frac{1}{\text{sh } x} \equiv \text{cosecante hiperbólica de "x"} \equiv \text{cosech } x$$

***Por ejemplo,*** si te dicen que $f: \Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \text{sh } x^2$, te dicen que:

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{x^2}}{2}$$

Si te dicen que $f: \Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \text{ch } 1/x$, te dicen que:

$$f(x) = \frac{e^{1/x} + e^{-1/x}}{2}$$

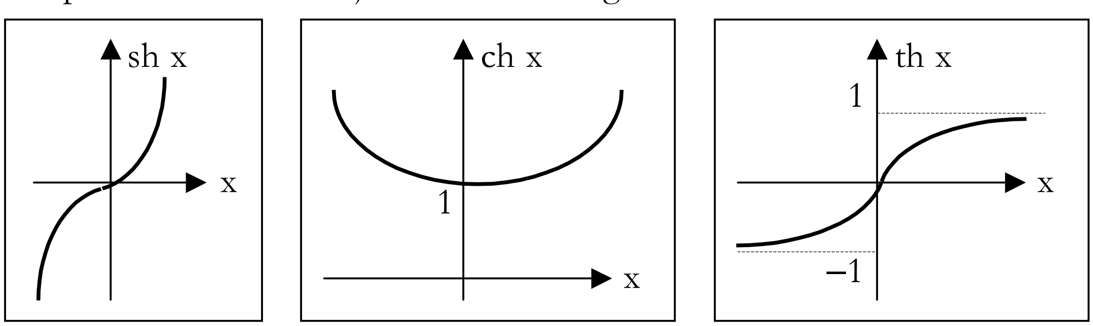
La función $f(x) = \text{sh } x$ es "impar" (su gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas), pues:

$$f(-x) = \text{sh } (-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\text{sh } x = -f(x)$$

La función $f(x) = \text{ch } x$ es "par" (su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas), pues:

$$f(-x) = \text{ch } (-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch } x = f(x)$$

La gráfica de $f(x) = \text{ch } x$ se llama ***catenaria:*** es la forma que toma un cable suspendido por sus extremos bajo la acción de la gravedad.




Es $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$ y $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$; y multiplicando miembro a miembro las anteriores, resulta $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Es: $\qquad \text{ch}\,(a+b)=\dfrac{e^{a+b}+e^{-(a+b)}}{2}=\dfrac{e^{a}.e^{b}+e^{-a}.e^{-b}}{2}=$

$$\boxed{e^{a}=\text{ch}\,a+\text{sh}\,a\ \ ;\ \ e^{-a}=\text{ch}\,a-\text{sh}\,a\ \ ;\ \ e^{b}=\text{ch}\,b+\text{sh}\,b\ \ ;\ \ e^{-b}=\text{ch}\,b-\text{sh}\,b}$$

$$=\frac{(\text{ch}\,a+\text{sh}\,a).(\text{ch}\,b+\text{sh}\,b)+(\text{ch}\,a-\text{sh}\,a).(\text{ch}\,b-\text{sh}\,b)}{2}=$$

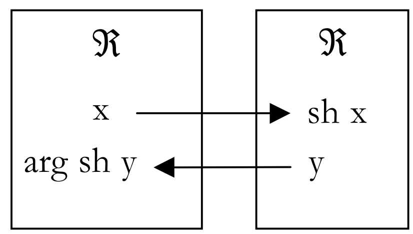
$$=\text{ch}\,a.\text{ch}\,b+\text{sh}\,a.\text{sh}\,b$$

De modo análogo se demuestra que:

$$*\ \text{ch}\,(a-b)=\text{ch}\,a\ .\text{ch}\,b-\text{sh}\,a\ .\ \text{sh}\,b$$
$$*\ \text{sh}\,(a+b)=\text{sh}\,a\ .\ \text{ch}\,b+\text{ch}\,a\ .\ \text{sh}\,b$$
$$*\ \text{sh}\,(a-b)=\text{sh}\,a\ .\ \text{ch}\,b-\text{ch}\,a\ .\ \text{sh}\,b$$

Las funciones hiperbólicas inversas son las inversas o recíprocas de las funciones hiperbólicas:

$$y=f(x)=\text{sh}\,x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\text{arg sh}\,y$$
$$y=f(x)=\text{ch}\,x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\text{arg ch}\,y$$
$$y=f(x)=\text{th}\,x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\text{arg th}\,y$$
$$y=f(x)=\text{coth}\,x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\text{arg cth}\,y$$
$$y=f(x)=\text{sech}\,x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\text{arg sech}\,y$$
$$y=f(x)=\text{cosech}\,x \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\text{arg cosech}\,y$$




donde "arg" lo debes leer "argumento".

# INDICE

## Tema 1: Funciones reales de variable real



## Tema 2: Límites de funciones

## APÉNDICE DEL TEMA 2



## Tema 3: Continuidad de funciones



## Tema 4: Derivabilidad de funciones