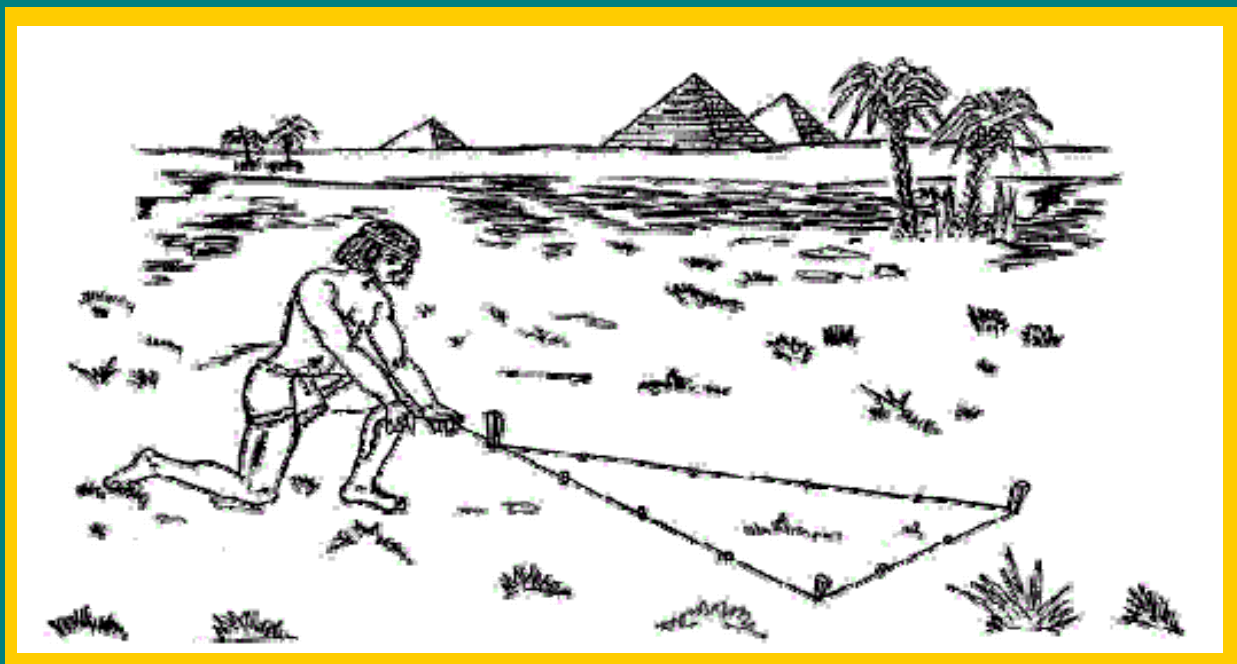


BACHILLERATO

MATEMATICAS

2



Rafael Cabrejas Hernansanz

→ fonemato.com

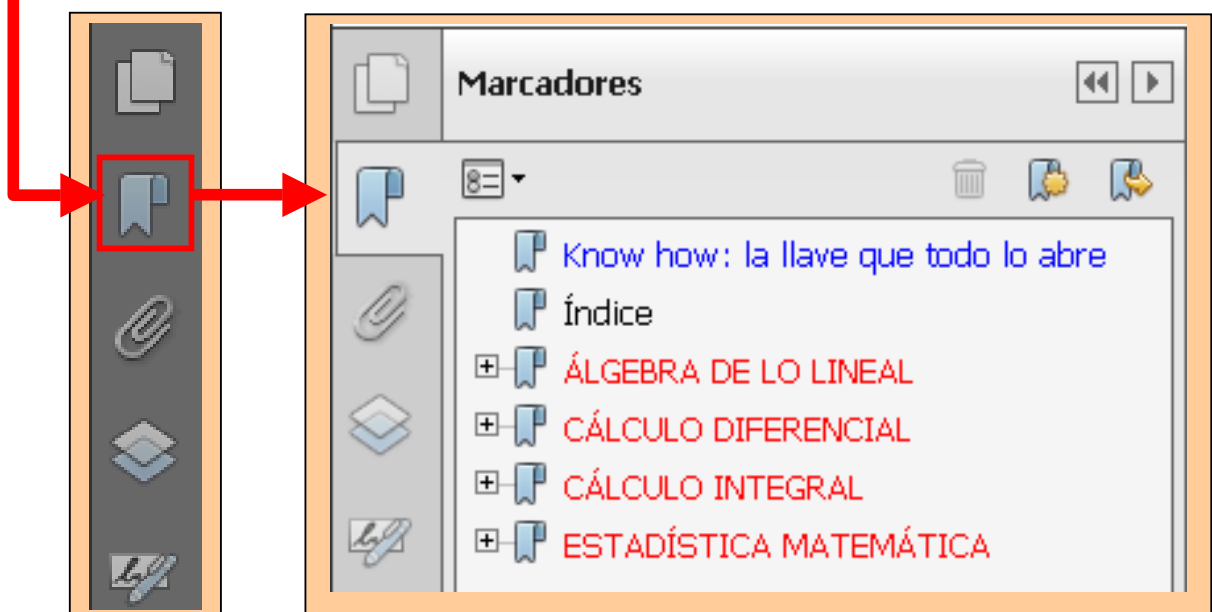
Aquí hay un videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

© RAFAEL CABREJAS HERNANSANZ

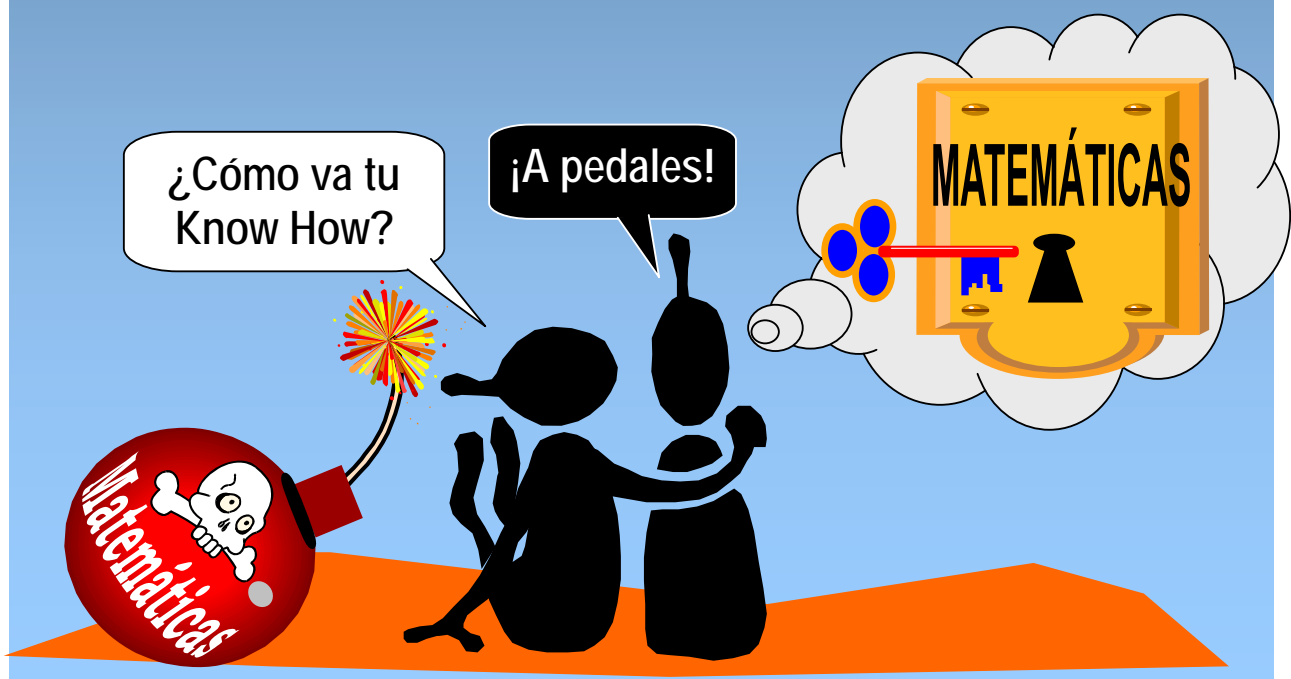
Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.



KNOW HOW

La llave que todo lo abre

Lo importante de este libro no son los **números**, lo importante tiene que ver con **el arte de deslumbrar a tus profesores**; o sea, tiene que ver con estar entre los mejores, con espabilar y amueblar la cabeza, con aprender a aprender y a razonar, con la disciplina mental y la tracción a todas las neuronas, con no chuparse el dedo y cazarlas al vuelo, con entropía neuronal nula, con aprender a diferenciarse envolviendo los caramelos con primor... y con todas esas cosas intangibles de las que nadie habla y sin embargo conforman el mágico **KNOW HOW** que te posibilitará el tránsito rápido y feliz por la Universidad.



ÍNDICE

Tema 1: Cálculo Matricial

- 1.01 Recordando la regla de Ruffini
- 1.02 El cuerpo de los números reales
- 1.03 Matrices
- 1.04 Las matrices almacenan información
- 1.05 Suma de matrices
- 1.06 Producto de un escalar por una matriz
- 1.07 Producto de matrices
- 1.08 Traspuesta de una matriz
- 1.09 Matriz simétrica
- 1.10 Matriz antisimétrica
- 1.11 Otros tipos de matrices cuadradas
- 1.12 Transformaciones elementales
- 1.13 Determinante de una matriz cuadrada
- 1.14 Adjunta de una matriz cuadrada
- 1.15 Inversa de una matriz cuadrada
- 1.16 Submatrices y menores de una matriz
- 1.17 Rango de una matriz

Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

- 2.01 Sistemas de ecuaciones lineales
- 2.02 ¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?
- 2.03 Teorema de Rouché-Frobenius
- 2.04 Sistemas lineales homogéneos
- 2.05 Regla de Cramer
- 2.06 Resolución de un caso general
- 2.07 Resolución de sistemas por sustitución
- 2.08 Método de Gauss

Tema 3: Espacios vectoriales

- 3.01 El espacio vectorial \mathfrak{R}^n
- 3.02 Combinación lineal de vectores
- 3.03 Dependencia e independencia lineal de vectores
- 3.04 Dimensión de un espacio vectorial
- 3.05 Base de un espacio vectorial
- 3.06 La base canónica
- 3.07 Coordenadas de un vector respecto de una base
- 3.08 Producto escalar de vectores

Tema 4: Espacio afín tridimensional

- 4.01 Introducción
- 4.02 Espacio afín tridimensional
- 4.03 Referencia cartesiana
- 4.04 Coordenadas cartesianas de un punto
- 4.05 El plano en el espacio afín tridimensional
- 4.06 La recta en el espacio afín tridimensional
- 4.07 Radiación de planos que pasan por un punto
- 4.08 Haz de planos que se cortan en una recta
- 4.09 Recta contenida en un plano
- 4.10 Posición relativa de dos rectas
- 4.11 Posición relativa de dos planos
- 4.12 Posición relativa de tres planos
- 4.13 Espacio afín euclídeo tridimensional
- 4.14 Referencia cartesiana rectangular
- 4.15 Ángulo de dos vectores
- 4.16 Cosenos directores de un vector
- 4.17 Ecuación normal de la recta
- 4.18 Vector característico de un plano
- 4.19 Producto vectorial de vectores
- 4.20 El producto vectorial y las rectas y los planos
- 4.21 Ángulo de dos rectas
- 4.22 Ángulo de dos planos
- 4.23 Ángulo de recta y plano
- 4.24 Distancia euclídea
- 4.25 Área de un triángulo y de un paralelogramo
- 4.26 Punto medio de un segmento
- 4.27 Distancia de un punto a una recta
- 4.28 Distancia de un punto a un plano
- 4.29 Distancia entre dos planos paralelos
- 4.30 Distancia entre dos rectas paralelas
- 4.31 Perpendicular a dos rectas que se cruzan
- 4.32 Distancia entre dos rectas que se cruzan
- 4.33 Producto mixto de tres vectores

Tema 5: Funciones reales de variable real

- 5.01 Los números reales
- 5.02 Valor absoluto de un número real
- 5.03 Intervalos de la recta real
- 5.04 Distancia entre dos puntos
- 5.05 Entorno de un punto
- 5.06 Logaritmos
- 5.07 El círculo goniométrico

- 5.08 Correspondencia entre conjuntos
- 5.09 Función real de variable real
- 5.10 Operaciones con funciones
- 5.11 Las Reglas Sagradas del Cálculo
- 5.12 Peligrosidad de una función en un punto
- 5.13 Las perlices que vamos a marear
- 5.14 Gráfica de una función
- 5.15 Las rectas
- 5.16 Las parábolas
- 5.17 Funciones uniformes
- 5.18 Dominio de definición de una función
- 5.19 Signo de una función
- 5.20 Simetrías de una función
- 5.21 Funciones periódicas
- 5.22 Funciones compuestas
- 5.23 Función inversa o recíproca
- 5.24 Funciones trigonométricas inversas

Tema 6: Límites de funciones

- 6.01 La madre del cordero del Calculo Diferencial
- 6.02 Límite de una función en un punto
- 6.03 Operaciones con límites
- 6.04 Cálculo de límites, paso al límite
- 6.05 Límites infinitos
- 6.06 Límites en el infinito
- 6.07 Cálculo de límites en el infinito
- 6.08 Indeterminaciones en el cálculo de límites

Tema 7: Continuidad de funciones

- 7.01 La continuidad en términos geométricos
- 7.02 Continuidad de una función en un punto
- 7.03 Tipos de discontinuidades
- 7.04 Continuidad en un intervalo
- 7.05 Continuidad de funciones compuestas
- 7.06 Criterios de continuidad
- 7.07 La palabra "incremento"
- 7.08 Ceros de una función
- 7.09 Teorema de Bolzano
- 7.10 La propiedad "D" de Darboux
- 7.11 Teorema de Weierstrass

Tema 8: Derivabilidad de funciones

- 8.01 La palabra "rapidez"
- 8.02 Tasa de cambio de una función
- 8.03 Recta tangente a una curva en un punto
- 8.04 Derivada de una función en un punto
- 8.05 Derivada infinita
- 8.06 Recta normal a una curva en un punto
- 8.07 Continuidad de las funciones derivables
- 8.08 La función derivada primera
- 8.09 Las reglas de derivación
- 8.10 Derivadas de orden superior
- 8.11 Derivación de funciones compuestas
- 8.12 Derivada de la función inversa
- 8.13 Funciones crecientes o decrecientes
- 8.14 Criterios de crecimiento y decrecimiento
- 8.15 Máximos y mínimos relativos o locales
- 8.16 Condición necesaria de máximo o mínimo local
- 8.17 Determinación de máximos y mínimos relativos
- 8.18 Determinación de máximos y mínimos absolutos
- 8.19 El verbo optimizar
- 8.20 Concavidad y puntos de inflexión
- 8.21 Anticipo de los teoremas de Rolle y Lagrange
- 8.22 Teorema de Rolle
- 8.23 Teorema de Lagrange
- 8.24 Teorema de Cauchy
- 8.25 Regla de L'Hospital
- 8.26 Asíntotas y ramas parabólicas de una función
- 8.27 Representación gráfica de funciones

Tema 9: Cálculo de primitivas

- 9.01 Requisitos previos
- 9.02 Primitiva de una función
- 9.03 El problema del cálculo de primitivas
- 9.04 Primitivas inmediatas
- 9.05 Cálculo de primitivas "por partes"
- 9.06 Cambio de variable
- 9.07 Primitivas de cocientes de polinomios
- 9.08 Primitivas de funciones racionales del seno y el coseno
- 9.09 Primitivas de algunas funciones irracionales

Tema 10: Integrales definidas

- 10.01 La noción de área
- 10.02 Integral definida de una función en un intervalo cerrado
- 10.03 Áreas positivas y áreas negativas
- 10.04 Propiedades de la integral definida
- 10.05 La regla de Barrow
- 10.06 Barrow con cambios de variable y por partes
- 10.07 Cálculo de áreas
- 10.08 Volumen de un cuerpo de revolución
- 10.09 Teorema del valor medio
- 10.10 La función integral

Tema 11: Probabilidad

- 11.01 Experimento aleatorio
- 11.02 Espacio muestral, comportamiento elemental
- 11.03 Suceso
- 11.04 Operaciones con sucesos
- 11.05 Álgebra de sucesos
- 11.06 La probabilidad en el diccionario
- 11.07 La probabilidad para Kolmogorov
- 11.08 Definición frecuentista de probabilidad
- 11.09 La probabilidad para Laplace
- 11.10 Probabilidad condicionada
- 11.11 Independencia de sucesos
- 11.12 Teorema de la probabilidad total
- 11.13 Teorema de Bayes
- 11.14 Combinatoria

Tema 12: Variables aleatorias

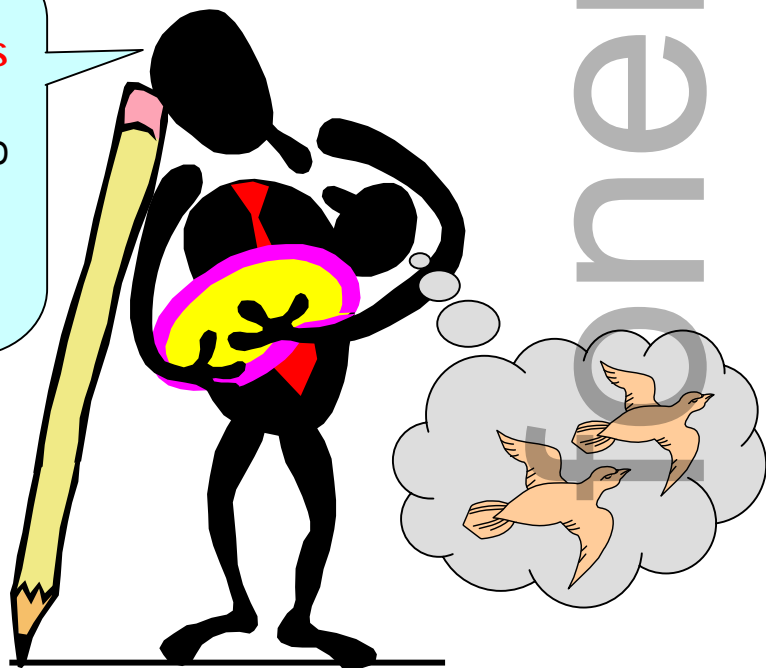
- 12.01 Variable aleatoria unidimensional
- 12.02 Variable aleatoria discreta
- 12.03 La palabra "densidad"
- 12.04 Variable aleatoria continua
- 12.05 Variable aleatoria degenerada
- 12.06 Esperanza matemática. El verbo "ponderar"
- 12.07 Momentos de una variable aleatoria
- 12.08 Variable tipificada
- 12.09 Variable binomial
- 12.10 Variable normal tipificada
- 12.11 Variable normal no tipificada
- 12.12 Aproximación de la variable binomial mediante la normal

Tema 2

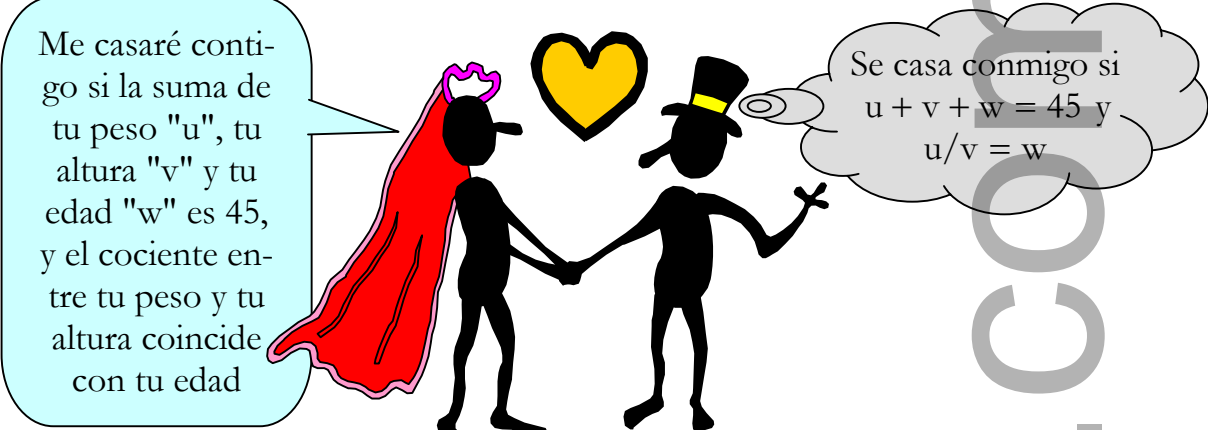
Sistemas de ecuaciones lineales

- 2.01 Sistemas de ecuaciones lineales
- 2.02 ¿Qué es resolver un sistema de ecuaciones?
- 2.03 Teorema de Rouché-Frobenius
- 2.04 Sistemas lineales homogéneos
- 2.05 Regla de Cramer
- 2.06 Resolución de un caso general
- 2.07 Resolución de sistemas por sustitución
- 2.08 Método de Gauss

Flor de té, si no eres un artista calculando **rangos de matrices**, pierdes miserablemente el tiempo al meterte en el jardín de los **sistemas de ecuaciones lineales**



Una ecuación es la expresión matemática de una condición de igualdad... y un sistema de "k" ecuaciones es la expresión matemática de un sistema de "k" condiciones de igualdad.



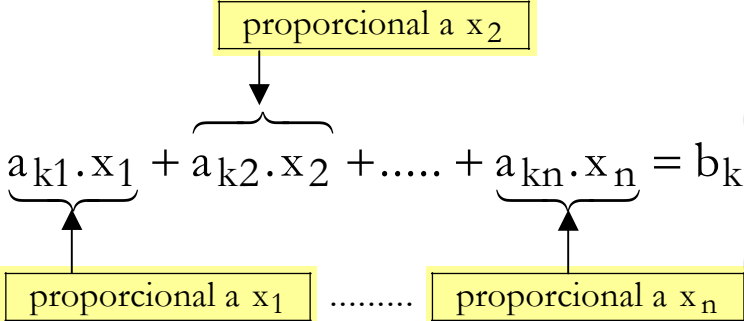
2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Hablar de un sistema de "m" **ecuaciones lineales** con "n" incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n es hablar de "m" ecuaciones (condiciones) cuya **estructura** es tal que **todas las incógnitas siempre aparecen elevadas a exponente unidad y multiplicadas por constantes**; o sea, así:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \right\} (I)$$

donde los a_{ij} y los b_i ($i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n$) son números reales constantes.

Toma buena nota: la **proporcionalidad está en cada ecuación del sistema**:



Es **lineal** el siguiente sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas x_1, x_2, x_3 :

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 &= 6 \\ 5 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 9 \end{aligned} \right\}$$

No es lineal ninguno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 5.x_1^2 + 3.x_2 - 7.x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{array} \right\} \text{no es "lineal" debido a } x_1^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 5.x_1.x_2 - 7.x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{array} \right\} \text{no es "lineal" debido a } x_1.x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} 5.x_1 + 2.x_2 - 7.Ln x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{array} \right\} \text{no es "lineal" debido a } Ln x_3$$

$$\left. \begin{array}{l} 5.x_1 + 2.x_2 - 7.sen x_3 = 6 \\ 5.x_1 - 8.x_2 + 0.x_3 = 9 \end{array} \right\} \text{no es "lineal" debido a } sen x_3$$

Un sistema lineal de ecuaciones siempre puede expresarse en forma matricial, pues podemos expresar el sistema lineal (I) en la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b \Rightarrow A \cdot X = b$$

De "A" se dice **matriz de los coeficientes**, de "X" se dice **matriz de las incógnitas**, de "b" se dice **matriz de los términos independientes**. Si a la matriz "A" le añadimos la columna de los términos independientes, obtenemos la llamada **matriz ampliada u orlada** del sistema.

Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 = 6 \\ 5.x_1 + 7.x_2 + 0.x_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Las correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por razones de economía, también se escribe $A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 5.u + 2.v + 4.w - 5.z = 7 \\ 4.u + 7.v + w + 5.z = 3 \\ u + v + w - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las correspondientes matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En examen debe **quedar escrito** todo lo relevante que **pase** por el cerebro.

LOS LATIGUILLOS

Un latiguillo es un párrafo corto o un esquema que explica lo esencial de un problema.



**Escúlpelo en el cerebro:
en examen no importa
lo que sabes, importa lo
que **PARECE** que sabes**

Los latiguillos son las herramientas que usaremos para transmitir vibraciones positivas al profesor que corrija los exámenes, y para conseguir que nuestro examen se distinga de los demás y parezca que sabemos más. Además, los latiguillos son muy eficaces para protegernos de las consecuencias de los errores de cálculo que todos cometemos inevitablemente: **un profesor mentalmente equilibrado jamás te suspenderá por un error de cálculo si con los latiguillos le has vendido la moto de que sabes lo que llevas entre manos.**

Lo mejor para ilustrarte es un ejemplo

EJERCICIO

Determinense los valores de "a" para que la matriz "A" tenga inversa, calculando dicha inversa de "A" si $a = 4$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN "ESCUPIAJO"

$$|A| = a^2 + 4a - 21 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

$$\text{Si } a = 4 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

COMENTARIO

Es la solución del que no sabe sacar el máximo partido a sus conocimientos.... y pueden presentarse dos situaciones:

- 1) **Si los cálculos son correctos**, al profesor le asaltarán la duda sobre si hemos copiado del vecino o sabemos realmente lo que estamos haciendo.
- 2) **Si los cálculos no son correctos**, el profesor nos pone un cero patatero, pues la solución sólo incluye números y los números están mal.

SOLUCIÓN "PROFESIONAL"

Latiguillo para explicar el concepto de inversa de una matriz cuadrada: Siendo "A" una matriz de orden $n \times n$, su inversa A^{-1} es la matriz de orden $n \times n$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, donde "I" es la matriz unidad de orden $n \times n$.

Latiguillo para explicar que no todas las matrices cuadradas tienen inversa: Como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)$$

y en Matemáticas está prohibido dividir por cero, la matriz A^{-1} existe sólo si "A" es regular (o sea, $|A| \neq 0$); al exigir que $|A| \neq 0$, resulta:

$$|A| = a^2 + 4 \cdot a - 21 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2 \pm \sqrt{4 + 21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

Si $a = 4$, es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, siendo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A) = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Si $a = 4 \Rightarrow |A| = 4^2 + 4 \cdot 4 - 21 = 11$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -3 \\ 23 & 6 & -10 \\ 14 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto

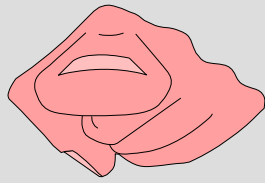
Ventana donde explicamos quién es la matriz $\text{Adj}(A)$ y la calculamos

COMENTARIO

Es la solución del que sabe envolver caramelos con primor: los cálculos se adornan con **latiguillos** y explicaciones que evidencian la claridad (?) de nuestras ideas, además empleamos **ventanas** que facilitan la lectura de lo escrito ... y también pueden presentarse dos situaciones:

- 1) **Si los cálculos son correctos**, el profesor que corrija el examen, quitándose el sombrero ante lo que hemos escrito, nos pondrá un 10... y será feliz durante unos instantes al comprobar que algunos sí entienden lo que él explica.

- 2) **Si los cálculos no son correctos**, el profesor, que también comete errores de cálculo, y lo sabe, pensará: ¡qué penal!, est@ alumn@ es de los pocos que acreditan tener las ideas perfectamente claras, pero a causa de su error de cálculo no puedo darle un 10; no obstante, sería muy injusto tratarle como al de la **solución escupitajo**, le daré un... ¿6?, ¿un 7?, ¿un 5 pelao?... lo que sea, pero un aprobado.



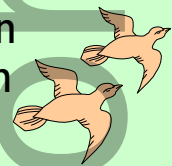
TODO **ERROR CONCEPTUAL GORDO**
ANULA EL EFECTO DE LOS LATIGUILLOS
Y TE DEJA CON EL **CULO AL AIRE.**

Es un farsante: después de susurrarme al oído los más tiernos poemas de Sarrus, no se sabe cómo, ha calculado el **determinante de una matriz no cuadrada** y se ha quedado tan pancho, sin que la mano se le haya desprendido del cuerpo antes que perpetrar tan descomunal barbaridad

¿Qué delito ha cometido?



En toda asignatura dura hay "cosas" que caen en examen con mucha frecuencia; tu trabajo es averiguar cuáles son y preparar los correspondientes latiguillos para ellas.



Entropía: medida del desorden de un sistema

El 2º principio de la Termodinámica postula que la entropía de universo siempre aumenta.

2.2 ¿QUÉ ES RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES?

Resolver un sistema de ecuaciones (lineales o no) con "n" incógnitas es encontrar un valor particular de cada incógnita de modo que al sustituir cada incógnita por su correspondiente valor particular ocurre algo mágico: todas las ecuaciones se convierten en identidades; o sea, todas las ecuaciones quedan de la forma $3 = 3$ ó $7 = 7$ ó $-3 = -3$ ó $0 = 0$ ó Del conjunto de dichos valores particulares de las incógnitas se dice que es **una solución** del sistema.

De Perogrullo: cada **solución** del sistema es un elemento del conjunto \mathcal{R}^n .

Por ejemplo, en el siguiente sistema lineal con 4 incógnitas x_1, x_2, x_3 y x_4

$$\left. \begin{array}{l} 1. x_1 + 2. x_2 - 2. x_3 + 2. x_4 = 6 \\ 3. x_1 - 2. x_2 + 3. x_3 + 1. x_4 = 5 \\ 3. x_1 - 1. x_2 + 0. x_3 + 1. x_4 = 1 \end{array} \right\} \text{(II)}$$

puedes comprobar que si hacemos $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 3$ y $x_4 = 0$, ocurre que **todas** las ecuaciones de (II) se transforman en identidades; y por ello se dice que $(2; 5; 3; 0) \in \mathcal{R}^4$ es una solución del sistema de ecuaciones (II).

También puedes comprobar que si hacemos $x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 7$ y $x_4 = 8$, no ocurre que **todas** las ecuaciones de (II) se transforman en identidades; y por ello se dice que $(6; 2; 7; 8) \in \mathcal{R}^4$ no es solución del sistema (II).

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Se dice que un sistema de ecuaciones es **incompatible** si no tiene solución; o sea, es imposible encontrar valores particulares de las incógnitas que transformen en identidades a todas las ecuaciones del sistema.

Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible** si tiene solución, o sea, es posible encontrar valores particulares de las incógnitas que transformen en identidades a todas las ecuaciones del sistema. En tal caso, se dice que el sistema es **determinado** si tiene una única solución; si tiene infinitas soluciones se dice que es **indeterminado**.

Sistemas Equivalentes

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Teorema de Equivalencia de Sistemas Lineales

Si en un sistema lineal de ecuaciones sustituimos una ecuación cualquiera por la ecuación que resulta al multiplicarla por un número cualquiera no nulo y sumarla miembro a miembro a otras ecuaciones del sistema (después de multiplicar estas últimas por un número cualquiera), el nuevo sistema lineal que obtenemos es equivalente al primero (tiene las mismas soluciones que el primero).

Por ejemplo, si en el sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} 1.x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 + 2.x_4 = 6 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4 = 5 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 = 1 \end{array} \right\} \text{(II)}$$

sustituimos la primera ecuación por la que resulta al sumar miembro a miembro el doble de la primera ecuación y el triple de la segunda, obtenemos el sistema lineal (III), que es **equivalente** al (II):

$$\left. \begin{array}{l} 11.x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 + 7.x_4 = 27 \\ 3.x_1 - 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4 = 5 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 = 1 \end{array} \right\} \text{(III)}$$

Observa atentamente: las matrices **ampliadas** de los sistemas (II) y (III) son:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 11 & -2 & 5 & 7 & 27 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y como la primera fila de "N" es la suma del doble de la primera fila de "M" y el triple de la segunda fila de "M", **apostamos la vida a que las matrices "M" y "N" tienen el mismo rango**, pues se **pasa** de una a otra haciendo **transformaciones elementales**.

Otro ejemplo: si en el sistema lineal (II) sustituimos la segunda ecuación por la que resulta al sumar miembro a miembro todas las ecuaciones, obtenemos el sistema lineal (IV), que es **equivalente** al (II) y al (III):

$$\left. \begin{array}{l} 1.x_1 + 2.x_2 - 2.x_3 + 2.x_4 = 6 \\ 7.x_1 - 1.x_2 + 1.x_3 + 4.x_4 = 12 \\ 3.x_1 - 1.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 = 1 \end{array} \right\} \text{(IV)}$$

Postulado de Kadook: si merece la pena hacerlo, merece la pena hacerlo exageradamente bien



2.3 TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas y matriz de coeficientes "A" y ampliada "B" sea compatible (tenga solución) es que "A" y "B" tengan igual rango; en tal caso:

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ solución única

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ infinitas soluciones

Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B)$, el sistema carece de solución.

La madre del cordero de los sistemas de ecuaciones lineales.

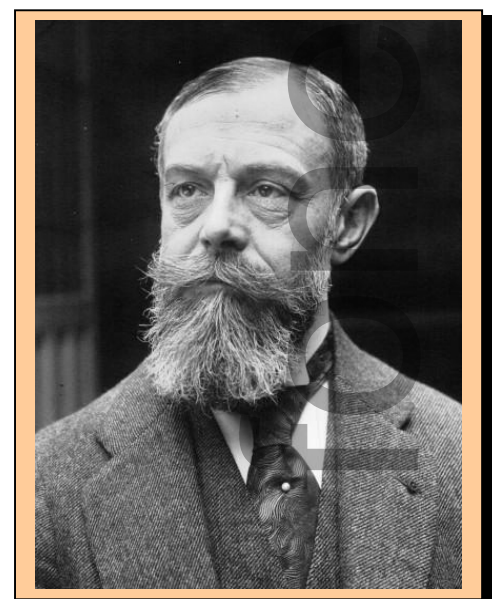
Eugène Rouché era hijo de un terrateniente de Sommieres. Estudio en la "École Polytechnique" donde consiguió el doctorado en ciencias.

En 1873 fue nombrado presidente de la Société Mathématique de Francia y más tarde en 1896 fue elegido de la Academia de Ciencias francesa.

No fue el único en probar el teorema que lleva su nombre, también **Georges Fontené** enunció este teorema y reivindicó su prioridad, pero Rouché fue el primero en enunciarlo. Más tarde el matemático **Fröbenius** en 1905 discrepó este teorema, tanto a Rouché como a Fontené, y propuso una demostración alternativa. Su hijo Jacques Rouché fue director de la Ópera de París.



Ferdinand Georg Fröbenius era hijo de un pastor protestante. Entró en la escuela Joachimsthal Gymnasium en 1860 con once años de edad y se graduó en 1867. Ese mismo año, entró en la universidad de Göttingen, pero sólo estuvo un semestre, siguiendo sus estudios en la universidad de Berlín donde obtuvo su doctorado. Fue profesor en varias escuelas hasta que en 1874 fue aceptado en la universidad de Berlín como profesor extraordinario de matemáticas. Solo un año después se va a Zürich como profesor ordinario de la Eidgenössische Polytechnikum, donde estará 17 años. Allí se casó, tuvo familia y realizó un importante trabajo de investigación. Durante 25 años Fröbenius fue la figura líder, la que dirigió la enseñanza universitaria de la matemática en Berlín.



2.4 SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Se dice que un sistema lineal es homogéneo si son nulos los términos independientes de todas las ecuaciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_0 \Rightarrow A \cdot X = 0$$

Acostúmbrate a escribir **SLH** para referirte a un sistema lineal homogéneo... y **SLNH** para un sistema lineal no homogéneo



En un SLH, la matriz de los coeficientes y la ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros, y por ello tienen igual rango; así, todo SLH es compatible: al menos tiene la solución

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

que es la llamada **solución trivial**. Por tanto, según el **Rouché-Frobenius**, para un SLH con "n" incógnitas y matriz de coeficientes "A", se tiene que:

Si $\text{rg}(A) = n \Rightarrow$ solución trivial
 Si $\text{rg}(A) < n \Rightarrow$ infinitas soluciones



2.5 LA REGLA DE CRAMER

Sea un sistema lineal $A \cdot X = b$ de "n" ecuaciones con "n" incógnitas (el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) cuya matriz de coeficientes "A" (cuadrada) es **regular**, o sea, $|A| \neq 0$. Sea "B" la matriz ampliada del sistema.

Si $|A| \neq 0$, es $\text{rg}(A) = n$, y como "B" tiene "n" filas y "n + 1" columnas, también es $\text{rg}(B) = n$; por tanto, en un sistema lineal de "n" ecuaciones con "n" incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, siempre ocurre que $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{número de incógnitas}$. Así, según Rouché-Frobenius, el sistema siempre tiene solución única: es compatible y determinado.

La regla de Cramer permite calcular la solución

El valor de la incógnita x_k es el resultado de dividir dos determinantes, el denominador es el determinante de la matriz "A" de los coeficientes del sistema, y el numerador es determinante de la matriz que resulta al sustituir la k-ésima columna de "A" (formada por los coeficientes de la incógnita x_k) por la columna "b" que forman los términos independientes del sistema.

El matemático suizo **Gabriel Cramer** fue catedrático de Matemáticas (1724-1727) y de Filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra.

En 1750 expuso en *Introducción al análisis de las curvas algebraicas* la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación.

Reintrodujo el determinante, algoritmo que **Leibniz** ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas, y Editó las obras de **Jakob Bernoulli** y parte de la correspondencia de **Leibniz**.



Apuesto un brazo a que en este montón de exámenes casi nadie me lo explica todo clarito!



FONEMATO 2.5.1

Resuélvase el sistema
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = 4 \\ 4 \cdot x_1 + x_2 - 5 \cdot x_3 = 6 \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

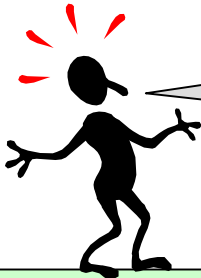
- Estamos ante un **sistema lineal** con igual número de ecuaciones (condiciones) que de incógnitas... y **rezamos** para que la matriz de los coeficientes tenga determinante no nulo, pues en tal caso el sistema tendrá **solución única**, que determinaremos mediante la **regla de Cramer**.
- Expresión matricial del sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow A \cdot X = b$$

Como $|A| = -26 \neq 0$, la matriz de coeficientes y la ampliada tienen rango 3, que coincide con el número de incógnitas; por tanto, el sistema tiene solución única ... y la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 3 ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

En definitiva, la única solución del sistema es la terna $(2;3;1) \in \mathbb{R}^3$.



¡Portentoso ... entre las infinitas ternas ordenadas de números reales que forman \mathbb{R}^3 , sólo la $(2;3;1)$ cumple **todas** las ecuaciones o condiciones dadas, y Cramer la localiza en unos segundos!

Puedes **comprobar que no hay errores de cálculo** sin más que comprobar que la terna $(2;3;1)$ transforma todas las ecuaciones en identidades:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = 4 \\ 4 \cdot x_1 + x_2 - 5 \cdot x_3 = 6 \\ 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot 1 = 4 \\ 4 \cdot 2 + 3 - 5 \cdot 1 = 6 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 6 = 6 \\ 2 = 2 \end{cases}$$

NOTA: Todo sistema lineal que pueda resolverse mediante **Cramer** se puede resolver también por el método de la **matriz inversa**: si $A \cdot X = b$, **despejando la matriz de incógnitas** X , resulta $X = A^{-1} \cdot b$ (observa que si la matriz "A" tiene determinante no nulo, seguro que existe su inversa). En nuestro caso:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}_b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

FONEMATO 2.5.2

Calcúlese "k" para que el siguiente sistema lineal de ecuaciones tenga solución única. Determínese la solución cuando exista.

$$\begin{aligned}x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 &= 0 \\2 \cdot x_1 + x_2 + k \cdot x_3 &= 0\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

- El sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Sea "A" su matriz de coeficientes y "B" su matriz ampliada.
- El sistema tiene solución única si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{número de incógnitas} = 3$. Es $\text{rg}(A) = 3$ si $|A| = 15 - 3 \cdot k \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$.
- Si $k \neq 5$, la única solución del sistema la obtenemos mediante **Cramer**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}}{|A|}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix}}{|A|}; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Al hacer los cálculos, resulta:

$$x_1 = -\frac{k+2}{15-3 \cdot k}; \quad x_2 = \frac{4-k}{15-3 \cdot k}; \quad x_3 = \frac{3}{15-3 \cdot k}$$

Comprobación de que no hay errores de cálculo

$$\left. \begin{aligned}x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 &= 0 \\2 \cdot x_1 + x_2 + k \cdot x_3 &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned}-\frac{k+2}{15-3 \cdot k} + 2 \cdot \frac{4-k}{15-3 \cdot k} + 3 \cdot \frac{3}{15-3 \cdot k} &= 1 \\-\frac{k+2}{15-3 \cdot k} - \frac{4-k}{15-3 \cdot k} + 2 \cdot \frac{3}{15-3 \cdot k} &= 0 \\-2 \cdot \frac{k+2}{15-3 \cdot k} + \frac{4-k}{15-3 \cdot k} + k \cdot \frac{3}{15-3 \cdot k} &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Por ejemplo, la única solución del sistema si $k = 4$, es:

$$x_1 = -\frac{4+2}{15-3 \cdot 4} = -2; \quad x_2 = \frac{4-4}{15-3 \cdot 4} = 0; \quad x_3 = \frac{3}{15-3 \cdot 4} = 1$$

Por ejemplo, si $k = 2$, la única solución del sistema es:

$$x_1 = -\frac{2+2}{15-3 \cdot 2} = -\frac{4}{9}; \quad x_2 = \frac{4-2}{15-3 \cdot 2} = \frac{2}{9}; \quad x_3 = \frac{3}{15-3 \cdot 2} = \frac{3}{9}$$

- Si $k = 5$ ($\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 3$) el sistema es incompatible, pues "A" y "B" tienen distinto rango.

En efecto, si $k = 5$, la matriz "B" se convierte en $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, es $\text{rg}(B) = 3 \neq \text{rg}(A)$.

2.6 RESOLUCIÓN DEL CASO GENERAL

A continuación describimos la secuencia de trabajo para resolver un sistema lineal de " k " ecuaciones con " n " incógnitas cuya matriz de coeficientes es " A " y cuya matriz ampliada es " B ":

- 1) Calculamos los rangos de las matrices " A " y " B ".
- 2) Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B)$, el sistema es incompatible, carece de solución.
- 3) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \equiv$ número de incógnitas, el sistema es compatible y determinado, tiene solución única.

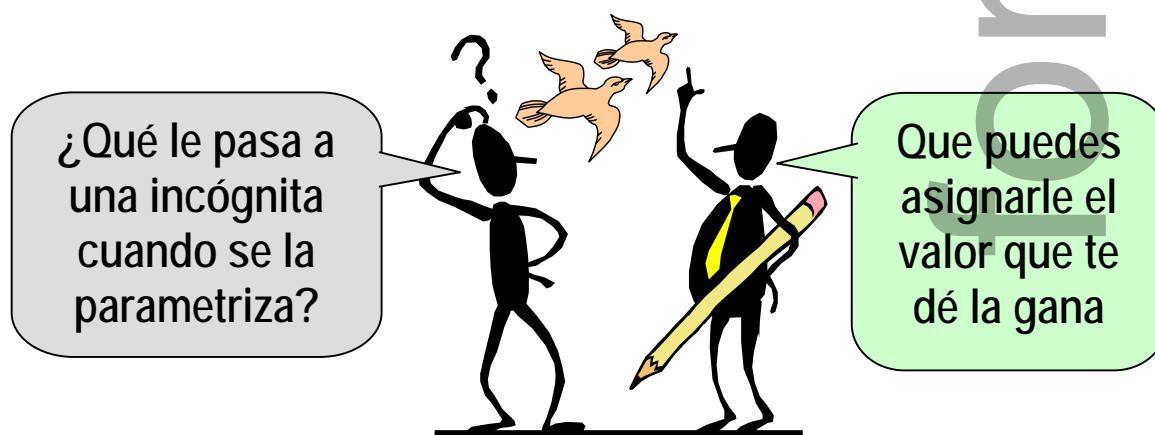
Cálculo de la única solución

- a) Si $n = k$, podemos calcular la solución ipso facto mediante la regla de Cramer o mediante el método de la matriz inversa.
 - b) Si $n < k$, seleccionamos las " n " ecuaciones correspondientes a cualesquiera " n " filas de " A " con las que se pueda formar un menor no nulo de orden " n ", las restantes ecuaciones del sistema se eliminan. Así resulta un sistema equivalente al sistema dado, pero con igual número de ecuaciones que de incógnitas. A continuación empleamos la regla de Cramer o el método de la matriz inversa para obtener la solución del nuevo sistema.
- 4) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = h < n$ ($n \equiv$ número de incógnitas), el sistema es compatible e indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Cálculo de las infinitas soluciones

ESENCIAL

- a) Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = h < n \Rightarrow$ en la matriz de coeficientes " A " tendremos localizado un menor no nulo de orden " h ".
- b) Seleccionamos las " h " ecuaciones correspondientes a las " h " filas del citado menor no nulo de orden " h ", y eliminamos las restantes ecuaciones del sistema; así obtendremos un sistema lineal equivalente al dado, pero sólo con " h " ecuaciones.
- c) Seleccionamos las " h " incógnitas que corresponden a las " h " columnas del citado menor no nulo de orden " h ", y parametrizamos las restantes " $n - h$ " incógnitas, pasándolas a los segundos miembros de las ecuaciones. Así resulta un sistema lineal con " h " ecuaciones, " h " incógnitas y " $n - h$ " parámetros; sistema éste que resolveremos mediante la regla de Cramer o mediante el método de la matriz inversa.



FONEMATO 2.6.1

Resuélvase los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1) \begin{cases} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases} ; 2) \begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \\ 3.x + y = 9 \\ x + 4.y = 3 \end{cases} ; 3) \begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + 4.y = 6 \\ 3.x + y = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Estamos ante un sistema lineal no homogéneo (SLNH) de 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

Como $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B)$, el sistema **carece de solución**.

2) Estamos ante un sistema lineal no homogéneo (SLNH) de 4 ecuaciones y 2 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es **compatible y determinado: tiene solución única**. Para calcularla, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas, nos quedamos las dos primeras ecuaciones y eliminamos las restantes; resulta:

$$\begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \end{cases}$$

La solución del anterior SLNH obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

3) Estamos ante un sistema lineal no homogéneo (SLNH) de 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es **compatible y determinado: tiene solución única**. Para calcularla, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos últimas filas, nos quedamos las dos últimas ecuaciones y eliminamos las restantes; resulta:

$$\begin{cases} 2.x + 4.y = 6 \\ 3.x + y = 4 \end{cases}$$

La solución del anterior SLNH obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x = 1 ; y = 1$$

FONEMATO 2.6.2

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6 \\2.x + 2.y + z &= 9 \\3.x + y + z &= 8 \\x + 4.y &= 9\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Estamos ante un sistema lineal no homogéneo de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Sus matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 ; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3 = \text{número de incógnitas}$, el sistema es compatible y determinado: tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo y lo forman las tres últimas filas de "A", nos quedamos con tres últimas ecuaciones y eliminamos las restantes:

$$\begin{aligned}2.x + 2.y + z &= 9 \\3.x + y + z &= 8 \\x + 4.y &= 9\end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = 1 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = 2 ; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = 3$$

A continuación resolvemos nuestro primer SLH con infinitas soluciones ... y las calcularemos **todas**

Si son infinitas y vamos a calcularlas todas, nos van a dar las uvas

FONEMATO 2.6.3

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= 0 \\2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 &= 0 \\8 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 &= 0\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: como el sistema es **lineal homogéneo**, la matriz de coeficientes y la ampliada sólo se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango. Así, **el sistema es compatible:** al menos admite la **solución trivial** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

La matriz "A" de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$.

Como $\text{rg}(A) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es **compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.**

Cálculo de las infinitas soluciones:

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas de "A", **nos quedamos** con las dos primeras ecuaciones del sistema y **eliminamos** las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2 (2ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), **parametrizamos** las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_2 y x_3 y **un parámetro** x_1 :

$$\begin{aligned}2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= -6 \cdot x_1 \\-2 \cdot x_2 + x_3 &= -2 \cdot x_1\end{aligned}$$

La solución la obtenemos mediante la **regla de Cramer:**

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -6 \cdot x_1 & -3 \\ -2 \cdot x_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 3 \cdot x_1 ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 \cdot x_1 \\ -2 & -2 \cdot x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 4 \cdot x_1$$

Denotando "S" al subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del sistema, es:

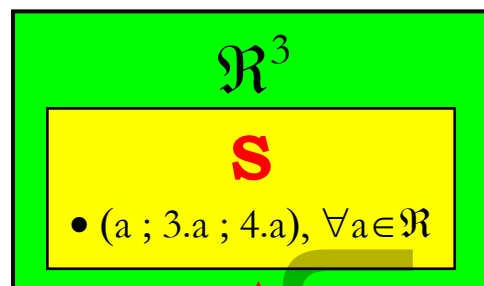
$$S = \{(x_1 ; 3 \cdot x_1 ; 4 \cdot x_1), \forall x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

También así:

$$S = \{(a ; 3 \cdot a ; 4 \cdot a), \forall a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$S = \{(\lambda ; 3 \cdot \lambda ; 4 \cdot \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

La diferencia está sólo en el nombre asignado al parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLH... pero **con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo**: el subconjunto "S" de \mathbb{R}^3 que forman las soluciones del SLH dado es el constituido por las **ternas ordenadas** de números reales en que **el 2º número es el triple del 1º, y el 3º es el cuádruple del 1º**. Basta asignar valores arbitrarios al parámetro para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:



↑
LATIGUILLO VISUAL

- * si $a = 1 \Rightarrow (1; 3.1; 4.1) \equiv (1; 3; 4)$ es una solución del sistema
- * si $a = 3 \Rightarrow (3; 3.3; 4.3) \equiv (3; 9; 12)$ es una solución del sistema
- * si $a = \dots$

Y así, hasta aburrirte, puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del SLH dado como hay infinitas, tienes entretenimiento hasta la 3ª edad.

Observa: el conjunto "S", formado por las infinitas ternas ordenadas de números reales que son solución del SLH, queda **identificado** en **forma paramétrica**, pues damos el valor de los tres números de una **terna genérica** de "S" en función del valor que arbitrariamente se asigne a un **parámetro real**



NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es el mismo con independencia del menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del SLH dado; o sea, el conjunto "S" no depende de qué menor no nulo de orden 2 se elija en el proceso de cálculo. **Por ejemplo,** siendo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas de "A", **nos quedamos** con las dos primeras ecuaciones del SLNH y **eliminamos** las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_2 (2ª columna de "A"), **parametrizamos** las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_3) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_2 y **un parámetro** x_3 :

$$\begin{aligned} 6.x_1 + 2.x_2 &= 3.x_3 \\ 2.x_1 - 2.x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3x_3 & 2 \\ -x_3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{x_3}{4}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3x_3 \\ 2 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3x_3}{4}$$

Denotando "S" al subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S = \{(x_3/4; 3x_3/4; x_3), \forall x_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

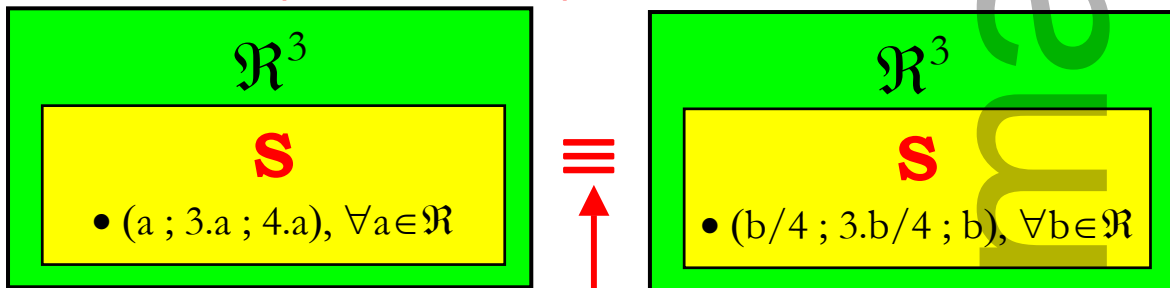
o también así:

$$S = \{(b/4; 3b/4; b), \forall b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$S = \{(\theta/4; 3\theta/4; \theta), \forall \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

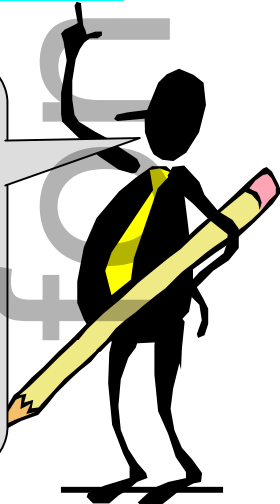
IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLH ... pero **con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo**: el subconjunto "S" de \mathbb{R}^3 que forman las soluciones del SLH es el constituido por las **ternas ordenadas** de números reales en que **el primer número se obtiene multiplicando el tercero por 1/4, y el segundo se obtiene multiplicando el tercero por 3/4**.



Se **pasa** de uno a otro sin más que llamar "b" a "4. a":
 $b = 4.a \Rightarrow a = b/4 \Rightarrow 3.a = 3.b/4$

Para **comprobar que no hay errores de cálculo**, comprobamos que el habitante genérico $(a; 3.a; 4.a)$ del conjunto "S" satisface todas las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{si } x_1 = a, x_2 = 3.a \text{ y } x_3 = 4.a}} \begin{cases} 6.(a) + 2.(3.a) - 3.(4.a) = 0 \\ 2.(a) - 2.(3.a) + (4.a) = 0 \\ 8.(a) - 2.(4.a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{NO HAY ERROR}$$


Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman dos últimas filas de "A", **nos quedamos** con las dos últimas ecuaciones del SLNH y **eliminamos** las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), **parametrizamos** las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_2) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_3 y **un parámetro** x_2 :

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + x_3 &= 2 \cdot x_2 \\ 8 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 \cdot x_2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{3} ; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \cdot x_2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4 \cdot x_2}{3}$$

Denotando "S" al subconjunto de \mathcal{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S = \{(x_2/3; x_2; 4 \cdot x_2/3), \forall x_2 \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

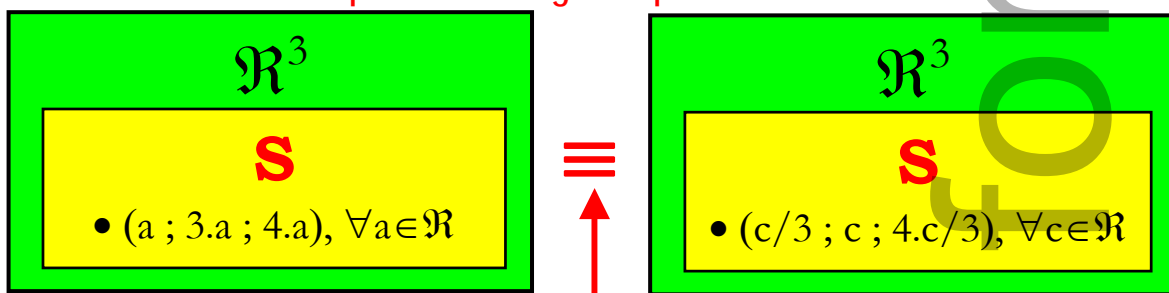
o así:

$$S = \{(c/3; c; 4 \cdot c/3), \forall c \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

$$S = \{(\delta/3; \delta; 4 \cdot \delta/3), \forall \delta \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLH pero **con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo**: el subconjunto "S" de \mathcal{R}^3 que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las **ternas ordenadas** de números reales en que **el primer número se obtiene multiplicando el segundo por 1/3, y el tercero se obtiene multiplicando el segundo por 4/3**.



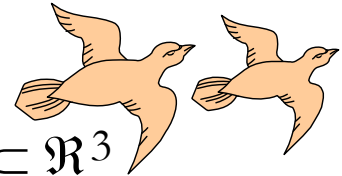
Se **pasa** de uno a otro sin más que llamar "c" a "3. a":

$$c = 3 \cdot a \Rightarrow a = c/3 \Rightarrow 4 \cdot a = 4 \cdot c/3$$

Observa atentísimamente:

Siendo

$$S = \{(\lambda; 3.\lambda; 4.\lambda), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$



sin más que sacar factor común λ , podemos escribir:

$$S = \{\lambda \bullet (1; 3; 4), \forall \lambda \in \mathfrak{R}\} (*)$$

Al loro: la terna ordenada (1;3;4) es una solución del sistema (la obtenida para $\lambda = 1$)... y la expresión (*) indica que toda terna ordenada que sea solución del SLH puede **obtenerse o generarse** multiplicando la terna (1;3;4) por un número real; o sea: cualquier terna ordenada de números reales que sea solución del SLH es **PROPORCIONAL** a la terna (1;3;4).

Si yo viviese en \mathfrak{R}^3 y fuese la terna (1;3;4), me sentiría muy importante... se dice pronto: las infinitas ternas solución del SLH serían **GENERADAS** por mí, pues todas serían **proporcionales** a mí... y seguro que me pondrían un **nombre especial** que evidenciase mi mágico rol de **GENERADOR** de todas las soluciones del SLH

Vanidad, yuyo malo... ya lo cantaba Yupanqui

(1;3;4)

FONEMATO
TODO KLARITO

DISCIPLINA MENTAL
Lo más valioso de tu formación

FONEMATO 2.6.4

Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema lineal de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 <$ número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: **tiene infinitas soluciones.**

Cálculo de las infinitas soluciones

Como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos primeras filas de "A", **nos quedamos** con las dos primeras ecuaciones del SLNH y **eliminamos** las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_2 (2ª columna de "A"), **parametrizamos** las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_3), y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así resulta un SLNH de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_2 y **un parámetro** x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 - x_3 \\ x_1 - x_2 &= 2x_3 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 - x_3 & 2 \\ 2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 + x_3 ; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - x_3 \\ 1 & 2x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 - x_3$$

Denotando "S" al subconjunto de \mathcal{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLNH, podemos escribir:

$$S = \{(1 + x_3; 1 - x_3; x_3), \forall x_3 \in \mathcal{R}\}$$

También así:

$$S = \{(1 + a; 1 - a; a), \forall a \in \mathcal{R}\}$$

$$S = \{(1 + \lambda; 1 - \lambda; \lambda), \forall \lambda \in \mathcal{R}\}$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia está sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones de SLNH... pero con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo: el subconjunto "S" de \mathbb{R}^3 que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las ternas ordenadas de números reales en que el primer número es una unidad superior al tercero, y el segundo se obtiene restando el tercero del número 1. Basta asignar valores arbitrarios al parámetro para ir obteniendo las infinitas soluciones del sistema:

$$\mathbb{R}^3$$

$$S$$

- $(1+a; 1-a; a), \forall a \in \mathbb{R}$

- * si $\lambda = 1 \Rightarrow (1+1; 1-1; 1) \equiv (2; 0; 1)$ es una solución del sistema
- * si $\lambda = 3 \Rightarrow (1+3; 1-3; 3) \equiv (4; -2; 3)$ es una solución del sistema
- * si $\lambda = 0 \Rightarrow (1+0; 1-0; 0) \equiv (1; 1; 0)$ es una solución del sistema
- * si $\lambda = \dots$

Y así puedes perder el tiempo calculando más y más soluciones del SLNH como hay infinitas, si te va la marcha, tienes entretenimiento de por vida.

Fíjate MUY bien: si $S = \{(1 + \lambda; 1 - \lambda; \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$, es trivial escribir:

$$S = \{(1; 1; 0) + (\lambda; -\lambda; \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$$

O sea:

$$S = \{(1; 1; 0) + \underbrace{\lambda \bullet (1; -1; 1)}_{\text{proporcional a } (1; -1; 1)}, \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (*)$$

proporcional a $(1; -1; 1)$

La terna $(1; 1; 0)$ es solución del SLNH (corresponde a $\lambda = 0$), pero no sucede eso con $(1; -1; 1)$, pues no satisface la 1ª ecuación: $1 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0 \neq 3 \dots$ pero siendo obvio que $S^* = \{\lambda \bullet (1; -1; 1), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH obtenido al anular los términos independientes del SLNH dado, también resulta obvio que $(1; -1; 1)$ es solución de dicho SLH (la correspondiente

$$\underbrace{\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}}_{\text{SLNH}} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}}_{\text{SLH ASOCIADO}}$$

a $\lambda = 1$). Por tanto, la expresión (*) indica que toda terna ordenada que sea solución del SLNH puede obtenerse sumando la terna $(1; 1; 0)$, que es solución del SLNH, y otra terna $\lambda \bullet (1; -1; 1)$, que es solución del SLH asociado.

Observa: la terna $\lambda \bullet (1; -1; 1)$ es PROPORCIONAL a la terna $(1; -1; 1)$.

NOTA IMPORTANTE PARA LA TRANQUILIDAD DEL LECTOR

El resultado es igual con independencia del menor no nulo de orden 2 que se elija en el proceso de cálculo del conjunto "S" que forman las infinitas soluciones del sistema; o sea, el conjunto "S" no depende de qué menor no nulo de or-

den 2 se elija en el proceso de cálculo. **Por ejemplo**, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman las dos últimas filas de "A", **nos quedamos** con las dos últimas ecuaciones del SLNH y **eliminamos** las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_2 (2ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), **parametrizamos** las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_1) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente SLNH de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_2 y x_3 y **un parámetro** x_1 :

$$\begin{aligned} -x_2 - 2 \cdot x_3 &= -x_1 \\ x_2 - x_3 &= 3 - 2 \cdot x_1 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -x_1 & -2 \\ 3 - 2 \cdot x_1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 2 - x_1 ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -x_1 \\ 1 & 3 - 2 \cdot x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = x_1 - 1$$

Denotando "S" al subconjunto de \mathcal{R}^3 que forman las infinitas soluciones, es:

$$S = \{(x_1; 2 - x_1; x_1 - 1), \forall x_1 \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

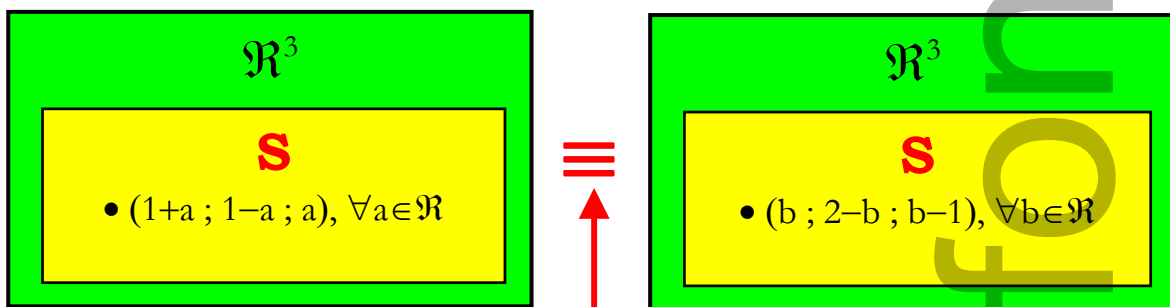
También así:

$$S = \{(b; 2 - b; b - 1), \forall b \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

$$S = \{(\theta; 2 - \theta; \theta - 1), \forall \theta \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLNH ... pero **con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo**: el subconjunto "S" de \mathcal{R}^3 que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las **ternas ordenadas** de números reales en que **el segundo número de la terna se obtiene al restar el primer número del número 2, y el tercer número se obtiene al restar 1 al primer número**.



Se **pasa** de uno a otro sin más que llamar "b" a "1+a":
 $b = 1+a \Rightarrow a = b-1 \Rightarrow 1-a = 1-(b-1) \Rightarrow a = 2-b$

Por ejemplo, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo y lo forman dos últimas filas de "A", **nos quedamos** con las dos últimas ecuaciones del SLNH y **eliminamos** las restantes. Como las columnas del citado menor corresponden a los coeficientes de x_1 (1ª columna de "A") y x_3 (3ª columna de "A"), **parametrizamos** las restantes incógnitas (o sea, parametrizamos x_2) y las pasamos a los segundos miembros de las ecuaciones. Así se obtiene el siguiente SLNH de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x_1 y x_3 y **un parámetro** x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 - 2 \cdot x_3 &= x_2 \\ 2 \cdot x_1 - x_3 &= 3 - x_2 \end{aligned}$$

La solución del anterior sistema la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & -2 \\ 3 - x_2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 2 - x_2 ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 2 & 3 - x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 1 - x_2$$

Denotando "S" al subconjunto de \mathcal{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S = \{(2 - x_2 ; x_2 ; 1 - x_2), \forall x_2 \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

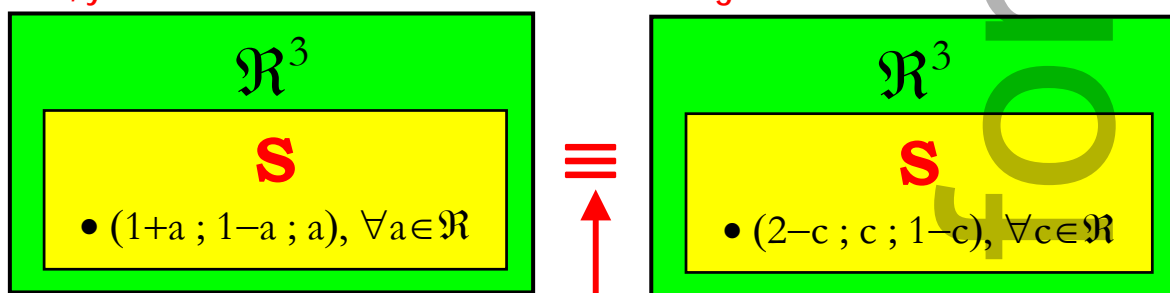
También así:

$$S = \{(2 - c ; c ; 1 - c), \forall c \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

$$S = \{(2 - \delta ; \delta ; 1 - \delta), \forall \delta \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$$

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA DE "S"

La diferencia radica sólo en el nombre del parámetro introducido para calcular las infinitas soluciones del SLNH... pero **con independencia del nombre elegido, en todos los casos se dice lo mismo**: el subconjunto "S" de \mathcal{R}^3 que forman las soluciones del SLNH es el constituido por las **ternas ordenadas** de números reales en que **el primer número de la terna se obtiene al restar el segundo número de 2, y el tercer número se obtiene al restar el segundo número de 1**.



Se **pasa** de uno a otro sin más que llamar "c" a "1-a":

$$c = 1 - a \Rightarrow a = 1 - c \Rightarrow 1 + a = 1 + (1 - c) = 2 - c$$

FONEMATO 2.6.5

Resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1) \begin{cases} -3.x + y + 2.z = 1 \\ x + 5.y - z = 4 \\ -4.x - 2.y + 3.z = -1 \end{cases} ; 2) \begin{cases} x + 2.y + z = 1 \\ 2.x + y + 2.z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} ; 3) \begin{cases} x + 2.y + 2.z + 3.w = 6 \\ 2.x + 4.y + 3.z + 5.w = 10 \\ x + 2.y - z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

¡Para el carro... éste lo mato yo... se te van a caer los pantalones!



Arranco con el latiguillo de los SLNH: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

1) Como la matriz de los coeficientes del SLNH es **regular** ($|A| \neq 0$), resulta ser $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3 = n^\circ$ de incógnitas; por tanto, el sistema es **compatible y determinado**: su **única solución** la obtenemos mediante la **Regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 2 ; y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 1 ; z = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = 3$$

2) Es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 < n^a$ de incógnitas, el SLNH tiene infinitas soluciones.

Latiguillo: Para calcular las **infinitas soluciones**, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros; resulta:

$$\begin{cases} x + 2.y = 1 - z \\ 2.x + y = 2 - 2.z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$$

Por tanto, siendo "S" el conjunto de las infinitas soluciones del SLNH, es:

$$S = \{(1 - z; 0; z), \forall z \in \mathfrak{R}\} =$$

Identificación de "S" en forma paramétrica

solución del SLNH obtenida al hacer $z = 0$

$$= \{ (1; 0; 0) + (-z; 0; z), \forall z \in \mathfrak{R} \} =$$

$S^* = \{(-z; 0; z), \forall z \in \mathfrak{R}\} \equiv$ Soluciones del SLH correspondiente

$$= \{(1; 0; 0) + z \cdot (-1; 0; 1), \forall z \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

LATIGUILLO

3) Es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. **Latiguillo:** Para calcular las **infinitas soluciones**, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** las incógnitas "x" y "w", pasándolas a los segundos miembros:

$$\left. \begin{array}{l} 2.y + 2.z = 6 - x - 3.w \\ 4.y + 3.z = 10 - 2.x - 5.w \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y = (2 - x - w)/2 \\ z = 2 - w \end{cases}$$

Denotando "S" al conjunto de las infinitas soluciones del sistema, es:

$$S = \{(x; (2 - x - w)/2; 2 - w; w), \forall x, w \in \mathcal{R}\} =$$

Identificación de "S" en forma paramétrica

LATIGUILLO

solución del SLNH obtenida al hacer $x = w = 0$

$$= \{(0; 1; 2; 0) + (x; -(x+w)/2; -w; w), \forall x, w \in \mathcal{R}\} =$$

$S^* = \{(x; -(x+w)/2; -w; w), \forall x, w \in \mathcal{R}\}$ es el conjunto de soluciones del SLH correspondiente al SLNH dado

$$= \{(0; 1; 2; 0) + (x; -x/2; 0; 0) + (0; -w/2; -w; w), \forall x, w \in \mathcal{R}\} = \\ = \{(0; 1; 2; 0) + x \cdot (1; -1/2; 0; 0) + w \cdot (0; -1/2; -1; 1), \forall x, w \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^4$$

En definitiva, todo cuarteto ordenado que sea solución del SLNH puede obtenerse sumando el cuarteto $(0; 1; 2; 0)$, que es solución del SLNH, y un cuarteto $(x; -(x+w)/2; -w; w)$ que es solución genérica del SLH asociado.

Combinación lineal de $(1; -1/2; 0; 0)$ y $(0; -1/2; -1; 1)$



FONEMATO 2.6.6

Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X - 2 \cdot B = C$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

La ecuación matricial $A \cdot X - 2 \cdot B = C$ tiene solución única:

$$A \cdot X - 2 \cdot B = C \Rightarrow A \cdot X = C + 2 \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C + 2 \cdot B) =$$

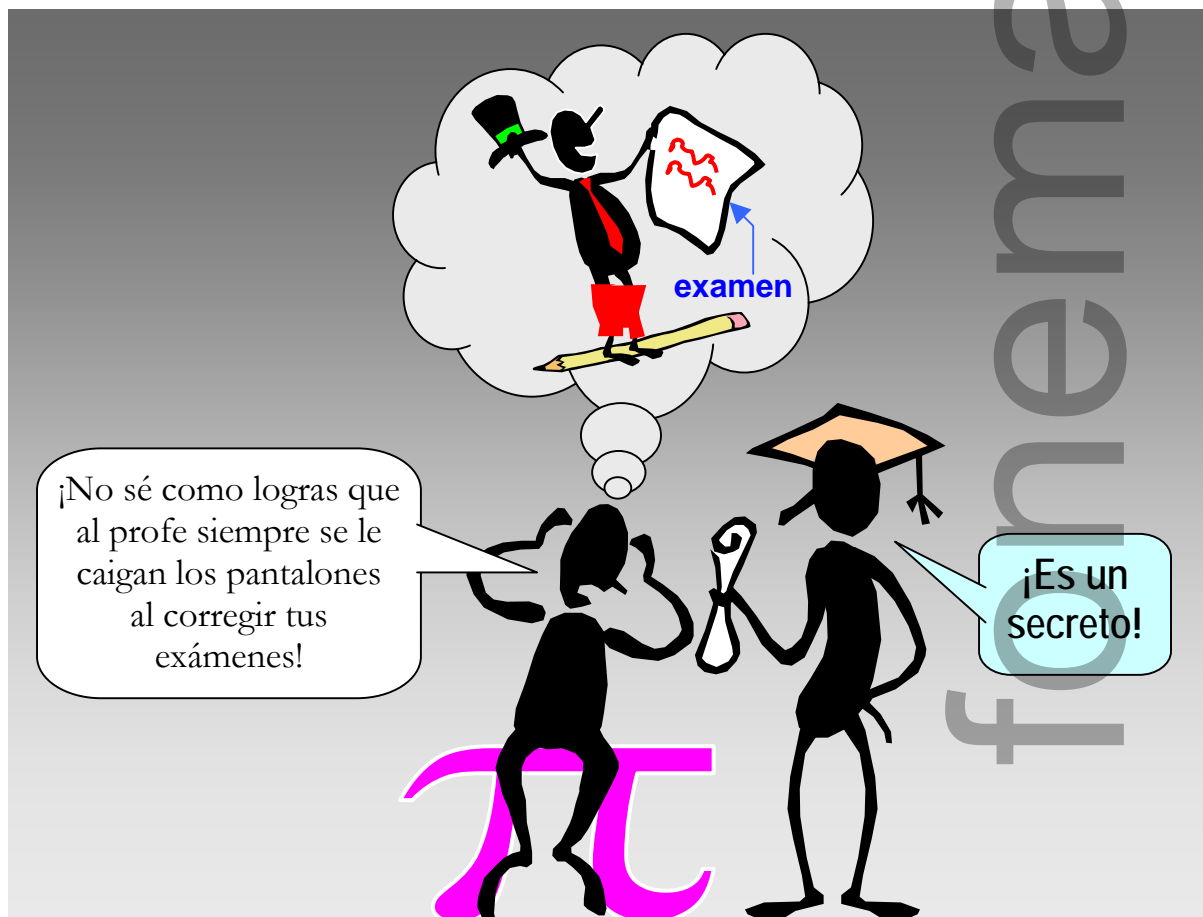
premultiplicamos los dos miembros por A^{-1} , lo que es legítimo, pues como "A" es regular, tiene inversa

$$= \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 9 \\ -3 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 33 & 23 \\ 5 & -11 & 1 \\ -1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$C + 2 \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 9 \\ -3 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A) = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

para calcular $\text{Adj}(A)$, en A^t sustituimos cada elemento por su adjunto



FONEMATO 2.6.7

Resuélvase la ecuación matricial $X \cdot (A + B) = 3 \cdot C$.

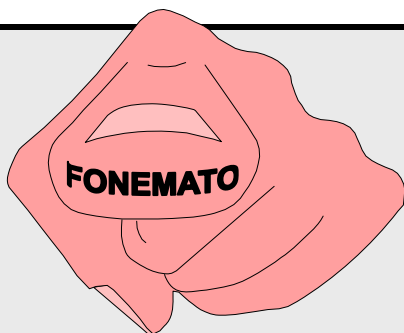
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

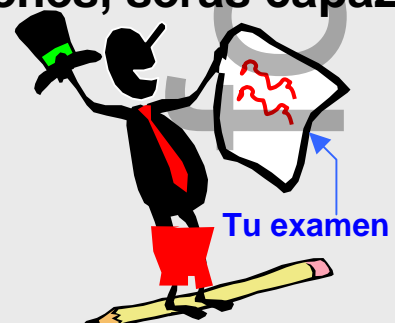
La ecuación $X \cdot (A + B) = 3 \cdot C$ **no puede resolverse como la anterior**, pues como la matriz $A + B$ es singular (compruébalo tú), carece de inversa. Por tanto, para averiguar si existe alguna matriz "X" que cumpla la condición $X \cdot (A + B) = 3 \cdot C$, debemos **lidiar a lo bestia**:

$$\begin{aligned} X \cdot (A + B) &= 3 \cdot C \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}}_X \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A+B} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_C \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 3 \\ 3 \cdot x_1 + x_3 = 3 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x_4 - x_5 + 2 \cdot x_6 = -3 \\ 3 \cdot x_4 + x_6 = 3 \\ 5 \cdot x_4 - x_5 + 3 \cdot x_6 = 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x_7 - x_8 + 2 \cdot x_9 = 0 \\ 3 \cdot x_7 + x_9 = 0 \\ 5 \cdot x_7 - x_8 + 3 \cdot x_9 = 6 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{carece de solución} \end{aligned}$$

pues el primero de los tres sistemas lineales carece de solución, ya que sus matrices de coeficientes y ampliada tienen distinto rango



Si aprovechas las Matemáticas de Bachillerato para educarte en el arte de escribir latiguillos, cuando estés en la Universidad, en los exámenes, serás capaz de escribir latiguillos sobre cualquier disciplina que se exprese mediante números... con el consiguiente gozo para todos tus profesores.



FONEMATO 2.6.8

Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ a \end{bmatrix}$

- 1) Calcula los valores de "a" y "b" sabiendo que el par (2;-1) satisface la primera ecuación y el par (2;0) satisface la segunda.
- 2) ¿Es compatible y determinado el sistema que resulta al sustituir los valores de "a" y "b" calculados?

SOLUCIÓN

1) Se tiene que: $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + a \cdot y = 1 - b \\ b \cdot x + y = a \end{cases}$

Si el par (2;-1) satisface la primera ecuación, ha de ser: $2 - a = 1 - b$ (I)

Si el par (2;0) satisface la segunda ecuación, ha de ser: $2 \cdot b = a$ (II)

La solución del sistema de ecuaciones que forman (I) y (II) es $a = 2$, $b = 1$.

- 2) Si $a = 2$ y $b = 1$, el sistema se convierte en $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, que es compatible y determinado, pues $\text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = n^\circ$ de incógnitas.

FONEMATO 2.6.9

Halla las soluciones comunes a los sistemas:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases} ; S_2 : \begin{cases} 3 \cdot x + y + z = 5 \\ 2 \cdot x - 4 \cdot y - 4 \cdot z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Las soluciones comunes son las **ternas que satisfacen todas las ecuaciones**; o sea, las soluciones del SLNH obtenido al reunir las ecuaciones de S_1 y las de S_2 :

$$\left. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ 3 \cdot x + y + z = 5 \\ 2 \cdot x - 4 \cdot y - 4 \cdot z = 0 \end{cases} \right\} \text{ (I)}$$

El sistema (I) es incompatible, pues su matriz de coeficientes tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3; así, los sistemas dados **carecen de soluciones comunes**.



FONEMATO 2.6.10

Una empresa fabrica tres tipos de fertilizantes (I, II y III) con tres compuestos A, B y C, en los porcentajes de composición indicados en la tabla. Mezclando los tres tipos de fertilizantes, se quiere obtener otro que contenga el 8 % de cada uno de los tres compuestos. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada fertilizante para obtener 100 kg. del nuevo?

	I	II	III
A	6%	8%	12%
B	6%	12%	8%
C	8%	4%	12%

SOLUCIÓN

Siendo "x", "y" y "z" las cantidades (en kilogramos) utilizadas respectivamente de los fertilizantes (I), (II) y (III), según se nos dice, debe ser:

$$x + y + z = 100 \quad (a)$$

Si el nuevo fertilizante ha de contener un 8% de cada uno de los compuestos A, B y C, es obvio que en 100 kg. de dicho fertilizante ha de haber 8 kg. de cada compuesto químico A, B y C... y al **exigir** que se satisfaga esta condición, resulta:

$$0'06.x + 0'08.y + 0'12.z = 8 \quad (b)$$

$$0'06.x + 0'12.y + 0'08.z = 8 \quad (c)$$

$$0'08.x + 0'04.y + 0'12.z = 8 \quad (d)$$

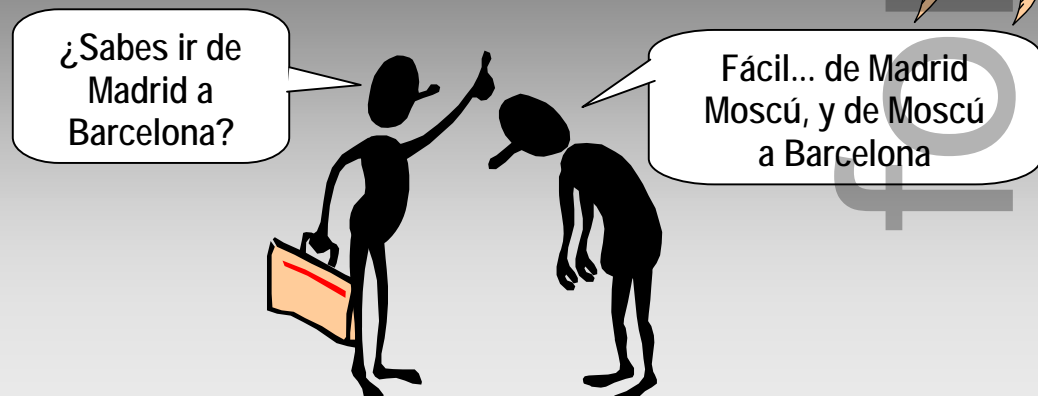
Debemos calcular, si existe, la solución del SLNH de 4 ecuaciones con 3 incógnitas que forman (a), (b), (c) y (d) ... y la solución es única, pues

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0'06 & 0'08 & 0'12 \\ 0'06 & 0'12 & 0'08 \\ 0'08 & 0'04 & 0'12 \end{bmatrix} = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 8 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix} = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 6 & 8 & 12 & 8 \\ 6 & 12 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} = 3$$

Obtenemos la solución mediante la **regla de Cramer** tras **eliminar** la 4ª ecuación, pues no forma parte del menor no nulo "H" de orden 3 indicado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 800 & 8 & 12 \\ 800 & 12 & 8 \end{vmatrix}}{H} = 50 ; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 6 & 800 & 12 \\ 6 & 800 & 8 \end{vmatrix}}{H} = 25 ; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 6 & 8 & 800 \\ 6 & 12 & 800 \end{vmatrix}}{H} = 25$$

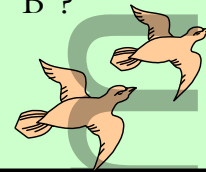
La eficiencia no necesita explicación



En los ejercicios siguientes lidiaremos sistemas lineales cuyas matrices de coeficientes "A" y ampliada "B" contienen **parámetros** (números reales) **desconocidos...** y como los valores de estos parámetros pueden influir en el rango de "A" y en el rango de "B", pueden influir en las soluciones del sistema.

Pregunta: ¿Qué rango estudiamos primero, el de "A" o el de "B"?

Respuesta: Si el máximo rango de "A" es igual (menor) que el máximo rango de "B", comenzaremos estudiando el rango de "A" (de "B").



FONEMATO 2.6.11

Discuta y resuelva $\begin{cases} 3.x + m.y = 1 \\ 2.x - y + m.z = 1 \\ m.x - 3.y + 2.z = 1 \end{cases}$ según $m \in \mathfrak{R}$.

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso, es $A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & m & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m & 1 \\ m & -3 & 2 & 1 \end{array} \right]$.

El rango máximo de "A" es 3, lo mismo que el de "B", por tanto, **empezamos estudiando el rango de "A"**; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "m" que lo anulan: $|A| = m^3 + 5.m - 6 = 0 \Rightarrow m = 1$. ¡Ojo!: la ecuación $|A| = 0$ tiene dos raíces imaginarias, pero no les hacemos caso, pues dicen que "m" es real.

Análisis si $m \neq 1$

Si $m \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(B) = n^\circ$ de incógnitas. Por tanto, el sistema tiene solución única (es compatible y determinado), y **Cramer** nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 + m - 2}{m^3 + 5.m - 6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 - 3.m + 2}{m^3 + 5.m - 6}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ m & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{m^2 - m}{m^3 + 5.m - 6}$$

Por ejemplo, si $m = 2$, la **única** solución del sistema es:

$$x = \frac{2^2 + 2 - 2}{2^3 + 5 \cdot 2 - 6} = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2^3 + 5 \cdot 2 - 6} = 0; \quad z = \frac{2^2 - 2}{2^3 + 5 \cdot 2 - 6} = \frac{1}{6}$$

¡El objetivo es lograr que al profe se le caigan los pantalones al leer nuestro examen!

Análisis si $m = 1$

Si $m = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(B) < n^\circ$ de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones.

Latiguillo: Para calcular las soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros de las ecuaciones; resulta:

$$\begin{cases} 3.x + y = 1 \\ 2.x - y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2 - z)/5 \\ y = (3.z - 1)/5 \end{cases}$$

Así, denotando $S_{m=1}$ al subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLNH cuando $m = 1$, es:

$$S_{m=1} = \left\{ \left(\frac{2-z}{5}, \frac{3z-1}{5}, z \right), \forall z \in \mathbb{R} \right\} =$$

Identificación en forma paramétrica

LATIGUILLO

Si haces esto parecerás un catedrático

$$= \left\{ \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0 \right) + \left(-\frac{z}{5}, \frac{3z}{5}, z \right), \forall z \in \mathbb{R} \right\} =$$

para más comodidad, hacemos $z = 5.\lambda$

solución del SLNH obtenida para $\lambda = 0$

$$= \left\{ \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0 \right) + (-\lambda; 3.\lambda; 5.\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

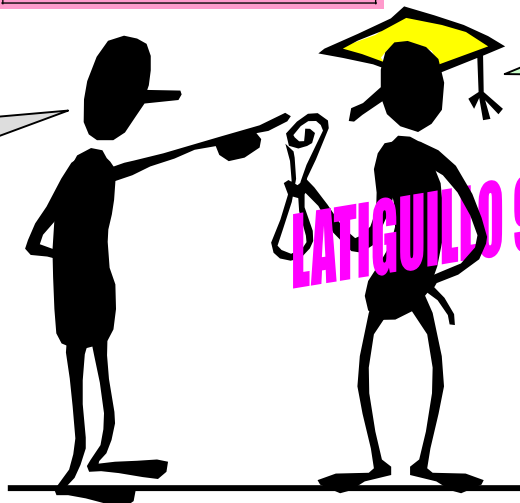
$S^* = \{(-\lambda; 3.\lambda; 5.\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLHN dado

$$= \left\{ \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0 \right) + \lambda \cdot (-1; 3; 5), \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

proporcional a $(-1; 3; 5)$

¡Frío, frío!

A mí no me engañas ... tú tienes un chip en el cerebro y por ahí te lo soplan todo ... porque de otro modo no se explica que sabiendo más o menos lo mismo, en examen siempre parece que sabes más que yo

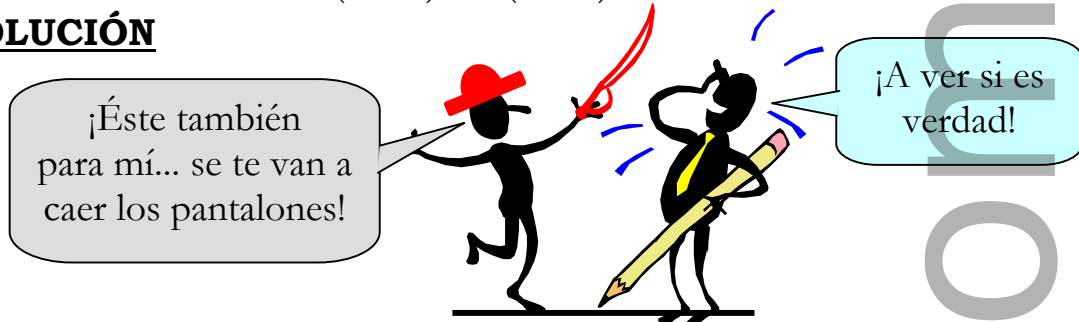


FONEMATO 2.6.12

Discuta y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro real "m":

$$\begin{aligned}(2 \cdot m + 2) \cdot x + m \cdot y + 2 \cdot z &= 2 \cdot m - 2 \\ 2 \cdot x + (2 - m) \cdot y &= 0 \\ (m + 1) \cdot x + (m + 1) \cdot z &= m + 1\end{aligned}$$

SOLUCIÓN



Latiguillo: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

En nuestro caso: $A / B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 \cdot m + 2 & m & 2 & 2 \cdot m - 2 \\ 2 & 2 - m & 0 & 0 \\ m + 1 & 0 & m + 1 & m + 1 \end{array} \right]$

El rango máximo de "A" y de "B" es 3, por tanto, **empezamos estudiando el rango de "A"**; para ello calculamos $|A|$ y los valores de "m" que lo anulan:

$$|A| = -2 \cdot m^3 + 2 \cdot m = 0 \Rightarrow m = 0, 1, -1$$

Análisis si $m \neq 0$ y $m \neq \pm 1$

Si "m" es distinto de 0, 1 y -1 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(B) = n^\circ$ de incógnitas. Por tanto, el SLNH tiene solución única, y **Cramer** nos la da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 \cdot m - 2 & m & 2 \\ 0 & 2 - m & 0 \\ m + 1 & 0 & m + 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dots ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 \cdot m + 2 & 2 \cdot m - 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ m + 1 & m + 1 & m + 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dots$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 \cdot m + 2 & m & 2 \cdot m - 2 \\ 2 & 2 - m & 0 \\ m + 1 & 0 & m + 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dots$$

Análisis si $m = 0$

Si $m = 0$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

Como $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B)$, el SLNH es incompatible: carece de solución.

Análisis si $m = 1$

Si $m = 1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

Como $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ el SLNH es incompatible: carece de solución.

Análisis si $m = -1$

Si $m = -1$ es $|A| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(B) < n^\circ$ de incógnitas, el SLNH tiene infinitas soluciones.

Latiguillo: Para calcularlas las soluciones, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros; resulta:

$$\left. \begin{array}{l} -y = -4 - 2.z \\ 2.x + 3.y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 - 3.z \\ y = 4 + 2.z \end{cases}$$

Denotando $S_{m=-1}$ al subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLNH cuando $m = -1$, es

$$S_{m=-1} = \{(-6 - 3.z; 4 + 2.z; z), \forall z \in \mathbb{R}\} =$$

Identificación en forma paramétrica

$$\begin{aligned} & \{(-6; 4; 0) + (-3.z; 2.z; z), \forall z \in \mathbb{R}\} = \\ & = \{(-6; 4; 0) + z \cdot (-3; 2; 1), \forall z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

La terna $(-6; 4; 0)$ es la solución del SLNH obtenida al hacer $z = 0$, y el conjunto $S_{m=-1}^*$ de las infinitas soluciones del SLH correspondiente al SLNH dado, es

$$S_{m=-1}^* = \{(3.z; 4 + 2.z; z), \forall z \in \mathbb{R}\} = \{z \cdot (-3; 2; 1), \forall z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

O sea, $S_{m=-1}^*$ lo forman las ternas **proporcionales** a la $(-3; 2; 1)$.



FONEMATO 2.6.13

Discuta y resuelva el sistema $\begin{cases} m \cdot x + y + z = x \\ x + m \cdot y + z = y \\ x + y + m \cdot z = z \end{cases}$ según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

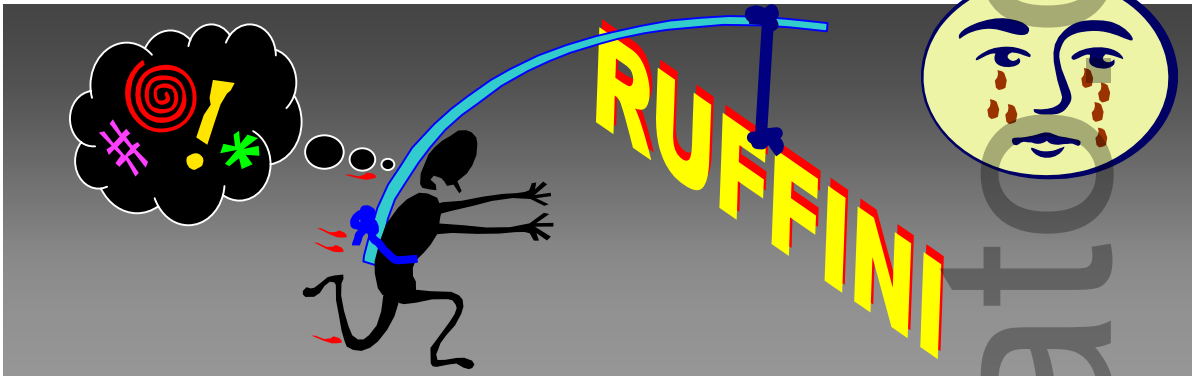
SOLUCIÓN

El sistema de ecuaciones dado es **lineal homogéneo**: $\begin{cases} (m-1) \cdot x + y + z = 0 \\ x + (m-1) \cdot y + z = 0 \\ x + y + (m-1) \cdot z = 0 \end{cases}$

Latiguillo: las matrices de coeficientes y ampliada de un SLH sólo se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango. Así, **el sistema es compatible**: al menos admite la **solución trivial** $x = y = z = 0$.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{bmatrix}$.

$$|A| = m^3 - 3 \cdot m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = -1, 2 \text{ (doble)}$$



Análisis si $m \neq -1$ y $m \neq 2$

Si " m " es distinto de 2 y $-1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow el SLH tiene solución única, que es la trivial $x = y = z = 0$.

Análisis si $m = 2$

Si $m = 2$ la matriz " A " se convierte en $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\text{rg}(A) = 1 < n^\circ$ de incógnitas, el SLH tiene infinitas soluciones. Para hallarlas, como el menor de orden 1 indicado en " A " es no nulo, **eliminamos** la 2ª y 3ª ecuaciones y **parametrizamos** las incógnitas " y " y " z ", pasándolas al segundo miembro de la ecuación; resulta $x = -y - z$. Así, denotando $S_{m=2}$ al subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLH cuando $m = 2$, es:

$$S_{m=2} = \{(-y - z; y; z), \forall y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y; y; 0) + (-z; 0; z), \forall y, z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{m=2} = \{y \cdot (-1; 1; 0) + z \cdot (-1; 0; 1), \forall y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (*)$$

La terna $(-1; 1; 0)$ es solución del SLH (se obtiene al hacer $y = 1, z = 0$), y la terna $(-1; 0; 1)$ también lo es (se obtiene al hacer $y = 0, z = 1$); así, (*) expresa que toda solución del SLH es suma de una terna **proporcional** a $(-1; 1; 0)$ y otra **proporcional** a $(-1; 0; 1)$.

Análisis si $m = -1$

$$\text{Si } m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \text{ y } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2.$$

Como $\text{rg}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el SLH tiene infinitas soluciones. Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "z", pasándola a los segundos miembros:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = -z \\ x - 2y = -z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Denotando $S_{m=-1}$ al subconjunto de \mathbb{R}^3 que forman las infinitas soluciones del SLH cuando $m = -1$, es:

$$S_{m=-1} = \{(z; z; z), \forall z \in \mathbb{R}\} = \{z \cdot (1; 1; 1), \forall z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3 \quad (**)$$

La terna (1;1;1) es solución del SLH (se obtiene al hacer $z = 1$); así, (**) expresa que toda solución del SLH es **proporcional** a la solución (1;1;1).



SABER ESTUDIAR

Estudia sin prisas, leyendo despacio y pensando en lo que lees; es decir, tras leer cada palabra o cada símbolo matemático, invierte un nanosegundo en comprobar si tu cerebro es capaz de **llenarlo de contenido pleno**. En caso afirmativo pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso... pero **en caso de atranque para el reloj y lucha a muerte hasta desatrancarte**; o sea, si no eres capaz de llenar de contenido pleno una palabra o símbolo, invierte el tiempo que sea menester (dos minutos, dos horas, dos semanas, dos meses) en recopilar la información que te permita desatrancarte... y después pasa a la siguiente palabra o símbolo y repite el proceso.

FONEMATO 2.6.14

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de los parámetros reales "n" y "k".

$$\begin{cases} x - n.y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ k.x - 2.y - 5.z = 0 \\ 3.x + y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: el sistema es **lineal homogéneo**; así, la matriz de coeficientes y la ampliada se diferencian en una columna de ceros; por tanto, tienen igual rango y el sistema **es compatible**: al menos admite la **solución trivial** $x = y = z = 0$.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $H_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, es $\text{rg}(A) \geq 2, \forall k$. Al orlar el menor no nulo H_1 obtenemos los siguientes menores de orden 3:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ k & -2 & -5 \end{vmatrix} = n.k - 9 - 5.n - k ; \quad H_3 = \begin{vmatrix} 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.n$$

Por tanto:

- Si $n \neq 0 \Rightarrow H_3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Así, el SLH es compatible y determinado: sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $n = 0 \Rightarrow H_3 = 0$ y $H_2 = -9 - k$; así, si $k \neq -9$ es $H_2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 =$ número de incógnitas. Así, el SLH es compatible y determinado: sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $n = 0$ y $k = -9 \Rightarrow H_2 = H_3 = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por tanto, el SLH tiene infinitas soluciones (es compatible e indeterminado); para calcularlas, a la vista del menor no nulo H_1 , **eliminamos** la 3ª ecuación y **parametrizamos** la incógnita "y", pasándola a los segundos miembros:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y/2 \\ z = y/2 \end{cases}$$

Conjunto $S \subset \mathfrak{R}^3$ de las infinitas soluciones cuando $n = 0$ y $k = -9$:

$$S = \{(-y/2; y; y/2), \forall y \in \mathfrak{R}\} = \{(-\theta; 2.\theta; \theta), \forall \theta \in \mathfrak{R}\} \Rightarrow$$

por comodidad, hacemos $y = 2.\theta$

$$\Rightarrow S = \{\theta \cdot (-1; 2; 1), \forall \theta \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3 (*)$$

La terna $(-1; 2; 1)$ es solución del SLH (se obtiene al hacer $\theta = 1$); así, (*) expresa que toda solución del SLH es **proporcional** a la solución $(-1; 2; 1)$.

FONEMATO 2.6.15

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones según el valor del parámetro real "k".

$$\begin{cases} x - y - z = 7 \\ 5x - 2y + z = 9 \\ x + y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = k \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Latiguillo: para un sistema **lineal** de ecuaciones con "n" incógnitas, siendo respectivamente "A" y "B" las matrices de coeficientes y ampliada, el Teorema de Rouché-Frobenius establece que:

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow$ sistema incompatible
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = n \Rightarrow$ sistema compatible y determinado
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) < n \Rightarrow$ sistema compatible e indeterminado

Es:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & k \end{bmatrix}$$

El máximo rango de "A" es 3 y el de "B" es 4, por tanto, **empezamos estudiando el rango de "B"**; para ello calculamos $|B|$ y los valores de "k" que lo anulan:

$$|B| = -6 \cdot k - 54 = 0 \Rightarrow k = -9$$

Análisis si $k \neq -9$

Si $k \neq -9 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 4 \neq \text{rg}(A)$. Así, el SLNH es incompatible.

Análisis si $k = -9$

Si $k = -9$ es $|B| = 0$, y como el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, resulta $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3 = n^\circ$ de incógnitas; así, el SLNH tiene solución única. Para calcularla, como el menor de orden 3 indicado es no nulo, **eliminamos** la 4ª ecuación y resolvemos por **Cramer**; resulta $x = 11/2$, $y = 17/3$, $z = 43/6$.



FONEMATO 2.6.16

Discuta y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones según el valor del parámetro real "k".

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y + kz = 3 \\ x + 2y + (k+2)z = k^2 - 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Es: $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & 2 & k+2 & k^2-2 \end{array} \right]$

El máximo rango de "A" es 3 y el de "B" es 4, por tanto, **empezamos estudiando el rango de "B"**; para ello calculamos $|B|$ y determinamos los valores de "k" que lo anulan:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & k+3 & k^2-5 \end{vmatrix} = (k+1) \cdot (k^2-1) = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

A la 2ª fila le restamos el triple de la 1ª
A las filas 3ª y 4ª les restamos la 1ª

• Si $k \neq \pm 1 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 4 \neq \text{rg}(A)$. Por tanto, el SLNH es incompatible.

• Si $k = 1$ es $|B| = 0$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $|B| = 0$ y el menor de orden 3 indicado en "A" es no nulo, resulta ser $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Así, el SLNH tiene solución única; para calcularla, como el menor de orden 3 indicado en "A" es $\neq 0$, **eliminamos** la 4ª ecuación del sistema y resolvemos por **Cramer**; resulta: $x = 7, y = -4, z = 0$.

• Si $k = -1$ es $|B| = 0$, y las matrices "A" y "B" se convierten en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 ; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 2$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 < n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow infinitas soluciones. Para calcularlas, como el menor de orden 2 indicado en "A" es no nulo, **eliminamos** las ecuaciones 3ª y 4ª y **parametrizamos "z"**, pasándola a los segundos miembros:

$$\begin{cases} x + y = z + 3 \\ 3x + 4y = z + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + 3z \\ y = -2z - 4 \end{cases}$$

Siendo $S_{k=-1} \subset \mathfrak{R}^3$ el conjunto de las infinitas soluciones cuando $k = -1$, es:

$$S_{k=-1} = \left\{ (3\theta + 7; -2\theta - 4; \theta), \forall \theta \in \mathfrak{R} \right\} =$$

Identificación paramétrica de $S_{k=-1}$

$$= \{(7; -4; 0) + \theta \cdot (3; -2; 1), \forall \theta \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^3$$

2.7 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR SUSTITUCIÓN

Para aplicar el **método de sustitución** trabajamos así:

- 1) De una ecuación cualquiera despejamos una incógnita cualquiera x_k .
- 2) En las restantes ecuaciones del sistema sustituimos la incógnita x_k por su valor obtenido en 1); así resulta un nuevo sistema lineal de ecuaciones que tiene una ecuación menos, y en él no aparecerá la incógnita x_k .
- 3) Reiteramos el procedimiento.

FONEMATO 2.7.1

Resuelva $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ por sustitución.

SOLUCIÓN

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2 + 2x_3) + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2(x_2 + 2x_3) + x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

Despejamos x_1 de la segunda ecuación: $x_1 = x_2 + 2x_3$ (I)
Sustituimos x_1 por su valor en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos

parametrizamos x_3

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x_2 + 3x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 1 - x_3$

eliminamos una de las ecuaciones, pues las dos son la misma

Para calcular x_1 en función de x_3 basta hacer $x_2 = 1 - x_3$ en (I); resulta:

$x_1 = x_2 + 2x_3 = (1 - x_3) + 2x_3 \Rightarrow x_1 = 1 + x_3$

es $x_2 = 1 - x_3$

Por tanto, denotando "S" al subconjunto de \mathcal{R}^3 que forman las infinitas soluciones del sistema, es $S = \{(1 + x_3; 1 - x_3; x_3), \forall x_3 \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}^3$.

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2 + 2x_3) + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2(x_2 + 2x_3) + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Despejamos x_1 de la segunda ecuación: $x_1 = x_2 + 2x_3$
Sustituimos x_1 por su valor en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos

$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(-x_3) + 3x_3 = 3 \Rightarrow 0 = 3 \Rightarrow \text{absurdo} \Rightarrow$

Despejamos x_2 de la segunda ecuación: $x_2 = -x_3$
Sustituimos x_2 por su valor en la primera ecuación

\Rightarrow el sistema es incompatible

FONEMATO 2.7.2

Resuelva el sistema $\begin{cases} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases}$ por sustitución.

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(3 - y - z - t) + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.(3 - y - z - t) + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Despejamos "x" de la segunda ecuación: $x = 3 - y - z - t$
Sustituimos "x" por su valor en las demás ecuaciones

operamos y simplificamos

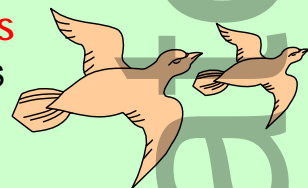
$$\Rightarrow \begin{cases} y + 2.z + 3.t = -5 \\ y + 2.z + 3.t = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

Despejamos "y" de la primera ecuación: $y = -5 - 2.z - 3.t$
Sustituimos "y" por su valor en la segunda ecuación

$$\Rightarrow (-5 - 2.z - 3.t) + 2.z + 3.t = -7 \Rightarrow 5 = 7 \Rightarrow$$

\Rightarrow absurdo \Rightarrow sistema incompatible

El Álgebra de lo Lineal posibilita la creación de **modelos matemáticos** que ayudan a comprender y gestionar los **fenómenos lineales...** y el asunto es tan importante que en tu primer año de Carrera deberás lidiar un curso de Álgebra de lo Lineal, para ampliar los conocimientos adquiridos durante el Bachillerato. Naturalmente, cuanto más sepas de estas cosas al llegar a la Universidad, más cómodo y seguro será tu aterrizaje en ella.



FONEMATO 2.7.3

Resuelva el sistema $\begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \\ 3.x + y = 9 \\ x + 4.y = 3 \end{cases}$ por sustitución.

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x + 2.y = 3 \\ 2.x + y = 6 \\ 3.x + y = 9 \\ x + 4.y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(3 - 2.y) + y = 6 \\ 3.(3 - 2.y) + y = 9 \\ (3 - 2.y) + 4.y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3.y = 0 \\ -5.y = 0 \\ 2.y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

operamos y simplificamos

Despejamos "x" de la primera ecuación: $x = 3 - 2.y$ (I)
Sustituimos "x" por su valor en las demás ecuaciones

Al hacer $y = 0$ en (I) resulta $x = 3$; por tanto, la única solución del sistema es $x = 3, y = 0$.

2.8 EL MÉTODO DE GAUSS

Sea un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes "A" y ampliada "B". Por comodidad, como hemos hecho muchas veces, escribiremos estas matrices **superpuestas**, denotando A/B.

Por ejemplo, si el sistema lineal es:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2.y + 3.z = -1 \\ 2.x + 5.y + 7.z = -2 \\ 3.x + 8.y + 9.z = -1 \end{array} \right\} \text{ (I)}$$

escribimos $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right]$, donde la columna de los términos independientes está separada de las demás por una línea vertical.

Antes de meternos en harina conviene recordar que el **Teorema de Equivalencia de Sistemas de Ecuaciones Lineales** garantiza que si, por ejemplo, en el sistema (I), sustituimos la 1ª ecuación por la que resulta al sumarle miembro a miembro la 2ª y restarle miembro a miembro la 3ª, obtenemos un **nuevo** sistema (II), que es **equivalente** a (I):

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = -2 \\ 2.x + 5.y + 7.z = -2 \\ 3.x + 8.y + 9.z = -1 \end{array} \right\} \text{ (II)}$$

Como sabemos, **el que dos sistemas lineales sean equivalentes significa que ambos sistemas tienen las mismas soluciones.**

Observa: para el sistema lineal (II), es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right]$, y para expresar que A_1/B_1 se obtiene a partir de A/B sin más que hacer **transformaciones elementales**, escribimos:

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

Por ejemplo, si ahora hacemos:

$$A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] = A_2/B_2$$

a la tercera fila le restamos la segunda

a la vista de A_2/B_2 , tranquilamente **apostamos la vida** a que el siguiente sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = -2 \\ 2.x + 5.y + 7.z = -2 \\ x + 3.y + 2.z = 1 \end{array} \right\}$$

es **equivalente** al (II), por lo que es **equivalente** al (I).

La idea de **Gauss**, legitimada por el Teorema de Equivalencia de Sistemas de Ecuaciones Lineales, consiste en **manipular** las filas de A/B mediante **transformaciones elementales**, buscando conseguir una matriz con la siguiente **estructura escalonada**:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & k_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & k_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{4n} & k_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{mn} & k_m \end{array} \right]$$

Johann Carl Friedrich Gauss, el más grande matemático del siglo XIX, nació en Alemania, en 1777. Su padre, un obrero que no creía en la educación formal, hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela, pero su madre, a pesar de no contar con educación, apoyó a su hijo en sus estudios.

Gauss era un niño prodigio: a los 3 años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Con 10 años, ante la sorpresa de su maestro, en unos segundos calculó la suma de los 100 primeros números naturales: había observado que se podían agrupar en 50 pares que sumaban 101 cada uno (1+100, 2+99, etc.), y $50 \times 101 = 5050$. Años después, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.



Eligió estudiar Matemáticas tras dos descubrimientos asombrosos: inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que **Legendre** publicara sus resultados, y un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: demostró cómo construir, con sólo regla y compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5. En 1798, con 20 años, dio la primera demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra (todo polinomio de grado "n" tiene "n" raíces) que muchos matemáticos, incluyendo a **Euler**, **Newton** y **Lagrange**, habían intentado abordar antes sin éxito.

En 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del planetoide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético. Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, fue la producción matemática de Gauss la que resultó asombrosa: hizo contribuciones fundamentales al Álgebra y la Geometría. En 1811 descubrió un resultado que llevó a **Cauchy** a desarrollar la teoría de variable compleja. En álgebra lineal encontramos el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana - una técnica de integración numérica.

En sus escritos era un perfeccionista, y tal vez sea el último matemático que sabía todo sobre su área. Afirmando que una catedral no lo era hasta que se quitaba el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *paula sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las Matemáticas deben reflejar el mundo real. A su muerte, fue honrado con una medalla conmemorativa con la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

FONEMATO 2.8.1

Resuelva el sistema de ecuaciones por el método de Gauss.

$$x + 2y + 3z = -1 ; 2x + 5y + 7z = -2 ; 3x + 8y + 9z = -1$$

SOLUCIÓN

Para nuestro sistema lineal, es $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right]$, y se tiene que:

Para conseguir "ceros" en la primera columna, a la segunda fila le restamos el doble de la primera, y a la tercera fila le restamos el triple de la primera

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \downarrow \\ \approx \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \uparrow \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

(tercera fila) - (doble de la segunda)

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones (**es equivalente**) que el siguiente nuevo sistema, cuya matriz de coeficientes A_1 es **triangular**:

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = -1 \\ y + z = 0 \\ -2z = 2 \end{array}$$

Como $|A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, el sistema tiene solución única, y su obtención es fácil: de la 3ª ecuación del nuevo sistema se deduce que $z = -1$, al hacer $z = -1$ en la 2ª ecuación se obtiene $y = 1$, y haciendo $y = 1$ y $z = -1$ en la 1ª ecuación resulta $x = 0$.

La llave que todo lo abre

KNOW HOW



Lo importante de este libro tiene que ver con **el arte de deslumbrar a tus profesores**; o sea, tiene que ver con estar entre los mejores, con espabilar y amueblar la cabeza, con aprender a aprender y a razonar, con la disciplina mental y la tracción a todas las neuronas, con no chuparse el dedo y cazarlas al vuelo, con aprender a diferenciarse envolviendo los caramelos con primor... y con todas esas cosas intangibles de las que nadie te habla y sin embargo conforman el mágico **KNOW HOW** que te posibilitará el tránsito rápido y feliz por la Universidad.

FONEMATO 2.8.2

Resuelva el sistema $\begin{cases} 2.x + 3.y + 4.z + 5.t = 1 \\ 3.x + 4.y + 5.z + 6.t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases}$ por el método de Gauss.

SOLUCIÓN

Cambiamos la primera fila por la tercera

$$A/B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & | & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \end{bmatrix} \approx$$

A la segunda fila le restamos el triple de la primera
A la tercera fila le restamos el doble de la primera

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & -5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

A la tercera fila le restamos la segunda

Por tanto, el sistema dado tiene las mismas soluciones que el siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ y + 2.z + 3.t = -7 \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema incompatible}$$

la condición $0 = 2$ es absurda

No hay que obsesionarse con la obtención de una triangulación inferior; podríamos haber trabajado así:

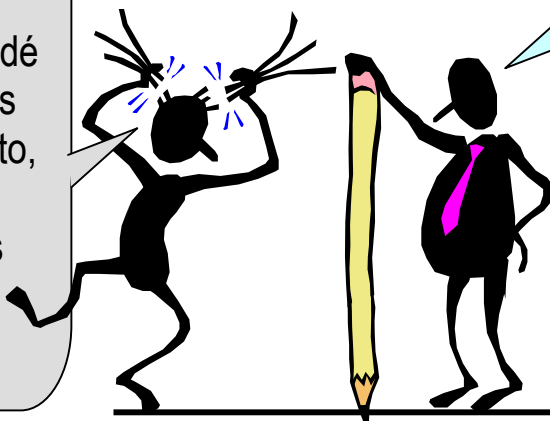
A la primera fila le restamos el doble de la tercera
A la segunda fila le restamos el triple de la tercera

$$A/B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

A la primera fila le restamos la segunda

y habríamos tardado menos.

La probabilidad de que el Álgebra me dé de comer es nula; por tanto, estudiar Álgebra es una gran gilipollez



De eso nada monada... aunque no te dé de comer, estudiar Álgebra es portentosa vitamina para desarrollar la **disciplina mental**, que es **lo más valioso de tu educación científica**

FONEMATO 2.8.3

Resuélvase los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss.

$$1) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ 3x + y = 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ 3x + y + z = 8 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1) Es:

$$A/B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1; F_3 - 3 \cdot F_1; F_4 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pues las filas tercera y cuarta son proporcionales a la segunda, y con eso basta: no merece la pena perder el tiempo pensando en los coeficientes de proporcionalidad; o sea, no merece la pena perder el tiempo pensando en que la tercera fila se convierte en una de ceros al sumarle la segunda multiplicada por $-5/3$, y que la cuarta fila se convierte en una de ceros al sumarle la segunda multiplicada por $2/3$.

Así, el sistema dado **es equivalente** al $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

2) Es:

$$A/B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2 \cdot F_1; F_3 - 3 \cdot F_1; F_4 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cambiamos la segunda fila por la tercera

$$F_4 + \frac{3}{2} \cdot F_2$$
$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_4 - 4 \cdot F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1/B_1$$

Así, el sistema dado **es equivalente** al siguiente nuevo sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -z = -3 \end{cases}$$

Éste tiene solución única: de la 3ª ecuación resulta $z = 3$, y al sustituir en la 2ª se obtiene $y = 2$, con lo que de la 1ª ecuación se obtiene $x = 1$.

FONEMATO 2.8.4

Resuelva el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ por el método de Gauss.

SOLUCIÓN

Es:

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 2 \cdot F_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

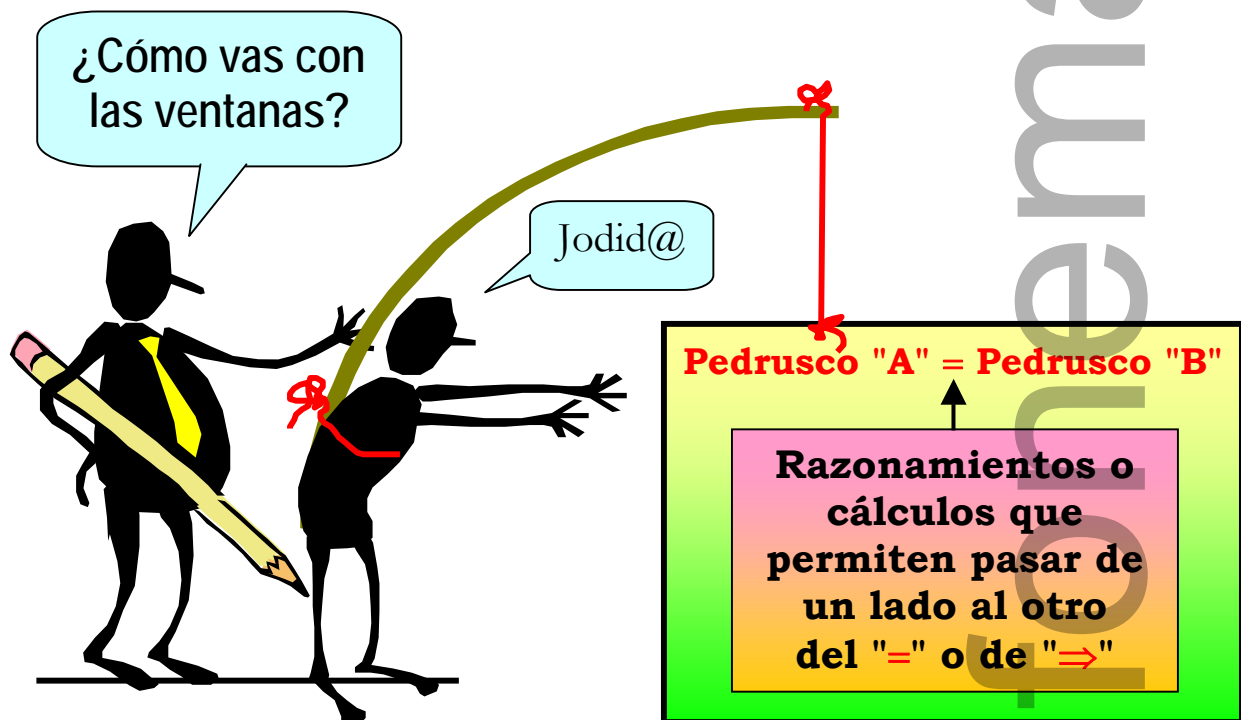
Como $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

Parametrizando x_3 , resulta:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 - x_3 \\ -3x_2 = -3 + 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow S = \{(1 + x_3; 1 - x_3; x_3), \forall x_3 \in \mathcal{R}\} = \\ = \{ \underbrace{(1; 1; 0)} + x_3 \cdot \underbrace{(1; -1; 1)}, \forall x_3 \in \mathcal{R} \}$$

solución del SLNH
obtenida si $x_3 = 0$

solución del SLH
asociado al SLNH



Nadie nace sabiendo

FONEMATO 2.8.5

Discuta y resuelva el sistema $\begin{cases} k \cdot x + 2 \cdot z = 0 \\ k \cdot y - z = k \\ x + 3 \cdot y + z = 5 \end{cases}$ según los valores de "k".

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1 - k \cdot F_3 \\ F_1 + 3 \cdot F_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 \cdot k & 2 - k & -5 \cdot k \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 - k & -2 \cdot k \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

Es $|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 - k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot (1 + k)$, que se anula sólo si $k = 0$ ó $k = -1$.

- Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = 3 = \text{rg}(B_1) = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow el sistema tiene solución única, y la obtenemos mediante la **regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 \cdot k & 0 & -1 - k \\ k & k & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A_1|}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \cdot k & -1 - k \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A_1|}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \cdot k \\ 0 & k & k \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{|A_1|}$$

- Si $k = -1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow$ sistema incompatible.

la primera ecuación es $0 = 2$, lo que es absurdo

- Si $k = 0$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right]$. Así, el sistema dado es equivalente a:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 3 \cdot y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 5 - 3 \cdot y \end{cases} \Rightarrow S_{k=0} = \{(5 - 3 \cdot y; y; 0), \forall y \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$$

parametrizando "y"

$$\Rightarrow S_{k=0} = \{ (5; 0; 0) + y \cdot (-3; 1; 0), \forall y \in \mathbb{R} \}$$

solución del SLNH
obtenida si $y = 0$

solución del SLH
asociado al SLNH



FONEMATO 2.8.6

Discuta el siguiente sistema lineal según los valores del parámetro "a":

$$(a - 2).x - y + z = 0 ; x + (2.a - 1).y - a.z = 0 ; x + a.y - z = 0$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} a-2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2.a-1 & -a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 - a.(a-2) & 1 + (a-2) & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array} \right] =$$

$F_1 - (a-2) \cdot F_3 ; F_2 - F_3$

Simplificamos

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -(a-1)^2 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (a-1).(2-a) & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

$F_1 + (a-1) \cdot F_2$

Es $|A_1| = (a-1)^2.(a-2)$, que se anula sólo si $a = 1$ ó $a = 2$.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = 3 = \text{rg}(B_1) = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow el sistema es compatible y determinado: sólo tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- Si $a = 1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$.

El nuevo sistema se reduce a la ecuación $x + y - z = 0$, que tiene infinitas soluciones.

Parametrizando "x" e "y", resulta $z = x + y$; por tanto, el conjunto $S_{a=1}$ de soluciones es

$$S_{a=1} = \{(\lambda; \theta; \lambda + \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda; 0; \lambda) + (0; \theta; \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\} \\ = \{\lambda \cdot (1; 0; 1) + \theta \cdot (0; 1; 1), \forall \lambda, \theta \in \mathbb{R}\}$$

La terna $(1; 0; 1)$ es solución del SLH (se obtiene para $\lambda = 1, \theta = 0$), y la terna $(0; 1; 1)$ también lo es (se obtiene para $\lambda = 0, \theta = 1$); así, si $a = 1$, toda solución del SLH es suma de una terna **proporcional** a $(1; 0; 1)$ y otra **proporcional** a $(0; 1; 1)$.

- Si $a = 2$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right]$, por lo que el sistema se reduce a:

$$\left. \begin{array}{l} y - z = 0 \\ x + 2.y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Tiene infinitas soluciones; parametrizamos "z"

El conjunto $S_{a=2}$ de soluciones es:

$$S_{a=2} = \{(-\alpha; \alpha; \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \cdot (-1; 1; 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Si $a = 2$, toda solución del SLH es **proporcional** a la solución $(-1; 1; 1)$.

FONEMATO 2.8.7

Clasifique el siguiente sistema lineal según los valores de "a" y "b".

$$a.x + y + b.z = 1 ; x + a.y + b.z = 1 ; x + y + a.b.z = b$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & b & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a.b & b \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & b-a^2.b & 1-a.b \\ 0 & a-1 & b-a.b & 1-b \\ 1 & 1 & a.b & b \end{array} \right] = A_1/B_1$$

A la primera ecuación le restamos la tercera multiplicada por "a"
A la segunda ecuación le restamos la tercera

$$\begin{aligned} \text{Es: } |A_1| &= \begin{vmatrix} 0 & 1-a & b-a^2.b \\ 0 & a-1 & b-a.b \\ 1 & 1 & a.b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & b-a^2.b \\ a-1 & b-a.b \end{vmatrix} = \\ &= b.(1-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = b.(1-a)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = b.(1-a)^2.(2+a) \end{aligned}$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = 1$ ó $a = -2$ ó $b = 0$, se tiene que:

- Si $b \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Así, el sistema es compatible y determinado.

- Si $b = 0$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

A la primera fila le sumamos la segunda

El sistema es incompatible para todo valor de "a", pues la primera ecuación es $0.x + 0.y + 0.z = 2$, lo que resulta imposible.

- Si $a = 1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 1 & 1 & b & b \end{array} \right]$. Por tanto:

- * Si $b \neq 1$ ($\Rightarrow 1 - b \neq 0$), el sistema es incompatible, pues la primera ecuación es $0.x + 0.y + 0.z = 1 - b \neq 0$, que resulta absurdo.

- * Si $b = 1 \Rightarrow A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow$ infinitas soluciones.

- Si $a = -2$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3.b & 1+2.b \\ 0 & -3 & 3.b & 1-b \\ 1 & 1 & -2.b & b \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2+b \\ 0 & -3 & 3.b & 1-b \\ 1 & 1 & -2.b & b \end{array} \right] = A_2/B_2$.

A la primera fila le sumamos la segunda

Por tanto:

- * Si $b \neq -2$ ($\Rightarrow 2 + b \neq 0$), el sistema es incompatible, pues la primera ecuación es $0.x + 0.y + 0.z = 2 + b \neq 0$, que resulta absurdo.

- * Si $b = -2$, es $A_2/B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right]$.

Como $\text{rg}(A_2) = \text{rg}(B_2) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, el sistema el sistema es compatible e indeterminado: tiene infinitas soluciones.

FONEMATO 2.8.8

Discuta el sistema lineal $x + y + a.z = a$, $a.x + a.y + z = 1$, $x + a.y + z = a$.

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

A la segunda fila le restamos la primera multiplicada por "a"
A la tercera fila le restamos la primera

Es: $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = -(a-1) \cdot (1-a^2) = -(a-1)^2 \cdot (a+1)$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = \pm 1$, se tiene que:

- Si $a \neq \pm 1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow compatible y determinado.

- Si $a = 1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

El sistema se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$, que tiene infinitas soluciones.

- Si $a = -1$, es: $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right]$

A la primera le sumamos la segunda dividida por "2"

El sistema es indeterminado, pues $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 2 < n^\circ$ de incógnitas.

EXITO SEGURO



Ese es el premio para l@s que educan su voluntad en el **rigor**: no contentarse nunca con entender a medias; dedicar el tiempo que haga falta, pero **comprender, asimilar, progresar**.

¿Tu cerebro es muy riguroso?



Es normal, rugoso

En fonemato.com tienes el videotutorial en el que explicamos los contenidos de este libro.

FONEMATO 2.8.9

Discuta el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$x + y + a.z = 1 ; x + y + b.z = a ; x + a.y + z = a$$

SOLUCIÓN

$$A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b & a \\ 1 & a & 1 & a \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b-a & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

A las filas segunda y tercera les restamos la primera

$$\text{Es: } |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (1-a)$$

Como $|A_1|$ se anula sólo si $a = 1$ ó $b = a$, se tiene que:

- Si $b \neq a$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A_1| \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 3 = \text{número de incógnitas}$; por tanto, el sistema es compatible y determinado.

- Si $a = b$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array} \right]$. Por tanto:

- * Si $a \neq 1 (\Rightarrow a-1 \neq 0)$, el sistema es incompatible, pues segunda ecuación es $0.x + 0.y + 0.z = a-1 \neq 0$, que resulta absurdo.

- * Si $a = 1$, es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

El sistema se reduce a $x + y + z = 1$, que tiene infinitas soluciones.

- Si $a = 1$ es $A_1/B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$, y el sistema se reduce a:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ (b-1).z = 0 \end{array} \right\} \text{(I)}$$

que tiene infinitas soluciones para todo valor de "b". En efecto:

- * Si $b = 1$, el sistema (I) se transforma en:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 0.z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow$$

Parametrizamos las incógnitas "z" e "y"

$$\Rightarrow S_{a=b=1} = \{(1 - \lambda - \theta; \lambda; \theta), \forall \lambda, \theta \in \mathfrak{R}\}$$

- * Si $b \neq 1 (\Rightarrow b-1 = k \neq 0)$, entonces (I) se transforma en:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ k.z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - y \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Parametrizamos la incógnita "y"

$$\Rightarrow S_{a=1; b \neq 1} = \{(1 - \alpha; \alpha; 0), \forall \alpha \in \mathfrak{R}\}$$

FONEMATO 2.8.10

Discuta los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$1) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = a \end{cases}; 2) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = a \\ x + 3y = b \\ x + 4y = 2a \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$1) A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 4 & a \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = A_1/B_1$$

A la tercera fila le restamos la suma de las dos primeras

El sistema tiene infinitas soluciones para todo valor de "a", pues para todo valor de "a" ocurre que $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(B_1) = 2 < n^\circ$ de incógnitas.

$$2) A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & a \\ 1 & 3 & b & b \\ 1 & 4 & 2a & 2a \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 2 & b-1 & b-1 \\ 0 & 3 & 2a-1 & 2a-1 \end{array} \right] \approx$$

A las filas segunda, tercera y cuarta les restamos la primera

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1+b-2a & 1+b-2a \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \end{array} \right] = A_2/B_2$$

A la tercera fila le restamos el doble de la segunda
A la cuarta fila le restamos el triple de la segunda

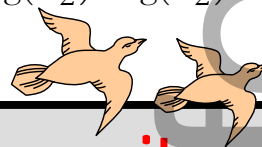
- Si $a \neq 2$ ($\Rightarrow 2 - a \neq 0$), el sistema es incompatible, pues la cuarta ecuación es $0 \cdot x + 0 \cdot y = (2 - a) \neq 0$, que resulta absurdo.

- Si $a = 2$, es $A_2/B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-3 & b-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Por tanto:

- * Si $b \neq 3$ ($\Rightarrow b - 3 \neq 0$), el sistema es incompatible, pues la tercera ecuación es $0 \cdot x + 0 \cdot y = (b - 3) \neq 0$, que resulta imposible.

- * Si $b = 3$, es $A_2/B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

El sistema es compatible y determinado, pues $\text{rg}(A_2) = \text{rg}(B_2) = 2 = \text{número de incógnitas}$.



En examen hay que **dejar escrito** todo lo relevante que **pase** por el cerebro.