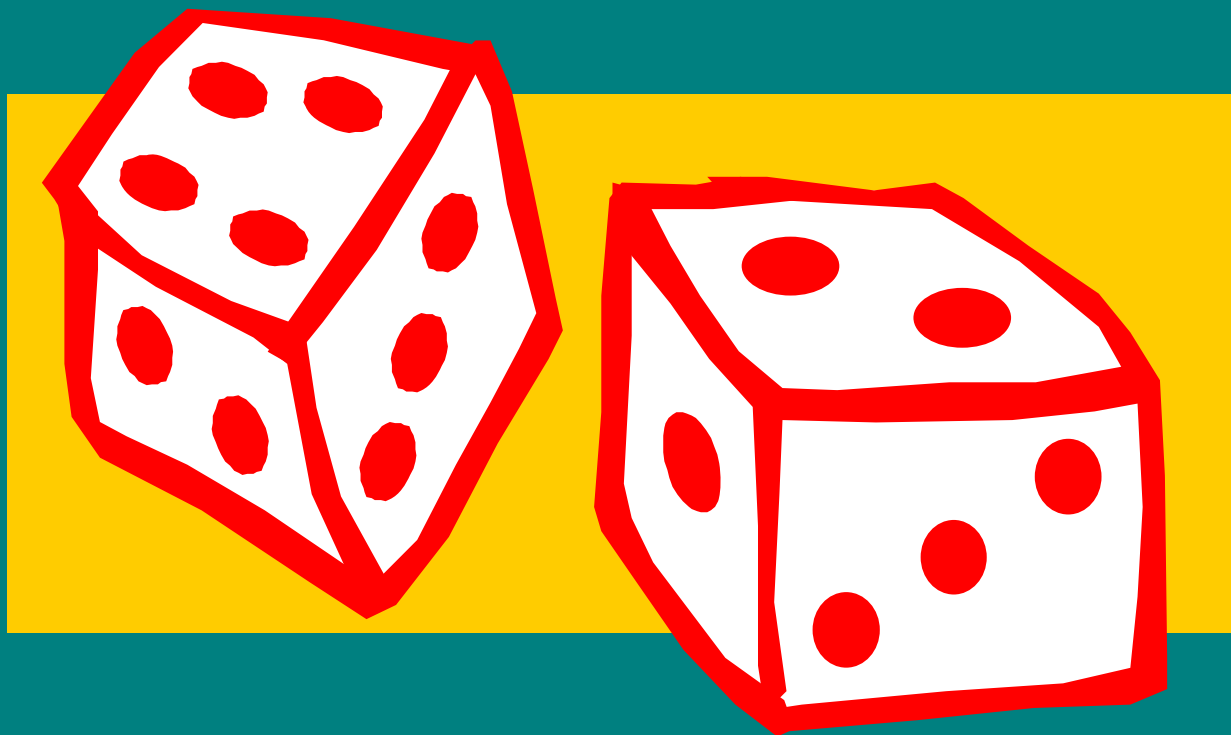


# ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

## Volumen I

### Distribuciones de probabilidad

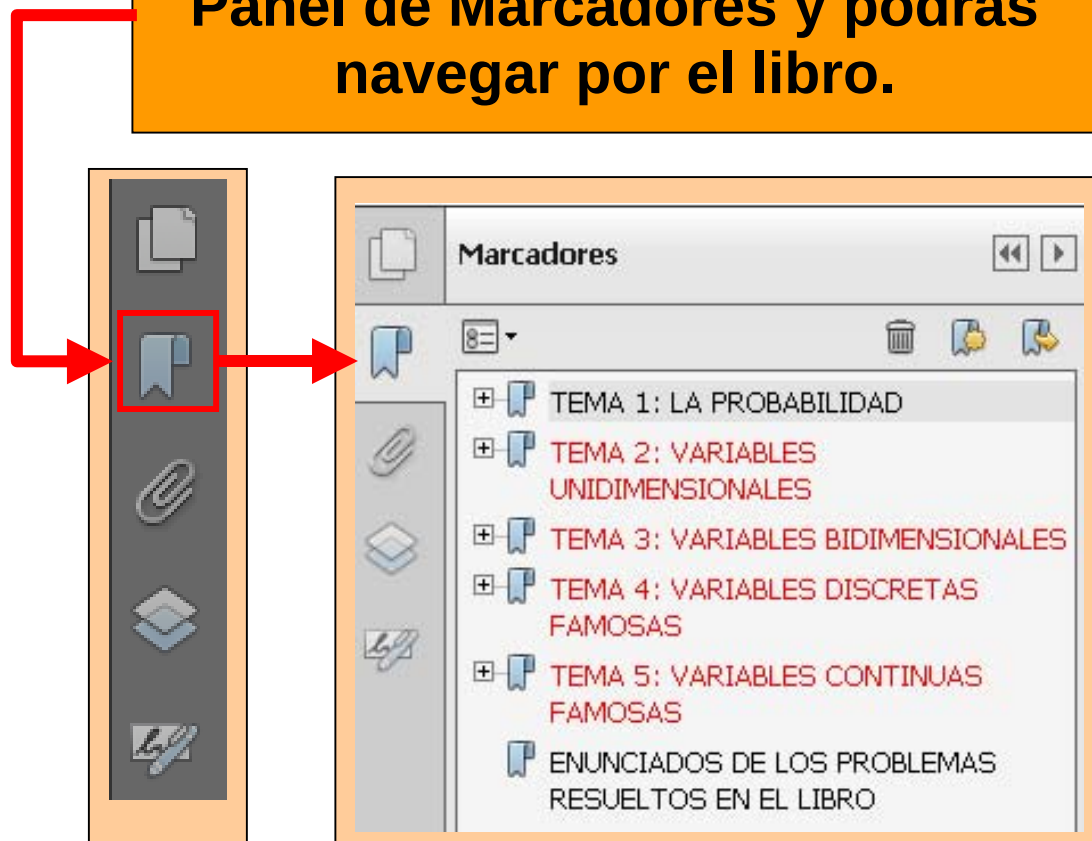


**Rafael Cabrejas Hernansanz**

→ **fonemato.com**

Aquí hay un videotutorial en el que  
explicamos los contenidos de este libro.

**Haciendo clic aquí se abrirá el Panel de Marcadores y podrás navegar por el libro.**



# **INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA MATEMÁTICA**

## **Volumen I: Distribuciones de probabilidad**

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

**© RAFAEL CABREJAS HERNANSANZ**

# Tema 2

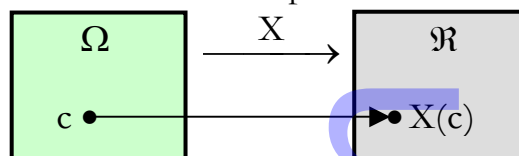
## Variables unidimensionales

- 2.01 Variable aleatoria unidimensional
- 2.02 Variable aleatoria discreta
- 2.03 La palabra "densidad"
- 2.04 Variable aleatoria continua
- 2.05 Variable aleatoria degenerada
- 2.06 Esperanza matemática. El verbo "ponderar"
- 2.07 Momentos de una variable aleatoria
- 2.08 Variable tipificada
- 2.09 Teorema de Markov
- 2.10 Teorema de Tchebychef
- 2.11 Función generatriz de momentos
- 2.12 Función característica
- 2.13 Cambios de variable
- 2.14 Variable truncada
- **Latiguillos**

**Una variable aleatoria unidimensional es una forma, modo o manera de repartir o distribuir la unidad de masa de probabilidad entre puntos de la recta real.**

## 2.1 VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Siendo  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  el espacio probabilístico de un experimento aleatorio "E", llamamos **variable aleatoria unidimensional** asociada al experimento "E" a toda ley o criterio "X" que asocie un número real a cada uno de los comportamientos elementales que forman  $\Omega$ , con la condición de que el criterio "X" sea **medible**, lo que quiere decir que la imagen inversa de todo intervalo  $(-\infty; x]$  es un suceso de  $\mathcal{A}$ :



$$X^{-1}((-\infty; x]) = \{c \in \Omega / X(c) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Si el espacio muestral  $\Omega$  es discreto (está formado por un número finito o infinito numerable de comportamientos elementales), se dice "X" es una **variable aleatoria discreta**; y si  $\Omega$  es continuo (está formado por una infinidad no numerable de comportamientos elementales), se dice que "X" es una **variable aleatoria continua**. Naturalmente, asociadas al experimento "E" pueden definirse infinidad de variables aleatorias.

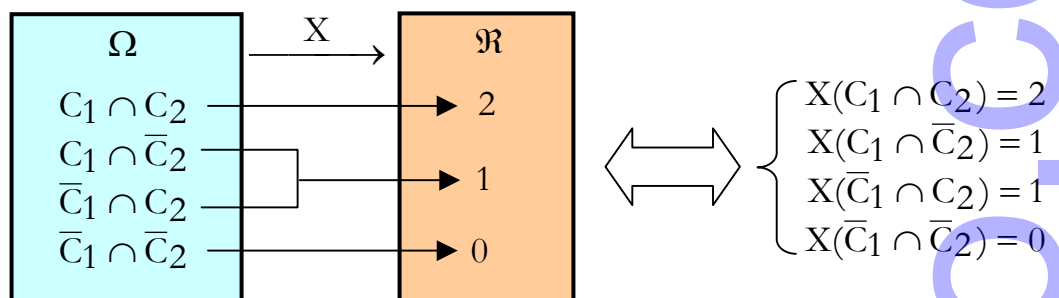


## 2.2 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

**Lo mejor es un ejemplo:** en el experimento de lanzar dos monedas al aire y observar el resultado, siendo  $C_i$  el suceso de obtener cara en la  $i$ -ésima moneda ( $i = 1, 2$ ), el espacio muestral  $\Omega$  está formado por cuatro comportamientos elementales  $C_1 \cap C_2$ ,  $C_1 \cap \bar{C}_2$ ,  $\bar{C}_1 \cap C_2$  y  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$ , que son equiprobables si las monedas están equilibradas:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1 \cap \bar{C}_2) = P(\bar{C}_1 \cap C_2) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = 1/4$$

Así las cosas, es una variable aleatoria discreta el criterio "X" que a cada comportamiento elemental le asocia el número de caras que hay en él; es decir, la variable aleatoria "X" expresa el **número de caras que se obtienen al lanzar las dos monedas**.



En lo que se refiere a la variable "X" que expresa el aleatorio número de caras que se obtienen al lanzar dos monedas al aire, por fuerza ocurre que "X" toma el valor 0, o el valor 1, o el valor 2; así, cabe considerar que el conjunto formado por los números 0, 1 y 2 (posibles valores que puede tomar "X") es el **espacio muestral de la variable "X"**.

Naturalmente, la Estadística inventará un ente que "conecte" los números 0, 1 y 2 con los números que respectivamente expresan la probabilidad de que al realizar el experimento ocurra que "X" toma el valor 0, el valor 1 o el valor 2; dicho ente es la llamada **función de probabilidad o de cuantía de "X"**.

### Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

La **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta "X" es la  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = P(X = x)$ ; o sea, la imagen  $f(x)$  de  $x \in \mathcal{R}$  según "f" es la probabilidad de que la variable aleatoria "X" tome el valor "x", es decir,  $f(x)$  es la **masa puntual** de probabilidad que hay en el punto "x".

De "f" también se dice que es la **función de cuantía** de "X".

**Obvio:** si "X" no puede tomar el valor "x" es  $f(x) = P(X = x) = 0$ ; y si "X" puede tomar el valor "x" es  $f(x) = P(X = x) > 0$ .

**Obvio:** como una variable no puede tomar dos valores distintos a la vez, si  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  son todos los valores que puede tomar "X", ha de ser:

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) + \dots = 1$$

O sea:

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + \dots = 1$$

**Por ejemplo,** determinemos la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de caras que se obtienen al lanzar dos monedas al aire: como "X" sólo puede tomar los valores 0, 1 y 2, debemos determinar la probabilidad de que "X" tome cada uno de esos valores:

$$f(0) = P(X = 0) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = 1/4$$

ocurre el suceso  $X = 0$  sólo si ocurre el suceso  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$

$$f(1) = P(X = 1) = P((C_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2)) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

ocurre el suceso  $X = 1$  sólo si ocurre el suceso  $(C_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2)$ ; como  $(C_1 \cap \bar{C}_2)$  y  $(\bar{C}_1 \cap C_2)$  son incompatibles, la probabilidad de su unión es la suma de sus respectivas probabilidades

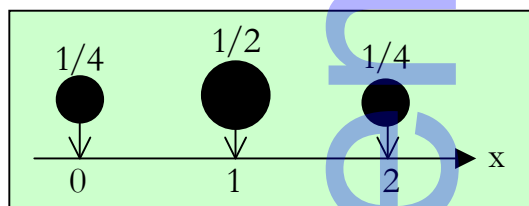
$$f(2) = P(X = 2) = P(C_1 \cap C_2) = 1/4$$

ocurre el suceso  $X = 2$  sólo si ocurre el suceso  $C_1 \cap C_2$

Los resultados obtenidos pueden expresarse así:

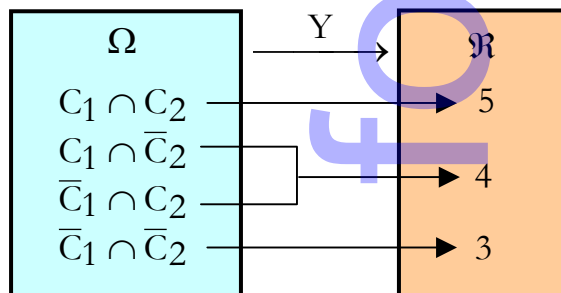
| x                 | 0   | 1   | 2   |
|-------------------|-----|-----|-----|
| $f(x) = P(X = x)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

Cabe decir que en el experimento de lanzar dos monedas al aire, la variable "X" reparte su unidad de masa entre los puntos  $x = 0, x = 1$  y  $x = 2 \dots$  y el reparto se hace de modo que a  $x = 0$  y a  $x = 2$  les corresponden 0'25 unidades de masa, y a  $x = 1$  le corresponden 0'5 unidades.



**Ligadas a la variable aleatoria "X" pueden definirse infinidad de variables aleatorias.**

**Por ejemplo,** si  $Y = g_1(X) = X + 3$ , al lanzar dos monedas por fuerza ocurre que "Y" toma el valor 3, o el valor 4, o el valor 5. Por tanto, cabe considerar que el conjunto formado por los números 3, 4 y 5 (que son los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria "Y") es el **espacio muestral** de "Y".



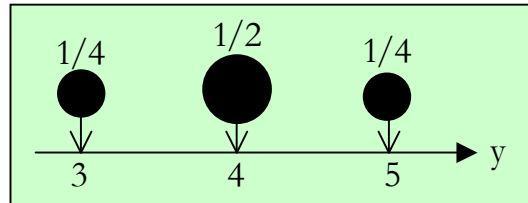
La función de probabilidad de "Y" es la  $h: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  tal que  $h(y) = P(Y = y)$ :

$$h(3) = P(Y = 3) = P(X + 3 = 3) = P(X = 0) = 1/4$$

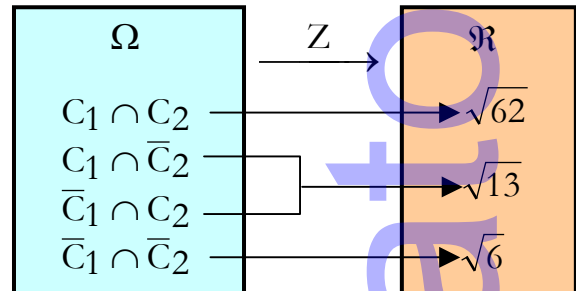
$$h(4) = P(Y = 4) = P(X + 3 = 4) = P(X = 1) = 1/2$$

$$h(5) = P(Y = 5) = P(X + 3 = 5) = P(X = 2) = 1/4$$

Por tanto, al lanzar dos monedas al aire, la variable "Y" reparte la unidad de masa de probabilidad entre los puntos  $y = 3$ ,  $y = 4$  e  $y = 5$ , y el reparto se hace de modo que a cada uno de los puntos  $y = 3$  e  $y = 5$  le corresponden 0'25 unidades de masa, y al punto  $y = 4$  le corresponden 0'5 unidades.



**Por ejemplo**, si  $Z = g_2(X) = \sqrt{7 \cdot X^3 + 6}$ , al lanzar las dos monedas al aire por fuerza ocurre que "Z" toma el valor  $\sqrt{6}$ , o el valor  $\sqrt{13}$ , o el valor  $\sqrt{62}$ . Así, cabe considerar al conjunto formado por los números  $\sqrt{6}$ ,  $\sqrt{13}$  y  $\sqrt{62}$  (posibles valores que puede tomar "Z") como el **espacio muestral** de "Z". La función de probabilidad de "Z" es la  $u: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  tal que  $u(z) = P(Z = z)$ :



$$u(\sqrt{6}) = P(Z = \sqrt{6}) = P(X = 0) = 1/4$$

ocurre el suceso  $Z = \sqrt{6}$  sólo si ocurre el suceso  $X = 0$

$$u(\sqrt{13}) = P(Z = \sqrt{13}) = P(X = 1) = 1/2$$

ocurre el suceso  $Z = \sqrt{13}$  sólo si ocurre el suceso  $X = 1$

$$u(\sqrt{62}) = P(Z = \sqrt{62}) = P(X = 2) = 1/4$$

ocurre el suceso  $Z = \sqrt{62}$  sólo si ocurre el suceso  $X = 2$

Por tanto, al lanzar dos monedas al aire, la variable "Z" reparte la unidad de masa de probabilidad entre los puntos  $z = \sqrt{6}$ ,  $z = \sqrt{13}$  y  $z = \sqrt{62}$ , y lo hace de modo que a cada uno de los puntos  $z = \sqrt{6}$  y  $z = \sqrt{62}$  le corresponden 0'25 unidades de masa, y al punto  $z = \sqrt{13}$  le corresponden 0'5 unidades.

Se dice que una variable aleatoria es **degenerada** si concentra su unidad de masa en un único punto... esas variables tendrán protagonismo estelar a la hora de entender la **esperanza matemática**



¡Heavy! ....  
¡La esperanza dándose el pico con el vicio y la degeneración!

## Probabilidad de un suceso

Siendo "X" una variable aleatoria discreta y "f" su función de probabilidad, **para calcular la probabilidad del suceso  $X = x \in H \subset \mathfrak{R}$**  (es decir, la probabilidad de que la variable "X" se concrete en alguno de los números reales que forman el conjunto "H") **sumaremos las masas puntuales de probabilidad que hay en "H"**.

**Por ejemplo**, si "X" sólo puede tomar valores naturales, siendo  $H_1$  el conjunto que forman los naturales impares, es

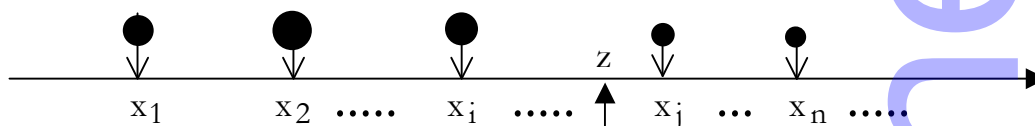
$$P(X = x \in H_1) = P(X = 1) + P(X = 3) + \dots = f(1) + f(3) + \dots$$

y siendo  $H_2$  el conjunto que forman los reales mayores que  $2.\pi$ , es:

$$P(X = x \in H_2) = P(X = 7) + P(X = 8) + \dots = f(7) + f(8) + \dots$$

## Función de distribución de una variable aleatoria discreta

Sea "X" una variable aleatoria discreta y "f" su función de probabilidad. **La función de distribución de "X" es la  $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que  $F(z) = P(X \leq z)$ ; o sea, la imagen  $F(z)$  de  $z \in \mathfrak{R}$  según "F" es la probabilidad de que la variable "X" tome un valor no superior a "z", es decir,  $F(z)$  expresa la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ .**



El número  $F(z) = P(X \leq z)$  lo obtendremos sumando todas las masas de probabilidad que no están a la derecha del punto "z":

$$F(z) = P(X \leq z) = \sum_{x_i \leq z} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq z} f(x_i)$$

## Propiedades

- $F(-\infty) = 0$ , pues toda la masa de probabilidad está a la derecha de  $-\infty$ .
- $F(+\infty) = 1$ , pues toda la masa de probabilidad está a la izquierda de  $+\infty$ .
- La función "F" es monótona no decreciente, pues si  $z_i < z_j$  el suceso  $X \leq z_i$  está contenido en el  $X \leq z_j$ ; por tanto  $F(z_i) = P(X \leq z_i) \leq P(X \leq z_j) = F(z_j)$ .
- La función "F" es continua por la derecha en todo punto, y para demostrarlo debemos demostrar que, si  $\varepsilon > 0$ , es  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(z + \varepsilon) - F(z)) = 0$ .

En efecto:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(z + \varepsilon) - F(z)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P(X \leq z + \varepsilon) - P(X \leq z)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(z < X \leq z + \varepsilon) = P(\emptyset) = 0\end{aligned}$$

Si  $\varepsilon \rightarrow 0$  el suceso  $z < X \leq z + \varepsilon$  es el suceso imposible, pues "X" no puede ser a la vez mayor que "z" y menor o igual que "z"

- La función "F" es continua por la izquierda en el punto "z" si en él no hay **masa puntual** (o sea, si  $P(X = z) = 0$ ), pero no sucede eso si en el punto "z" hay una masa puntual (o sea, si  $P(X = z) \neq 0$ ).

En efecto, si  $\varepsilon > 0$ , es:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(z - \varepsilon) - F(z)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (P(X \leq z - \varepsilon) - P(X \leq z)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(z - \varepsilon < X \leq z) = P(X = z)\end{aligned}$$

Así, el límite es 0 o no según que  $P(X = z)$  sea 0 o no; por tanto, "F" es continua por la izquierda en el punto "z" o no según que  $P(X = z)$  sea 0 o no.

### **FONEMATO 2.2.1**

Calcúlese "k" para que las siguientes funciones sean las de probabilidad de una variable aleatoria discreta "X":

$$1) f(x) = k \cdot \frac{x-1}{n}, \quad x = 2, 3, 4, \dots, n$$

$$2) f(x) = k \cdot \frac{x-1}{n}, \quad x = 2, 3, 4, \dots, 2 \cdot n$$

### **SOLUCIÓN**

1) La función dada es una función de probabilidad (o sea,  $f(x) = P(X = x)$ ) si:

a)  $f(x) \geq 0, x = 2, 3, 4, \dots, n$

b) La masa de probabilidad es 1; o sea:  $f(2) + f(3) + \dots + f(n) = 1$

Veamos:

a) Si  $f(x) = k \cdot (x-1)/n$ , como para todo  $x = 2, 3, 4, \dots, n$  es  $(x-1)/n > 0$ , será  $f(x) = k \cdot (x-1)/n \geq 0$  siempre que  $k \geq 0$ .

b) Se tiene que:

$$\sum_{x=2}^n f(x) = 1 \Rightarrow f(2) + f(3) + \dots + f(n) =$$
$$= k \cdot \frac{2-1}{n} + k \cdot \frac{3-1}{n} + k \cdot \frac{4-1}{n} + \dots + k \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{k}{n} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) =$$
$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = k \cdot \frac{n-1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{n-1}$$

$1 + 2 + \dots + (n-1)$  es la suma de los términos de una **progresión aritmética** cuya razón es 1 (cada término se obtiene sumando 1 al anterior), y todo el mundo sabe que dicha suma es:

$$\frac{(\text{primer sumando}) + (\text{último sumando})}{2} \cdot (\text{número de sumandos})$$

O sea:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

2) Al igual que en el caso anterior, la condición  $f(x) \geq 0$  se satisface siempre que  $k \geq 0$ , y al exigir que la masa de probabilidad sea 1, resulta:

$$\sum_{x=2}^{2n} f(x) = 1 \Rightarrow f(2) + f(3) + \dots + f(2 \cdot n) =$$
$$= k \cdot \frac{2-1}{n} + k \cdot \frac{3-1}{n} + k \cdot \frac{4-1}{n} + \dots + k \cdot \frac{2 \cdot n - 1}{n} = \frac{k}{n} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (2 \cdot n - 1)) =$$
$$= \frac{k}{n} \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1) = k \cdot (2 \cdot n - 1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2 \cdot n - 1}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (2 \cdot n - 1) = \frac{1 + (2 \cdot n - 1)}{2} \cdot (2 \cdot n - 1) = n \cdot (2 \cdot n - 1)$$

### **Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales**

## FONEMATO 2.2.2

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de probabilidad es

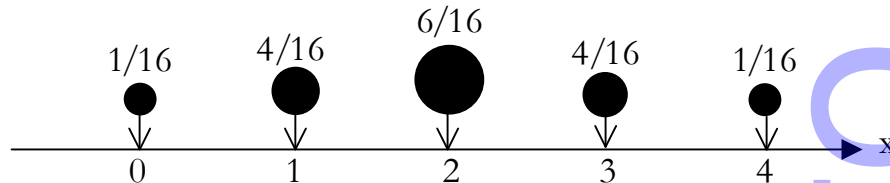
| x                 | 0    | 1    | 2 | 3    | 4    |
|-------------------|------|------|---|------|------|
| $f(x) = P(X = x)$ | 1/16 | 4/16 | k | 4/16 | 1/16 |

- 1) Calcúlense "k" y la función de distribución de "X".
- 2) Calcúlense las probabilidades de los sucesos  $X \leq 2$ ,  $X > 2$  y  $1 \leq X < 4$ .
- 3) Siendo  $Y = 2 \cdot X + 1$ , calcúlense  $P(Y < 3)$  y  $P(Y \geq 2)$ .

### SOLUCIÓN

- 1) La variable "X" es discreta, pues el número de valores que puede tomar es finito. Para calcular "k" exigimos que la masa total de probabilidad sea 1:

$$\begin{aligned}P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + k + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} &= 1 \Rightarrow k = \frac{6}{16}\end{aligned}$$



- La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  que definimos  $F(z) = P(X \leq z)$ ; o sea, la imagen de  $z \in \mathbb{R}$  según "F" es la probabilidad de que la variable aleatoria "X" tome un valor no superior a "z". Así:

\* Si  $z < 0 \Rightarrow F(z) = P(X \leq z) = 0$ , pues a la izquierda de  $x = 0$  no hay masa de probabilidad.

\* Si  $0 \leq z < 1$  es  $F(z) = P(X \leq z) = P(X = 0) = 1/16$

\* Si  $1 \leq z < 2$  es  $F(z) = P(X \leq z) = P(X = 0) + P(X = 1) = 5/16$

\* Si  $2 \leq z < 3$  es  $F(z) = P(X \leq z) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 11/16$

\* Si  $3 \leq z < 4$  es:

$$F(z) = P(X \leq z) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 15/16$$

\* Si  $z \geq 4$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$

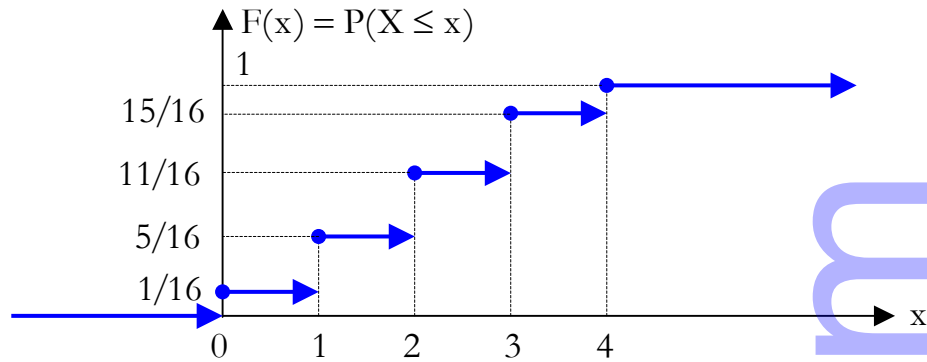
En definitiva:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ 1/16 & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 5/16 & \text{si } 1 \leq z < 2 \\ 11/16 & \text{si } 2 \leq z < 3 \\ 15/16 & \text{si } 3 \leq z < 4 \\ 1 & \text{si } z \geq 4 \end{cases}$$

La variable "X" tiene nombre propio, se llama **binomial** de parámetros 4 y 1/2, y se denota  $X \approx B(4; 1/2)$ . En general, si  $X \approx B(n; p)$  su función de probabilidad es:

$f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$ ,  $x = 0, 1, \dots, n$   
donde "n" es un número natural y  $p \in (0; 1)$ .

La gráfica de la función de distribución "F" es la siguiente:



**La función de distribución de una variable aleatoria discreta SIEMPRE es escalonada: da un "salto" en cada punto "x" en que hay masa de probabilidad, y la amplitud del salto que da F(x) en el punto "x" coincide con la masa de probabilidad que hay en él, es decir, coincide con f(x).**



2) Es:

$$P(X \leq 2.7) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(1 \leq X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{14}{16}$$

**También podemos calcular las probabilidades pedidas dando protagonismo a la función de distribución "F":**

$$P(X \leq 2.7) = F(2.7) = \frac{11}{16}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(1 \leq X < 4) = P(X < 4) - P(X \leq 1) + P(X = 1) =$$

$$= P(X \leq 3) - P(X \leq 1) + P(X = 1) =$$

$$\text{es } P(X < 4) = P(X \leq 3)$$

$$= F(3) - F(1) + P(X = 1) = \frac{15}{16} - \frac{5}{16} + \frac{4}{16} = \frac{14}{16}$$

3)

$$P(Y < 3) = P(2.X + 1 < 3) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{16}$$

$$\text{pues } Y = 2.X + 1$$

$$P(Y \geq 2) = P(2.X + 1 \geq 2) = P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - P(X = 0) = \frac{15}{16}$$

### FONEMATO 2.2.3

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de distribución es

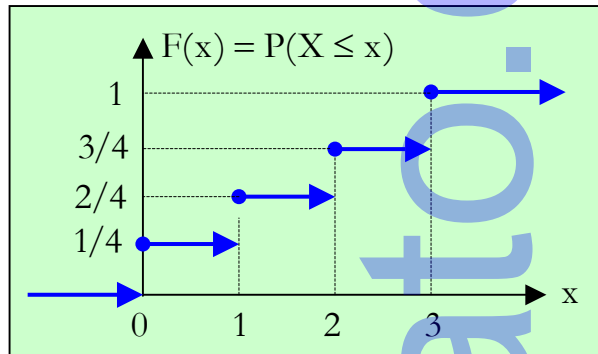
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- 1) Calcúlese la función de probabilidad de "X".
- 2) Calcúlense las probabilidades de los sucesos  $X = 1/2$  y  $1'5 < X < 3$ .
- 3) Siendo  $Y = 2/(X + 3)$ , calcúlese  $P(Y \leq 1/4)$ .

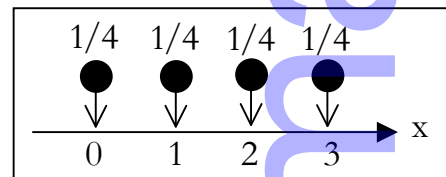
### SOLUCIÓN

- 1) **El que la función de distribución "F" de la variable "X" sea escalonada garantiza que "X" es una variable discreta;** es decir,

"X" reparte la unidad de masa de probabilidad entre un número finito o infinito numerable de puntos de la recta real. Como "F" sólo "salta" en  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  y  $x = 3$ , sólo hay masa en estos puntos, y la masa que hay en cada uno coincide con el salto de  $F(x)$  en él. Así, es:



$$\left. \begin{aligned} f(0) &= P(X=0) = (1/4) - 0 = 1/4 \\ f(1) &= P(X=1) = (2/4) - (1/4) = 1/4 \\ f(2) &= P(X=2) = (3/4) - (2/4) = 1/4 \\ f(3) &= P(X=3) = 1 - (3/4) = 1/4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



- 2) Es  $P(X = 1/2) = 0$ , pues la variable "X" no puede tomar el valor  $1/2$ .

$$P(1'5 < X < 3) = P(X = 2) = 1/4$$

la masa en el intervalo  $(1'5; 3)$  es la que hay en el punto  $x = 2$

- 3) Es:  $P(Y \leq 1/4) = P(2/(X + 3) \leq 1/4) = P((X + 3)/2 \geq 4) =$

pues  $Y = 2/(X + 3)$

$$= P(X + 3 \geq 8) = P(X \geq 5) = 0$$

**La variable "X" tiene nombre propio, se llama **uniforme discreta**, lo mismo que toda variable aleatoria que reparta la unidad de masa de probabilidad en partes iguales entre un número finito de puntos de la recta real (incluso si los puntos no son equidistantes).**

### **FONEMATO 2.2.4**

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ c & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

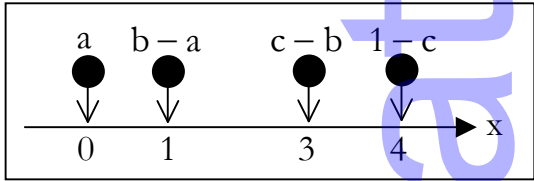
Determinése la función de probabilidad de "X" sabiendo que

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0'7 ; P(X = 3) = 0'4 ; P(X \leq 2) = 0'5$$

### **SOLUCIÓN**

**El que la función de distribución "F" de la variable "X" sea escalonada garantiza que "X" es una variable discreta;** es decir, "X" reparte la unidad de masa de probabilidad entre un número finito o infinito numerable de puntos de la recta real.

Como la función de distribución sólo "salta" en los puntos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$  y  $x = 4$ , sólo hay masa en dichos puntos, y la masa que hay en cada uno de ellos coincide con el salto que da  $F(x)$  en él. Así, es:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= P(X=0) = a - 0 = a \\ f(1) &= P(X=1) = b - a \\ f(3) &= P(X=3) = c - b \\ f(4) &= P(X=4) = 1 - c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$


|                 |   |       |       |       |
|-----------------|---|-------|-------|-------|
| x               | 0 | 1     | 3     | 4     |
| f(x) = P(X = x) | a | b - a | c - b | 1 - c |

Calcularemos las constantes "a", "b" y "c" al exigir que se satisfagan las tres condiciones que establece el enunciado:

$$\left. \begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= 0'7 \Rightarrow P(X=1) + P(X=3) = 0'7 \Rightarrow (b-a) + (c-b) = 0'7 \\ P(X=3) &= 0'4 \Rightarrow c-b = 0'4 \\ P(X \leq 2) &= 0'5 \Rightarrow P(X=0) + P(X=1) = 0'5 \Rightarrow a + (b-a) = 0'5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c-a = 0'7 \\ c-b = 0'4 \\ b = 0'5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0'2 \\ b = 0'5 \\ c = 0'9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = P(X=0) = 0'2 \\ f(1) = P(X=1) = 0'3 \\ f(2) = P(X=2) = 0'4 \\ f(3) = P(X=3) = 0'1 \end{cases}$$

En definitiva, la función de probabilidad o "cuantía"  $f(x) = P(X=x)$  de la variable aleatoria unidimensional discreta "X" es:

|                 |     |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|
| x               | 0   | 1   | 3   | 4   |
| f(x) = P(X = x) | 0'2 | 0'3 | 0'4 | 0'1 |

## **FONEMATO 2.2.5**

En un examen con tres preguntas la probabilidad de acertar la primera es 0'8, la segunda 0'3 y la tercera 0'5. Determinése la función de distribución de la variable aleatoria "X" que expresa el número de preguntas acertadas.

### **SOLUCIÓN**

Sea  $A_i$  el suceso de acertar la i-ésima pregunta ( $i = 1, 2, 3$ ). El ejercicio sólo puede resolverse introduciendo la hipótesis de que los sucesos  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son completamente independientes.

Como el examen tiene 3 preguntas, la variable aleatoria "X" que expresa el número de preguntas acertadas sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3, siendo:

- $P(X = 0) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) =$   
pues  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son completamente independientes  
 $= (1 - 0'8) \cdot (1 - 0'3) \cdot (1 - 0'5) = 0'07$
- $P(X = 1) = P((A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)) =$   
 $(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3), (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3)$  y  $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$  son incompatibles  
 $= P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) =$   
pues  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son completamente independientes  
 $= 0'8 \cdot (1 - 0'3) \cdot (1 - 0'5) + (1 - 0'8) \cdot 0'3 \cdot (1 - 0'5) + (1 - 0'8) \cdot (1 - 0'3) \cdot 0'5 = 0'38$
- $P(X = 2) = P((A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) =$   
 $(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3), (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$  y  $(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$  son incompatibles  
 $= P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$   
pues  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son completamente independientes  
 $= 0'8 \cdot 0'3 \cdot (1 - 0'5) + 0'8 \cdot (1 - 0'3) \cdot 0'5 + (1 - 0'8) \cdot 0'3 \cdot 0'5 = 0'43$
- $P(X = 3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0'8 \cdot 0'3 \cdot 0'5 = 0'12$   
pues  $A_1, A_2$  y  $A_3$  son completamente independientes

En consecuencia, la función de distribución  $F(x) = P(X \leq x)$  de la variable aleatoria unidimensional discreta "X" es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0'07 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0'45 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0'88 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

## FONEMATO 2.2.6

La función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de periódicos que vende un kiosko en un día es

$$P(X = x) = \begin{cases} k \cdot x & \text{si } x = 1, 2, \dots, 50 \\ k \cdot (100 - x) & \text{si } x = 51, 52, \dots, 100 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- 1) Calcúlese "k".
- 2) Calcúlense  $P(X > 50)$ ,  $P(X < 50)$ ,  $P(X = 50)$ ,  $P(25 \leq X \leq 75)$ ,  $P(X = \text{impar})$ .

### SOLUCIÓN

**Recuerda:** la suma de un número finito de términos consecutivos de una **progresión aritmética** es el producto del número de términos por la semisuma de los términos extremos.

- 1) Para determinar "k" exigimos que la masa total de probabilidad sea 1:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{100} P(X = x) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 \cdot k + 2 \cdot k + \dots + 50 \cdot k) + (49 \cdot k + 48 \cdot k + \dots + 2 \cdot k + 1 \cdot k + 0 \cdot k) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2500 \cdot k &= 1 \Rightarrow k = 1/2500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot k + 2 \cdot k + \dots + 50 \cdot k &= 50 \cdot (k + 50 \cdot k) / 2 \\ 49 \cdot k + 48 \cdot k + \dots + 2 \cdot k + 1 \cdot k + 0 \cdot k &= 50 \cdot (49 \cdot k + 0) / 2 \end{aligned}$$

- 2)  $P(X > 50) = P(X = 51) + P(X = 52) + \dots + P(X = 100) =$   
 $= \frac{1}{2500} \cdot (49 + 48 + \dots + 2 + 1 + 0) = \frac{1}{2500} \cdot \frac{49 + 0}{2} \cdot 50 = 0'49$
- $P(X < 50) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 49) =$   
 $= \frac{1}{2500} \cdot (1 + 2 + \dots + 49) = \frac{1}{2500} \cdot \frac{1 + 49}{2} \cdot 49 = 0'49$
- $P(X = 50) = 50/2500 = 0'02$
- $P(25 \leq X \leq 75) = P(X = 25) + P(X = 26) + \dots + P(X = 75) =$   
 $= \frac{1}{2500} \cdot ((25 + 26 + \dots + 50) + (49 + 48 + \dots + 25)) =$   
 $= \frac{1}{2500} \cdot \left( \frac{25 + 50}{2} \cdot 26 + \frac{49 + 25}{2} \cdot 25 \right) = 0'76$
- $P(X = \text{impar}) = P(X = 1) + P(X = 3) + \dots + P(X = 99) =$   
 $= \frac{1}{2500} \cdot ((1 + 3 + \dots + 49) + (49 + 47 + \dots + 1)) =$   
 $= \frac{1}{2500} \cdot \left( \frac{1 + 49}{2} \cdot 25 + \frac{49 + 1}{2} \cdot 25 \right) = 0'5$

### **FONEMATO 2.2.7 (VARIABLE "BINOMIAL")**

Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Considere que  $P(A) = 0.7$  y que el experimento se repite 5 veces.

- 1) Calcúlese la probabilidad de que el suceso "A" ocurra 3 veces.
- 2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que ocurre "A" si el experimento se repite 5 veces.
- 3) Calcúlense  $P(2 < X \leq 4)$  y  $P(X \leq 1)$ .
- 4) Calcúlense  $P(X \geq 4 / X > 2)$  y  $P(X \geq 2 / X \leq 4)$ .

### **SOLUCIÓN**

**El experimento "E" se plantea en términos dicotómicos o binarios, pues de "E" lo único que interesa es observar si ocurre o no un cierto suceso "A".** Por simplicidad, llamaremos **éxito** al suceso de que como resultado del experimento ocurra "A", llamando **fracaso** al suceso de que no ocurra "A".

- 1) Si el experimento se repite cinco veces, el suceso "S" que ocurran tres "éxitos" (éxito  $\equiv$  ocurre "A") y dos "fracasos" (fracaso  $\equiv$  no ocurre "A") puede presentarse en 10 secuencias o alineaciones distintas, que es el número de **permutaciones con repetición** que pueden formarse con de 5 elementos, de los que 3 son "éxito" y 2 son "fracaso".

$\bar{A} \bar{A} A A A \quad \bar{A} A \bar{A} A A \quad \bar{A} A A \bar{A} A \quad \bar{A} A A A \bar{A} \quad A \bar{A} \bar{A} A A$   
 $A \bar{A} A \bar{A} A \quad A \bar{A} A A \bar{A} \quad A A \bar{A} \bar{A} A \quad A A \bar{A} A \bar{A} \quad A A A \bar{A} \bar{A}$

$$PR_{h_1, h_2}^n = \frac{n!}{h_1! \cdot h_2!} = \binom{n}{h_1} = \binom{n}{h_2} \Rightarrow PR_{3,2}^5 = \binom{5}{3} = 10$$

Si  $P(A) = 0.7 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0.7$ , la probabilidad correspondiente a cada una de las 10 alineaciones es  $0.7^3 \cdot (1 - 0.7)^2 \dots$  y como dichas alineaciones son incompatibles, la probabilidad de que ocurra "S" (3 éxitos y 2 fracasos) es la suma de las probabilidades de cada una de ellas, es decir:

$$P(S) = \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot (1 - 0.7)^2$$

- 2) Siendo "X" la variable aleatoria que expresa el número de veces que ocurre "A" (éxito) cuando el experimento se repite 5 veces, es evidente que los únicos valores que puede tomar "X" son 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Ocurrirá el suceso  $X = x$  si ocurren "x" éxitos y "5 - x" fracasos; así, la función de probabilidad o cuantía de "X" es

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0.7^x \cdot (1 - 0.7)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

3) Es: 
$$P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$= \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot (1 - 0.7)^{5-3} + \binom{5}{4} \cdot 0.7^4 \cdot (1 - 0.7)^{5-4}$$

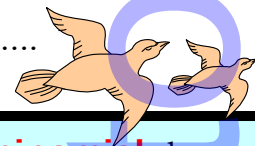
Es: 
$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$
$$= \binom{5}{0} \cdot 0.7^0 \cdot (1 - 0.7)^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0.7^1 \cdot (1 - 0.7)^{5-1}$$

4) Es: 
$$P(X \geq 4 / X > 2) = \frac{P((X \geq 4) \cap (X > 2))}{P(X > 2)} = \frac{P(X \geq 4)}{P(X > 2)} =$$
  
probabilidad condicionada      $(X \geq 4) \cap (X > 2) \Rightarrow X \geq 4$   

$$= \frac{P(X = 4) + P(X = 5)}{P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)} = \dots$$

Es: 
$$P(X \geq 2 / X \leq 4) = \frac{P((X \geq 2) \cap (X \leq 4))}{P(X \leq 4)} = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \leq 4)} =$$
  
probabilidad condicionada      $(X \geq 2) \cap (X \leq 4) \Rightarrow 2 \leq X \leq 4$   

$$= \frac{P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)}{1 - P(X = 5)} = \dots$$



La variable aleatoria "X" tiene nombre propio, se llama **binomial** de parámetros 5 (número de veces que se repite el experimento) y 0.7 (probabilidad de "éxito" cada vez que se repite el experimento); para expresarlo se escribe  $X \approx B(5; 0.7)$ .

**En general, si la probabilidad de "éxito" es "p" y el experimento se repite "n" veces, se llama "binomial" de parámetros "n" y "p" (se escribe  $X \approx B(n; p)$ ) a la variable "X" que expresa el aleatorio número éxitos que ocurren**, y los valores que puede tomar son 0, 1, 2, 3, ..., n.

Ocurrirá el suceso  $X = x$  si ocurren "x" éxitos y "n - x" fracasos; así, la función de probabilidad o cuantía de la variable "X" es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} ; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Si  $X \approx B(1; p)$  también se dice que "X" es una **variable de Bernoulli** de parámetro "p".

**Observa:** la variable aleatoria "Z" que expresa el número de fracasos tiene distribución binomial de parámetros "n" y "1 - p"; por tanto, su función de cuantía es

$$P(Z = z) = \binom{n}{z} \cdot (1 - p)^z \cdot p^{n-z} ; z = 0, 1, 2, \dots, n$$

## **FONEMATO 2.2.8 (VARIABLE "BINOMIAL")**

Un agente de seguros vende pólizas a 5 individuos, todos con 40 años de edad. Según las tablas actuariales vigentes, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años más es 0'6. Calcúlese la probabilidad de que dentro de 30 años vivan los 5, vivan al menos 3, vivan 2, viva al menos 1, vivan no más de tres, vivan no más de 4.

### **SOLUCIÓN**

Siendo "A" el suceso de que un individuo de 40 años viva 30 años más y siendo  $P(A) = 0'6$ , si seleccionamos 5 individuos y "X" es la variable aleatoria que expresa el número de ellos que viven al cabo de 30 años, entonces "X" es una variable **binomial** de parámetros 5 y 0'6 (o sea,  $X \approx B(5; 0'6)$ ); por tanto, su función de probabilidad o cuantía es

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0'6^x \cdot (1 - 0'6)^{5-x} ; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$X \approx B(n; p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} ; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Probabilidad del suceso  $X = 5$  de que vivan los cinco:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0'6^5 \cdot (1 - 0'6)^{5-5} = 0'6^5$$

**Latiguillo de remate:** la frecuencia relativa del suceso  $X = 5$  **converge en probabilidad** a  $0'6^5$ ; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a  $0'6^5$  tanto como queramos.

- Probabilidad del suceso  $X \geq 3$  de que vivan al menos tres:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0'6^3 \cdot (1 - 0'6)^{5-3} + \binom{5}{4} \cdot 0'6^4 \cdot (1 - 0'6)^{5-4} + \binom{5}{5} \cdot 0'6^5 \cdot (1 - 0'6)^{5-5} \end{aligned}$$

- Probabilidad del suceso  $X = 2$  de que vivan dos:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0'6^2 \cdot (1 - 0'6)^{5-2} = 10 \cdot 0'6^2 \cdot 0'4^3$$

- Probabilidad del suceso  $X \geq 1$  de que viva al menos uno:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0'6^0 \cdot (1 - 0'6)^{5-0} = 1 - 0'4^5$$

- Probabilidad del suceso  $X \leq 3$  de que vivan no más de tres:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 1 - P(X > 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5) = \\ &= 1 - \binom{5}{4} \cdot 0'6^4 \cdot (1 - 0'6)^{5-4} - \binom{5}{5} \cdot 0'6^5 \cdot (1 - 0'6)^{5-5} \end{aligned}$$

- Probabilidad del suceso  $X \leq 4$  de que vivan no más de cuatro:

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0'6^5 \cdot (1 - 0'6)^{5-5} = 1 - 0'6^5$$

## **Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales**

## **FONEMATO 2.2.9 (VARIABLE "BINOMIAL")**

Un juego de feria consiste en lanzar un dado equilibrado que en sus caras tiene dos ases y cuatro reyes. El dado se lanza cuatro veces y si al menos se obtienen tres reyes se gana una muñeca Chichona.

- 1) Calcúlese la probabilidad de ganar la muñeca.
- 2) Si juegan tres personas con las mismas reglas, una después de otra, calcúlese la probabilidad de que ganen dos de ellas, la probabilidad de que ganen al menos dos de ellas y la probabilidad de que gane al menos una.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Si en sus caras el dado tiene dos ases y cuatro reyes, siendo "R" el suceso de obtener un rey al lanzar el dado, es  $P(R) = 4/6 = 2/3$ ; así, si el dado se lanza 4 veces y "X" es la variable que expresa el aleatorio número de veces que se obtiene un rey, entonces "X" es una variable **binomial** de parámetros 4 y  $2/3$  (o sea,  $X \approx B(4; 2/3)$ ); por tanto, su función de probabilidad es

$$P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-x} ; x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$X \approx B(n; p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} ; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nos dicen que se gana la muñeca si ocurre el suceso  $X \geq 3$ , y es:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \\ &= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-3} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-4} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

- 2) Siendo "G" el suceso de ganar la muñeca y siendo  $P(G) = 16/27$ , si juegan tres personas una tras otra y "Z" es la variable que expresa el aleatorio número de ellas que ganan la muñeca, entonces "Z" es una variable **binomial** de parámetros 3 y  $16/27$  (o sea,  $Z \approx B(3; 16/27)$ ); por tanto, su función de probabilidad o cuantía es

$$P(Z = z) = \binom{3}{z} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^z \cdot \left(1 - \frac{16}{27}\right)^{3-z} ; z = 0, 1, 2, 3$$

Así:

- $P(Z = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{16}{27}\right)^{3-2}$
- $P(Z \geq 2) = P(Z = 2) + P(Z = 3) =$   
 $= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{16}{27}\right)^{3-2} + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{16}{27}\right)^{3-3}$
- $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{16}{27}\right)^{3-0}$

### **FONEMATO 2.2.10 (VARIABLE "BINOMIAL")**

La probabilidad de que un individuo tenga nivel de renta bajo es 0'5, la probabilidad de que tenga nivel de renta medio es 0'3 y la probabilidad de que tenga nivel de renta alto es 0'2. Si se seleccionan al azar 5 individuos, calcular:

- 1) Probabilidad de que los cinco tengan nivel de renta bajo.
- 2) Probabilidad de que al menos cuatro no tengan nivel de renta bajo.
- 3) Probabilidad de que a lo sumo tres no tengan nivel de renta alto.
- 4) Probabilidad de que tres tengan nivel de renta medio.
- 5) Probabilidad de que no más de tres tengan nivel de renta medio.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Siendo "B" el suceso de que un individuo tenga nivel de renta bajo y siendo  $P(B) = 0'5$ , si se seleccionan 5 individuos y "X" es la variable aleatoria que expresa el número de ellos que tienen nivel de renta bajo, entonces "X" es una variable **binomial** de parámetros 5 y 0'5 (o sea,  $X \approx B(5; 0'5)$ ); por tanto, su función de probabilidad es

$$P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0'5^x \cdot (1 - 0'5)^{5-x} = \binom{5}{x} \cdot 0'5^5 \quad ; \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$X \approx B(n; p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, \dots, n$$

Así:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0'5^5 = 0'5^5 = 0'03125$$

- 2) Si al menos cuatro individuos no tienen nivel de renta bajo es porque como máximo hay un individuo con nivel de renta bajo, y la probabilidad de tal suceso es:

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0'5^5 = 5 \cdot 0'5^5 = 0'1875$$

- 3) Siendo "A" el suceso de que un individuo tenga nivel de renta alto y siendo  $P(A) = 0'2$ , si se seleccionan 5 individuos y "Z" es la variable aleatoria que expresa el número de ellos que tienen nivel de renta alto, entonces "Z" es una variable **binomial** de parámetros 5 y 0'2 (o sea,  $Z \approx B(5; 0'2)$ ); por tanto, su función de probabilidad es

$$P(Z = z) = \binom{5}{z} \cdot 0'2^z \cdot (1 - 0'2)^{5-z} \quad ; \quad z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Si a lo sumo tres individuos no tienen nivel de renta alto, hay dos o más con nivel de renta alto, y la probabilidad de tal suceso es:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2) &= 1 - P(Z < 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) = \\ &= 1 - \binom{5}{0} \cdot 0'2^0 \cdot (1 - 0'2)^{5-0} - \binom{5}{1} \cdot 0'2^1 \cdot (1 - 0'2)^{5-1} = 0'26272 \end{aligned}$$

- 4) Siendo "M" el suceso de que un individuo tenga nivel de renta medio y siendo  $P(M) = 0'3$ , si se seleccionan 5 individuos y "W" es la variable aleatoria que expresa el número de ellos que tienen nivel de renta medio, entonces "W" es una variable **binomial** de parámetros 5 y 0'3 (o sea,  $W \approx B(5; 0'3)$ ); por tanto, su función de probabilidad es

$$P(W = w) = \binom{5}{w} \cdot 0'3^w \cdot (1 - 0'3)^{5-w} ; w = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Así:  $P(W = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0'3^3 \cdot (1 - 0'3)^{5-3} = 0'1323$

**Latiguillo de remate:** la frecuencia relativa del suceso  $W = 3$  **converge en probabilidad** a 0'1323; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a 0'1323 tanto como queramos.

5) Es  $P(W \leq 3) = 1 - P(W > 3) = 1 - P(W = 4) - P(W = 5) =$   
 $= 1 - \binom{5}{4} \cdot 0'3^4 \cdot (1 - 0'3)^{5-4} - \binom{5}{5} \cdot 0'3^5 \cdot (1 - 0'3)^{5-5}$



### **FONEMATO 2.2.11 (VARIABLE GEOMÉTRICA)**

Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si  $P(A) = 0.07$  y el experimento se repite hasta que ocurre el suceso "A" por primera vez:

- 1) Calcúlese la probabilidad de que haya que realizar el experimento 9 veces.
- 2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que debe repetirse el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por primera vez.
- 3) Calcúlense  $P(4 \leq X < 7)$  y  $P(X \geq 3)$ .
- 4) Calcúlense  $P(X \geq 5 / X > 3)$  y  $P(X \geq 3 / X \leq 4)$ .

### **SOLUCIÓN**

**El experimento "E" se plantea en términos dicotómicos o binarios, pues de "E" lo único que interesa es observar si ocurre o no un cierto suceso "A".** Por simplicidad, llamaremos **éxito** al suceso de que como resultado del experimento ocurra "A", llamando **fracaso** al suceso de que no ocurra "A".

- 1) **De cajón:** si el experimento se repite hasta que ocurre el suceso "A" por primera vez, ocurrirá el suceso "S" que haya que realizar el experimento 9 veces si las primeras 8 veces se obtiene un "fracaso" (fracaso  $\equiv$  no ocurre "A") y la novena vez ocurre un éxito (éxito  $\equiv$  ocurre "A").

En consecuencia, como  $P(A) = 0.07 (\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0.07)$ , la probabilidad de suceso "S" es:

$$P(S) = (1 - 0.07)^8 \cdot 0.07$$

- 2) Siendo "X" la variable aleatoria que expresa el **número de veces que se debe repetir el experimento hasta que el suceso "A" (A  $\equiv$  éxito) ocurre por primera vez**, es obvio que los únicos valores que puede tomar "X" son 1, 2, 3, .....

**De cajón:** **ocurrirá el suceso  $X = x$  si las primeras " $x - 1$ " veces que se repite el experimento ocurre un "fracaso" y después ocurre un "éxito";** así, la función de probabilidad o cuantía de la variable geométrica "X" es

$$P(X = x) = (1 - 0.07)^{x-1} \cdot 0.07 ; x = 1, 2, 3, \dots$$

- 3) Es:

$$\begin{aligned} P(4 \leq X < 7) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \\ &= (1 - 0.07)^{4-1} \cdot 0.07 + (1 - 0.07)^{5-1} \cdot 0.07 + (1 - 0.07)^{6-1} \cdot 0.07 \end{aligned}$$

Es:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= 1 - (1 - 0.07)^{1-1} \cdot 0.07 - (1 - 0.07)^{2-1} \cdot 0.07 \end{aligned}$$

4) Es:

$$P(X \geq 5 / X > 3) = \frac{P((X \geq 5) \cap (X > 3))}{P(X > 3)} = \frac{P(X \geq 5)}{P(X > 3)} =$$

probabilidad condicionada      $(X \geq 5) \cap (X > 3) \Rightarrow X \geq 5$

$$= \frac{1 - P(X \leq 4)}{1 - P(X \leq 3)} = \frac{1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4)}{1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)} = \dots$$

Es:

$$P(X \geq 3 / X \leq 4) = \frac{P((X \geq 3) \cap (X \leq 4))}{P(X \leq 4)} = \frac{P(3 \leq X \leq 4)}{P(X \leq 4)} =$$

probabilidad condicionada      $(X \geq 3) \cap (X \leq 4) \Rightarrow 3 \leq X \leq 4$

$$= \frac{P(X = 3) + P(X = 4)}{P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)} = \dots$$

La variable "X" es tan famosa que tiene nombre propio, se llama **geométrica** de parámetro 0'07 (pues 0'07 es la probabilidad de "éxito" cada vez que se repite el experimento); para expresarlo se escribe  $X \approx G(0'07)$ .

**En general, si la probabilidad de "éxito" es "p", se llama "geométrica" de parámetro "p" a la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que debe repetirse el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por primera vez** (se escribe  $X \approx G(p)$ ), siendo evidente que los únicos valores que puede tomar "X" son 1, 2, 3, .....

Ocurrirá el suceso  $X = x$  si las primeras " $x - 1$ " veces que se repite el experimento resulta un "fracaso" y después ocurre un "éxito"; así, la función de probabilidad de "X" es:

$$f(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p ; x = 1, 2, 3, \dots$$

**También se llama "geométrica" de parámetro "p" a la variable aleatoria "Z" que expresa el número de "fracasos" que acurren antes del primer "éxito".** Es obvio que  $Z = X - 1$ , por lo que "Z" puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, ....

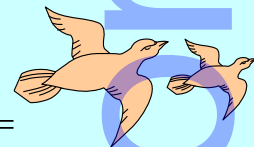
La función de probabilidad o cuantía de la variable "Z" es:

$$P(Z = z) = P(X - 1 = z) = P(X = 1 + z) =$$

pues sucede que  $Z = X - 1$

$$= (1 - p)^{(1+z)-1} \cdot p = (1 - p)^z \cdot p ; z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

pues  $P(X = \text{Juan}) = (1 - p)^{(\text{Juan})-1} \cdot p$



## **FONEMATO 2.2.12 (VARIABLE "BINOMIAL")**

Sea "E" un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si  $P(A) = 0'8$ , ¿cuál es el número mínimo de veces que debe repetirse el experimento para que sea mayor que 0'99 la probabilidad de que "A" suceda al menos una vez?

### **SOLUCIÓN**

Siendo  $P(A) = 0'8$ , si el experimento se repite "n" veces y "X" es la variable aleatoria que expresa el número de veces que como resultado del experimento ocurre el suceso "A", la distribución de probabilidad de "X" es **binomial** de parámetros "n" y 0'8 (o sea,  $X \approx B(n; 0'8)$ ); su función de probabilidad es:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot 0'8^x \cdot (1 - 0'8)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$X \approx B(n; p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Hay que determinar el menor valor de "n" tal que  $P(X \geq 1) > 0'99$ :

$$P(X \geq 1) > 0'99 \Rightarrow 1 - P(X < 1) > 0'99 \Rightarrow 1 - P(X = 0) > 0'99 \Rightarrow$$

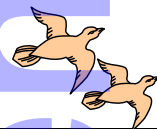
$$\Rightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0'8^0 \cdot (1 - 0'8)^{n-0} > 0'99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0'2^n > 0'99 \Rightarrow 0'2^n < 0'01 \Rightarrow n \cdot \ln 0'2 < \ln 0'01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln 0'01}{\ln 0'2} = 2'26$$

como  $\ln 0'2 < 0$ , la desigualdad cambia de sentido al dividir por  $\ln 0'2$

Por tanto, la probabilidad de que ocurra el suceso "A" al menos una vez es superior a 0'99 si el experimento se repite 3 o más veces.



### **El uso de "ventanas", asunto esencial**

Debes aprender a usar **ventanas**, porque como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

**Pedrusco "A" = Pedrusco "B"**

En esta **ventana** escribimos los razonamientos o los cálculos que permiten pasar de un lado al otro del signo de igualdad o de la flecha de implicación

**Pedrusco "A" = Pedrusco "B"  $\Rightarrow$  Pedrusco "C" = Pedrusco "D"**

### **FONEMATO 2.2.13 (VARIABLE GEOMÉTRICA)**

En un proceso de control de calidad de un cierto tipo de piezas se procede a la rotura sucesiva de piezas para comprobar su resistencia. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es 0'1, y cada pieza cuesta 50 \$. El proceso de control se detiene cuando se encuentra la primera pieza defectuosa.

- 1) Determinése la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de piezas que se rompen durante el proceso.
- 2) Determinése la función de probabilidad de la variable aleatoria "Z" que expresa el número de piezas no defectuosas que se rompen durante el proceso.
- 3) Determinése la probabilidad de que el coste del proceso sea superior a 200 \$.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Siendo "A" el suceso de que una pieza sea defectuosa, si se procede a la rotura de piezas hasta que ocurre el suceso "A" por primera vez, la variable aleatoria "X" que expresa el número de piezas que se rompen durante el proceso de control de calidad puede tomar los valores 1, 2, 3, .....

**De cajón:** ocurre el suceso  $X = x$  si las primeras " $x - 1$ " piezas rotas no son defectuosas y la siguiente sí lo es. Como  $P(A) = 0'1$  y  $P(\bar{A}) = 1 - 0'1$ , la función de probabilidad de "X" es

$$P(X = x) = (1 - 0'1)^{x-1} \cdot 0'1 ; x = 1, 2, 3, \dots$$

o sea:

$$P(X = x) = 0'9^{x-1} \cdot 0'1 ; x = 1, 2, 3, \dots$$

- 2) Como el proceso de control de calidad se detiene cuando se encuentra la primera pieza defectuosa, la variable aleatoria  $Z = X - 1$  expresa el número de piezas no defectuosas que se rompen durante el proceso, y la función de probabilidad de "Z" es:

$$P(Z = z) = P(X - 1 = z) = P(X = z + 1) =$$

↑  
pues sucede que  $Z = X - 1$

$$= 0'9^{(z+1)-1} \cdot 0'1 = 0'9^z \cdot 0'1 ; z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

↑  
pues  $P(X = x) = 0'9^{x-1} \cdot 0'1 ; x = 1, 2, 3, \dots$

- 3) Siendo "W" la variable aleatoria que expresa el coste del proceso de control de calidad, si cada pieza cuesta 50 \$, es  $W = 50 \cdot X$ ; por tanto:

$$\begin{aligned} P(W > 200) &= P(50 \cdot X > 200) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) = \\ &= 1 - 0'9^{1-1} \cdot 0'1 - 0'9^{2-1} \cdot 0'1 - 0'9^{3-1} \cdot 0'1 - 0'9^{4-1} \cdot 0'1 = \dots \\ &= 1 - 0'1 \cdot (1 + 0'9 + 0'9^2 + 0'9^3) \end{aligned}$$

**¿Cómo llevas las "ventanas"?**

### **FONEMATO 2.2.14 (VARIABLE BINOMIAL NEGATIVA)**

Sea E un experimento aleatorio y "A" un suceso asociado a él. Si  $P(A) = 0.07$  y el experimento se repite hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez, se pide:

- 1) Calcúlese la probabilidad de que haya que realizar el experimento 9 veces.
- 2) Determínese la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que se debe repetir el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez.

### **SOLUCIÓN**

**El experimento "E" se plantea en términos dicotómicos o binarios, pues de "E" lo único que interesa es observar si ocurre o no un cierto suceso "A".** Por simplicidad, llamaremos **éxito** al suceso de que como resultado del experimento ocurra "A", llamando **fracaso** al suceso de que no ocurra "A".

- 1) **De cajón:** si el experimento se repite hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez, ocurrirá el suceso "S" de que haya que realizar el experimento 9 veces si en las primeras  $9 - 1 = 8$  veces se obtienen  $9 - 3 = 6$  "fracasos" (fracaso  $\equiv$  no ocurre "A") y  $3 - 1 = 2$  "éxitos" (éxito  $\equiv$  ocurre "A"), y la novena vez se obtiene "éxito".

Como  $P(A) = P(\text{éxito}) = 0.07 \Rightarrow P(\bar{A}) = P(\text{fracaso}) = 1 - 0.07$ , la probabilidad de que en las primeras  $9 - 1 = 8$  veces que se repite el experimento se obtengan  $9 - 3 = 6$  fracasos y  $3 - 1 = 2$  éxitos es

$$\binom{8}{6} \cdot (1 - 0.07)^6 \cdot 0.07^2$$

y la probabilidad del suceso "S" se obtiene multiplicando la anterior probabilidad por 0.07, que es la probabilidad de éxito la novena vez que se repite el experimento; es decir:

$$P(S) = \binom{8}{6} \cdot (1 - 0.07)^6 \cdot 0.07^2 \cdot 0.07 = \binom{8}{6} \cdot (1 - 0.07)^6 \cdot 0.07^3$$

- 2) Siendo "X" la variable aleatoria que expresa el número de veces que se debe repetir el experimento hasta que ocurre el suceso "A" por tercera vez, es obvio que los únicos valores que puede tomar "X" son 3, 4, 5, .....

Ocorre el suceso  $X = n$  si las primeras " $n - 1$ " veces que se repite el experimento ocurren " $n - 3$ " fracasos y  $3 - 1 = 2$  éxitos, y después ocurre un éxito. Como  $P(A) = P(\text{éxito}) = 0.07 \Rightarrow P(\bar{A}) = P(\text{fracaso}) = 1 - 0.07$ , la probabilidad de que en las primeras " $n - 1$ " veces que se repite el experimento se obtengan " $n - 3$ " fracasos y  $3 - 1 = 2$  éxitos es

$$\binom{n-1}{n-3} \cdot (1 - 0.07)^{n-3} \cdot 0.07^2$$

y la probabilidad del suceso  $X = n$  se obtiene multiplicando la anterior proba-

bilidad por 0'07, que es la probabilidad de "éxito" la x-ésima vez que se repite el experimento; es decir:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{n-3} \cdot (1 - 0'07)^{n-3} \cdot 0'07^3 ; n = 3, 4, 5, \dots$$

La variable "X" tiene nombre propio, se llama **binomial negativa** de parámetros 3 (el experimento se repite hasta el tercer "éxito") y 0'07 (probabilidad de "éxito" cada vez que se repite el experimento); para expresarlo se escribe  $X \approx \text{BN}(3; 0'07)$ . **En general, si la probabilidad de "éxito" es "p", se llama "binomial negativa" de parámetros "k" y "p" a la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que debe repetirse el experimento hasta que ocurre el k-ésimo "éxito"** (se escribe  $X \approx \text{BN}(k; p)$ ), siendo obvio que los únicos valores que puede tomar "X" son k, k+1, k+2 ....

Ocurrirá el suceso  $X = n$  de que haya que realizar el experimento "n" veces si en las primeras "n - 1" veces se obtienen "n - k" fracasos (fracaso  $\equiv$  no ocurre "A") y "n - 1" éxitos (éxito  $\equiv$  ocurre "A"), y a continuación se obtiene "éxito"; así, la función de probabilidad de "X" es:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{n-k} \cdot (1 - p)^{n-k} \cdot p^k ; n = k, k+1, k+2, \dots$$

**También se llama "binomial negativa" de parámetros "k" y "p" a la variable aleatoria "Z" que expresa el número de "fracasos" antes del k-ésimo "éxito".** Es obvio que  $Z = X - k$ ; así, los valores que puede tomar "Z" son 0, 1, 2, 3, .... y la función de probabilidad de "Z" es:

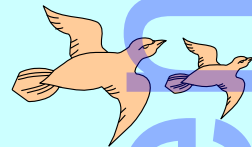
$$P(Z = z) = P(X - k = z) = P(X = z + k) =$$

↑  
pues sucede que  $Z = X - k$

$$\uparrow = \binom{z+k-1}{(z+k)-k} \cdot (1 - p)^{(z+k)-k} \cdot p^k =$$

↑  
pues  $P(X = \text{Juan}) = \binom{\text{Juan}-1}{\text{Juan}-k} \cdot (1 - p)^{\text{Juan}-k} \cdot p^k$

$$= \binom{z+k-1}{z} \cdot (1 - p)^z \cdot p^k ; z = 0, 1, 2, \dots$$



## **FONEMATO 2.2.15 (VARIABLE HIPERGEOMÉTRICA)**

Se sabe que en un grupo de 200 estudiantes de bachiller la proporción de pardillos matemáticos es del 90 % y se seleccionan 18 estudiantes.

- 1) Calcúlese la probabilidad de que entre los 18 seleccionados haya 16 pardillos matemáticos.
- 2) Determinése la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de pardillos matemáticos entre los 18 seleccionados.
- 3) Calcúlese la probabilidad de que el número de pardillos sea superior a 16.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Si en el grupo de 200 estudiantes de bachiller la proporción de pardillos matemáticos es del 90 % entonces hay 180 pardillos y 20 no pardillos. Así, siendo "A" el suceso de que entre los 18 seleccionados haya 16 pardillos, es

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "A"}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{C_{16}^{180} \cdot C_2^{20}}{C_{18}^{200}} = \frac{\binom{180}{16} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{200}{18}}$$

Entre los 18 seleccionados los 16 pardillos "proceden" de los 180 pardillos y los 2 no pardillos "proceden" de los 20 no pardillos. A partir de 180 pardillos pueden formarse  $C_{16}^{180}$  conjuntos de 16 pardillos, y a partir de 20 no pardillos pueden formarse  $C_2^{20}$  conjuntos de 2 no pardillos; así, según el Teorema General del Conteo, los casos favorables al suceso "A" son  $C_{16}^{180} \cdot C_2^{20}$ . Los casos posibles son  $C_{18}^{200}$ , que es el número de conjuntos de 18 estudiantes que pueden formarse con 200 estudiantes. **VENTANA**

- 2) Si "X" es la variable aleatoria que expresa el número de pardillos entre los 18 estudiantes seleccionados, su función de probabilidad o cuantía es:

$$P(X = x) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } X = x}{\text{número de casos posibles}} = \frac{C_x^{180} \cdot C_{18-x}^{20}}{C_{18}^{200}} = \frac{\binom{180}{x} \cdot \binom{20}{18-x}}{\binom{200}{18}}$$

Los "x" pardillos seleccionados "proceden" de los 180 pardillos y los "18 - x" no pardillos seleccionados "proceden" de los 20 no pardillos

- 3) Es:

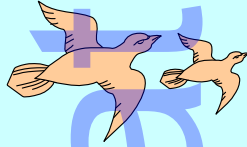
$$P(X > 16) = P(X = 17) + P(X = 18) =$$

$$= \frac{\binom{180}{17} \cdot \binom{20}{18-17}}{\binom{200}{18}} + \frac{\binom{180}{19} \cdot \binom{20}{18-18}}{\binom{200}{18}}$$

La variable "X" es tan famosa que tiene nombre propio, se llama **hipergeométrica** de parámetros 200 (tamaño de la "población" de estudiantes), 0'9 (proporción de miembros de la "población" que poseen la característica de ser pardillo matemático) y 18 (número de individuos seleccionados); para expresarlo se escribe  $X \approx \text{HP}(200; 0'9; 18)$ .

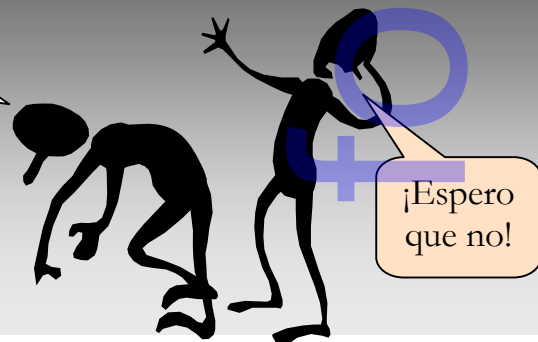
**En general, si una "población" está formada por "N" individuos** (ya sean personas, cartas de la baraja, plantaciones de tomates) **y "p" es la proporción de ellos que poseen una cierta característica "C", entonces, si se seleccionan "n" individuos, se llama "hipergeométrica" de parámetros "N", "p" y "n" a la variable aleatoria "X" que expresa el número individuos que poseen la característica "C" entre los "n" seleccionados** (se escribe  $X \approx \text{HP}(N; p; n)$ ). La función de probabilidad de "X" es:

$$P(X = x) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } X = x}{\text{número de casos posibles}} =$$

$$= \frac{C_x^{N \cdot p} \cdot C_{n-x}^{N-N \cdot p}}{C_n^N} = \frac{\binom{N \cdot p}{x} \cdot \binom{N - N \cdot p}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$


Si la población está formada por "N" individuos y "p" es la proporción de ellos que posee la característica "C" entonces hay "N.p" individuos que poseen la característica "C" y "N - N.p" individuos que no la poseen. Al seleccionar "n" individuos, los "x" individuos seleccionados que poseen la característica "C" proceden de los "N.p" individuos que poseen dicha característica, y los "n - x" individuos seleccionados que no poseen la característica "C" proceden de los "N - N.p" individuos que no la poseen.

Además de la binomial, la geométrica, la binomial negativa y la hipergeométrica, ¿habrá muchas más formas famosas de **repartir de modo discreto** una unidad de masa de probabilidad entre puntos de la recta real?



## FONEMATO 2.2.16 (VARIABLE DE POISSON)

Compruébese que, para todo valor positivo del parámetro real  $\lambda$ , la siguiente función es la de probabilidad de una variable aleatoria "X":

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

### SOLUCIÓN

La función dada es una función de probabilidad (o sea,  $f(x) = P(X = x)$ ) si:

a)  $f(x) \geq 0$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$

b) La masa de probabilidad es 1; o sea:  $f(0) + f(1) + f(2) + \dots = 1$

Veamos:

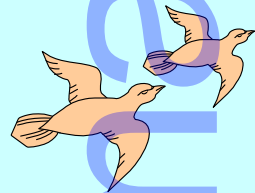
a) Para todo  $\lambda$  es  $e^{-\lambda} > 0$ , y si  $\lambda > 0$  es  $\lambda^x > 0$ ; así, como  $x!$  es positivo, siendo  $x = 0, 1, 2, \dots$  y  $f(x) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^x / x!$ , sucede que  $f(x) > 0$  si  $\lambda > 0$ .

b) Es:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots = \\ &= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!} + \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^3}{3!} + \dots = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \left( 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \end{aligned}$$

todo el mundo sabe que  $1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots = e^{\lambda}$

Una variable aleatoria discreta "X" tiene distribución de **Poisson** de parámetro  $\lambda$  si reparte la unidad de masa de probabilidad entre los puntos 0, 1, 2, 3, ..... de modo que la masa en el punto "x" es  $f(x) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^x / x!$ .



**La variable de Poisson también se llama de los sucesos raros:** una semana tiene 604800 segundos, por lo que en una semana se pueden realizar 604800 experimentos dicotómicos consistentes en observar si en cada uno de ese montón de segundos se cae un avión de Iberia o no. Seguro que estás de acuerdo en que la probabilidad de que en uno concreto de dichos 604800 segundos se caiga un avión de Iberia es muy escasa, por lo que cabe decir que el suceso de que en un segundo concreto se caiga un avión de Iberia es "raro"; no obstante, por desgracia, de vez en cuando se cae un avión de Iberia.... y si te dicen que el aleatorio número de aviones de Iberia que se caen semanalmente tiene distribución de Poisson de parámetro 0'001 y te piden la probabilidad de que en una semana se caiga más de un avión, escribirás:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

Si "X" tiene distribución de Poisson de parámetro 0'001, es:

$$f(x) = P(X = x) = e^{-0'001} \cdot 0'001^x / x!, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$= 1 - \frac{e^{-0'001} \cdot 0'001^0}{0!} - \frac{e^{-0'001} \cdot 0'001^1}{1!} = 0'0000004995$$

## **FONEMATO 2.2.17**

De una baraja española de 40 cartas se seleccionan al azar 5 cartas.

Determinése la función de probabilidad de la variable que expresa el aleatorio número deoros entre las 5 cartas, tanto si la selección se hace sin reposición como si se hace con reposición.

### **SOLUCIÓN**

#### **• Sin reposición (variable hipergeométrica)**

Siendo "X" la variable aleatoria que expresa el número deoros entre las 5 cartas seleccionadas, su función de probabilidad o cuantía es:

$$P(X = x) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } X = x}{\text{número de casos posibles}} =$$

$$= \frac{C_x^{10} \cdot C_{5-x}^{30}}{C_5^{40}} = \frac{\binom{10}{x} \cdot \binom{30}{5-x}}{\binom{40}{5}}$$

#### **VENTANA**

Entre las 5 cartas seleccionadas los "x" oros "proceden" de los 10 oros de la baraja, y las "5 - x" cartas que no son oros "proceden" de las 30 cartas que no son oros. A partir de 10 oros pueden formarse  $C_x^{10}$  conjuntos de "x" oros, y a partir de 30 no oros pueden formarse  $C_{5-x}^{30}$  conjuntos de "5 - x" no oros; así, según el Teorema General del Conteo, los casos favorables al suceso  $X = x$  son  $C_x^{10} \cdot C_{5-x}^{30}$ .

Los casos posibles son  $C_5^{40}$ , que es el número de conjuntos de 5 cartas que pueden formarse con las 40 cartas de la baraja.

Naturalmente:  $X \approx \text{HP}(40; 10/40; 5) \equiv \text{HP}(40; 0'25; 5)$

#### **• Con reposición (variable binomial)**

Si hay reposición las 5 extracciones se realizan en idénticas condiciones; así, siendo  $10/40 = 0'25$  la probabilidad de extraer un oro al seleccionar una carta de la baraja, si seleccionamos 5 cartas y "Z" es la variable aleatoria que expresa el número deoros que hay entre ellas, la distribución de probabilidad de "Z" es binomial de parámetros 5 y 0'25 (o sea,  $Z \approx B(5; 0'25)$ ). Por tanto, su función de probabilidad o cuantía es

$$P(Z = z) = \binom{5}{z} \cdot 0'25^z \cdot (1 - 0'25)^{5-z} ; z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$Z \approx B(n; p) \Rightarrow P(Z = z) = \binom{n}{z} \cdot p^z \cdot (1 - p)^{n-z} ; z = 0, 1, 2, \dots, n$$

## FONEMATO 2.2.18

- 1) Estúdiese si son independientes dos sucesos "A" y "B" tales que  
 $A \cup B = \Omega$  ;  $P(A) = 0'7$  ;  $P(B) = 0'5$
- 2) Sean  $I_A$  e  $I_B$  funciones indicadoras asociadas a esos sucesos:

$$I_A = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} ; I_B = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Determine la función de distribución de la variable  $Z = I_A + I_B$ .

### SOLUCIÓN

- 1) Los sucesos "A" y "B" no son independientes, pues  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0'7 + 0'5 - P(A \cap B) &= 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 0'2 \neq P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

- 2) Siendo  $Z = I_A + I_B$ , es obvio que:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \text{ y } x \notin B \Rightarrow \text{sucede } \bar{A} \cap \bar{B} \\ 1 & \text{si } \begin{cases} x \notin A \text{ y } x \in B \\ \text{ó} \\ x \in A \text{ y } x \notin B \end{cases} \Rightarrow \text{sucede } (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \\ 2 & \text{si } x \in A \text{ y } x \in B \Rightarrow \text{sucede } A \cap B \end{cases}$$

Por tanto:

$$P(Z=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$$

Leyes de Morgan

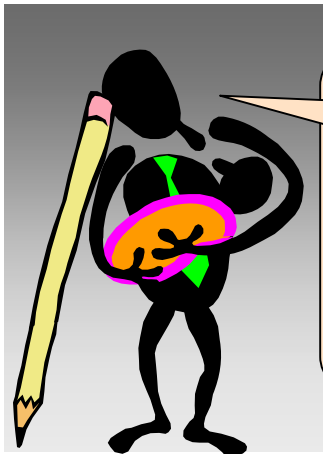
pues los sucesos  $(\bar{A} \cap B)$  y  $(A \cap \bar{B})$  son incompatibles

$$P(Z=1) = P((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0'8$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = 0'5 - 0'2 = 0'3 \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = 0'7 - 0'2 = 0'5 \end{aligned}$$

$$P(Z=2) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) = 0'2$$

La función de distribución de "Z" es  $F(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 1 \\ 0'8 & \text{si } 1 \leq z < 2 \\ 1 & \text{si } z \geq 2 \end{cases}$



Si estás en examen y te sobra un minuto, en vez de ir al bar a tomar una cerveza, invierte ese tiempo en acabar de **vestir el santo** acreditando que las propiedades de la función de distribución no tienen secretos para ti:  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ , "F" es monótona no decreciente y continua por la derecha en todo punto, siendo continua por la izquierda en "z" o no según sea  $P(X = z) = 0$  o  $P(X = z) \neq 0$ .

### **FONEMATO 2.2.19**

1) Determinénse los posibles valores de "p" y "c" para que la siguiente función pueda ser la de cuantía de una variable aleatoria "X".

$$f(x) = P(X = x) = c \cdot (1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

2) Calcúlese la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 2.

### **SOLUCIÓN**

1) Para que la función dada sea la de cuantía de la variable "X" ha verificarse:

$$a) f(x) = c \cdot (1 - p)^{x-1} \geq 0, \quad \forall x; \quad b) \sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$$

a) Es  $f(x) = c \cdot (1 - p)^{x-1} > 0$  sólo si "c" y  $c \cdot (1 - p)^{x-1}$  tienen el mismo signo.

Si  $c = 0$  ó  $(1 - p) = 0$  (o sea,  $p = 1$ ) es  $f(x) = c \cdot (1 - p)^{x-1} = 0, \quad \forall x$ , por lo que la masa total de probabilidad no es 1. Si  $(1 - p) < 0$ , el número  $(1 - p)^{x-1}$  es positivo o negativo según que el exponente " $k - 1$ " sea par o impar, y teniendo "c" siempre el mismo signo, no ocurre que  $f(x) = c \cdot (1 - p)^{x-1} > 0, \quad \forall x$ .

No pudiendo ser  $(1 - p) < 0$  ni  $1 - p = 0$ , ha de ser  $(1 - p) > 0$ .

$$b) \sum_{x=1}^{\infty} f(x) = c \cdot (1 - p)^{x-1} = c \cdot ((1 - p) + (1 - p)^2 + \dots) = \underset{\uparrow p}{\frac{c}{p}} = 1 \Rightarrow c = p$$

La suma  $(1 - p) + (1 - p)^2 + \dots$  es una **serie geométrica** de razón " $1 - p$ ". Este tipo de series converge (o sea, la suma de los infinitos sumandos tiende a un valor finito del que se dice "suma" de la serie) si el valor absoluto de la razón es menor que 1 ... y en tal caso

$$\text{la suma de la serie es } \frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}}.$$

**VENTANA**

Por tanto, nuestra serie  $(1 - p) + (1 - p)^2 + \dots$  converge si

$$\begin{aligned} |1 - p| < 1 &\Rightarrow -1 < p - 1 < 1 \Rightarrow -2 < -p < 0 \Rightarrow 0 < p < 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - p) + (1 - p)^2 + \dots &= \frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}} = \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

En definitiva, para que  $f(x) = P(X = x) = c \cdot (1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$  sea una función de cuantía o probabilidad, ha de ser:

$$1 - p > 0; \quad c > 0; \quad 0 < p < 2; \quad c = p$$

O sea,  $p \in (0; 1)$  y  $c = p$ , y en tal caso:

$$f(x) = P(X = x) = p \cdot (1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Es: } P(X = \text{par}) &= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \dots = \\ &= p \cdot (1 - p) + p \cdot (1 - p)^3 + p \cdot (1 - p)^5 + \dots = \underset{\uparrow}{(1 - p)} / (2 - p) \end{aligned}$$

La serie  $p \cdot (1 - p) + p \cdot (1 - p)^3 + p \cdot (1 - p)^5 + \dots$  es **geométrica** de razón  $(1 - p)^2$ ; como  $p \in (0; 1)$ , es  $| \text{razón} | = |(1 - p)^2| < 1$ , por lo que la serie es

$$\text{convergente y su suma es } \frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}} = \frac{p \cdot (1 - p)}{1 - (1 - p)^2} = \frac{1 - p}{2 - p}$$

### **Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales**

## **FONEMATO 2.2.20**

Sea "X" una variable aleatoria tal que  $P(X = x) = 1/2^x$ ,  $x = 1, 2, 3, \dots$

- 1) Pruébese que es una distribución de probabilidad.
- 2) Determinése la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 2.
- 3) Determinése la probabilidad de que "X" sea múltiplo de 3 y  $P(X > 4)$ .

### **SOLUCIÓN**

1) Para que la función dada sea la de cuantía de la variable "X" ha verificarse:

$$\text{a) } P(X = x) = 1/2^x \geq 0, \forall x; \text{ b) } \sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = 1$$

a) Es obvio que  $P(X = x) = 1/2^x > 0, \forall x = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{b) } \sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = (1/2) + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \dots = \frac{1/2}{1 - (1/2)} = 1$$

La suma  $(1/2) + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \dots$  es una **serie geométrica** de razón  $1/2$ . Como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie converge y su suma es

$$\frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}} = \frac{1/2}{1 - (1/2)} = 1$$

**VENTANA**

$$\begin{aligned} \text{2) Es: } P(X = \text{par}) &= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \dots = \\ &= (1/2)^2 + (1/2)^4 + (1/2)^6 + \dots = \frac{1/4}{1 - (1/4)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La suma  $(1/2)^2 + (1/2)^4 + (1/2)^6 + \dots$  es una **serie geométrica** de razón  $(1/2)^2$ . Como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie converge y su suma es

$$\frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}} = \frac{1/4}{1 - (1/4)} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{3) Es: } P(X = \text{múltiplo de 3}) &= P(X = 3) + P(X = 6) + P(X = 9) + \dots = \\ &= (1/2)^3 + (1/2)^6 + (1/2)^9 + \dots = \frac{1/8}{1 - (1/8)} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

La suma  $(1/2)^3 + (1/2)^6 + (1/2)^9 + \dots$  es una **serie geométrica** de razón  $(1/2)^3$ . Como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie converge y su suma es

$$\frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}} = \frac{1/8}{1 - (1/8)} = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(X > 4) &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \dots = \\ &= (1/2)^5 + (1/2)^6 + (1/2)^7 + \dots = \frac{1/32}{1 - (1/2)} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

## FONEMATO 2.2.21

Si una moneda se lanza " $k$ " veces ( $k \geq 2$ ) y se ha obtenido al menos una cara, calcúlese la probabilidad de haber obtenido al menos una cruz.

### SOLUCIÓN

Si la variable aleatoria " $X$ " expresa el número de caras obtenidas al lanzar una moneda " $k$ " veces, la variable aleatoria " $k - X$ " expresa el número de cruces que se obtienen.... y nos piden la probabilidad del suceso  $k - X \geq 1 / X \geq 1$ .

Es:

$$P(k - X \geq 1 / X \geq 1) = P(X \leq k - 1 / X \geq 1) = \frac{P((X \leq k - 1) \cap (X \geq 1))}{P(X \geq 1)}$$

#### VENTANA

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P((X \leq k - 1) \cap (X \geq 1)) = 1 - P(X = 0) - P(X = k)$$

|       |   |       |       |       |       |       |   |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| X     | 0 | 1     | 2     | ..... | k - 2 | k - 1 | k |
|       | ↕ | ↕     | ↕     | ..... | ↕     | ↕     | ↕ |
| k - X | k | k - 1 | k - 2 | ..... | 2     | 1     | 0 |

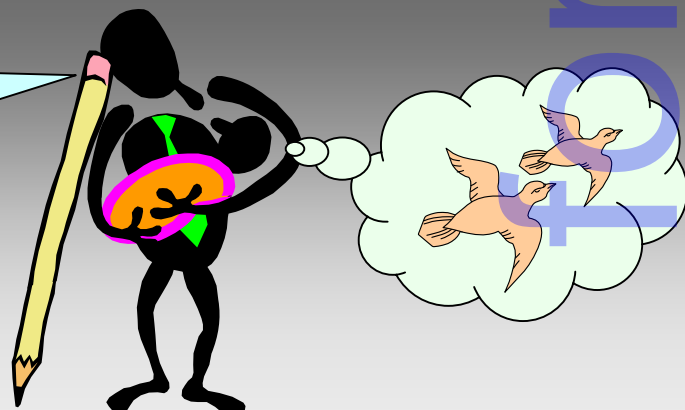
únicas situaciones en que NO ocurre el suceso  $(X \leq k - 1) \cap (X \geq 1)$

$$= \frac{1 - P(X = 0) - P(X = k)}{1 - P(X = 0)} = \frac{1 - (1/2)^k - (1/2)^k}{1 - (1/2)^k} = \frac{2^k - 2}{2^k - 1}$$

Ocurrirá el suceso  $X = 0$  sólo si se obtiene "cruz" en los " $k$ " lanzamientos de la moneda, y la probabilidad de que suceda eso es  $(1/2)^k$ . Ocurrirá el suceso  $X = k$  sólo si se obtiene "cara" en los " $k$ " lanzamientos de la moneda, y la probabilidad de que suceda eso es  $(1/2)^k$ .

**Latiguillo de remate:** la frecuencia relativa del suceso  $k - X \geq 1 / X \geq 1$  **converge en probabilidad** a  $(2^k - 2)/(2^k - 1)$ ; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a  $(2^k - 2)/(2^k - 1)$  tanto como queramos.

En examen no importa lo que sabes...importa lo que **parece** que sabes



## FONEMATO 2.2.22

La función de cuantía de la variable aleatoria que expresa el número de piezas que produce una máquina es  $P(X=0) = \frac{1}{3}$ ;  $P(X=x) = \frac{1}{3 \cdot 2^{x-1}}$ ,  $x=1,2,3,\dots$

La probabilidad de que una pieza sea defectuosa es  $1/5$ , y las piezas se fabrican de modo independiente.

- 1) Calcúlese la probabilidad de que no se produzca ninguna pieza defectuosa.
- 2) Calcúlese la probabilidad de producir dos o más piezas defectuosas sabiendo que se ha producido al menos una pieza defectuosa.
- 3) Calcúlese la probabilidad de producir dos piezas sabiendo que se ha producido al menos una pieza defectuosa.

### SOLUCIÓN

- 1) Siendo "D" la variable aleatoria que expresa el número de piezas defectuosas producidas, según el **teorema de la probabilidad total**, es:

$$P(D=0) = P(X=0) \cdot P(D=0 / X=0) + P(X=1) \cdot P(D=0 / X=1) + P(X=2) \cdot P(D=0 / X=2) + \dots =$$

**VENTANA**

$P(D=0 / X=0) = 1$   
↑  
si no se produce ninguna pieza ( $X=0$ ) es seguro que el número de defectuosas es 0

$P(D=0 / X=x) = (4/5)^x$   
↑  
si se han producido "x" piezas ( $X=x$ ), habrá 0 defectuosas si todas las piezas son "buenas", y la probabilidad de que suceda esto es  $(4/5)^x$ , pues  $4/5$  es la probabilidad de que una pieza sea "buena" y las "x" piezas se producen de modo independiente

```
graph LR
    X0[X=0] --> D0_0[D=0]
    X1[X=1] --> D0_1[D=0]
    X1 --> D1_1[D=1]
    X2[X=2] --> D0_2[D=0]
    X2 --> D1_2[D=1]
    X2 --> D2_2[D=2]
    X3[X=3] --> D0_3[D=0]
    X3 --> D1_3[D=1]
    X3 --> D2_3[D=2]
    X3 --> D3_3[D=3]
    X3 --> dots[...]
    style D0_0 stroke:#f00,stroke-width:2px
    style D0_1 stroke:#f00,stroke-width:2px
    style D0_2 stroke:#f00,stroke-width:2px
    style D0_3 stroke:#f00,stroke-width:2px
```

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{1-1}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2-1}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^{3-1}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots =$$
$$= \frac{1}{3} + \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \dots \right) =$$

serie geométrica cuya razón,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$ , es inferior a 1 en valor absoluto; por tanto, la serie converge y su suma es

$$\frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}} = \frac{(1/3) \cdot (4/5)}{1 - (1/2) \cdot (4/5)} = \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

- 2) Puesto que lo vamos a necesitar, calculemos  $P(D=1)$ ; según el **teorema de la probabilidad total**, es:

$$P(D=1) = P(X=1) \cdot P(D=1 / X=1) + P(X=2) \cdot P(D=1 / X=2) + \dots =$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} P(X=x) \cdot P(D=1 / X=x) = \frac{1}{15} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \frac{1}{15} \cdot \frac{25}{9} = \frac{5}{27}$$

$$P(X=x) = \frac{1}{3 \cdot 2^{x-1}} ; P(D=1 / X=x) = \frac{x}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$$

Si se han producido "x" piezas y denotamos  $A_i$  el suceso de que la i-ésima ( $i=1, 2, \dots, x$ ) pieza sea "buena", la probabilidad del suceso  $\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_x$  es  $(1/5) \cdot (4/5)^{x-1}$ , y como la pieza defectuosa puede aparecer en cualquiera de las "x" posiciones, la probabilidad de que haya una pieza defectuosa entre las "x" fabricadas es  $x \cdot (1/5) \cdot (4/5)^{x-1}$

Siendo  $|w| < 1$ , es sabido que:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} w^x = \frac{1}{1-w} \equiv \frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}}$$

Al derivar los dos miembros, resulta:

$$1 + 2 \cdot w + 3 \cdot w^2 + \dots = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot w^{x-1} = \frac{1}{(1-w)^2}$$

Por tanto, si  $w = \frac{2}{5}$ , es  $\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \frac{1}{(1 - (2/5))^2} = \frac{25}{9}$

- definición de probabilidad condicionada

regla de la multiplicación

$$P(D \geq 2 / D \geq 1) = \frac{P((D \geq 2) \cap (D \geq 1))}{P(D \geq 1)} = \frac{P(D \geq 2) \cdot P(D \geq 1 / D \geq 2)}{P(D \geq 1)}$$

$P(D \geq 1 / D \geq 2) = 1$

$$= \frac{P(D \geq 2)}{P(D \geq 1)} = \frac{1 - P(D=0) - P(D=1)}{1 - P(D=0)} = \frac{1 - (7/9) - (5/27)}{1 - (7/9)}$$

- 3) **Se mira el resultado de un experimento** (se ha producido al menos una pieza defectuosa) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (piden la probabilidad de que sea 2 el número de piezas fabricadas). Según el **teorema de Bayes**, es:

$$P(X=2 / D \geq 1) = \frac{P(X=2) \cdot P(D \geq 1 / X=2)}{P(D \geq 1)} = \dots = \frac{27}{100}$$

$$P(X=2) = 1/(3 \cdot 2^{2-1}) = 1/6 ; P(D \geq 1) = 1 - P(D=0) = 2/9$$

$$P(D \geq 1 / X=2) = 1 - P(D=0 / X=2) = 1 - (4/5)^2$$

### **FONEMATO 2.2.23**

Un artículo está formado por dos piezas. Cada pieza puede presentar, independientemente de las demás, defecto tipo "A" o tipo "B", o no presentar defecto, con probabilidades respectivas "p", "q" y "r". Al final de cada mes se extrae una muestra y en función de los defectos se clasifican los productos en cuatro categorías: "excelente", si el producto no tiene ningún defecto; "bueno", si tiene sólo defecto "A"; "regular", si tiene sólo defecto "B", y "malo" si tiene los dos defectos. Determine la distribución de probabilidad de la "calidad del producto".

### **SOLUCIÓN**

Siendo "X" la variable aleatoria que expresa la "calidad", convenimos en decir que "X" toma respectivamente los valores 1, 2, 3 y 4 según que el artículo sea "malo", "regular", "bueno" o "excelente".

Siendo respectivamente  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  el suceso de que la i-ésima pieza ( $i=1,2$ ) presente el defecto "A", el defecto "B" o no presente defecto, se nos dice que

$$P(A_i) = p; P(B_i) = q; P(C_i) = r$$

- Ocurre el suceso  $X = 4$  (excelente) sólo si ocurre  $C_1 \cap C_2$ ; por tanto:

$$P(X = 4) = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = r^2$$

- Ocurre  $X = 3$  (bueno) sólo si ocurre  $(A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$ .

$$P(X = 3) = P((A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)) =$$

los sucesos  $(A_1 \cap C_2)$ ,  $(C_1 \cap A_2)$  y  $(A_1 \cap A_2)$  son incompatibles

$$= P(A_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) =$$

$A_1$  y  $C_2$  son independientes, lo mismo que  $C_1$  y  $A_2$ , y lo mismo que  $A_1$  y  $A_2$

$$= P(A_1) \cdot P(C_2) + P(C_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = p \cdot r + r \cdot p + p^2$$

- Ocurre  $X = 2$  (regular) sólo si ocurre  $(B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ :

$$P(X = 2) = P((B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)) =$$

los sucesos  $(B_1 \cap C_2)$ ,  $(B_1 \cap A_2)$  y  $(B_1 \cap B_2)$  son incompatibles

$$= P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) =$$

$B_1$  y  $C_2$  son independientes, lo mismo que  $C_1$  y  $B_2$   
y lo mismo que  $B_1$  y  $B_2$

$$= P(B_1) \cdot P(C_2) + P(C_1) \cdot P(B_2) + P(B_1) \cdot P(B_2) = q \cdot r + r \cdot q + q^2$$

- Ocurre el suceso  $X = 1$  (malo) sólo si ocurre  $(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)$ ; así::

$$P(X = 1) = P((A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) =$$

los sucesos  $(A_1 \cap B_2)$  y  $(B_1 \cap A_2)$  son incompatibles

$$= P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) =$$

$A_1$  y  $B_2$  son independientes, lo mismo que  $B_1$  y  $A_2$

$$= P(A_1) \cdot P(B_2) + P(B_1) \cdot P(A_2) = p \cdot q + q \cdot p$$

## 2.3 LA PALABRA "DENSIDAD"

Al trabajar con variables aleatorias continuas la palabra **densidad** aparecerá hasta en la sopa; por eso merece la pena dedicar un ratito a tan sugerente palabra.

El Diccionario de la Real Academia Española, condicionado por el hecho de que vivamos en un universo tridimensional, dice que **"densidad" es relación entre la masa y el volumen de un cuerpo.**



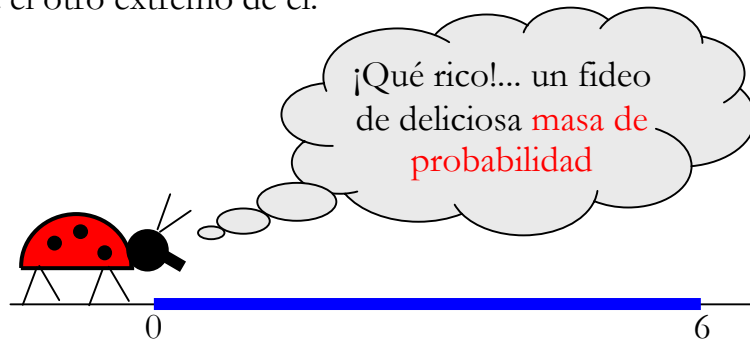
Al usar la palabra **volumen** para definir la **densidad** se da por hecho que se habla de **masa tridimensional**; es decir, masa ubicada en un universo tridimensional.

Evidentemente, si nuestro universo fuera bidimensional, el Diccionario diría que **"densidad" es relación entre la masa y el área de un cuerpo**; y si viviéramos en un universo unidimensional diría que **"densidad" es relación entre la masa y la longitud de un cuerpo.**

**Antes de meternos en harina con las variables aleatorias unidimensionales continuas, haremos un ejercicio en el que hormigas y pulgones nos ayudarán a entender el significado de la palabra **densidad** cuando la **masa se reparte** de modo continuo entre la infinidad no numerable de puntos de un intervalo de la recta real.**

# Una de hormigas y pulgones

Con una masa que ellas llaman "probabilidad", las hormigas fabrican delgadísimos fideos con los que alimentan a los pulgones. En la figura se observa un pulgón en el instante en que empieza a devorar un fideo de 6 centímetros de longitud, y tal que la densidad de la masa en el punto "x" es  $f(x) = 2 \cdot x$  gr/cm. El pulgón empieza a comer en el punto  $x = 0$  y va devorando el fideo a medida que se desplaza hacia el otro extremo de él.

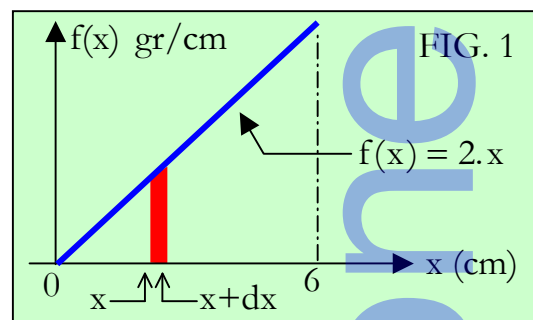


- 1) Calcúlese la masa total del fideo.
- 2) Determínese la función que expresa la masa de probabilidad que devora el pulgón entre los puntos  $x = 0$  y  $x = z$
- 3) Calcúlese la masa que hay entre  $x = 0$  y  $x = 1$ , la que hay entre  $x = 1$  y  $x = 2$ , y la que hay entre  $x = 5$  y  $x = 6$ .
- 4) Si el pulgón sólo quiere ingerir 16 gramos, ¿hasta dónde debe comer?
- 5) Determínese la función que expresa qué proporción del total de la masa del fideo devora el pulgón entre los puntos  $x = 0$  y  $x = z$ .
- 6) Determínese qué proporción del total de la masa de fideo hay entre los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$ , la que hay entre los puntos  $x = 1$  y  $x = 2$ , y la que hay entre los puntos  $x = 5$  y  $x = 6$ .
- 7) ¿Hasta dónde debe comer el pulgón para ingerir el 25 % de la masa total?

## **SOLUCIÓN (AL PASO DE LA BURRA CARMELA)**

El que la densidad de la masa de probabilidad en el punto "x" sea de  $f(x)$  gr/cm significa que la masa que hay entre el punto "x" y el " $x+dx$ " es:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{gr/cm}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{cm}} \text{ gr}$$



En términos geométricos esta masa  $f(x) \cdot dx$  que hay entre los puntos " $x$ " y " $x+dx$ " está expresada por el área del rectángulito sombreado en la figura 1.

**Mirando la gráfica de la función  $f(x)$  que nos indica la densidad de la masa de probabilidad podemos hacernos una primera idea de cómo se distribuye o reparte la masa** a lo largo de los 6 centímetros del fideo: supuesto que " $dx$ " se mantiene constante, como la densidad  $f(x) = 2 \cdot x$  es creciente en el intervalo  $[0;6]$ , la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay entre los puntos " $x$ " y

## **Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales**

" $x+dx$ " es más grande cuanto más próximo esté " $x$ " al extremo superior del intervalo  $[0;6]$ .

Este hecho contrasta notablemente con lo que sucede con los fideos que hay en la cocina de tu casa para hacer sopa, pues como en estos la densidad de masa es constante a lo largo del fideo, supuesto que " $dx$ " se mantiene constante, la masa que hay entre los puntos " $x$ " y " $x+dx$ " es la misma sea cual sea " $x$ ".

- 1) Si la masa en el intervalo  $(x; x+dx) \subset [0,6]$  es  $f(x).dx$ , la masa total " $M$ " del fideo es el resultado de la integración (adición, reunión, agregación) de las masas como la  $f(x).dx$  correspondientes a la infinidad no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx) \subset [0,6]$  que hay entre los puntos  $x = 0$  y  $x = 6$ ; es decir:

$$M = \int_{x=0}^{x=6} f(x).dx = \int_{x=0}^{x=6} 2.x..dx = (x^2)_0^6 = 36 \text{ gr}$$

**En términos geométricos**, la masa " $M$ " del fideo está representada por el área sombreada en la figura 2, es decir, el área que limitan la función de densidad  $f(x)$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[0;6]$ .

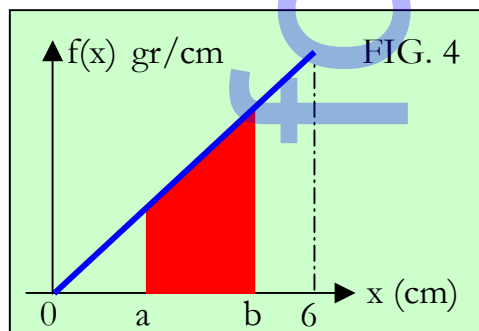
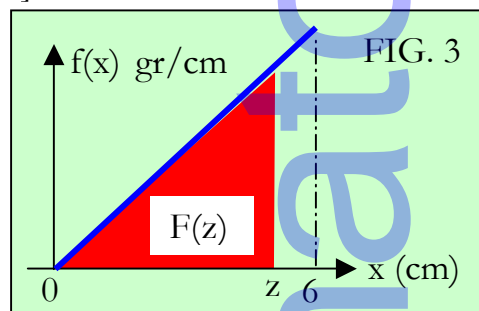
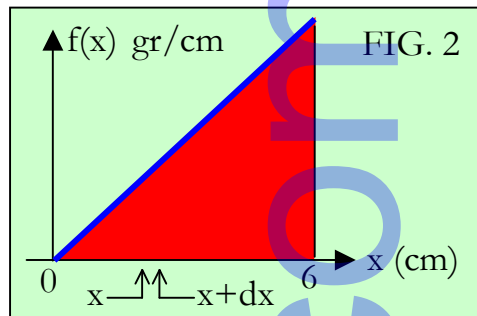
- 2) Si  $F(z)$  es la masa que el pulgón devora entre los puntos  $x = 0$  y  $x = z$ , obtendremos  $F(z)$  como resultado de la integración (adición, reunión, agregación, suma) de las masas como la  $f(x).dx$  que el pulgón devora a medida que se desplaza desde  $x = 0$  hasta  $x = z$ ; o sea:

$$F(z) = \int_{x=0}^{x=z} f(x).dx = \int_{x=0}^{x=z} 2.x.dx = (x^2)_0^z = z^2 \text{ gr}$$

**En términos geométricos, el número real  $F(z)$  expresa** el área sombreada en la figura 3, es decir, **el área que limitan la función de densidad  $f(x)$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[0;z]$ .**

Cabe decir que **hemos hecho el gilipollas**, pues si primero hubiéramos calculado  $F(z)$  podríamos después calcular la masa total del fideo diciendo que  $M = F(6) = 6^2 = 36$ , y nos habríamos ahorrado el cálculo de la integral que nos ha dado el valor de " $M$ ".

- 3) **Conocer  $F(z)$  es estupendo** a los efectos de que la hormiga controle la dieta del pulgón, pues conociendo  $F(z)$  las hormigas pueden saber cómo se distribuye o reparte la masa de probabilidad a lo largo de los 6 centímetros del fideo; o sea, pueden saber la masa de probabilidad que hay entre



cualquier par de puntos, y ello sin el petardo de tener que recurrir nuevamente al Cálculo Integral. En efecto, la masa que hay en un intervalo  $[a; b] \subset [0; 6]$  es

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x).dx = \int_{x=0}^{x=b} f(x).dx - \int_{x=0}^{x=a} f(x).dx = F(b) - F(a)$$

La masa  $F(b) - F(a)$  está expresada por el área sombreada en la figura 4.

- La masa que hay entre los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$  es  $F(1)$ :

$$F(1) = 1^2 = 1 \text{ gr}$$

- La masa que hay entre los puntos  $x = 1$  y  $x = 2$  es  $F(2) - F(1)$ :

$$F(2) - F(1) = 2^2 - 1^2 = 3 \text{ gr}$$

- La masa que hay entre los puntos  $x = 5$  y  $x = 6$  es  $F(6) - F(5)$ :

$$F(6) - F(5) = 6^2 - 5^2 = 11 \text{ gr}$$

- 4) Si el pulgón sólo quiere ingerir 16 gramos, deberá comer hasta el mágico punto  $z \in [0; 6]$  tal que  $F(z) = 16 \Rightarrow z^2 = 16 \Rightarrow z = 4$ .
- 5) Si la masa total del fideo es de 36 gramos y la masa que el pulgón devora entre los puntos  $x = 0$  y  $x = z$  es  $F(z)$  gramos, es obvio que, respecto de la masa total, la proporción  $P(z)$  de masa que el pulgón devora entre los puntos  $x = 0$  y  $x = z$  es  $P(z) = F(z)/36$ :

$$P(z) = F(z)/36 = \frac{z^2 \text{ gr}}{36 \text{ gr}} = \frac{z^2}{36}$$

## Observa atentamente

El número real  $P(z)$  es adimensional, como todo cociente de dos magnitudes que se expresan en las mismas unidades .... y conocer  $P(z)$  es estúpida bicoica, como veremos a continuación, pues **conociendo  $P(z)$  podemos conocer la distribución (el reparto) de la masa de probabilidad en términos "relativos": podemos saber la proporción de masa de probabilidad que, respecto del total de la masa, hay entre cualquier par de puntos, y ello sin el petardo de tener que recurrir nuevamente a las integrales.**

- 6) Respecto de la masa total, la proporción que hay entre  $x = 0$  y  $x = 1$  es:

$$P(1) = F(1)/36 = 1/36 = 0'0277777$$

O sea, entre los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$  (el primer centímetro del fideo, la sexta parte de la longitud total del fideo) está el 2'77777 % del total de la masa.

- Respecto de la masa total, la proporción que hay entre  $x = 1$  y  $x = 2$  es :

$$P(2) - P(1) = \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12} = 0'0833333$$

O sea, entre los puntos  $x = 1$  y  $x = 2$  (el segundo centímetro del fideo, la sexta parte de la longitud total del fideo) está el 8'33333 % del total de la masa.

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

- Respecto de la masa total, la proporción que hay entre  $x = 5$  y  $x = 6$  es :

$$P(6) - P(5) = \frac{36}{36} - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0'3055555$$

O sea, entre los puntos  $x = 5$  y  $x = 6$  (el último centímetro del fideo, la sexta parte de la longitud total del fideo) está el 30'55555 % del total de la masa.

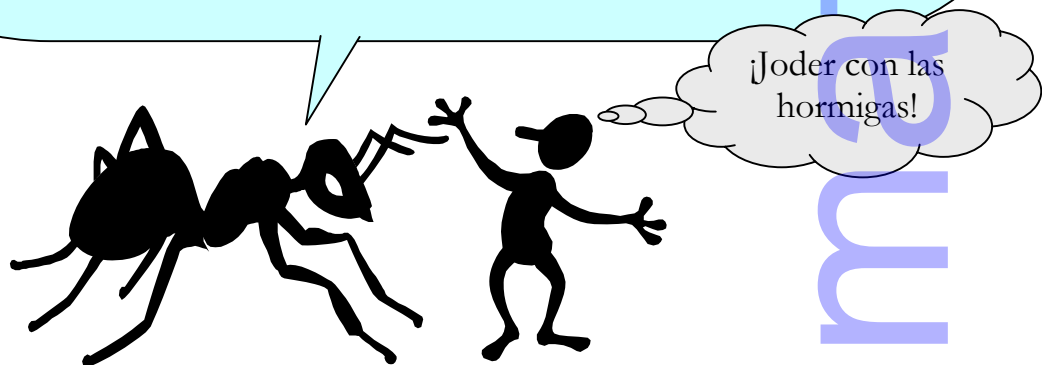
Siendo

$$P(z) = \frac{\text{Masa de probabilidad entre } x = 0 \text{ y } x = z}{\text{Masa total de probabilidad}} = \frac{F(z)}{36}$$

entonces, si la masa total de probabilidad hubiera sido 1 en vez de 36, se habría obtenido:

$$P(z) = \frac{\text{Masa de probabilidad entre } x = 0 \text{ y } x = z}{\text{Masa total de probabilidad}} = \frac{F(z)}{1} = F(z)$$

O sea, si la masa total del fideo es 1, el número real  $F(z)$  expresa a la vez dos cosas, mata dos pájaros de un tiro, pues  $F(z)$  mide la masa que hay entre los puntos  $x = 0$  y  $x = z$ , y también mide la **proporción (en tanto por uno)** de masa que respecto de la masa total del fideo hay entre dichos puntos... y como las hormigas vamos al grano, cuando nos dimos cuenta de tan interesante asunto promulgamos una **ley sagrada y universal que establece que todos los fideos de masa de probabilidad deben tener masa unidad...** ¿Lo entiendes, bípedo implume?



- Como el número real  $P(z)$  es adimensional, importa un pito en qué unidades se mida la densidad de la masa de probabilidad.**

**Por ejemplo**, en nuestro caso es  $P(1) = 1/36$ , y también sería  $P(1) = 1/36$  si la densidad de la masa de probabilidad se hubiera expresado en Tm/km; y para las hormigas inglesas, que miden la densidad de la masa de probabilidad en libras/pulgada, también sería  $P(1) = 1/36$ ... y en el siglo XV, en el reino de Murcia, donde la densidad de la masa de probabilidad se medía en arrobas/legua, ya ocurría que  $P(1) = 1/36$ .

En definitiva, el que de modo pertinaz sea  $P(1) = 1/36 = 0'0277777$  significa que entre los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$  está el 2'77777 % de la masa total.

- Si el pulgón sólo quiere ingerir el 25 % de la masa total, deberá comer hasta el punto  $z \in [0;6]$  tal que  $P(z) = 0'25$ :

$$P(z) = 0'25 \Rightarrow z^2/36 = 0'25 \Rightarrow z = 3$$

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

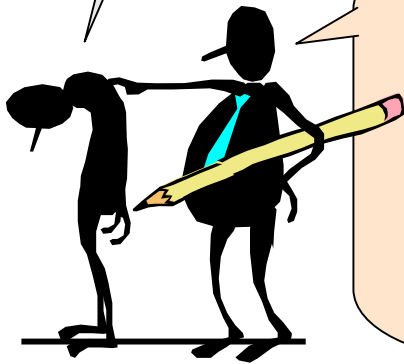
© Rafael Cabrejas Hernansanz

## 2.4 VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Ahora hablaremos del **reparto** de la unidad de masa probabilidad entre una infinidad no numerable de puntos del alambre infinito que es la recta real.

**Recuerda:** una variable aleatoria **continua** "X" es una variable aleatoria definida sobre un **espacio muestral continuo**; o sea, "X" es una ley o criterio que asocia un número real a cada uno de la infinidad no numerable de comportamientos elementales que forman el espacio muestral.

Me da mala espina que sea imposible contar el número de puntos entre los que se reparte la unidad de masa de probabilidad... temo que todo va a ser muy difícil



Tranqui... **lo que está por venir es una gran gilipollez si se tienen cuatro ideas claras sobre las integrales:** si "X" es discreta, para calcular  $P(2 \leq X \leq 7)$  basta sumar las masas "puntuales" de probabilidad que hay en el intervalo  $[2; 7]$ ; pero si "X" es continua, para calcular  $P(2 \leq X \leq 7)$  habrá que efectuar un **proceso de integración** en el intervalo  $[2; 7]$ .

### Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua

Si "X" es una variable aleatoria continua, se dice que la función  $f: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  es la de **densidad de probabilidad** de "X" si:

$$\begin{aligned} &\text{a) } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{R} ; \text{ b) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 \\ &\text{c) } P(a \leq X \leq b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x).dx \end{aligned}$$

**La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor concreto "c" es cero**, pues:

$$P(X = c) = P(c \leq X \leq c) = \int_{x=c}^{x=c} f(x).dx = 0$$

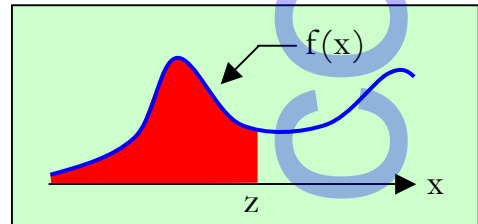
Piensa en la probabilidad de que altura de un ciudadano (expresada en metros) sea 1'78452364523764723482348954589745936969653623875875123452345; y si no acabas de verlo claro, añade tú unos pocos millones más de cifras decimales y piensa de nuevo.

# Función de distribución de una variable aleatoria continua

Siendo "X" una variable aleatoria continua y  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  su función de densidad de probabilidad, se llama **función de distribución** de "X" a la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  que a cada  $z \in \mathbb{R}$  le asocia la **expresa la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$** , es decir:  **$F(z) = P(X \leq z)$** . O sea, la imagen de  $z \in \mathbb{R}$  según "F" es la probabilidad de que como resultado del experimento aleatorio asociado a "X" ocurra que "X" tome un valor no superior a "z".

Naturalmente, como la masa de probabilidad que hay entre los puntos "x" y "x+dx" es  $f(x).dx$ , la masa  $F(z)$  que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$  es

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x).dx$$



que coincide con el área que limitan la gráfica de la función de densidad  $f(x)$  y el eje de abscisas en el intervalo  $(-\infty; z]$ .

- $F(-\infty) = 0$ , pues toda la masa de probabilidad está a la derecha de  $-\infty$ .
- $F(+\infty) = 1$ , pues toda la masa de probabilidad está a la izquierda de  $+\infty$ .
- La función "F" es monótona no decreciente: si  $z_1 < z_2$  es  $F(z_1) \leq F(z_2)$ .
- La función "F" es continua por la derecha y por la izquierda en todo punto, pues no hay "masas puntuales".
- **Conociendo "F" puede calcularse la masa de probabilidad que hay en todo intervalo de la recta real sin necesidad de calcular integrales**, pues:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) =$$

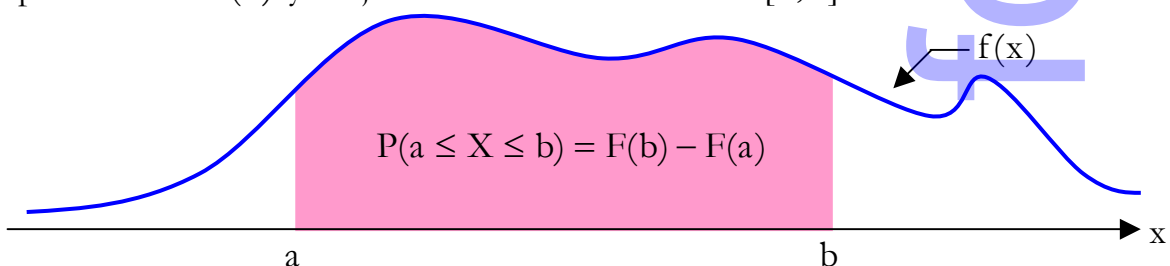
$$\text{como } P(X = a) = 0 \text{ es } P(X < a) = P(X \leq a)$$

$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

$$\text{pues } P(X \leq b) = F(b) \text{ y } P(X \leq a) = F(a)$$

- **La función de densidad de "X" es la derivada de la función de distribución "F".**

**Toma muy buena nota:** el número real  $P(a \leq X \leq b)$  coincide con el número que expresa el área limitada por la gráfica de la función de densidad de probabilidad  $f(x)$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[a; b]$ .



### **FONEMATO 2.4.1**

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la renta de los funcionarios públicos es:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2 & \text{si } x \in [2;5] \\ 0 & \text{si } x \notin [2;5] \end{cases}$$

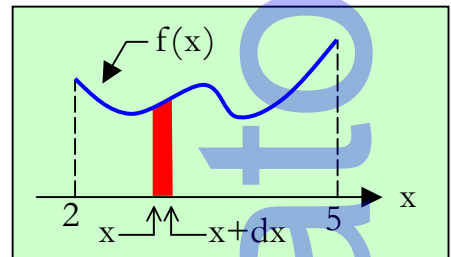
- 1) Determinése "k".
- 2) Calcúlese la función de distribución de "X".
- 3) Calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos

$$\text{a) } X \geq 3 \text{ ; b) } X \geq 4 \text{ ; c) } 3 \leq X \leq 4 \text{ ; d) } X \geq 3 / X \leq 4$$

### **SOLUCIÓN**

- 1) Como  $f(x) = 0$  si  $x \notin [2;5]$ , la unidad de masa de probabilidad que "X" lleva pegada a su chepa se **distribuye o reparte** entre la infinitud no numerable de puntos del intervalo  $[2;5]$ ; o sea, la aleatoria renta de los funcionarios sólo toma valores no inferiores a 2 y no superiores a 5.

Para calcular "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad: el que la densidad de la masa en el punto "x" sea  $f(x)$  significa que la masa que hay entre "x" y "x+dx" es  $f(x) \cdot dx$ , que en términos geométricos está expresada por el área del rectángulo rojo de la figura. Si la masa en el intervalo  $(x; x+dx) \subset [2,5]$  es  $f(x) \cdot dx$ , la masa total es el resultado de la **integración** (adición, reunión agregación, suma-ción) de las masas que hay en la infinitud no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman el intervalo  $[2,5]$ ; por tanto, ha ser:



$$\begin{aligned} \int_{x=2}^{x=5} f(x) \cdot dx &= 1 \Rightarrow \int_{x=2}^{x=5} k \cdot x^2 \cdot dx = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k}{3} \cdot (x^3)_{x=2}^{x=5} &= 1 \Rightarrow \frac{k}{3} \cdot (5^3 - 2^3) = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{117} \end{aligned}$$

**Observa atentamente:**  
**exigir que la masa de probabilidad sea la unidad es lo mismo que exigir que sea la unidad el área que limitan la gráfica de "f" y el eje de abcisas en el intervalo  $[2;5]$ .**



2) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  que a cada punto  $z \in \mathcal{R}$  le hace corresponder la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, a cada  $z \in \mathcal{R}$  la función "F" le hace asociar la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

- Como "X" no toma valores inferiores a 2, si  $z < 2$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ .
- Como "X" no toma valores superiores a 5, si  $z > 5$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$ .
- Siendo  $z \in [2; 5]$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x) \cdot dx = \int_{x=-\infty}^{x=2} 0 \cdot dx + \int_{x=2}^{x=z} \frac{3}{117} \cdot x^2 \cdot dx =$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cdot x^2 / 117 & \text{si } x \in [2; 5] \\ 0 & \text{si } x \notin [2; 5] \end{cases}$$

$$= \int_{x=2}^{x=z} \frac{3}{117} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{117} \cdot (x^3)_{x=2}^{x=z} = \frac{1}{117} \cdot (z^3 - 8)$$

3) Probabilidad de que la renta no sea inferior a 3:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) =$$

$$\text{"X" continua} \Rightarrow P(X = 3) = 0$$

$$= 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{117} \cdot (3^3 - 8) = \frac{98}{117}$$

- Probabilidad de que la renta no sea inferior a 4:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 4) =$$

$$= 1 - F(4) = 1 - \frac{1}{117} \cdot (4^3 - 8) = \frac{61}{117}$$

- Probabilidad de que la renta esté en  $[3; 4]$ :

$$P(3 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X < 3) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) =$$

$$\text{pues } P(X = 3) = 0$$

$$= F(4) - F(3) = \frac{1}{117} \cdot (4^3 - 8) - \frac{1}{117} \cdot (3^3 - 8) = \frac{47}{117}$$

- Si se sabe que la renta no es superior a 4 ( $X \leq 4$ ), la probabilidad de que sea mayor o igual que 3 es:

$$\text{según la definición de probabilidad condicionada}$$

$$P(X \geq 3 / X \leq 4) = \frac{P((X \geq 3) \cap (X \leq 4))}{P(X \leq 4)} = \frac{P(3 \leq X \leq 4)}{P(X \leq 4)} =$$

$$(X \geq 3) \cap (X \leq 4) \Rightarrow 3 \leq X \leq 4$$

$$= \frac{F(4) - F(3)}{F(4)} = 1 - \frac{F(3)}{F(4)} = 1 - \frac{(3^3 - 8)/117}{(4^3 - 8)/117} = \frac{37}{56}$$

## FONEMATO 2.4.2

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el beneficio diario de una empresa es:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (4 + x) & \text{si } x \in [-4; 0] \\ k \cdot (4 - x) & \text{si } x \in (0; 4] \\ 0 & \text{si } x \notin [-4; 4] \end{cases}$$

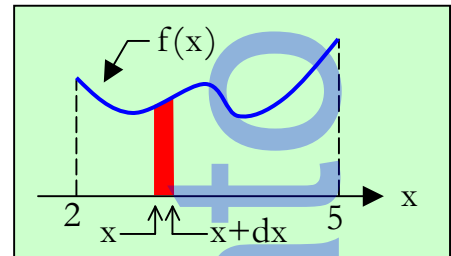
- 1) Determinése "k" y la función de distribución de "X".
- 2) Calcúlense las respectivas probabilidades de los sucesos

a)  $X \geq 3$  ; b)  $X \leq 2$  ; c)  $-1 \leq X \leq 2$  ; d)  $X \leq 3 / X \geq -1$

## SOLUCIÓN

- 1) Como  $f(x) = 0$  si  $x \notin [-4; 4]$ , la unidad de masa de probabilidad que "X" lleva pegada a su chepa se **distribuye o reparte** entre la infinidad no numerable de puntos del intervalo  $[-4; 4]$ ; o sea, el aleatorio beneficio diario de la empresa sólo toma valores en dicho intervalo.

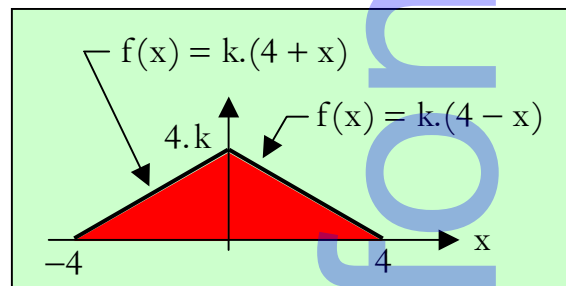
Para calcular "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad: el que la densidad de la masa en el punto "x" sea  $f(x)$  significa que la masa que hay entre "x" y "x+dx" es  $f(x) \cdot dx$ , que en términos geométricos está expresada por el área del rectángulo rojo en la figura adjunta.



Si la masa en el intervalo  $(x; x+dx) \subset [-4; 4]$  es  $f(x) \cdot dx$ , la masa total es el resultado de la **integración** (agregación) de las masas como la  $f(x) \cdot dx$  que hay en la infinidad no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman el intervalo  $[-4, 4]$ ; por tanto, ha de ser:

$$\begin{aligned} \int_{x=-4}^{x=4} f(x) \cdot dx &= 1 \Rightarrow \int_{x=-4}^{x=0} k \cdot (4 + x) \cdot dx + \int_{x=0}^{x=4} k \cdot (4 - x) \cdot dx = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow k \cdot \left( 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)_{x=-4}^{x=0} + k \cdot \left( 4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)_{x=0}^{x=4} &= 1 \Rightarrow 16 \cdot k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

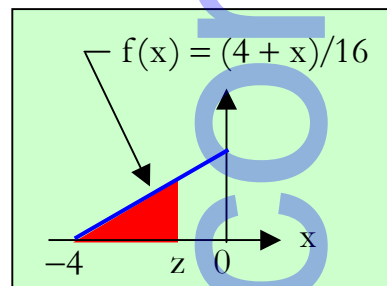
- **Observa:** al exigir que la masa de probabilidad sea 1 exigimos que sea 1 el área que limitan la gráfica de "f" y el eje de abscisas en el intervalo  $[-4; 4]$ ; y **como la densidad es "lineal", se puede determinar "k" sin recurrir al cálculo integral, pues basta exigir que la suma de las áreas de los dos triángulos sombreados en la figura adjunta sea la unidad.**



La **función de distribución** de la variable "X" es la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  que a cada punto  $z \in \mathbb{R}$  le hace corresponder la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, a cada  $z \in \mathbb{R}$  la función de distribución "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

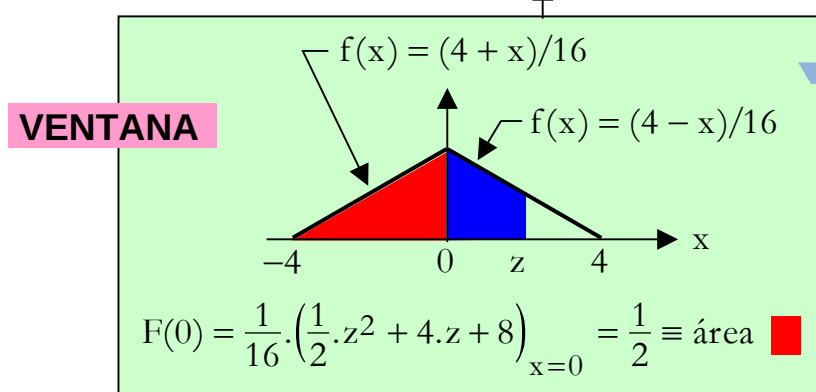
- Si  $z < -4$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ , pues "X" no toma valores inferiores a  $-4$ .
- Si  $z > 4$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$ , pues "X" no toma valores superiores a 4.
- Si  $z \in [-4; 0]$ , es:

$$\begin{aligned} F(z) &= P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x) \cdot dx = \\ &= \int_{x=-\infty}^{x=-4} 0 \cdot dx + \int_{x=-4}^{x=z} \frac{4+x}{16} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{16} \cdot \left( 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)_{x=-4}^{x=z} = \dots = \frac{8 \cdot z + z^2 + 16}{32} \end{aligned}$$



- Si  $z \in (0; 4]$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x) \cdot dx = F(0) + \int_{x=0}^{x=z} \frac{4-x}{16} \cdot dx =$$



$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \left( 4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)_{x=0}^{x=z} = \dots = \frac{8 \cdot z - z^2 + 16}{32}$$

- En definitiva, la función de distribución de la variable aleatoria "X" es

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -4 \\ (8 \cdot z + z^2 + 16)/32 & \text{si } z \in (-4; 0] \\ (8 \cdot z - z^2 + 16)/32 & \text{si } z \in (0; 4] \\ 1 & \text{si } z > 4 \end{cases}$$

**Recuerda que conocer "F" es estupendo, pues conociendo "F" puede calcularse la masa de probabilidad que hay en todo intervalo de la recta real sin necesidad de andar con la puñeta de calcular integrales:**

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) = \\ &= P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

2) Probabilidad de que un día el beneficio sea no inferior a 3:

pues por ser "X" continua es  $P(X = 3) = 0$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (31/32) = 1/32$$

$$F(3) = \left( (8 \cdot z - z^2 + 16) / 32 \right)_{z=3} = 31/32$$

• Probabilidad de que un día el beneficio sea no superior a 2:

$$P(X \leq 2) = F(2) = \left( (8 \cdot z - z^2 + 16) / 16 \right)_{z=2} = 14/16$$

• Probabilidad de que un día el beneficio esté en  $[-1; 2]$ :

$$P(-1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < -1) =$$

pues por ser "X" continua es  $P(X = -1) = 0$

$$= P(X \leq 2) - P(X \leq -1) = F(2) - F(-1) = (14/16) - (9/32) = 19/32$$

$$F(2) = \left( \frac{8 \cdot z - z^2 + 16}{32} \right)_{z=2} = \frac{14}{16} ; F(-1) = \left( \frac{8 \cdot z + z^2 + 16}{32} \right)_{z=-1} = \frac{9}{32}$$

• Si un día el beneficio es no inferior a  $-1$  (o sea,  $X \geq -1$ ), la probabilidad de que ese día el beneficio sea no superior a 3 es:

según la definición de probabilidad condicionada

$$P(X \leq 3 / X \geq -1) = \frac{P((X \leq 3) \cap (X \geq -1))}{P(X \geq -1)} = \frac{P(-1 \leq X \leq 3)}{P(X \geq -1)} =$$

$$(X \leq 3) \cap (X \geq -1) \Rightarrow -1 \leq X \leq 3$$

$$= \frac{F(3) - F(-1)}{1 - F(-1)} = \frac{(31/32) - (9/32)}{1 - (9/32)} = \frac{22}{23}$$

**Latiguillo de remate:** la frecuencia relativa del suceso  $X \leq 3 / X \geq -1$  converge en probabilidad a  $22/23$ ; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a  $22/23$  tanto como queramos.

### FONEMATO 2.4.3 (VARIABLE GAMMA)

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x \cdot e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Determinése "k".

2) Determinése la función de distribución de "X" y  $P(2 < X < 3)$ .

#### SOLUCIÓN

1) Para calcular "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \Rightarrow k = 1$$

VENTANA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} k \cdot x \cdot e^{-x} \cdot dx = k \cdot \Gamma(2) = k$$

es  $f(x) = 0$  si  $x < 0$

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

2) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  que a cada punto  $z \in \mathfrak{R}$  le asocia la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, a cada  $z \in \mathfrak{R}$  la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

- Como "X" no toma valores inferiores a 0, si  $z \leq 0$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ .
- Si  $z > 0$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^z x \cdot e^{-x} \cdot dx =$$

$$\int x \cdot e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x} \cdot (1 + x)$$

$$\text{por partes} \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \Rightarrow v = \int e^{-x} \cdot dx = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= \left( -e^{-x} \cdot (1 + x) \right)_0^z = 1 - e^{-z} \cdot (1 + z)$$

- Es:  $P(2 < X < 3) = P(2 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < 2) = F(3) - F(2)$

pues la variable aleatoria "X" es continua

De la variable aleatoria "X" se dice que tiene distribución **gamma** de parámetros 2 y 1, y se escribe  $X \approx G(2;1)$ .

**En general**, la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria  $X \approx G(n;a)$  con distribución gamma de parámetros  $n > 0$  y  $a > 0$ , es:

$$f(x) = \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-a \cdot x}, \quad x > 0$$

**Observa:** si  $n = 1$  resulta la densidad de la variable **exponencial** de parámetro "a", es decir:  $f(x) = a \cdot e^{-a \cdot x}, \quad x > 0$ .

## FONEMATO 2.4.4 (VARIABLE EXPONENCIAL)

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el tiempo (en segundos) que dura una tarta de fresa y chocolate a la puerta de un colegio es  $f(x) = 0.2 \cdot e^{-x/5}$ ,  $x > 0$ .

- 1) Determinése la función de distribución de "X" y la probabilidad de que la tarta dure más de 3 segundos.
- 2) Si la tarta ya ha durado más de 6 segundos, calcúlese la probabilidad de que dure más de 9 segundos.

### SOLUCIÓN

- 1) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  que a cada punto  $z \in \mathbb{R}$  le hace corresponder la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; es decir, a cada  $z \in \mathbb{R}$  la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

Si  $z \leq 0$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ , pues "X" sólo toma valores positivos; si  $z \geq 0$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x) \cdot dx = \int_{x=-\infty}^{x=0} 0 \cdot dx + \int_{x=0}^{x=z} 0.2 \cdot e^{-x/5} \cdot dx =$$

si  $x \leq 0$  es  $f(x) = 0$ , y si  $x > 0$  es  $f(x) = 0.2 \cdot e^{-x/5}$

$$= \left( -e^{-x/5} \right)_{x=0}^{x=z} = 1 - e^{-z/5}$$

- Probabilidad del **suceso**  $X > 3$  de que la tarta dure más de 3 segundos:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3/5}) = e^{-3/5}$$

- 2) Si se sabe que la tarta ha durado más de 6 segundos (o sea, ha ocurrido el suceso  $X > 6$ ), la probabilidad de que dure más de 9 segundos es:

según la definición de probabilidad condicionada

$$P(X > 9 / X > 6) = \frac{P((X > 9) \cap (X > 6))}{P(X > 6)} = \frac{P(X > 9)}{P(X > 6)}$$

$(X > 9) \cap (X > 6) \Rightarrow X > 9$

$$= \frac{1 - P(X \leq 9)}{1 - P(X \leq 6)} = \frac{1 - F(9)}{1 - F(6)} = \frac{1 - (1 - e^{-9/5})}{1 - (1 - e^{-6/5})} = \frac{e^{-9/5}}{e^{-6/5}} = e^{-3/5}$$

- **Sucede algo mágico:** si  $0 < c < c+k$  es  $P(X > c+k / X > c) = P(X > k)$ :

$$P(X > c+k / X > c) = \frac{P((X > c+k) \cap (X > c))}{P(X > c)} = \frac{P(X > c+k)}{P(X > c)}$$
$$= \frac{1 - P(X \leq c+k)}{1 - P(X \leq c)} = \frac{1 - F(c+k)}{1 - F(c)} = \frac{1 - (1 - e^{-(c+k)/5})}{1 - (1 - e^{-c/5})} =$$
$$= \frac{e^{-(c+k)/5}}{e^{-c/5}} = e^{-k/5} = P(X > k)$$

$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - (1 - e^{-k/5}) = e^{-k/5}$

Por eso sucede que  $P(X > 9 / X > 6) = P(X > 6 + 3 / X > 6) = P(X > 3)$ ; es decir, si la tarta ya ha durado más de 6 segundos, la probabilidad de que dure más de  $6 + 3$  segundos coincide con la probabilidad de que dure más de 3 segundos. Esta propiedad se llama **de olvido o falta de memoria**: si la variable toma un valor mayor que "c", la probabilidad de que tome un valor que  $c + k$  es la probabilidad de que tome un valor mayor que "k".

De la variable "X" se dice que tiene distribución **exponencial** de parámetro  $0'2$ , y se denota  $X \approx \text{Exp.}(0'2)$ . **En general**, la función de densidad de probabilidad de una variable con distribución exponencial de parámetro  $a > 0$  es  $f(x) = a \cdot e^{-a \cdot x}$ ,  $x > 0$



Acostúmbrate a usar **ventanas**,  
pues facilitan mucho la lectura de  
lo escrito, por lo que el profesor que  
corrija tu examen te lo agradecerá  
con su **cariño y simpatía**



**Pedrusco "K" = Pedrusco "T"**

**VENTANA**

Razonamientos o cálculos que permiten  
**pasar** de un lado a otro del "=" o de " $\Rightarrow$ "

**Pedrusco "K"  $\Rightarrow$  Pedrusco "T"**

## FONEMATO 2.4.5

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la resistencia de un tipo de vigas es

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)/8 & \text{si } x \in [1;5] \\ 0 & \text{si } x \notin [1;5] \end{cases}$$

- 1) Calcúlese la probabilidad de que la resistencia de un viga sea superior a 4.
- 2) Si se seleccionan seis vigas al azar, calcúlese la probabilidad de que la resistencia de al menos tres de ellas sea superior a 4.
- 3) Una viga es defectuosa si tiene resistencia inferior a 2. Si en un control de calidad se inspeccionan vigas al azar hasta encontrar la primera defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 3 vigas.
- 4) Si se inspeccionan vigas al azar hasta encontrar la cuarta defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 10 vigas.

## SOLUCIÓN

1) Es: 
$$P(X > 4) = \int_{x=4}^{x=5} f(x) \cdot dx = \frac{1}{8} \cdot \int_{x=4}^{x=5} (x-1) \cdot dx =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot x^2 - x \right)_{x=4}^{x=5} = \dots = \frac{7}{16}$$

- 2) Como la probabilidad de que la resistencia de una viga sea superior a 4 es  $7/16$ , si seleccionamos 6 vigas al azar y "W" es la variable aleatoria que expresa el número de ellas que tienen resistencia superior a 4, la distribución de probabilidad de "W" es **binomial** de parámetros 6 y  $7/16$  (o sea,  $W \approx B(6; 7/16)$ ), y su función de probabilidad o cuantía es:

$$P(W = w) = \binom{6}{w} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^w \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right)^{6-w} ; w = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$W \approx B(n; p) \Rightarrow P(W = w) = \binom{n}{w} \cdot p^w \cdot (1-p)^{n-w} ; w = 0, 1, 2, \dots, n$$

Probabilidad del **suceso**  $W \geq 3$  de que la resistencia de al menos tres de las seis vigas seleccionadas sea superior a 4:

$$P(W \geq 3) = 1 - P(W \leq 2) = 1 - P(W = 0) - P(W = 1) - P(W = 2) =$$
$$= 1 - \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right)^{6-0} - \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right)^{6-1} - \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right)^{6-2}$$

- 3) Probabilidad del **suceso**  $X < 2$ :

$$P(X < 2) = \int_{x=1}^{x=2} f(x) \cdot dx = \frac{1}{8} \cdot \int_{x=1}^{x=2} (x-1) \cdot dx = \dots = \frac{1}{16}$$

- Si se inspeccionan vigas al azar hasta la primera defectuosa y "Z" es la variable aleatoria que expresa el número de vigas inspeccionadas, ocurre el **suceso**  $Z = z$  si las primeras " $z-1$ " vigas inspeccionadas no son defectuosas y la siguiente lo es; como la probabilidad de que una viga sea defectuosa es  $1/16$ ,

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

entonces:  $P(Z = z) = (1 - \frac{1}{16})^{z-1} \cdot \frac{1}{16} ; z = 1, 2, 3, \dots$

O sea:  $P(Z = z) = (\frac{15}{16})^{z-1} \cdot \frac{1}{16} ; z = 1, 2, 3, \dots$

Por tanto:

$$\begin{aligned} P(Z > 3) &= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - \sum_{z=1}^3 P(Z = z) = \\ &= 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) = \\ &= 1 - (\frac{15}{16})^{1-1} \cdot \frac{1}{16} - (\frac{15}{16})^{2-1} \cdot \frac{1}{16} - (\frac{15}{16})^{3-1} \cdot \frac{1}{16} \end{aligned}$$

- 4) Si se inspeccionan vigas al azar hasta la cuarta defectuosa y "U" es la variable aleatoria que expresa el número de vigas inspeccionadas, ocurre el **suceso**  $U = u$  si entre las primeras " $u - 1$ " vigas inspeccionadas hay " $u - 4$ " vigas no defectuosas y  $4 - 1 = 3$  defectuosas, y además ocurre que la  $u$ -ésima viga es defectuosa.

Como la probabilidad de que una viga sea defectuosa es  $1/16$ , la probabilidad de que entre las primeras " $u - 1$ " vigas inspeccionadas haya " $u - 4$ " no defectuosas y  $4 - 1 = 3$  defectuosas es

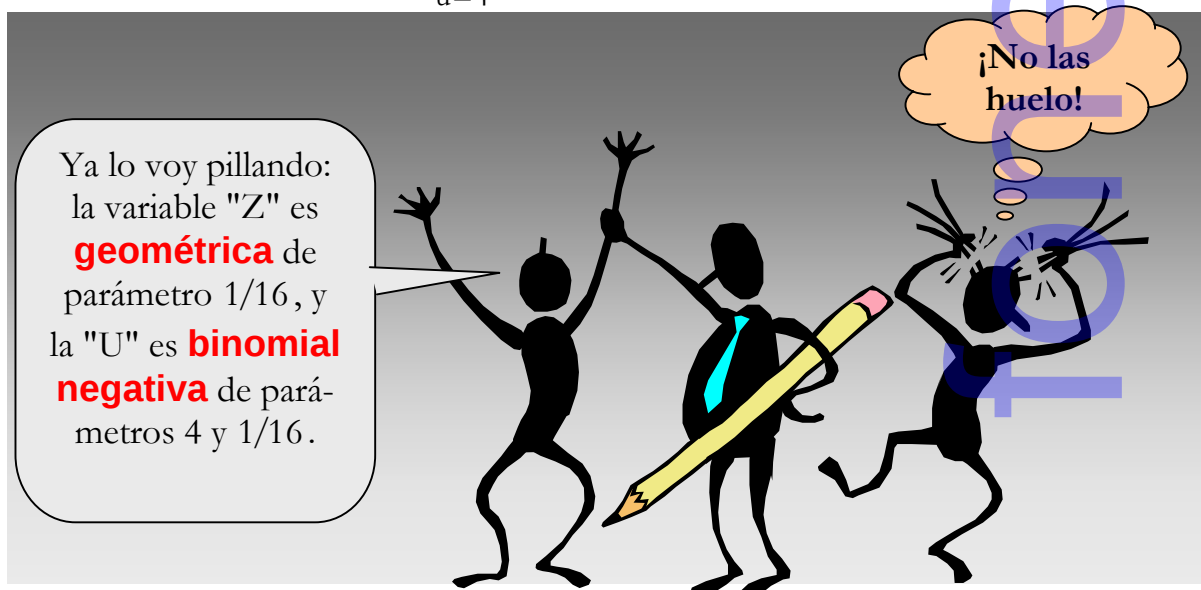
$$\binom{u-1}{u-4} \cdot (1 - \frac{1}{16})^{u-4} \cdot (\frac{1}{16})^3$$

La probabilidad del **suceso**  $U = u$  se obtiene multiplicando la anterior probabilidad por  $1/16$ , que es la probabilidad de la  $u$ -ésima viga inspeccionada sea defectuosa; es decir:

$$P(U = u) = \binom{u-1}{u-4} \cdot (1 - \frac{1}{16})^{u-4} \cdot (\frac{1}{16})^4 ; u = 4, 5, 6, \dots$$

Por tanto:  $P(U > 10) = 1 - P(U \leq 10) = 1 - \sum_{u=4}^{10} P(U = u) =$

$$= 1 - \sum_{u=4}^{10} \binom{u-1}{u-4} \cdot (1 - \frac{1}{16})^{u-4} \cdot (\frac{1}{16})^4$$



## **FONEMATO 2.4.6 (VARIABLE UNIFORME CONTINUA)**

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el peso de un tipo de piezas es

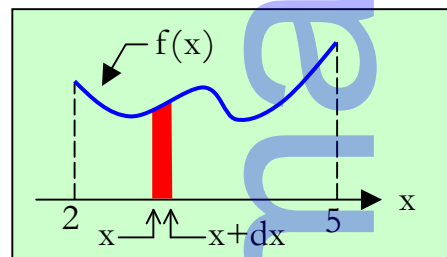
$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x \in [1;5] \\ 0 & \text{si } x \notin [1;5] \end{cases}$$

- 1) Calcúlese "k", la función de distribución y la probabilidad de que el peso de una pieza sea no superior a 4.
- 2) Si se seleccionan ocho piezas al azar, calcúlese la probabilidad de haya alguna con peso no inferior a 2'5.
- 3) Una pieza se considera defectuosa si su peso es superior a 4'5. Si se eligen piezas al azar hasta encontrar la primera defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen más de 5 piezas.
- 4) Si se inspeccionan piezas al azar hasta encontrar la sexta defectuosa, calcúlese la probabilidad de que se inspeccionen menos de 10 piezas.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Como  $f(x) = 0$  si  $x \notin [1;5]$ , la unidad de masa de probabilidad que "X" lleva pegada a su chepa se **distribuye o reparte** entre la infinidad no numerable de puntos del intervalo  $[1;5]$ ; es decir, el aleatorio peso de las piezas en cuestión sólo toma valores en dicho intervalo.

Para calcular "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad: el que la densidad de la masa en el punto "x" sea  $f(x)$  significa que la masa que hay entre "x" y "x+dx" es  $f(x).dx$ , que en términos geométricos está expresada por el área del rectángulo rojo.



Si la masa en el intervalo  $(x; x+dx) \subset [1;5]$  es  $f(x).dx$ , la masa total es el resultado de la **integración** (adición, reunión, agregación) de las masas que hay en la infinidad no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman el intervalo  $[1;5]$ ; así, ha de ser:

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^{x=5} f(x).dx &= 1 \Rightarrow \int_{x=1}^{x=5} k.dx = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k.(x)_{x=1}^{x=5} = 1 \Rightarrow 4.k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  que a cada punto  $z \in \mathfrak{R}$  real le asocia la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; es decir, a cada  $z \in \mathfrak{R}$  la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .
- Como "X" no toma valores inferiores a 1, si  $z < 1$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ .
- Como "X" no toma valores superiores a 5, si  $z > 5$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$ .

- Si  $z \in [1;5]$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x) \cdot dx = \int_{x=-\infty}^{x=1} 0 \cdot dx + \int_{x=1}^{x=z} \frac{1}{4} \cdot dx =$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x \in [1;5] \\ 0 & \text{si } x \notin [1;5] \end{cases}$$

$$= (x/4)_{x=1}^{x=z} = (z-1)/4$$

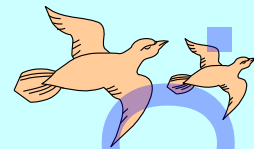
- Probabilidad del **suceso**  $X \leq 4$  de que el peso sea no superior a 4:

$$P(X \leq 4) = F(4) = ((z-1)/4)_{z=4} = 3/4$$

De la variable continua "X" se dice que tiene distribución **uniforme** en el intervalo  $[1;5]$ .

**En general**, la función de densidad de probabilidad de una variable "uniforme" en el intervalo  $[a;b]$  es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a;b] \end{cases}$$



**Observa:** la variable uniforme reparte su unidad de masa de modo que la densidad de la masa es la misma en todo punto del campo de variación de la variable, lo mismo que sucede con los fideos que hay en la cocina de tu casa.

- 2) Probabilidad del **suceso**  $X \geq 2'5$  de que una pieza pese no menos de 2'5:

$$P(X \geq 2'5) = 1 - P(X < 2'5) = 1 - P(X \leq 2'5) = 1 - F(2'5) =$$

pues la variable "X" es continua

$$= 1 - ((z-1)/4)_{z=2'5} = 5/8$$

Siendo  $5/8$  la probabilidad de que el peso de una pieza sea no inferior a 2'5, si seleccionamos 8 piezas al azar, la variable aleatoria "W" que expresa el número de ellas con peso no inferior a 2'5 tiene distribución **binomial** de parámetros 8 y  $5/8$  (o sea,  $W \approx B(8;5/8)$ ), y su función de cuantía es:

$$P(W = w) = \binom{8}{w} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^w \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{8-w} ; w = 0, 1, 2, \dots, 8$$

$$W \approx B(n;p) \Rightarrow P(W = w) = \binom{n}{w} \cdot p^w \cdot (1-p)^{n-w} ; w = 0, 1, 2, \dots, n$$

Probabilidad del **suceso**  $W \geq 1$  de que entre las ocho piezas seleccionadas haya alguna con peso no inferior a 2'5:

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W = 0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right)^{8-0} = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^8$$

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

3) Probabilidad del **suceso**  $X > 4'5$  de que una pieza sea defectuosa:

$$P(X > 4'5) = 1 - P(X \leq 4'5) = 1 - F(4'5) = 1 - ((z - 1)/4)_{z=4'5} = 1/8$$

- Si se inspeccionan piezas al azar hasta la primera defectuosa y "Z" expresa el aleatorio número de piezas inspeccionadas, ocurre el **suceso**  $Z = z$  si las primeras " $z - 1$ " piezas inspeccionadas no son defectuosas y la siguiente lo es; así, siendo  $1/8$  la probabilidad de que una pieza sea defectuosa, resulta:

$$P(Z = z) = (1 - \frac{1}{8})^{z-1} \cdot \frac{1}{8} ; z = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto:

$$P(Z > 5) = 1 - P(Z \leq 5) = 1 - \sum_{z=1}^5 P(Z = z) = \dots$$

- 4) Si se inspeccionan piezas al azar hasta la sexta defectuosa y "U" expresa el aleatorio número de piezas inspeccionadas, ocurre el **suceso**  $U = u$  si entre las primeras " $u - 1$ " piezas inspeccionadas hay " $u - 6$ " piezas no defectuosas y  $6 - 1 = 5$  piezas defectuosas, y además la  $u$ -ésima pieza es defectuosa. Como la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es  $1/8$ , la probabilidad de que entre las primeras " $u - 1$ " piezas inspeccionadas haya " $u - 6$ " piezas no defectuosas y  $6 - 1 = 5$  defectuosas es

$$\binom{u-1}{u-6} \cdot (1 - \frac{1}{8})^{u-6} \cdot (\frac{1}{8})^5$$

La probabilidad del **suceso**  $U = u$  se obtiene multiplicando la anterior probabilidad por  $1/8$ , que es la probabilidad de la  $u$ -ésima pieza inspeccionada sea defectuosa; es decir:

$$P(U = u) = \binom{u-1}{u-6} \cdot (1 - \frac{1}{8})^{u-6} \cdot (\frac{1}{8})^6 ; u = 6, 7, 8, \dots$$

Probabilidad del **suceso**  $U < 10$  de que se inspeccionen menos de 10 piezas:

$$P(U < 10) = P(U \leq 9) = \sum_{u=6}^9 P(U = u) = \dots$$



## FONEMATO 2.4.7 (VARIABLE BETA)

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x^2 \cdot (1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- 1) Determinése "k".
- 2) Determinése la función de distribución de "X" y  $P(X > 0.7)$ .

### SOLUCIÓN

- 1) Para calcular "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{12} = 1 \Rightarrow k = 12$$

**VENTANA**

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin (0;1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_0^1 k \cdot x^2 \cdot (1-x) \cdot dx = k \cdot \beta(3;2) = k \cdot \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(5)} = k \cdot \frac{2! \cdot 1!}{4!} = \frac{k}{12}$$

$$\text{Si } p > 0 \text{ y } q > 0, \text{ es } \beta(p;q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

- 2) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  que a cada punto  $z \in \mathfrak{R}$  le asocia la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, a cada "z" la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

- Como la variable aleatoria "X" sólo toma valores en el intervalo  $(0;1)$ , si  $z \leq 0$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ , y si  $z \geq 1$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$ .
- Si  $z \in (0;1)$ , es:

$$\begin{aligned} F(z) &= P(X \leq z) = F(0) + \int_0^z 12 \cdot x^2 \cdot (1-x) \cdot dx = \int_0^z 12 \cdot x^2 \cdot (1-x) \cdot dx = \\ &= 12 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 \right) \Big|_0^z = 12 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot z^3 - \frac{1}{4} \cdot z^4 \right) \end{aligned}$$

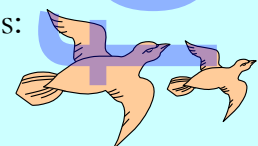
- Es:

$$P(X > 0.7) = 1 - P(X \leq 0.7) = 1 - F(0.7) = 1 - 12 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 0.7^3 - \frac{1}{4} \cdot 0.7^4 \right)$$

De la variable aleatoria "X" se dice que tiene distribución **beta** de parámetros 3 y 2.

**En general**, la función de densidad de probabilidad de una variable con distribución beta de parámetros "p" ( $p > 0$ ) y "q" ( $q > 0$ ), es:

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p;q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1$$



**Observa:** si  $p = q = 1$  resulta la densidad de la variable **uniforme** en el intervalo  $(0;1)$ ; es decir:  $f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$

## FONEMATO 2.4.8 (VARIABLE DE CAUCHY)

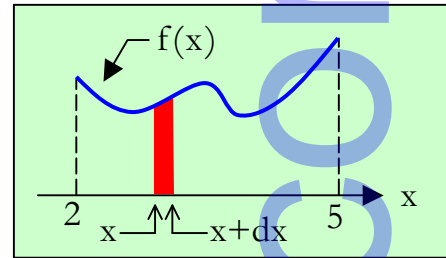
La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$f(x) = \frac{k}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- 1) Determinése "k".
- 2) Determinése la función de distribución de "X" y  $P(1/3 < X^2 < 1)$ .

### SOLUCIÓN

- 1) Para calcular "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad: el que la densidad de la masa en el punto "x" sea  $f(x)$  significa que la masa que hay entre los puntos "x" y "x+dx" es  $f(x).dx$ , que en términos geométricos está expresada por el área del rectángulo rojo de la figura.



Si la masa en el intervalo  $(x; x+dx)$  es  $f(x).dx$ , la masa total es el resultado de la **integración** de las masas como la  $f(x).dx$  que hay en la **infinitud** no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman la recta real; por tanto, ha de ser:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 \Rightarrow k.\pi = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\pi}$$

**VENTANA**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2}.dx = 2.k \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &\text{pues } f(-x) = \frac{k}{1+(-x)^2} = \frac{k}{1+x^2} = f(x) \\ &= 2.k \cdot \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = 2.k \cdot \lim_{M \rightarrow +\infty} (\arctan x)_0^M = \\ &= 2.k \cdot \lim_{M \rightarrow +\infty} (\arctan M - \arctan 0) = 2.k \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = k.\pi \end{aligned}$$

- 2) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  que a cada punto  $z \in \mathbb{R}$  le asocia la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; es decir, a cada  $z \in \mathbb{R}$  la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

$$\begin{aligned} F(z) &= P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} f(x).dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^z \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^z \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow -\infty} (\arctan x)_N^z = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{N \rightarrow -\infty} (\arctan z - \arctan N) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\arctan z - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arctan z\right) \end{aligned}$$

- Ocurrirá que  $1/3 < X^2 < 1$  si  $-1 < X < -\sqrt{1/3}$  o si  $\sqrt{1/3} < X < 1$ ; por tanto, siendo incompatibles los sucesos  $-1 < X < -\sqrt{1/3}$  y  $\sqrt{1/3} < X < 1$ , es:

$$\begin{aligned}
 P(1/3 < X^2 < 1) &= P(-1 < X < -\sqrt{1/3}) + P(\sqrt{1/3} < X < 1) = \\
 &\quad \text{pues la variable "X" es continua} \uparrow \\
 &= P(-1 < X \leq -\sqrt{1/3}) + P(\sqrt{1/3} < X \leq 1) = \\
 &= (P(X \leq -\sqrt{1/3}) - P(X \leq -1)) + (P(X \leq 1) - P(X \leq \sqrt{1/3})) = \\
 &= F(-\sqrt{1/3}) - F(-1) + F(1) - F(\sqrt{1/3}) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \arctan(-\sqrt{1/3}) \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \arctan(-1) \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \arctan(1) \right) - \frac{1}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \arctan(\sqrt{1/3}) \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \boxed{\frac{1}{6}}
 \end{aligned}$$

**Latiguillo de remate:** la frecuencia relativa del suceso  $1/3 < X^2 < 1$  **converge en probabilidad** a  $1/6$ ; es decir, sin más que repetir el experimento bastantes veces, la frecuencia relativa de dicho suceso se aproxima a  $1/6$  tanto como queramos.



## **FONEMATO 2.4.9**

Sea  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2 \cdot x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- 1) Estúdiese si "F" es una función de distribución y analícese a qué tipo de variable aleatoria "X" corresponde. Determinése la densidad correspondiente a "F".
- 2) Calcúlense  $P(X > 2)$  y  $P(-3 < X < 4)$ .

### **SOLUCIÓN**

- 1) La función dada "F" es la de distribución de una variable aleatoria "X" si:

- a)  $F(-\infty) = 0$
- b)  $F(+\infty) = 1$
- c) "F" es monótona no decreciente
- d) "F" es continua por la derecha en todo punto

Veamos:

a) Se satisface, pues siendo  $-\infty < 0$ , es  $F(-\infty) = 0$ .

b) Se satisface, pues siendo  $+\infty > 0$ , es  $F(+\infty) = 1 - e^{-2 \cdot (+\infty)} = 1 - 0 = 1$ .

c) Si  $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow$  "F" es monótona no decreciente si  $x < 0$ .

Si  $x > 0 \Rightarrow F'(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x} > 0 \Rightarrow$  "F" es creciente si  $x > 0 \Rightarrow$  es monótona no decreciente si  $x > 0$ . Como  $F(0^-) = F(0) = 0$  y  $F(0^+) > 0$ , la función "F" es monótona no decreciente en  $x = 0$ .

d) Si  $x < 0$  es  $F(x) = 0 \equiv$  constante; por tanto, "F" es continua en "x". Si  $x > 0$  es  $F(x) = 1 - e^{-2 \cdot x}$ , por lo que "F" es continua en "x". La función "F" es continua por la derecha en  $x = 0$ , pues  $F(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ .

- **Como "F" no es escalonada, apostamos tranquilamente la vida a que "X" no es discreta... y también apostamos la vida a que "X" es continua, pues la función de distribución "F" es continua en todo punto**, ya que es continua por la izquierda en  $x = 0$ :

$$F(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$$

- **No lo olvides: si una función de distribución "F" da un "salto" en el punto "c", en dicho punto hay una "masa puntual" que coincide con el "salto" que "F" da en él.**
- La función de densidad de probabilidad de "X" es la derivada de la función de distribución "F"; por tanto:  $f(x) = dF(x)/dx = 2 \cdot e^{-2 \cdot x}$ ,  $x > 0$

2) Es:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4} \\ P(-3 < X < 4) &= P(-3 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq -3) = \\ &= F(4) - F(-3) = (1 - e^{-8}) - 0 \end{aligned}$$

## **FONEMATO 2.4.10**

Sea la función de distribución  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (4 + x)/8 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Estúdiese a qué tipo de variable corresponde.

### **SOLUCIÓN**

- Como  $F(x) = 0$  si  $x < 0$ , no hay masa de probabilidad a la izquierda de  $x = 0$ .
- Como  $F(x) = 1$  si  $x > 3$ , no hay masa de probabilidad a la derecha de  $x = 3$ .
- En el punto  $x = 0$  la función de distribución "F" da un **salto** (o sea, "F" no es continua por la izquierda en dicho punto) de amplitud 0'5, lo que indica que en  $x = 0$  hay una **masa puntual** 0'5:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 + x}{8} = 0'5$$

- En el punto  $x = 3$  la función de distribución "F" da un **salto** (o sea, "F" no es continua por la izquierda en dicho punto) de amplitud 1/8, lo que indica que en  $x = 3$  hay una **masa puntual** 1/8:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4 + x}{8} = \frac{7}{8} ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

- La función de distribución "F" es continua en todo punto del intervalo  $(0;3)$ , por lo que en ese intervalo la masa se distribuye de modo continuo.
- La densidad de la masa en el punto  $x \in (0;3)$  es  $f(x) = dF(x)/dx = 1/8$ .



## **FONEMATO 2.4.11**

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), \quad -a < x < a, \quad a > 0$$

- 1) Determinése su función de distribución.
- 2) Calcúlense  $P(X > 0)$  y  $P(X < a/2)$ .

### **SOLUCIÓN**

- 1) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$  que a cada punto  $z \in \mathfrak{R}$  le asocia la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, a cada "z" la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ :

$$F(z) = P(X \leq z)$$

- Como la variable aleatoria "X" sólo toma valores en el intervalo  $(-a; a)$ , si  $z \leq -a$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ , y si  $z \geq a$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$ .
- Si  $z \in (-a; 0]$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = F(-a) + \int_{-a}^z f(x) \cdot dx = \int_{-a}^z f(x) \cdot dx =$$

$$\text{siendo } -a < x < z \leq 0 \text{ es } |x| = -x; \text{ por tanto: } f(x) = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

$$= \int_{-a}^z \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \left(x + \frac{x^2}{2 \cdot a}\right)_{-a}^z = \frac{1}{a} \cdot \left(z + \frac{z^2}{2 \cdot a}\right) + \frac{1}{2}$$

- Si  $z \in (0; a)$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = F(0) + \int_0^z f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} + \int_0^z f(x) \cdot dx =$$

$$\text{siendo } 0 < x < z \leq a \text{ es } |x| = x; \text{ por tanto: } f(x) = \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^z \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2 \cdot a}\right)_0^z = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \cdot \left(z - \frac{z^2}{2 \cdot a}\right)$$

- 2) La función de densidad de probabilidad es **par**, pues  $f(-x) = f(x)$ ; en consecuencia,  $P(X > 0) = P(X < 0) = 1/2$ .

$$\text{Es: } P(X < a/2) = P(X \leq a/2) = F(a/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2/4}{2 \cdot a}\right) = \frac{7}{8}$$

## FONEMATO 2.4.12

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} x/25 & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ (10-x)/25 & \text{si } 5 < x \leq 10 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

1) Determinése su función de distribución.

2) Calcúlense  $P(X > 5)$  y  $P(5 < X \leq 7)$ .

### SOLUCIÓN

1) La función de distribución de la variable "X" es la  $F: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  que a cada punto  $z \in \mathcal{R}$  le asocia la masa de probabilidad que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, a cada "z" la función "F" le asocia la probabilidad del **suceso**  $X \leq z$ .

- Como "X" sólo toma valores en  $(0;10]$ , si  $z \leq 0$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ , y si  $z > 10$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 1$ .

- Si  $z \in (0;5]$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = F(0) + \int_0^z f(x) \cdot dx = 0 + \int_0^z \frac{x}{25} \cdot dx = \frac{1}{25} \cdot \left( \frac{x^2}{2} \right)_0^z = \frac{z^2}{50}$$

siendo  $0 < x < z \leq 5$ , es  $f(x) = x/25$

- Si  $z \in (5;10)$ , es:

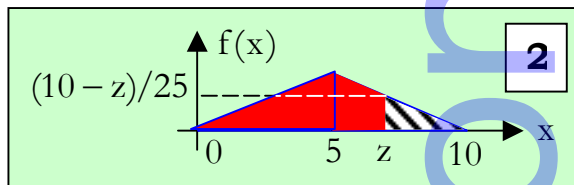
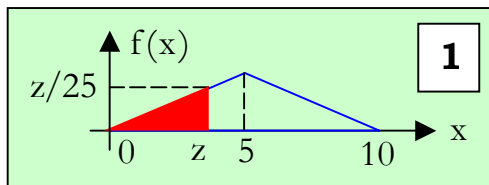
$$F(z) = P(X \leq z) = F(5) + \int_5^z f(x) \cdot dx = \frac{5^2}{50} + \int_5^z \frac{10-x}{25} \cdot dx = \dots = \frac{20 \cdot z - z^2}{50} - 1$$

siendo  $5 < x < z \leq 10$ , es  $f(x) = (10-x)/25$

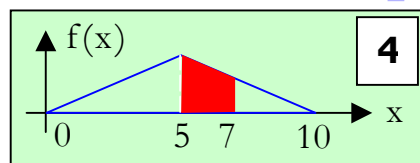
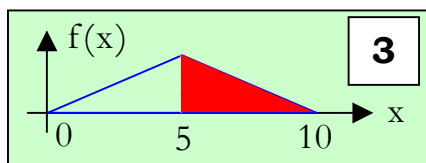
2) Es:  $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(5 < X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 5) = F(7) - F(5) = \left( \frac{20 \cdot 7 - 7^2}{50} - 1 \right) - \frac{1}{2}$$

**Ojo!:** como la densidad es "lineal", puedes lidiar sin el cálculo integral: si  $z \in (0;5]$ , el número  $F(z) = P(X \leq z)$  expresa el área sombreada en la figura 1; si  $z \in (5;10)$ , el número  $F(z) = P(X \leq z)$  expresa el área sombreada en la figura 2, que es el complemento a 1 del área del triángulo sombreado en diagonal.



La probabilidad del **suceso**  $X > 5$  coincide con el área sombreada en la figura 3, y la del suceso  $5 < X \leq 7$  coincide con el área sombreada en la figura 4.



### **FONEMATO 2.4.13**

Una empresa cervecera ha estimado que la demanda diaria de sus clientes está expresada por la variable aleatoria "X".

¿Qué cantidad deberá tener disponible cada día para satisfacer la demanda con probabilidad 0'9 si la densidad de "X" es

$$f(x) = x/2 ; 0 \leq x \leq 2$$

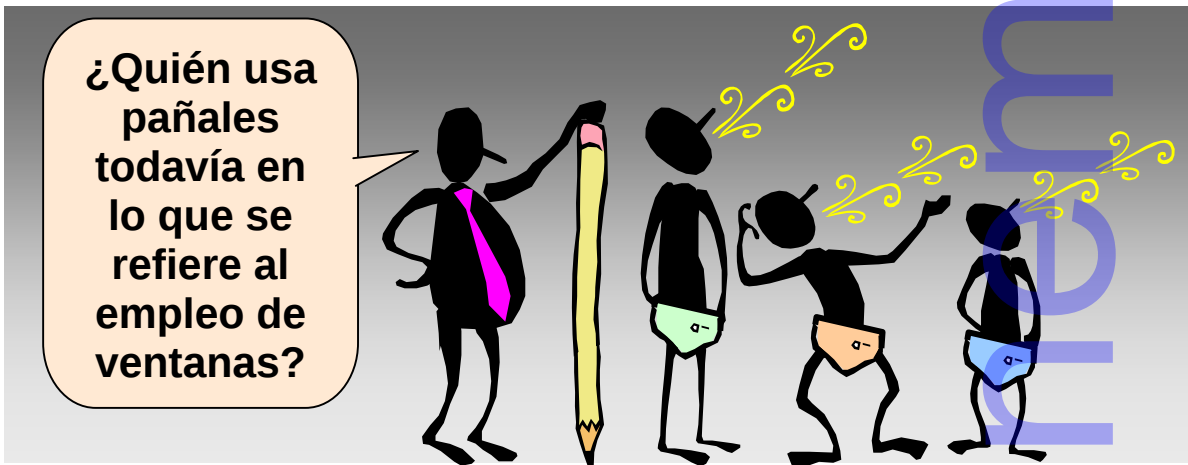
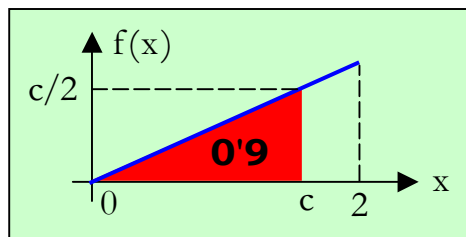
### **SOLUCIÓN**

Debemos determinar "c" de modo que  $P(X \leq c) = 0'9$ :

$$\begin{aligned} P(X \leq c) = 0'9 &\Rightarrow \int_0^c f(x) \cdot dx = 0'9 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int_0^c x \cdot dx = 0'9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot c^2 = 0'9 \Rightarrow c = \sqrt{3'6} \end{aligned}$$

**Ojo!:** como la función de densidad de probabilidad es **lineal**, puedes lidiar sin el cálculo integral, pues simplemente debes calcular "c" de modo que el área del triángulo sombreado sea 0'9:

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = 0'9 \Rightarrow \frac{c \cdot (c/2)}{2} = 0'9$$



## **FONEMATO 2.4.14 (VARIABLE EXPONENCIAL)**

Sea "X" una variable aleatoria con densidad  $f(x) = \begin{cases} b \cdot e^{-a \cdot x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

- 1) Determinése la relación entre "a" y "b".
- 2) Si  $a = 3$ , calcúlense  $P(X > 3)$ ,  $P(1 < X < 2)$  y  $P(X < 1)$ .
- 3) Si  $a = 3$ , determinése "c" de modo que  $P(X > c) = 0.9$ .

### **SOLUCIÓN**

- 1) En todo punto "x" ha de ser  $f(x) \geq 0$ , lo que sucede si  $b \geq 0$ , pero el caso  $b = 0$  debe descartarse, pues si fuera  $b = 0$  la densidad sería nula en todo punto, lo que es absurdo. Al exigir que la masa total de probabilidad sea la unidad, resulta  $a = b$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx &= 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} b \cdot e^{-a \cdot x} \cdot dx = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{b}{a} \cdot (e^{-a \cdot x})_0^{+\infty} &= 1 \Rightarrow -\frac{b}{a} \cdot (e^{-\infty} - 1)_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b \end{aligned}$$

- 2) **Como hay que calcular un montón de probabilidades, merece la pena calcular la función de distribución de "X":** dado que "X" sólo toma valores positivos, si  $z \leq 0$  es  $F(z) = P(X \leq z) = 0$ , y siendo  $z > 0$ , es:

$$\begin{aligned} F(z) &= P(X \leq z) = F(0) + \int_0^z 3 \cdot e^{-3 \cdot x} \cdot dx = \int_0^z 3 \cdot e^{-3 \cdot x} \cdot dx = \\ &= (-e^{-3 \cdot x})_0^z = 1 - e^{-3 \cdot z} \end{aligned}$$

- Es:  $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-9}) = e^{-9}$   
 $P(1 < X < 2) = P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1) =$   
 $= (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-3}) = e^{-3} - e^{-6}$   
 $P(X < 1) = P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-3}$

- 3) Es:

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) = 1 - F(c) = 1 - (1 - e^{-3 \cdot c}) = e^{-3 \cdot c}$$

Por tanto, al exigir que  $P(X > c) = 0.9$ , resulta:

$$P(X > c) = 0.9 \Rightarrow e^{-3 \cdot c} = 0.9 \Rightarrow -3 \cdot c = \ln 0.9 \Rightarrow c = -\frac{\ln 0.9}{3}$$

### **FONEMATO 2.4.15**

Sea la función  $f(x) = e^{-x}/(1 + e^{-x})^2$ . Demuéstrese que cumple todas las condiciones para ser una función de densidad de probabilidad. Calcúlese su función de distribución asociada.

### **SOLUCIÓN**

La función dada  $f(x) = e^{-x}/(1 + e^{-x})^2$  es una función de densidad de probabilidad, pues sólo toma valores no negativos y limita área unidad con el eje de abscisas:

$$\begin{aligned}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \cdot dx &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \cdot dx = \left( \frac{1}{1 + e^{-x}} \right)_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-\infty}} - \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{1 + 0} - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

La función de distribución es la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $F(z) = P(X \leq z)$ :

$$\begin{aligned}F(z) = P(X \leq z) &= \int_{-\infty}^z f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^z \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \cdot dx = \\ &= \left( \frac{1}{1 + e^{-x}} \right)_{-\infty}^z = \frac{1}{1 + e^{-z}} - \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{1 + e^{-z}}\end{aligned}$$

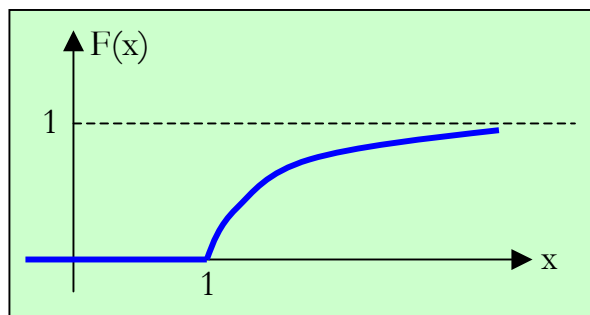
La función  $F(z) = 1/(1 + e^{-z})$ , al igual que sucede con la función de distribución de toda variable aleatoria continua, es continua en todo punto, es  $F(-\infty) = 0$  y  $F(+\infty) = 1$ , es monótona no decreciente en todo punto, la función derivada de "F" es "f", siendo  $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$ .

### **FONEMATO 2.4.16**

Sea la función  $F(x) = 1 - (1/x)$  si  $x > 1$  (0 en el resto). ¿Puede ser "F" la función de distribución de una variable aleatoria?

### **SOLUCIÓN**

Como "F" no es escalonada, no es la función de distribución de una variable discreta... pero sí es la función de distribución de una variable continua, pues "F" no toma valores negativos, es continua en todo punto, es monótona no decreciente en todo punto, siendo  $F(-\infty) = 0$  y  $F(+\infty) = 1$ .

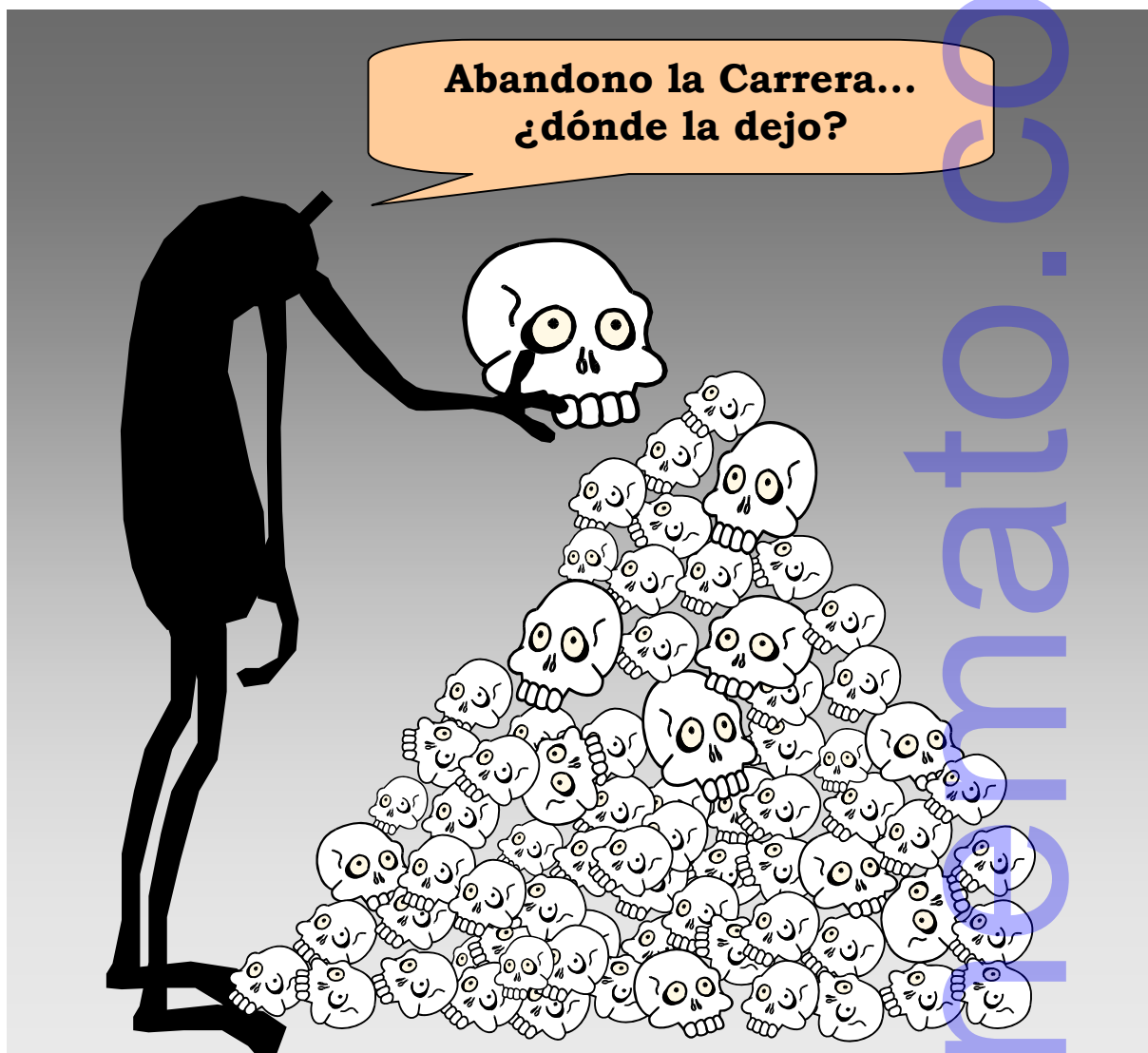


## 2.5 VARIABLE ALEATORIA DEGENERADA

Se llama degenerada a toda variable aleatoria discreta " $X$ " que concentre en un único punto la unidad de masa de probabilidad; si dicho punto es el " $c$ ", la función de probabilidad de " $X$ " es

$$\begin{array}{c|c} x & c \\ \hline f(x) = P(X = x) & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \\ \downarrow \\ c \end{array} \xrightarrow{x}$$

Si " $X$ " es degenerada no hay nada aleatorio, pues el suceso  $X = c$  es el suceso "seguro"; o sea, la variable " $X$ " viene a ser una constante.



## 2.6 ESPERANZA MATEMÁTICA. EL VERBO "PONDERAR"



**El verbo "ponderar" viene a ser sinónimo de "relativizar" o "dar importancia".**

Literalmente, en las acepciones 4 y 5 del diccionario de la Real Academia se dice que "ponderar" es:

**4. Contrapesar**

**5. Atribuir un peso a un elemento de un conjunto con el fin de obtener la media ponderada**

La acepción 5 es muy chapucera, pues es sabido que, para que las cosas se entiendan, **lo definido no debe entrar en la definición**; o sea, para definir "ponderar" no es de recibo emplear la palabra "ponderada".



Sea "X" una variable aleatoria y  $g(X)$  otra variable aleatoria cuyo valor depende del valor que tome "X" a través de la función  $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ; es decir, si la variable "X" toma el valor "x", la variable  $g(X)$  toma el valor  $g(x)$ . **Por ejemplo**, si  $g(X) = \sqrt{1 + \ln X}$  y la variable aleatoria "X" toma el valor 19, la variable aleatoria  $g(X)$  toma el valor  $\sqrt{1 + \ln 19}$ .

**Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales**

© Rafael Cabrejas Hernansanz

- Si la variable "**X**" es discreta y puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$  siendo "**f**" su función de probabilidad o cuantía ( $f(x_i) = P(X = x_i)$ ), llamamos **esperanza matemática, valor esperado, o media de g(X) al número real que denotamos E(g(X)) y definimos así:**

$$E(g(X)) = g(x_1) \cdot f(x_1) + \dots + g(x_n) \cdot f(x_n) + \dots$$

Multiplicamos la masa puntual  $f(x_i)$  que hay en el punto  $x_i$  por el valor  $g(x_i)$  que toma la función "**g**" en el punto  $x_i$  (o sea, **ponderamos** la masa  $f(x_i)$  que hay en el punto  $x_i$  con el número  $g(x_i)$ ), y lo mismo hacemos con todas las "masas puntuales" que forman la distribución discreta de masa asociada a "**X**"; después sumamos los productos realizados.

siempre que sea finita la suma  $|g(x_1)| \cdot f(x_1) + \dots + |g(x_n)| \cdot f(x_n) + \dots$

**Por ejemplo**, si la función de probabilidad o cuantía de "**X**" es

|                   |     |     |     |
|-------------------|-----|-----|-----|
| $x$               | -1  | 2   | 4   |
| $f(x) = P(X = x)$ | 0'3 | 0'5 | 0'2 |

entonces, si  $g(X) = e^X$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= g(-1) \cdot f(-1) + g(2) \cdot f(2) + g(4) \cdot f(4) = \\ &= e^{-1} \cdot 0'3 + e^2 \cdot 0'5 + e^4 \cdot 0'2 \end{aligned}$$

Si  $g(X) = 1/X$ , es:

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= g(-1) \cdot f(-1) + g(2) \cdot f(2) + g(4) \cdot f(4) = \\ &= \frac{1}{-1} \cdot 0'3 + \frac{1}{2} \cdot 0'5 + \frac{1}{4} \cdot 0'2 \end{aligned}$$

Si  $g(X) = 1/(X + 1)$ , es:

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= g(-1) \cdot f(-1) + g(2) \cdot f(2) + g(4) \cdot f(4) = \\ &= \frac{1}{-1+1} \cdot 0'3 + \frac{1}{2+1} \cdot 0'5 + \frac{1}{4+1} \cdot 0'2 = \text{carente de sentido} \end{aligned}$$

está prohibido dividir por cero

- Si "**X**" es continua y "**f**" es su función de densidad de probabilidad, llamamos **esperanza matemática, o valor esperado, o media de g(X) al número real que denotamos E(g(X)) y definimos así:**

$$E(g(X)) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

Multiplicamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en el intervalo  $(x; x+dx)$  por el valor  $g(x)$  que toma la función "**g**" en el punto "**x**" (o sea, **ponderamos** la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en el intervalo  $(x; x+dx)$  con el número  $g(x)$ ), y lo mismo hacemos con la infinidad no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman la distribución continua de masa asociada a "**X**"; después integramos (agregamos, sumamos, adicionamos) los productos realizados.

siempre que sea finita la integral  $\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |g(x)| \cdot f(x) \cdot dx$

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

**Por ejemplo,** si la función "f" de densidad de probabilidad de "X" es

$$f(x) = 2 \cdot x ; 0 \leq x \leq 1$$

entonces, siendo  $g(X) = \sqrt{X}$ , es:

$$E(g(X)) = \int_{x=0}^{x=1} g(x) \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{x} \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = 2 \cdot \left( \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{5}$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$

Si  $g(X) = X^2$ , es:

$$E(g(X)) = \int_{x=0}^{x=1} g(x) \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{1}{2} \cdot x^4 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$

## Propiedades

**Las siguientes propiedades se verifican tanto si "X" es discreta como si es continua.** En las demostraciones supondremos que "X" es continua y que su función de densidad de probabilidad es "f"... si "X" es discreta basta sustituir las integrales por las sumas correspondientes.

- 1) **La esperanza matemática de una constante es ella misma.** En efecto, siendo "C" una constante, si  $g(X) = C$ , es:

$$E(g(X)) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} C \cdot f(x) \cdot dx = C \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \cdot dx = C$$

pues  $\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \cdot dx = 1$

- 2) **La esperanza matemática es lineal;** o sea, si  $a_1$  y  $a_2$  son constantes y  $g_1(X)$  y  $g_2(X)$  son variables que dependen de "X", es:

$$E(a_1 \cdot g_1(X) + a_2 \cdot g_2(X)) = a_1 \cdot E(g_1(X)) + a_2 \cdot E(g_2(X))$$

En efecto:

$$\begin{aligned} E(a_1 \cdot g_1(X) + a_2 \cdot g_2(X)) &= \\ &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x)) \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= a_1 \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} g_1(x) \cdot f(x) \cdot dx + a_2 \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} g_2(x) \cdot f(x) \cdot dx \end{aligned}$$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} g_1(x) \cdot f(x) \cdot dx = E(g_1(X)) ; \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} g_2(x) \cdot f(x) \cdot dx = E(g_2(X))$$

$$= a_1 \cdot E(g_1(X)) + a_2 \cdot E(g_2(X))$$

- 2) Siendo "a" una constante, como consecuencia de las propiedades anteriores, se deduce que

$$E(a \cdot g(X)) = a \cdot E(g(X)) ; E(a + g(X)) = a + E(g(X))$$

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

- 3) Si  $g(X)$  sólo toma valores comprendidos entre "a" y "b" ( $a < b$ ), el valor de  $E(g(X))$  está comprendido entre "a" y "b". En efecto:

$$\begin{aligned}
 a \leq g(x) \leq b &\Rightarrow a \cdot f(x) \leq g(x) \cdot f(x) \leq b \cdot f(x) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot f(x) \cdot dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot f(x) \cdot dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx \leq b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx \Rightarrow \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 &; \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx = E(g(X)) \\
 \Rightarrow a \leq E(g(X)) &\leq b
 \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata se deduce que si  $g(X) \geq 0$ , es  $E(g(X)) \geq 0$ .

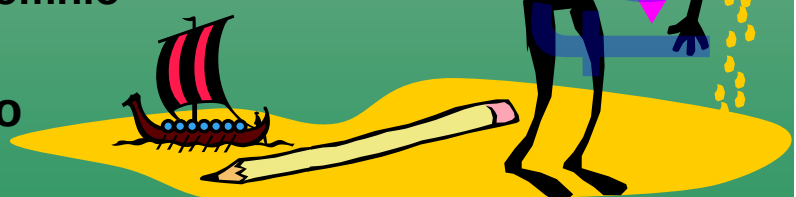
- 4) Si  $g_1(X) \leq g_2(X)$  es  $E(g_1(X)) \leq E(g_2(X))$ .

En efecto:

$$\begin{aligned}
 g_1(X) \leq g_2(X) &\Rightarrow g_1(X) - g_2(X) \leq 0 \Rightarrow E(g_1(X) - g_2(X)) \leq 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow E(g_1(X)) - E(g_2(X)) &\leq 0 \Rightarrow E(g_1(X)) \leq E(g_2(X))
 \end{aligned}$$

**Llorar a chorros. Llorar la digestión. Llorar el sueño.  
Llorar ante las puertas y los puertos.  
Llorar de amabilidad y de amarillo.  
Abrir las canillas, las compuertas del llanto.  
Empaparnos el alma, la camiseta.  
Inundar las veredas y los paseos, y salvarnos, a nado,  
de nuestro llanto.  
Asistir a los cursos de antropología, llorando.  
Festejar los cumpleaños familiares, llorando.  
Atravesar el África, llorando.  
Llorar como un cacuy, como un cocodrilo...  
si es verdad que los cacuyes y los cocodrilos  
no dejan nunca de llorar.  
Llorarlo todo, pero llorarlo bien.  
Llorarlo con la nariz, con las rodillas.  
Llorarlo por el ombligo, por la boca.  
Llorar de amor, de hastío, de alegría.  
Llorar de frac, de flato, de flacura.  
Llorar improvisando, de memoria.  
¡Llorar todo el insomnio  
y todo el día!**

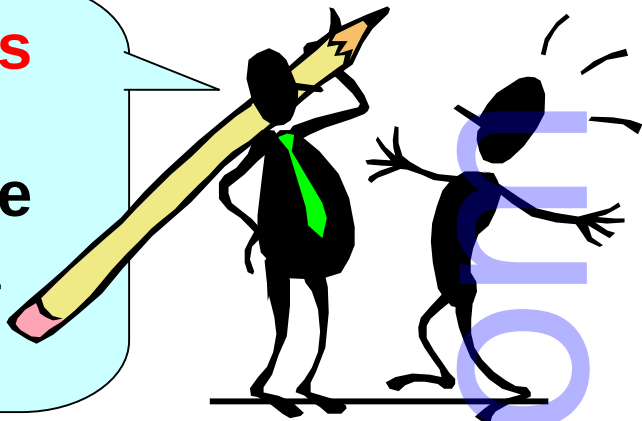
**Oliverio Gironde**



**Profe de Estadística después de corregir un examen**

## 2.7 "MOMENTOS" DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Los **momentos** son casos particulares de la Esperanza Matemática



### Momentos respecto a un punto cualquiera

Siendo "X" una variable aleatoria, "k" un número natural y "c" un punto de la recta real, **el momento de orden "k" de la variable "X" respecto al punto "c" es la esperanza matemática de  $g(X) = (X - c)^k$ .**

### Momentos respecto al origen

Siendo "X" una variable aleatoria y "k" un número natural, **el momento de orden "k" de la variable "X" respecto al origen es la esperanza matemática de  $g(X) = X^k$** , y se denota  $a_k$ .

- Si "X" es **discreta** y puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , siendo "f" su función de probabilidad o cuantía ( $f(x_i) = P(X = x_i)$ ), es:

$$a_k \equiv E(X^k) = x_1^k \cdot f(x_1) + \dots + x_n^k \cdot f(x_n) + \dots$$

Ponderamos la masa puntual  $f(x_i)$  que hay el punto  $x_i$  con la k-ésima potencia del número  $x_i$  que expresa la posición de dicha masa respecto al origen (el punto  $x = 0$ ) y sumamos para todas las masas puntuales que forman la distribución de una unidad de masa de probabilidad asociada a la variable aleatoria "X".

$$a_k \equiv E(X^k) = \sum x_i^k \cdot f(x_i)$$

**Por ejemplo,** si la función "f" de probabilidad o cuantía de "X" es

| x               | -1  | 2   | 4   |
|-----------------|-----|-----|-----|
| f(x) = P(X = x) | 0'3 | 0'5 | 0'2 |

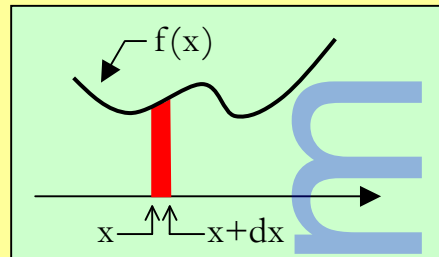
entonces:

- \*  $a_1 = E(X) = (-1) \cdot 0'3 + 2 \cdot 0'5 + 4 \cdot 0'2 = 1'5$
- \*  $a_2 = E(X^2) = (-1)^2 \cdot 0'3 + 2^2 \cdot 0'5 + 4^2 \cdot 0'2$
- \*  $a_3 = E(X^3) = (-1)^3 \cdot 0'3 + 2^3 \cdot 0'5 + 4^3 \cdot 0'2$

- Siendo "X" **continua** y "f" su función de densidad de probabilidad, es:

$$a_k \equiv E(X^k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx$$

Ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en el intervalo  $(x; x+dx)$  con la k-ésima potencia del número "x" que expresa la posición de dicha masa respecto al origen de coordenadas (el punto  $x = 0$ ) e integramos para la infinitud no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman la recta real (entre ellos se reparte o distribuye de modo continuo la unidad de masa de probabilidad que "X" lleva pegada a su prominente chepa).



**Por ejemplo**, si la función "f" de densidad de probabilidad de "X" es

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$$

entonces:

$$a_1 = E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot f(x) \cdot dx =$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{2}{3} \cdot x^3 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = E(X^2) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{1}{2} \cdot x^4 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = E(X^3) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^3 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^3 \cdot f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} x^3 \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{2}{5} \cdot x^5 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{5}$$

- El momento de primer orden respecto al origen (o sea, si  $k = 1$ , por lo que  $g(X) = X$ ) se llama **esperanza matemática, o valor esperado, o media de "X"**. Por tanto, si la variable "X" es discreta:

$$a_1 \equiv E(X) = x_1 \cdot f(x_1) + \dots + x_n \cdot f(x_n) + \dots$$

siempre que sea finita la suma  $|x_1| \cdot f(x_1) + \dots + |x_n| \cdot f(x_n) + \dots$

Si "X" es continua, entonces  $a_1 \equiv E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$ , siempre que sea

finita la integral  $\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |x| \cdot f(x) \cdot dx$

Tanto si "X" es discreta como si es continua, el número **E(X) se expresa en las mismas unidades que "X"**. **Por ejemplo**, si "X" es el aleatorio peso (en kilos) de los ciudadanos, el número E(X) se expresa en kilos.

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

## • Hay variables que carecen de media

**Por ejemplo**, siendo "r" un número natural y  $x_r = (-1)^r \cdot 3^r / r$ , para la variable discreta "X" cuya función de probabilidad es  $f(x_r) = P(X = x_r) = 2/3^r$ , es

$$\sum_{r=1}^{\infty} x_r \cdot f(x_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot 3^r}{r} \cdot \frac{2}{3^r} = 2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r} = \text{finito}$$

La serie  $\sum (-1)^r / r$  es **alternada** (los sumandos alternan de signo) de términos decrecientes en valor absoluto (el valor absoluto de  $(-1)^r / r$  decrece si "r" crece), y este tipo de series converge siempre que su término general tiende a 0, como sucede en nuestro caso con  $(-1)^r / r$ .

Pero "X" carece de media, pues la suma  $\sum_{r=1}^{\infty} |x_r| \cdot f(x_r)$  no es finita:

$$\sum_{r=1}^{\infty} |x_r| \cdot f(x_r) = \sum_{r=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^r \cdot 3^r}{r} \right| \cdot \frac{2}{3^r} = 2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = +\infty$$

Todo el mundo sabe que la suma de los inversos de los números naturales (serie armónica de orden 1) es divergente

**Por ejemplo**, para la variable continua "X", llamada de Cauchy, cuya función de densidad de probabilidad es  $f(x) = 1/(\pi \cdot (1 + x^2))$ , se tiene que:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{x}{1 + x^2} \cdot dx = 0$$

$$h(x) = \frac{x}{1 + x^2} \Rightarrow h(-x) = -h(x) \Rightarrow \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} h(x) \cdot dx = 0$$

Pero "X" carece de media, pues la integral  $\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |x| \cdot f(x) \cdot dx$  no es finita:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |x| \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |x| \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{x=+\infty} \frac{x}{1 + x^2} \cdot dx =$$

$$t(x) = |x| / (1 + x^2) \Rightarrow t(-x) = t(x) \Rightarrow \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} t(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_{x=0}^{x=+\infty} t(x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot (\ln(1 + x^2))_0^{+\infty} = +\infty$$

# VERY, VERY IMPORTANT

El número real  $E(X)$  determina la posición del **centro de gravedad** de la distribución de masa de probabilidad asociada a la variable aleatoria " $X$ ", lo que quiere decir que **si concentramos la unidad de masa de probabilidad asociada a " $X$ " en el punto  $E(X)$  de la recta real, obtenemos la única variable aleatoria degenerada cuyo momento de primer orden respecto al origen coincide con el momento de primer orden de " $X$ " respecto al origen.** Esto hace que el número real  $E(X)$  pueda emplearse como **medida** de la posición respecto de la cual está **centrada** la distribución de masa de probabilidad asociada a la variable aleatoria " $X$ ".

Tanto si la variable " $X$ " es discreta como si es continua (supondremos que es continua y que " $f$ " es su función de densidad de probabilidad), se cumple que:

- 1) Si el conjunto de valores que puede tomar " $X$ " es acotado, existe  $E(X)$ .  
En efecto, si el conjunto de valores " $x$ " que puede tomar " $X$ " es acotado, existe  $M > 0$  tal que  $|x| < M$  si  $f(x) \neq 0$ , y así:

$$\begin{aligned} & \text{en general, es } \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) \cdot dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |t(x)| \cdot dx \\ & \downarrow \\ E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) \cdot dx \leq M \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = M \\ & \uparrow \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \end{aligned}$$

- 2) Si existe el momento de orden " $k$ " respecto al origen, existen todos los momentos de orden inferior a " $k$ ".

En efecto, siendo " $r$ " un natural comprendido entre 0 y " $k$ ", es:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(x) \cdot dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^r| \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= \int_{|x^r| \leq 1} |x^r| \cdot f(x) \cdot dx + \int_{|x^r| \geq 1} |x^r| \cdot f(x) \cdot dx = \text{finito} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{|x^r| \leq 1} |x^r| \cdot f(x) \cdot dx &\leq \int_{|x^r| \leq 1} f(x) \cdot dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \\ \int_{|x^r| \geq 1} |x^r| \cdot f(x) \cdot dx &\leq \int_{|x^r| \geq 1} |x^k| \cdot f(x) \cdot dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| \cdot f(x) \cdot dx = \text{finito} \\ & \uparrow \\ & \text{como existe } E(X^k) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| \cdot f(x) \cdot dx = \text{finito} \end{aligned}$$

3) **Los momentos de orden par no son negativos, los de orden impar pueden tener cualquier signo.** En efecto:

- Si "k" es par  $\Rightarrow x^k \geq 0 \Rightarrow x^k \cdot f(x) \geq 0 \Rightarrow E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx \geq 0$
- Si "k" es impar no podemos decir nada del signo de  $x^k$ , por lo que no podemos decir nada del signo de la integral que determina el valor de  $E(X^k)$ .

## **"Momentos" respecto a la media**

Si "X" es una variable aleatoria y "k" es un número natural, **el momento de orden "k" de "X" respecto de su media  $E(X)$  es la esperanza matemática de  $g(X) = (X - E(X))^k$** ; se denota  $m_k$ .

- Si "X" es **discreta** y puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , siendo "f" su función de probabilidad o cuantía ( $f(x_i) = P(X = x_i)$ ), es:

$$m_k = E((X - E(X))^k) = (x_1 - E(X))^k \cdot f(x_1) + \dots + (x_n - E(X))^k \cdot f(x_n) + \dots$$

Ponderamos la masa puntual  $f(x_i)$  que hay el punto  $x_i$  con la k-ésima potencia del número  $x_i - E(X)$  que expresa la posición de dicha masa respecto a la media  $E(X)$  de "X", y sumamos para todas las masas puntuales que forman la distribución de "X".

- Si "X" es **continua** y "f" es su función de densidad de probabilidad, entonces:

$$m_k = E((X - E(X))^k) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - E(X))^k \cdot f(x) \cdot dx$$

Ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay el intervalo  $(x; x+dx)$  con la potencia k-ésima del número  $x - E(X)$  que expresa la posición de dicha masa respecto a la media  $E(X)$  de "X", e integramos para los infinitos intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman la recta real.

- **Los momentos respecto de la media pueden expresarse en función de los momentos respecto al origen.** En efecto, si por comodidad denotamos  $\mu$  a  $E(X)$ , es:

$$\begin{aligned} m_k &= E((X - \mu)^k) = E\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot X^{k-i} \cdot \mu^i\right) \\ &\quad \text{binomio de Newton} \\ &\quad \text{la "esperanza" es un operador "lineal"} \\ &= \sum_{i=0}^k E\left(\binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot X^{k-i} \cdot \mu^i\right) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot \mu^i \cdot E(X^{k-i}) \\ &\quad \text{la "esperanza" es un operador "lineal"} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot \mu^i \cdot a_{k-i} \\ &\quad E(X^{k-i}) = a_{k-i} \end{aligned}$$

- **Los momentos respecto del origen pueden expresarse en función de los momentos respecto a la media.** En efecto, si por comodidad denotamos  $\mu$  a  $E(X)$ , es:

$$\begin{aligned}
 a_k &= E(X^k) = E\left((X - \mu) + \mu\right)^k = E\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot (X - \mu)^{k-i} \cdot \mu^i\right) = \\
 &\quad \text{binomio de Newton} \\
 &\quad \text{la "esperanza" es un operador "lineal"} \\
 &= \sum_{i=0}^k E\left(\binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot (X - \mu)^{k-i} \cdot \mu^i\right) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot \mu^i \cdot E((X - \mu)^{k-i}) = \\
 &\quad \uparrow \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot (-1)^i \cdot \mu^i \cdot m_{k-i} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{es } E((X - \mu)^{k-i}) = m_{k-i}
 \end{aligned}$$

- El momento de segundo orden respecto de la media de "X" se llama **varianza** de "X", y se denota  $V(X)$ .

Si "X" es discreta y puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , siendo "f" su función de probabilidad o cuantía ( $f(x_i) = P(X = x_i)$ ), es:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = (x_1 - E(X))^2 \cdot f(x_1) + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot f(x_n) + \dots$$

Siendo "X" continua y "f" su función de densidad de probabilidad, es:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

- De la raíz cuadrada (con signo positivo) de la varianza de "X" se dice que es la **desviación típica** de "X", y se expresa en las mismas unidades que "X".
- **La varianza puede obtenerse a partir de los momentos primero y segundo respecto al origen.** En efecto:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2) =$$

esperanza de una suma = suma de esperanzas

$$= E(X^2) - E(2 \cdot X \cdot E(X)) + E((E(X))^2) =$$

$$= E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + E((E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(2 \cdot X \cdot E(X)) = 2 \cdot E(X) \cdot E(X) = 2 \cdot (E(X))^2 ; E((E(X))^2) = (E(X))^2$$

- **La varianza de una variable aleatoria no es negativa.**

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot f(x_1) + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot f(x_n) + \dots \geq 0$$

$$f(x_i) > 0 \text{ y } (x_i - E(X))^2 \geq 0$$

$$V(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx \geq 0$$

$$f(x) \geq 0 \text{ y } (x - E(X))^2 \geq 0$$

- Siendo constantes "a" y "b", es  $V(a.X + b) = a^2.V(X)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} V(a.X + b) &= E\left(\left((a.X + b) - E(a.X + b)\right)^2\right) = \\ &= E\left(\left(a.X + b - a.E(X) - b\right)^2\right) = E\left(\left(a.X - a.E(X)\right)^2\right) = \\ &\quad \uparrow \quad \boxed{E(a.X + b) = a.E(X) + b} \\ &= E\left(a^2.(X - E(X))^2\right) = a^2.E((X - E(X))^2) = a^2.V(X) \end{aligned}$$

**AVISO MUY IMPORTANTE**  
**La propiedad  $V(a.X + b) = a^2.V(X)$  la usaremos millones de veces a partir de ahora.**

- El momento de segundo orden de la variable aleatoria "X" respecto del punto "c" es mínimo si  $c = E(X)$ . En efecto:

$$E((X - c)^2) = E(X^2 - 2.c.X + c^2) = E(X^2) - 2.c.E(X) + c^2$$

Al anular la derivada de  $E((X - c)^2)$  respecto de "c", resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dE((X - c)^2)}{dc} &= \frac{d(E(X^2) - 2.c.E(X) + c^2)}{dc} = \\ &= -2.E(X) + 2.c = 0 \Rightarrow c = E(X) \end{aligned}$$

Y como

$$\frac{d^2E((X - c)^2)}{dc^2} = \frac{d(-2.E(X) + 2.c)}{dc} = 2 > 0$$

el valor de  $E((X - c)^2)$  presenta un mínimo si  $c = E(X)$ .

## Significado de la varianza

**La varianza de la variable aleatoria "X" puede emplearse como medida de la dispersión que respecto a su media o centro de gravedad tiene la distribución de masa de probabilidad asociada a "X": la varianza será mayor cuanto más dispersa esté la masa respecto al centro de gravedad.**

En efecto, supuesto que la variable "X" es discreta y que puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , hemos definido

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = (x_1 - E(X))^2.f(x_1) + \dots + (x_n - E(X))^2.f(x_n) + \dots$$

O sea, para calcular  $V(X)$  ponderamos la masa de probabilidad  $f(x_i) > 0$  que hay en cada punto  $x_i$  con el número  $(x_i - E(X))^2 \geq 0$  (el cuadrado del número  $x_i - E(X)$  que expresa la posición de dicha masa respecto del centro de gravedad  $E(X)$ ), y sumamos para todos los puntos en que hay masa.

Así, si todos los puntos  $x_1, \dots, x_n, \dots$  en que hay masa están muy próximos al centro de gravedad  $E(X)$ , es decir, si  $|x_i - E(X)|$  es próximo a cero para todo valor de "i", sucederá que la suma de las ponderaciones no será grande; pero si hay masas no ridículas (no extremadamente pequeñas) muy alejadas del centro de gravedad sucederá que la suma de las ponderaciones será grande, pues si para algún "i" sucede que  $|x_i - E(X)|$  es muy grande, entonces  $(x_i - E(X))^2 \cdot f(x_i)$  es muy grande si la masa  $f(x_i)$  no es extremadamente pequeña.

## **Coeficiente de variación**

**El coeficiente de variación de una variable aleatoria "X" es el cociente entre su desviación típica y su media.** El coeficiente de variación, que es adimensional (pues la desviación típica y la media se expresan en las mismas unidades) se usa para comparar la dispersión de variables aleatorias que se expresan en distintas unidades o que, expresándose en las mismas unidades, tienen medias muy distintas.

**Por ejemplo**, si las variables "X" y "Z" expresan respectivamente la aleatoria altura (en centímetros) y el aleatorio peso (en kilos) de los ciudadanos, entonces, si la media de "X" es 170 con desviación típica 30, y la media de "Z" es 65 con desviación típica 5, el coeficiente de variación de "X" es  $30/170$  y el de "Z" es  $5/65$ . Así, como  $30/170 > 5/65$ , la distribución de probabilidad de "X" tiene mayor dispersión que la de "Z".

## **Medidas de posición**

- Se dice que "x" es el **cuantil** de orden "q" ( $0 < q < 1$ ) de la variable aleatoria "X" si "x" es el menor valor tal que  $P(X \leq x) \geq q$ .  
Si "X" es continua y "F" es su función de distribución ( $F(z) = P(X \leq z)$ ), el cuantil de orden "q" corresponde a la solución de la ecuación  $F(x) = q$ .
- La **mediana** de "X" es el cuantil de orden 0'5.
- Los **cuartiles** 1º, 2º y 3º de "X" son respectivamente los cuantiles de orden 0'25, 0'5 y 0'75.
- Los **deciles** 1º, 2º, ..... y 9º de "X" son respectivamente los cuantiles de orden 0'1, 0'2 .... 0'9.
- Los **percentiles** 1º, 2º, ..... y 99º de "X" son respectivamente los cuantiles de orden 0'01, 0'02 .... 0'99.
- Si la variable "X" es discreta, su **moda** corresponde al valor de la variable que tiene mayor probabilidad de presentarse. Si "X" es continua, su **moda** corresponde al punto en que la función de densidad presenta su máximo absoluto.

## Medidas de forma

- El **coeficiente de asimetría** de la variable aleatoria "X" se denota  $\gamma_1$ , y es el cociente entre el momento de tercer orden respecto de la media y el cubo de la desviación típica:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\sigma^3} \equiv \frac{E((X - E(X))^3)}{\sigma^3}$$

Si la distribución de probabilidad de "X" es simétrica respecto a su media entonces  $E((X - E(X))^3) = 0$ , por lo que  $\gamma_1 = 0$ .

Si la distribución está sesgada hacia la derecha es  $\gamma_1 > 0$ , siendo  $\gamma_1 < 0$  si está sesgada hacia la izquierda.

- El **coeficiente de aplastamiento o curtosis** de la variable aleatoria "X" se denota  $\gamma_2$ , siendo:

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \equiv \frac{E((X - E(X))^4)}{\sigma^4} - 3$$

Si  $\gamma_2 < 0$  se dice que la distribución de probabilidad de "X" es **platicúrtica** (más "aplastada" que la distribución "normal", para la que  $\gamma_2 = 0$ , y **de la "normal" se dice mesocúrtica**). Si  $\gamma_2 > 0$  se dice que la distribución de "X" es **leptocúrtica** (menos "aplastada" que la "normal").

|           |                     |         |          |                     |         |
|-----------|---------------------|---------|----------|---------------------|---------|
| A         | $\alpha$            | alfa    | N        | $\nu$               | nu      |
| B         | $\beta$             | beta    | $\Xi$    | $\xi$               | xi      |
| $\Gamma$  | $\gamma$            | gamma   | O        | o                   | omicron |
| $\Delta$  | $\delta$            | delta   | $\Pi$    | $\pi$               | pi      |
| E         | $\varepsilon$       | épsilon | P        | $\rho$              | rho     |
| Z         | $\zeta$             | dseta   | $\Sigma$ | $\sigma, \varsigma$ | sigma   |
| H         | $\eta$              | eta     | T        | $\tau$              | tau     |
| $\Theta$  | $\vartheta, \theta$ | teta    | Y        | $\upsilon$          | ypsilon |
| I         | $\iota$             | iota    | $\Phi$   | $\phi$              | fi      |
| K         | $\kappa$            | kappa   | X        | $\chi$              | ji      |
| $\Lambda$ | $\lambda$           | lambda  | $\Psi$   | $\psi$              | psi     |
| M         | $\mu$               | mu      | $\Omega$ | $\omega$            | omega   |

**¡Harás un ridículo espantoso si el nombre de alguna letra del alfabeto griego te deja con el culo al aire!**



## FONEMATO 2.7.1

- 1) Calcúlese la varianza de las variables aleatorias "X" y "Z" cuyas respectivas funciones de probabilidad son:

|                  |     |     |     |     |     |                  |     |     |     |     |     |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\frac{x}{f(x)}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | $\frac{z}{f(z)}$ | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|                  | 0'1 | 0'2 | 0'4 | 0'2 | 0'1 |                  | 0'2 | 0'2 | 0'2 | 0'2 | 0'2 |

- 2) Calcúlese la varianza de las variables aleatorias  $U = 3 - 4 \cdot X$  y  $W = 5 + 6 \cdot Z$

### SOLUCIÓN

- 1) Es:

por definición

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum (x - E(X))^2 \cdot f(x) =$$

ponderamos la masa  $f(x)$  que hay en punto "x" con la segunda potencia del número " $x - E(X)$ " que expresa la posición de esa masa respecto al centro de gravedad (la media) de la distribución de masa de "X", y sumamos para todos los puntos que forman la distribución de masa

siempre

$$= E(X^2) - (E(X))^2 = 10'2 - 3^2 = 1'2$$

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = 1 \cdot 0'1 + 2 \cdot 0'2 + 3 \cdot 0'4 + 4 \cdot 0'2 + 5 \cdot 0'1 = 3$$

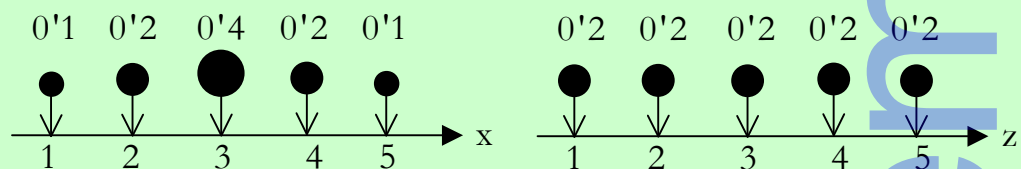
$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot f(x) = 1^2 \cdot 0'1 + 2^2 \cdot 0'2 + 3^2 \cdot 0'4 + 4^2 \cdot 0'2 + 5^2 \cdot 0'1 = 10'2$$

- Es:

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 11 - 3^2 = 2$$

$$E(Z) = \sum z \cdot f(z) = 1 \cdot 0'2 + 2 \cdot 0'2 + 3 \cdot 0'2 + 4 \cdot 0'2 + 5 \cdot 0'2 = 3$$

$$E(Z^2) = \sum z^2 \cdot f(z) = 1^2 \cdot 0'2 + 2^2 \cdot 0'2 + 3^2 \cdot 0'2 + 4^2 \cdot 0'2 + 5^2 \cdot 0'2 = 11$$



Ambas distribuciones de masa tienen su centro de gravedad en el punto "3", pues  $E(X) = E(Z) = 3$ . **El que  $V(X) < V(Z)$  significa que la distribución de "X" está más concentrada entorno al centro de gravedad que la de "Z".**

- 2) En general, siendo constantes "a" y "b", es  $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$ ; así:

$$V(U) = V(3 - 4 \cdot X) = (-4)^2 \cdot V(X) = 16 \cdot 1'2 = 19'2$$

$$V(W) = V(5 + 6 \cdot Z) = 6^2 \cdot V(Z) = 36 \cdot 2 = 72$$

## FONEMATO 2.7.2

La función de probabilidad o cuantía de la variable aleatoria "X" que expresa el ingreso diario (en miles de dólares) de una empresa es

|                 |     |     |     |
|-----------------|-----|-----|-----|
| x               | -1  | 2   | 4   |
| f(x) = P(X = x) | 0'3 | 0'5 | 0'2 |

- 1) Calcúlense los tres primeros momentos de "X" respecto al origen.
- 2) Si el aleatorio beneficio diario de la empresa es  $Y = -0'5 + (X/4)$ , calcúlese el beneficio medio diario.

### SOLUCIÓN

- 1) El "momento" de orden "k" de la variable aleatoria "X" respecto al origen es la esperanza matemática de  $X^k$ .

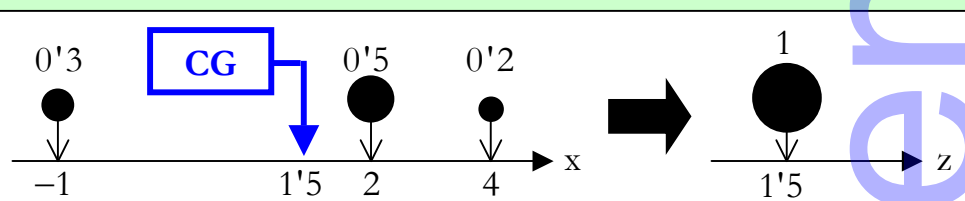
Así, siendo  $f(x) = P(X = x)$  la función de probabilidad de "X", el momento de orden 1 de "X" respecto al origen, también llamado **esperanza matemática, valor esperado o media de "X"**, es:

$$E(X) = \sum x \cdot f(x) = (-1) \cdot f(-1) + 2 \cdot f(2) + 4 \cdot f(4) = (-1) \cdot 0'3 + 2 \cdot 0'5 + 4 \cdot 0'2 = 1'5$$

ponderamos la masa  $f(x)$  que hay en punto "x" con la primera potencia del número "x" que expresa la posición de esa masa respecto al origen, y sumamos para todos los puntos que forman la distribución de masa

Por tanto, el ingreso diario medio o esperado es de 1500 dólares.

El que  $E(X) = 1'5$  significa que al concentrar la unidad de masa de probabilidad asociada a "X" en el punto 1'5 de la recta real, obtenemos la única **variable degenerada** cuyo momento de primer orden respecto al origen coincide con el de la variable "X".



La distribución de masa de probabilidad asociada a "X" tiene su **centro de gravedad** (CG) en el punto 1'5 de la recta real

**Ambas distribuciones de masa tienen igual momento de primer orden respecto al origen**, pues para variable degenerada "Z" tal que  $P(Z = 1'5) = 1$  es  $E(Z) = 1'5 \cdot f(1'5) = 1'5 \cdot 1 = 1'5$ .

El número  $E(X) = 1'5 = E(Z)$  puede emplearse como **medida de la posición** respecto de la que está **centrada** la unidad de masa de probabilidad asociada al aleatorio beneficio diario de la empresa.

- Momento de orden 2 de "X" respecto al origen:

$$E(X^2) = \sum x^2 \cdot f(x) = (-1)^2 \cdot f(-1) + 2^2 \cdot f(2) + 4^2 \cdot f(4) =$$

ponderamos la masa  $f(x)$  que hay en punto "x" con la segunda potencia del número "x" que expresa la posición de esa masa respecto al origen, y sumamos para todos los puntos que forman la distribución de masa

$$= 1 \cdot 0'3 + 4 \cdot 0'5 + 16 \cdot 0'2 = 5'5$$

- Momento de orden 3 de "X" respecto al origen:

$$E(X^3) = \sum x^3 \cdot f(x) = (-1)^3 \cdot f(-1) + 2^3 \cdot f(2) + 4^3 \cdot f(4) =$$

ponderamos la masa  $f(x)$  que hay en punto "x" con la tercera potencia del número "x" que expresa la posición de esa masa respecto al origen, y sumamos para todos los puntos que forman la distribución de masa

$$= (-1) \cdot 0'3 + 8 \cdot 0'5 + 64 \cdot 0'2 = 16'5$$

- 2) Siendo  $Y = -0'5 + (X/4)$  el aleatorio beneficio diario de la empresa, el beneficio esperado diario  $E(Y)$  es:

$$E(Y) = E(-0'5 + (X/4)) = E(-0'5) + E(X/4) =$$

$$Y = -0'5 + (X/4)$$

$$E(\text{Pepe} + \text{Juan}) = E(\text{Pepe}) + E(\text{Juan})$$

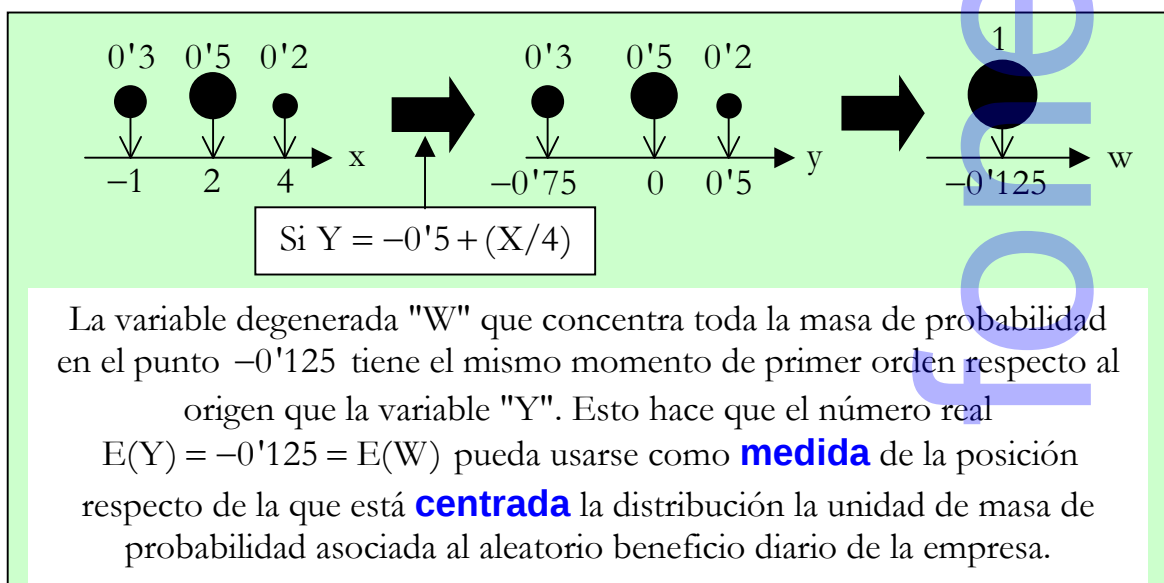
$$= -0'5 + \frac{1}{4} \cdot E(X) = -0'5 + \frac{1}{4} \cdot 1'5 = -0'125$$

$$E(\text{constante Pepita}) = \text{constante Pepita}$$

Si "a" es constante  $\Rightarrow E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

Como  $E(Y) < 0$ , nadie invertiría un céntimo en esta empresa.

**El que  $E(Y) = -0'125$  significa que concentrando la unidad de masa de probabilidad asociada a "Y" en el punto  $-0'125$  de la recta real, obtenemos la única variable degenerada cuyo momento de primer orden respecto al origen coincide con el de "Y".**



### FONEMATO 2.7.3

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la renta de los ciudadanos (en decenas de miles de dólares) de un país es

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$$

- 1) Calcúlense los tres primeros momentos de "X" respecto al origen.
- 2) Si el aleatorio ahorro es  $Y = X/5$ , calcular el ahorro medio y la probabilidad de que el ahorro de un ciudadano supere el ahorro medio.

### SOLUCIÓN

- 1) El "momento" de orden "k" de "X" respecto al origen es la **esperanza matemática de  $X^k$** . Así, siendo "f" la función de densidad de "X", el momento de orden 1 de "X" respecto al origen, también llamado **esperanza matemática, valor esperado o media de "X"**, es:

ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en intervalo  $(x; x+dx)$  con la primera potencia del número "x" que expresa la posición de esa masa respecto al origen, e integramos en toda la recta real

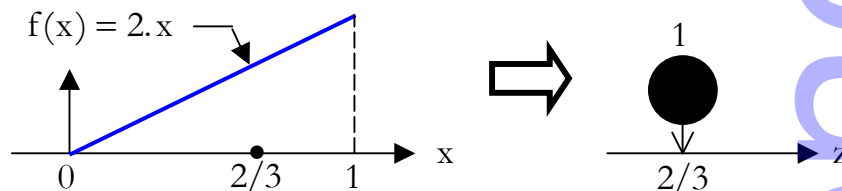
$$E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{2}{3} \cdot x^3 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$  y  $f(x) = 2 \cdot x$  si  $x \in [0;1]$

Por tanto, la renta media o esperada es de 6666'66666666.... dólares.

**El que  $E(X) = 2/3$  significa que al concentrar la unidad de masa de probabilidad asociada a "X" en el punto  $2/3$  de la recta real, obtenemos la única variable degenerada cuyo momento de primer orden respecto al origen coincide con el momento de primer orden de "X" respecto al origen.**

La distribución de masa de probabilidad asociada a "X" tiene su centro de gravedad (CG) en el punto  $2/3$  de la recta real.



Ambas distribuciones de masa tienen igual momento de primer orden respecto al origen, pues para variable degenerada "Z" tal que  $P(Z = 2/3) = 1$  es  $E(Z) = (2/3) \cdot f(2/3) = 2/3$ . Por eso, el número  **$E(X) = 2/3 = E(Z)$**  puede emplearse como **medida de la posición respecto de la que está centrada la distribución la unidad de masa de probabilidad asociada a la aleatoria renta.**

- Momento de orden 2 de la variable "X" respecto al origen:

$$E(X^2) = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{1}{2} \cdot x^4 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en intervalo  $(x; x+dx)$  con la segunda potencia del número "x" que expresa la posición de esa masa respecto al origen, e integramos en toda la recta real

- Momento de orden 3 de la variable "X" respecto al origen:

$$E(X^3) = \int_{x=0}^{x=1} x^3 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^3 \cdot (2 \cdot x) \cdot dx = \left( \frac{2}{5} \cdot x^5 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{5}$$

ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en intervalo  $(x; x+dx)$  con la tercera potencia del número "x" que expresa la posición de esa masa respecto al origen, e integramos en toda la recta real

**VENTANA**

- 2) Siendo  $Y = X/5$  el aleatorio ahorro, el ahorro medio o esperado es:

$$E(Y) = E(X/5) = \frac{1}{5} \cdot E(X) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

Si "a" es constante  $\Rightarrow E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$

**El que  $E(Y) = 2/15$  significa que al concentrar la unidad de masa de probabilidad asociada a "Y" en el punto 2/15 de la recta real, obtenemos la única variable degenerada cuyo momento de primer orden respecto al origen coincide con el momento de primer orden de "Y" respecto al origen.**

- Siendo 2/15 el ahorro medio, la probabilidad de que el ahorro de un ciudadano supere el ahorro medio es la probabilidad del suceso  $Y > 2/15$ :

$$P(Y > \frac{2}{15}) = P(X > \frac{2}{3}) = \int_{x=2/3}^{x=+\infty} f(x) \cdot dx = \int_{x=2/3}^{x=1} 2 \cdot x \cdot dx = \dots = \frac{5}{9}$$

$$Y = X/5 > 2/15 \Rightarrow X > 2/3 \quad \left| \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [0;1] ; f(x) = 2 \cdot x \text{ si } x \in [0;1] \right|$$

- Siendo "F" la función de distribución de "X" (o sea,  $F(x) = P(X \leq x)$ ), calculemos la función de distribución  $G(y) = P(Y \leq y)$  de "Y":

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X/5 \leq y) = P(X \leq 5 \cdot y) = F(5 \cdot y)$$

pues  $P(X \leq \text{Pepe}) = F(\text{Pepe})$

La función de densidad de probabilidad  $g(y)$  de "Y" es la derivada de  $G(y)$ :

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{dF(5 \cdot y)}{dy} = \frac{dF(5 \cdot y)}{d(5 \cdot y)} \cdot \frac{d(5 \cdot y)}{dy} = 5 \cdot \frac{dF(5 \cdot y)}{d(5 \cdot y)} = 5 \cdot f(5 \cdot y) =$$

$$G(y) = F(5 \cdot y)$$

regla de la cadena

$$\frac{dF(\text{Juan})}{d(\text{Juan})} = f(\text{Juan})$$

$$= \begin{cases} 10 \cdot y & \text{si } y \in [0; 1/5] \\ 0 & \text{si } y \notin [0; 1/5] \end{cases}$$

en la expresión matemática de  $f(x)$  sustituimos "x" por "5 \cdot y"

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

## **FONEMATO 2.7.4**

- 1) Calcúlese la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es  $f(x) = 6.x.(1 - x)$ ,  $x \in [0;1]$ .
- 2) Calcúlese la varianza de las variables aleatorias  $U = -7 - 9.X$  y  $W = 5 - 3.X$

### **SOLUCIÓN**

1) Es:

por definición

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx =$$

ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en intervalo  $(x; x+dx)$  con la segunda potencia del número  $x - E(X)$  que expresa la posición de esa masa respecto al centro de gravedad (la media) de la distribución de masa de "X", e integramos en toda la recta real

siempre

$$= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0'05$$

#### **VENTANA**

- $E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot (6.x.(1-x)) \cdot dx = \dots = 1/2$   
pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$  y  $f(x) = 6.x.(1-x)$  si  $x \in [0;1]$
- $E(X^2) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot (6.x.(1-x)) \cdot dx = \dots = 3/10$   
pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$  y  $f(x) = 6.x.(1-x)$  si  $x \in [0;1]$

2) En general, siendo constantes "a" y "b", es  $V(a.X + b) = a^2 \cdot V(X)$ ; por tanto:

$$V(U) = V(-7 - 9.X) = (-9)^2 \cdot V(X) = (-9)^2 \cdot 0'05$$

$$V(W) = V(5 - 3.X) = (-3)^2 \cdot V(X) = (-3)^2 \cdot 0'05$$

## FONEMATO 2.7.5 (VARIABLE UNIFORME CONTINUA)

Calcúlese la varianza de "X" si su densidad es  $f(x) = 1/(b-a)$ ,  $x \in [a; b]$ .

### SOLUCIÓN

por definición

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx =$$

ponderamos la masa  $f(x) \cdot dx$  que hay en intervalo  $(x; x+dx)$  con la segunda potencia del número  $x - E(X)$  que expresa la posición de esa masa respecto al centro de gravedad (la media) de la distribución de masa de "X", e integramos en toda la recta real

siempre

$$= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \dots = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2$$

$$\bullet E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=a}^{x=b} x \cdot dx / (b-a) = \dots = (a+b)/2$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [a; b]$  y  $f(x) = 1/(b-a)$  si  $x \in [a; b]$

### VENTANA

$$\bullet E(X^2) = \int_{x=a}^{x=b} x^2 \cdot dx / (b-a) = \dots = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)}$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [a; b]$  y  $f(x) = 1/(b-a)$  si  $x \in [a; b]$



## **FONEMATO 2.7.6**

Un individuo va tres veces al día a una oficina ubicada en una zona en que no se puede aparcar. Puede elegir entre las siguientes normas de conducta:

- a) Aparcar en sitio prohibido, en cuyo caso le pueden multar con 50 \$.
- b) Llevar el coche a un aparcamiento que le cuesta 35 \$ cada vez.

- 1) Si la probabilidad de ser multado es 0'5, ¿cuál es la conducta con menor coste esperado?
- 2) Determinése la cuantía de la multa para que el coste esperado sea el mismo tanto si se aparca en sitio prohibido como si se usa el aparcamiento.

### **SOLUCIÓN**

- 1) La función de probabilidad de la variable aleatoria  $X_i$  que expresa el coste de la  $i$ -ésima vez que aparca en sitio prohibido ( $i = 1, 2, 3$ ), es:

|                |     |     |
|----------------|-----|-----|
| $x_i$          | 0   | 50  |
| $P(X_i = x_i)$ | 0'5 | 0'5 |

Por tanto:

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 50 \cdot P(X_i = 50) = 0 \cdot 0'5 + 50 \cdot 0'5 = 25$$

La variable aleatoria  $X = X_1 + X_2 + X_3$  expresa el coste diario si se aparca tres veces en zona prohibida, siendo:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 75$$

La función de probabilidad de la variable aleatoria  $Z_i$  que expresa el coste de la  $i$ -ésima vez que entra al aparcamiento ( $i = 1, 2, 3$ ), es:

|                |    |
|----------------|----|
| $z_i$          | 35 |
| $P(Z_i = z_i)$ | 1  |

Por tanto,  $E(Z_i) = 35 \cdot P(Z_i = 35) = 35 \cdot 1 = 35$ .

La variable aleatoria  $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$  expresa el coste diario si entra tres veces al aparcamiento, siendo:

$$E(Z) = E(Z_1 + Z_2 + Z_3) = E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) = 105$$

- 2) Siendo "k" la cuantía de la multa, la función de probabilidad de  $X_i$  es:

|                |     |     |
|----------------|-----|-----|
| $x_i$          | 0   | k   |
| $P(X_i = x_i)$ | 0'5 | 0'5 |

Por tanto:

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + k \cdot P(X_i = k) = 0 \cdot 0'5 + k \cdot 0'5 = k/2$$

En consecuencia, en lo que se refiere al coste esperado del aparcamiento diario, será indiferente aparcar en sitio prohibido o en el aparcamiento si es  $k/2 = 35$ ; o sea, si  $k = 70$ .

### **FONEMATO 2.7.7**

Sea "X" una variable aleatoria cuya función de distribución es

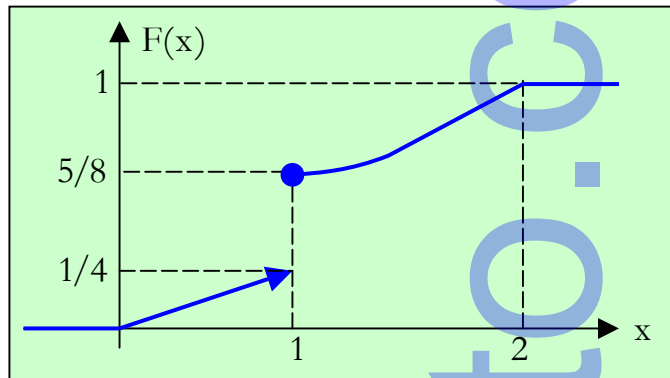
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (4 + x^2)/8 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Represéntese  $F(x)$  y coméntese. Determinése la media de "X".

### **SOLUCIÓN**

- Como  $F(x)$  es constante a la izquierda de  $x = 0$  y a la derecha de  $x = 2$ , no hay masa de probabilidad a la izquierda de  $x = 0$  ni a la derecha de  $x = 2$ .

La función de distribución "F" no es continua en  $x = 1$  (la gráfica de "F" está "rota" en dicho punto), y eso indica que en  $x = 1$  hay una "masa puntual"  $5/8 - 1/4 = 3/8$  que coincide con el salto que da  $F(x)$  en  $x = 1$ . El resto de la masa ( $1 - 3/8 = 5/8$ ) se reparte de



modo continuo entre los intervalos  $(0;1)$  y  $(1;2)$ , pues  $F(x)$  es continua y estrictamente creciente en dichos intervalos.

**La función de densidad de probabilidad de "X" es la derivada de la función de distribución; así:**

$$f(x) = \frac{F(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x/4 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Es:

Momento de primer orden respecto al origen correspondiente a la masa puntual  $3/8$  que hay en  $x = 1$

$$E(X) = \underbrace{1 \cdot (3/8)}_{\text{momento puntual}} + \underbrace{\int_0^2 x \cdot f(x) \cdot dx}_{\text{momento continuo}} =$$

**VENTANA**

Momento de primer orden respecto al origen correspondiente a la masa que de modo continuo está repartida entre la infinitud no numerable de puntos del intervalo  $[0;2]$

$$= \frac{3}{8} + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{4} \cdot dx + \int_1^2 x \cdot \frac{x}{4} \cdot dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot (x^2)_0^1 + \frac{1}{12} \cdot (x^3)_1^2 = \frac{29}{24}$$

## FONEMATO 2.7.8

La variable aleatoria "X" está definida en los intervalos (0;1) y (3;4) así como en el punto  $x = 2$ , siendo  $P(0 < X \leq 1) = 0'2$  y  $P(X = 2) = 0'1$ . En el intervalo (0;1) la función de densidad es constante, y en el intervalo (3;4) es una recta de pendiente positiva. Determine la función de distribución de "X" si  $E(X) = 1157/420$ .

### SOLUCIÓN

Siendo  $f(x)$  la función de densidad de probabilidad, se nos dice que

$$f(x) = a \text{ si } x \in (0;1); f(x) = b \cdot x + c \text{ si } x \in (1;2)$$

- El valor de "a" lo determinamos al **exigir** que  $P(0 < X \leq 1) = 0'2$ :

$$P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 a \cdot dx = a \cdot (x)_0^1 = a = 0'2 \Rightarrow a = 0'2$$

- Exijamos** que la masa total de probabilidad sea 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \cdot dx + P(X = 2) + \int_3^4 f(x) \cdot dx &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 0'2 \cdot dx + 0'1 + \int_3^4 (b \cdot x + c) \cdot dx &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0'2 \cdot (x)_0^1 + 0'1 + \left( \frac{b}{2} \cdot x^2 + c \cdot x \right)_3^4 &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0'2 \cdot (1 - 0) + 0'1 + \left( \frac{b}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot c \right) - \left( \frac{b}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot c \right) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 7 \cdot b + 2 \cdot c &= 1'4 \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

- Es 
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx + 2 \cdot P(X = 2) + \int_3^4 x \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= 0'2 \cdot \int_0^1 x \cdot dx + 2 \cdot 0'1 + \int_3^4 x \cdot (b \cdot x + c) \cdot dx = \\ &= 0'2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)_0^1 + 0'2 + \left( \frac{b}{3} \cdot x^3 + \frac{c}{2} \cdot x^2 \right)_3^4 = 0'3 + \frac{37}{3} \cdot b + \frac{7}{2} \cdot c \end{aligned}$$

Al **exigir** que  $E(X) = 1157/420$ , resulta  $0'3 + \frac{37}{3} \cdot b + \frac{7}{2} \cdot c = \frac{1157}{420}$  (II)

- La solución del sistema de ecuaciones que forman (I) y (II) es  $b = \frac{2}{35}$  y  $c = \frac{1}{2}$ .
- La función de distribución de "X" es la  $F: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  tal que  $F(z) = P(X \leq z)$ :

$$F(z) = \begin{cases} \text{si } z \leq 0 & \rightarrow = \int_{-\infty}^z 0 \cdot dx = 0 \\ \text{si } 0 < z \leq 1 & \rightarrow = F(0) + \int_0^z 0'2 \cdot dx = 0'2 \cdot z \\ \text{si } 1 < z < 2 & \rightarrow = F(1) + \int_1^z 0 \cdot dx = 0'2 \\ \text{si } 2 \leq z \leq 3 & \rightarrow = F(2^-) + P(X = 2) + \int_2^z 0 \cdot dx = 0'3 \\ \text{si } 3 < z \leq 4 & \rightarrow = F(3) + \int_3^z \left( \frac{2 \cdot x}{35} + \frac{1}{2} \right) \cdot dx = \frac{2 \cdot z^2 + 35 \cdot z - 102}{70} \\ \text{si } z > 4 & \rightarrow = F(4) + \int_4^z 0 \cdot dx = 1 \end{cases}$$

## **FONEMATO 2.7.9**

Siendo los costes fijos igual a la unidad, la función de distribución de la variable aleatoria "X" que expresa el coste total de una empresa es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Determinése la función de densidad de los costes variables.
- 2) Determinése el coste variable esperado.
- 3) Determinése la probabilidad de que el coste variable sea superior a 1'3.
- 4) Determinése la probabilidad de que el coste variable esté entre 0'3 y 0'7.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Si el coste fijo es 1 y el coste total es "X", el coste variable está expresado por la variable  $Z = X - 1$ . La función de distribución de "Z" es

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X - 1 \leq z) = P(X \leq 1 + z) = F(1 + z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

en la expresión matemática de  $F(x)$  sustituimos "x" por " $1 + z$ "

$$2) E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot f_Z(z) \cdot dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \frac{dF_Z(z)}{dz} \cdot dz = \int_0^1 z \cdot 1 \cdot dz = \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

**Latiguillo de remate:** el que  $E(Z) = 2/5$  significa que al concentrar la unidad de masa de probabilidad asociada a "Z" en el punto  $1/2$  de la recta real, obtenemos la única variable degenerada cuyo momento de primer orden respecto al origen coincide con el momento de primer orden de "Z" respecto al origen.

- 3)  $P(Z > 1'3) = 1 - P(Z \leq 1'3) = 1 - F_Z(1'3) = 1 - 1 = 0$
- 4)  $P(0'3 \leq Z \leq 0'7) = P(Z \leq 0'7) - P(Z < 0'3) = F_Z(0'7) - F_Z(0'3) = 0'7 - 0'3$

## **FONEMATO 2.7.10**

Sea "X" una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0'4 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0'05 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ k & \text{si } 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- 1) Determinése la función de distribución.
- 2) Calcúlese  $P(3 < X \leq 10)$  utilizando la función de densidad.
- 3) Determinése  $E(X^{2'5})$ .

### **SOLUCIÓN**

- 1) Primero hay que calcular el valor de "k", y para ello **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx &= 1 \Rightarrow \int_0^1 0'4.dx + \int_2^4 0'05.dx + \int_8^{12} k.dx = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0'4.(x)_0^1 + 0'05.(x)_2^4 + k.(x)_8^{12} = 1 \Rightarrow 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

- La función de distribución de "X" es la  $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $F(z) = P(X < z)$ :

$$F(z) = \begin{cases} \text{si } z < 0 & \rightarrow = \int_{-\infty}^z 0.dx = 0 \\ \text{si } 0 < z \leq 1 & \rightarrow = F(0^-) + \int_0^z 0'4.dx = 0'4.z \\ \text{si } 1 < z < 2 & \rightarrow = F(1) + \int_1^z 0.dx = 0'4 \\ \text{si } 2 \leq z \leq 4 & \rightarrow = F(2^-) + \int_2^z 0'05.dx = 0'3 + 0'05.z \\ \text{si } 4 < z < 8 & \rightarrow = F(4) + \int_4^z 0.dx = 0'5 \\ \text{si } 8 \leq z \leq 12 & \rightarrow = F(8^-) + \int_8^z \frac{1}{8}.dx = \frac{z}{8} - 0'5 \\ \text{si } z > 12 & \rightarrow = 1 \end{cases}$$

$$2) \quad P(3 < X \leq 10) = \int_3^4 0'05.dx + \int_4^8 0.dx + \int_8^{10} \frac{1}{8}.dx = \dots = 0'3$$

$$\begin{aligned} 3) \quad E(X^{2'5}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2'5}.f(x).dx = \\ &= \int_0^1 0'4.x^{2'5}.dx + \int_2^4 0'05.x^{2'5}.dx + \int_8^{12} \frac{1}{8}.x^{2'5}.dx = \dots = \frac{9503}{58} \end{aligned}$$

### **FONEMATO 2.7.11 (VARIABLE NORMAL TIPIFICADA)**

Calcúlense la media y la varianza de la variable "X" cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

#### **SOLUCIÓN**

- **Como la función de densidad es "par"** (o sea,  $f(-x) = f(x)$ ), **son nulos todos los momentos de orden impar de "X" respecto al origen**; en particular, la media  $E(X)$  es cero.

- Es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - 0^2 = 1$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \\ &\text{pues } t(x) = x^2 \cdot f(x) \text{ es "par"; o sea: } t(-x) = t(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} (2 \cdot z) \cdot e^{-z} \cdot z^{-1/2} \cdot dz = \\ &x^2/2 = z \Rightarrow x = \sqrt{2} \cdot z^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot z^{-1/2} \cdot dz \\ &\text{Los límites de integración no cambian} \\ &\text{Si } k > 0, \text{ es } \Gamma(k) = \int_0^{+\infty} z^{k-1} \cdot e^{-z} \cdot dz = (k-1) \cdot \Gamma(k-1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} z^{1/2} \cdot e^{-z} \cdot dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1 \\ &\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

**VENTANA**

De la variable "X" se dice que tiene distribución **normal de parámetros 0 y 1 (o normal tipificada)**, y se escribe  $X \approx N(0;1)$ .

Ésta es la variable con la que trabajemos más frecuentemente; su función de distribución es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot dx$$

La integral es tan petarda que **el valor de  $F(z)$  está tabulado para ciertos valores de "z"**, lo que es un estupendo, pues esa **tabulación nos ahorrará el uso de integrales a la hora de calcular probabilidades de sucesos relacionados con una variable aleatoria  $N(0;1)$** .

### **FONEMATO 2.7.12 (VARIABLE NORMAL NO TIPIFICADA)**

Calcúlense  $E(X)$  y  $V(X)$  si la función de densidad de probabilidad de "X" es

$$f(x) = \frac{1}{b \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-(x-a)^2 / 2 \cdot b^2}, \quad x \in \mathbb{R}, b > 0$$

#### **SOLUCIÓN**

- Como la función de densidad probabilidad de la variable "X" es simétrica respecto al punto "a" (pues  $f(a-x) = f(a+x)$ ), es  $E(X) = a$ .
- En vez de calcular la varianza usando la formulita  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ , lidiaremos a lo bestia, porque en este caso es más cómodo:

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = b^2$$

$$E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_a^{+\infty} (x - a)^2 \cdot f(x) \cdot dx =$$

pues  $t(x) = (x - a)^2 \cdot f(x)$  es simétrica respecto del punto "a"

$$= \frac{2}{b \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^{+\infty} (x - a)^2 \cdot e^{-(x-a)^2 / 2 \cdot b^2} \cdot dx =$$

$$(x - a)^2 / 2 \cdot b^2 = z \Rightarrow x = a + \sqrt{2} \cdot b \cdot z^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{b \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot z^{-1/2} \cdot dz$$

$$\text{Si } \begin{cases} x = a \Rightarrow (a - a)^2 / 2 \cdot b^2 = z \Rightarrow z = 0 \\ x = +\infty \Rightarrow z = +\infty \end{cases}$$

$$= \frac{2 \cdot b^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} z^{1/2} \cdot e^{-z} \cdot dz = \frac{2 \cdot b^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$\text{Si } k > 0, \text{ es } \Gamma(k) = \int_0^{+\infty} z^{k-1} \cdot e^{-z} \cdot dz = (k-1) \cdot \Gamma(k-1)$$

$$= \frac{2 \cdot b^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot b^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = b^2$$

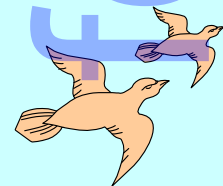
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

**VENTANA**

De "X" se dice que tiene distribución **normal de parámetros "a" y "b" (o normal no tipificada)**, y se escribe  $X \approx N(a; b)$ .

En su momento veremos que si  $X \approx N(a; b)$ , la variable  $(X - a)/b$  tiene distribución  $N(0; 1)$ ... y este **gran chollo** nos permitirá usar la tabla de la función de distribución de la variable  $N(0; 1)$  para calcular probabilidades de sucesos relacionados con la variable  $X \approx N(a; b)$ , pues

$$\begin{aligned} P(X \leq z) &= P\left(\frac{X - a}{b} \leq \frac{z - a}{b}\right) = \\ &= P\left(N(0; 1) \leq \frac{z - a}{b}\right) = \text{miramos en la tabla} \end{aligned}$$



### FONEMATO 2.7.13 (VARIABLE GAMMA)

Calcúlense la media y la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-a \cdot x}, \quad x > 0, a > 0, n > 0$$

#### SOLUCIÓN

• Es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot dx =$$
$$= \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-a \cdot x} \cdot dx = \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} z^n \cdot e^{-z} \cdot dz =$$

$$a \cdot x = z \Rightarrow x = z/a \Rightarrow dx = dz/a$$

Los límites de integración no cambian

$$= \frac{1}{a \cdot \Gamma(n)} \cdot \Gamma(n+1) = \frac{1}{a \cdot \Gamma(n)} \cdot n \cdot \Gamma(n) = \frac{n}{a}$$

$$\text{Si } k > 0, \text{ es } \Gamma(k) = \int_0^{+\infty} z^{k-1} \cdot e^{-z} \cdot dz = (k-1) \cdot \Gamma(k-1)$$

• Es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n \cdot (n+1)}{a^2} - \frac{n^2}{a^2} = \frac{n}{a^2}$$

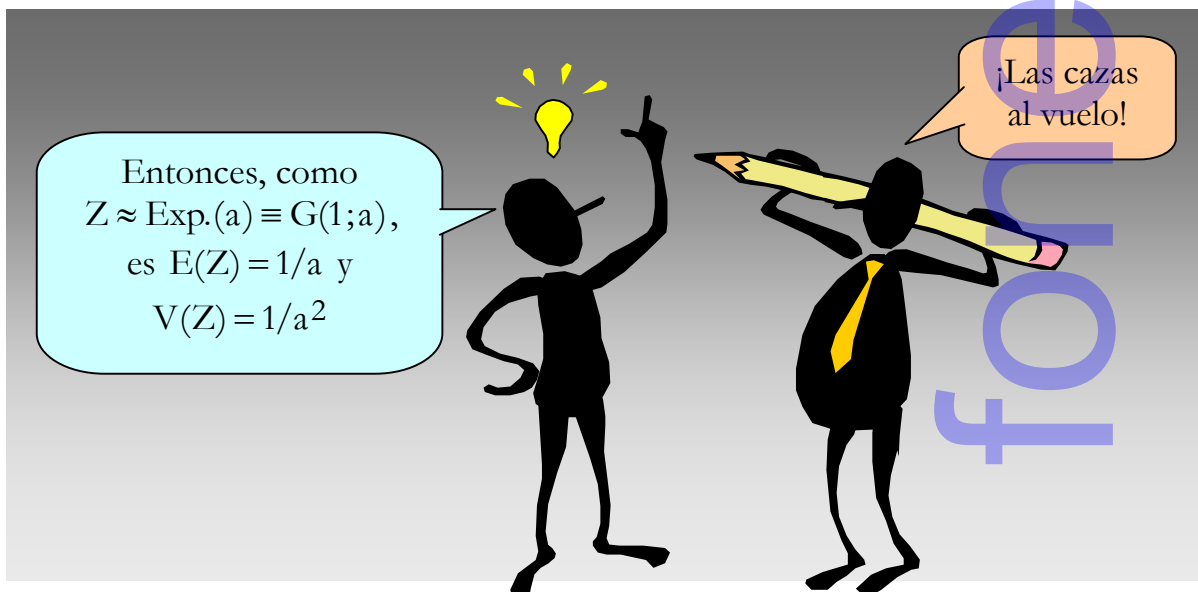
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot dx =$$
$$= \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{+\infty} x^{n+1} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot dx = \frac{a^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{a^{n+2}} \int_0^{+\infty} z^{n+1} \cdot e^{-z} \cdot dz =$$

$$a \cdot x = z \Rightarrow x = z/a \Rightarrow dx = dz/a$$

Los límites de integración no cambian

$$= \frac{1}{a^2 \cdot \Gamma(n)} \cdot \Gamma(n+2) = \frac{1}{a^2 \cdot \Gamma(n)} \cdot (n+1) \cdot n \cdot \Gamma(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{a^2}$$

VENTANA



### **FONEMATO 2.7.14 (VARIABLE BETA)**

Calcúlense la media y la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p; q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1, p > 0, q > 0$$

#### **SOLUCIÓN**

• Es:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\beta(p; q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx =$

$$= \frac{1}{\beta(p; q)} \cdot \int_0^1 x^p \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \frac{\beta(p+1; q)}{\beta(p; q)} =$$

Si  $m > 0$  y  $n > 0$ , es  $\beta(m; n) = \int_0^1 x^{m-1} \cdot (1-x)^{n-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(p+1) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p+1) \cdot \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) \cdot \Gamma(p+q)} = \\ & = \frac{p \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot (p+q) \cdot \Gamma(p+q)} = \frac{p}{p+q} \end{aligned}$$

• Es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{p+1}{(p+q+1) \cdot (p+q)} - \left( \frac{p}{p+q} \right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{\beta(p; q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\beta(p; q)} \cdot \int_0^1 x^{p+1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \frac{\beta(p+2; q)}{\beta(p; q)} =$$

$$= \frac{\beta(p+2; q)}{\beta(p; q)} = \frac{\Gamma(p+2) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{\Gamma(p+2) \cdot \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) \cdot \Gamma(p+q)} =$$

$$= \frac{(p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot (p+q+1) \cdot (p+q) \cdot \Gamma(p+q)} = \frac{p+1}{(p+q+1) \cdot (p+q)}$$

**No entiendes realmente algo si no eres capaz de explicárselo a tu abuel@.**

## FONEMATO 2.7.15

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el gasto mensual (en millones de euros) de una empresa es

$$f(x) = k \cdot (x - x^2), \quad 0 < x < 1$$

- 1) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea superior al gasto medio.
- 2) Calcúlese la varianza del gasto.
- 3) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea de 400000 euros.
- 4) Calcúlese la probabilidad de que el gasto sea superior a 700000 euros.
- 5) Calcúlense la media y la varianza de  $Z = 9 - 3 \cdot X$

### SOLUCIÓN

- 1) Para determinar "k" **exigimos** que la masa total de probabilidad sea la unidad:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx &= 1 \Rightarrow \int_0^1 k \cdot (x - x^2) \cdot dx = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow k = 6 \end{aligned}$$

Es:  $P(X > E(X)) = P\left(X > \frac{1}{2}\right) =$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = 6 \cdot \int_0^1 x \cdot (x - x^2) \cdot dx = 6 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$= \int_{1/2}^1 f(x) \cdot dx = 6 \cdot \int_{1/2}^1 (x - x^2) \cdot dx = \dots$$

- 2) Es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = 6 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot (x - x^2) \cdot dx = \\ &= 6 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{5} \cdot x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

**Latiguillo de remate:** es una medida de la dispersión que respecto a su centro de gravedad (media) tiene la distribución de masa de probabilidad asociada a la variable aleatoria "X".

- 3) **La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor concreto es 0;** por tanto,  $P(X = 0.4) = 0$ .

4) Es:  $P(X > 0.7) = \int_{0.7}^1 f(x) \cdot dx = 6 \cdot \int_{0.7}^1 (x - x^2) \cdot dx = \dots$

5) Es:  $E(Z) = E(9 - 3 \cdot X) = 9 - 3 \cdot E(X) = 9 - 3 \cdot \frac{1}{2}$

$$V(Z) = V(9 - 3 \cdot X) = V(-3 \cdot X) = (-3)^2 \cdot V(X) = 9 \cdot \frac{1}{20}$$

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

## **FONEMATO 2.7.16**

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la demanda mensual de ilusiones es  $f(x) = k \cdot x$ ,  $0 \leq x \leq 4$ .

Determinense el cuantil de orden 0'9, el primer cuartil, la mediana y la moda.

### **SOLUCIÓN**

- Para determinar "k" **exigimos** que la masa de probabilidad sea la unidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \Rightarrow \int_0^4 k \cdot x \cdot dx = 1 \Rightarrow k \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot x^2 \right)_0^4 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

- Se dice que "x" es el **cuantil** de orden "q" ( $0 < q < 1$ ) de una variable aleatoria "X" si "x" es el menor valor tal que  $P(X \leq x) \geq q$ .

Si "X" es continua y "F" es su función de distribución, el cuantil de orden "q" es la solución de la ecuación  $F(x) = q$ .

- **Como hay que calcular un montón de probabilidades, merece la pena determinar la función de distribución de la variable "X";** siendo  $z \in [0; 4]$ , es:

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_0^z \frac{x}{8} \cdot dx = \left( \frac{x^2}{16} \right)_0^z = \frac{z^2}{16}$$

- El **cuantil** de orden 0'9 (también llamado noveno decil o noagésimo percentil) corresponde al punto "z" tal que  $F(z) = P(X \leq z) = 0'9$ :

$$\frac{z^2}{16} = 0'9 \Rightarrow z = \sqrt{16 \cdot 0'9}$$

- El **primer cuartil** (también llamado vigésimo quinto percentil) corresponde al punto "z" tal que  $F(z) = P(X \leq z) = 1/4$

$$\frac{z^2}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow z = 2$$

- La **mediana** (también llamada segundo cuartil, quinto decil o quincuagésimo percentil) corresponde al punto "z" tal que  $F(z) = P(X \leq z) = 1/2$

$$\frac{z^2}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \sqrt{8}$$

- La **moda** corresponde al punto "x" en el que la función de densidad de probabilidad presenta su máximo absoluto.

En nuestro caso, siendo  $f(x) = x/8$  creciente en el intervalo  $[0; 4]$ , su máximo absoluto se presenta en el extremo superior del intervalo; es decir, en el punto  $x = 4$ .

**¡Ojo!, la moda puede no ser única.**

### **FONEMATO 2.7.17**

La función de cuantía de la variable aleatoria "X" es

|                 |      |     |     |      |     |     |     |
|-----------------|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|
| x               | -1   | 2   | 4   | 7    | 11  | 15  | 20  |
| f(x) = P(X = x) | 0'05 | 0'2 | 0'2 | 0'15 | 0'1 | 0'1 | 0'2 |

Determinense el cuantil de orden 0'9, el primer cuartil, la mediana y la moda.

### **SOLUCIÓN**

- Se dice que "x" es el cuantil de orden "q" ( $0 < q < 1$ ) de la variable aleatoria "X" si "x" es el menor valor tal que  $P(X \leq x) \geq q$ .
- Determinemos la función de distribución de "X":

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0'00 & \text{si } x < -1 \\ 0'05 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 0'25 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0'45 & \text{si } 4 \leq x < 7 \\ 0'60 & \text{si } 7 \leq x < 11 \\ 0'70 & \text{si } 11 \leq x < 15 \\ 0'80 & \text{si } 15 \leq x < 20 \\ 1'00 & \text{si } x \geq 20 \end{cases}$$

- El cuantil de orden 0'9 (también llamado noveno decil o nonagésimo percentil) es el menor valor de "x" tal que  $F(x) = P(X \leq x) \geq 0'9$ ; o sea, el punto  $x = 20$ .
- El primer cuartil (también llamado vigésimo quinto percentil) es el menor valor de "x" tal que  $F(x) = P(X \leq x) \geq 0'25$ ; o sea, el punto  $x = 2$ .
- La mediana (también llamada segundo cuartil, quinto decil o quincuagésimo percentil) es el menor valor de "x" tal que  $F(x) = P(X \leq x) \geq 0'50$ ; o sea, la mediana es  $x = 7$ .
- La moda de una variable discreta corresponde al valor más probable de ésta. En nuestro caso hay tres modas: 2, 4 y 20.

## **FONEMATO 2.7.18**

La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa la renta de los ciudadanos (en decenas de miles de dólares) es

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in [1;2] \\ 3-x & \text{si } x \in [2;3] \end{cases}$$

- 1) Calcúlese la probabilidad de que la renta no sea inferior a 25000 \$.
- 2) Determinése la renta que no superan el 35 % de los ciudadanos, y la que no superan el 65 %.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Es:  $P(X \geq 2'5) = \int_{2'5}^{+\infty} f(x).dx = \int_{2'5}^3 (3-x).dx = \dots = \frac{1}{8}$
- 2) Debemos determinar el punto  $c \in [1;3]$  tal que  $P(X \leq c) = 0'35$ . Veamos si algún punto del intervalo  $[1;2]$  satisface la anterior condición:

$$\begin{aligned} P(X \leq c) = 0'35 &\Rightarrow \int_{-\infty}^c f(x).dx = 0'35 \Rightarrow \int_1^c (x-1).dx = 0'35 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot ((x-1)^2)_1^c = 0'35 \Rightarrow \frac{(c-1)^2}{2} = 0'35 \Rightarrow c = 1 + \sqrt{0'7} \cong 1'8366 \in [1;2] \end{aligned}$$

Por tanto, la renta del 35 % de los ciudadanos no supera los 18366 \$.

- Debemos determinar el punto  $c \in [1;3]$  tal que  $P(X \leq c) = 0'65$ . Veamos si algún punto del intervalo  $[1;2]$  satisface la anterior condición:

$$\begin{aligned} P(X \leq c) = 0'65 &\Rightarrow \int_{-\infty}^c f(x).dx = 0'65 \Rightarrow \int_1^c (x-1).dx = 0'65 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot ((x-1)^2)_1^c = 0'65 \Rightarrow \frac{(c-1)^2}{2} = 0'65 \Rightarrow c = 1 + \sqrt{1'3} \notin [1;2] \end{aligned}$$

Obvio: como el punto buscado "c" no está en el intervalo  $[1;2]$ , lo buscamos en el intervalo  $[2;3]$ :

$$\begin{aligned} P(X \leq c) = 0'65 &\Rightarrow \int_{-\infty}^c f(x).dx = 0'65 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_1^2 (x-1).dx + \int_2^c (3-x).dx = 0'65 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot ((x-1)^2)_1^2 - \frac{1}{2} \cdot ((3-x)^2)_2^c = 0'65 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow c = 3 - \sqrt{0'7} \cong 2'1633 \in [2;3] \end{aligned}$$

Por tanto, la renta del 65 % de los ciudadanos no supera los 21633 \$.

## FONEMATO 2.7.19

La función de densidad de la demanda "X" de escabondrios es

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } x \in [0;4] \\ (12-x)/64 & \text{si } x \in (4;12] \end{cases}$$

El beneficio "U" depende de la demanda:  $U = \begin{cases} -5 & \text{si } X < 2 \\ 5 & \text{si } 2 \leq X < 4 \\ 10 & \text{si } 4 \leq X < 8 \\ 15 & \text{si } 8 \leq X \leq 12 \end{cases}$

- 1) Determinése la demanda esperada.
- 2) Determinése el beneficio esperado y la varianza del beneficio.

### SOLUCIÓN

- 1) Es:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8} \cdot dx + \int_4^{12} x \cdot \frac{12-x}{64} \cdot dx = \dots = \frac{13}{3}$
- 2) El beneficio lo expresa la variable discreta "U" que respectivamente toma los valores -5, 5, 10 y 15 si ocurren los sucesos  $X < 2$ ,  $2 \leq X < 4$ ,  $4 \leq X < 8$ . y  $8 \leq X \leq 12$ .

**Como hay que calcular un montón de probabilidades relacionadas con la variable "X", merece la pena invertir unos segundos en obtener su función de distribución:**

$$F(z) = P(X \leq z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{dx}{8} = \frac{z}{8}, & \text{si } 0 \leq z \leq 4 \\ F(4) + \int_4^z \frac{12-x}{64} \cdot dx = \frac{24 \cdot z - z^2 - 16}{128}, & \text{si } 4 < z \leq 12 \end{cases}$$

- La función de probabilidad de la variable "U" es:

|          |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| u        | -5  | 5   | 10  | 15  |
| P(U = u) | 2/8 | 2/8 | 3/8 | 1/8 |

#### VENTANA

$$\begin{aligned} * P(U = -5) &= P(X < 2) = P(X \leq 2) = F(2) = 2/8 \\ * P(U = 5) &= P(2 \leq X < 4) = P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = \\ &= F(4) - F(2) = (4/8) - (2/8) = 1/8 \\ * P(U = 10) &= P(4 \leq X < 8) = P(4 < X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 4) = \\ &= F(8) - F(4) = \frac{24 \cdot 8 - 8^2 - 16}{128} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8} \\ * P(U = 15) &= 1 - P(U = -5) - P(U = 5) - P(U = 10) = 1/8 \end{aligned}$$

- Es:  $E(U) = (-5) \cdot \frac{2}{8} + 5 \cdot \frac{2}{8} + 10 \cdot \frac{3}{8} + 15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{45}{8}$

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 = \frac{625}{8} - \left(\frac{45}{8}\right)^2$$

$$E(U^2) = (-5)^2 \cdot \frac{2}{8} + 5^2 \cdot \frac{2}{8} + 10^2 \cdot \frac{3}{8} + 15^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{625}{8}$$

## **FONEMATO 2.7.20**

El momento factorial de una variable aleatoria "X" se denota  $m(k)$ , siendo

$$m(k) = E(X \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot \dots \cdot (X-k+1))$$

- 1) Determinése una expresión de  $V(X)$  en función de los momentos factoriales.
- 2) Si  $E(X) = 0$ ,  $V(X) = 1$  y  $m(3) = 1$ , determinése el coeficiente de asimetría de la variable "X".

### **SOLUCIÓN**

1) Es:  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = m(2) + m(1) - (m(1))^2$

\*  $m(1) = E(X - 1 + 1) = E(X) \Rightarrow (E(X))^2 = (m(1))^2$

\*  $m(2) = E(X \cdot (X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow E(X^2) = m(2) + E(X) = m(2) + m(1)$

**VENTANA**

$E(X) = m(1)$

2) Es:

$$\gamma_1 = \frac{E((X - E(X))^3)}{(\sqrt{V(X)})^3} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\begin{aligned} E((X - E(X))^3) &= E(X^3 - 3X^2 \cdot E(X) + 3X \cdot (E(X))^2 - (E(X))^3) = \\ &= E(X^3) - 3E(X^2) \cdot E(X) + 3E(X) \cdot (E(X))^2 - (E(X))^3 = \\ &= E(X^3) - 3E(X^2) \cdot E(X) + 2(E(X))^3 = E(X^3) = 4 \end{aligned}$$

**VENTANA**

pues se nos dice que  $E(X) = 0$

$$\begin{aligned} m(3) = 1 &\Rightarrow E(X \cdot (X-1) \cdot (X-2)) = 1 \Rightarrow E(X^3 - 3X^2 + 2X) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E(X^3) - 3E(X^2) + 2E(X) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E(X^3) = 1 + 3E(X^2) - 2E(X) = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$E(X) = 0$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 \Rightarrow E(X^2) = 1$ , pues  $E(X) = 0$

Como  $\gamma_1 > 0$ , la distribución de probabilidad está sesgada hacia la derecha.

## **FONEMATO 2.7.21**

Determinése el momento de orden 4 de la variable aleatoria "X" respecto de su media si  $E(X^k) = 2 \cdot k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

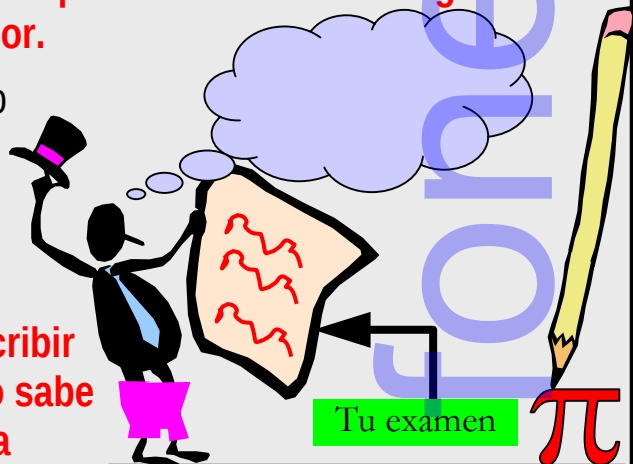
### **SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} E((X - E(X))^4) &= E((X - 2)^4) = \\ &= \binom{4}{0} \cdot E(X^4) + \binom{4}{1} \cdot (-2) \cdot E(X^3) + \binom{4}{2} \cdot (-2)^2 \cdot E(X^2) + \\ &\quad + \binom{4}{3} \cdot (-2)^3 \cdot E(X) + \binom{4}{4} \cdot (-2)^4 = \\ &= 8 + 4 \cdot (-2) \cdot 6 + 6 \cdot (-2)^2 \cdot 4 + 4 \cdot (-2)^3 \cdot 2 + (-2)^4 \end{aligned}$$

## **EL PROFESOR QUE CORRIGE EL EXAMEN**

Todos los profesores son de la misma opinión: corregir exámenes no gusta a nadie, no es trabajo agradable enfrentarse por n-ésima vez a la tarea de leer y puntuar un montón de folios escritos por principiantes que en la mayoría de los casos no tienen ni idea y sólo escriben barbaridades y estupideces sobre el asunto de sota, caballo y rey que por j-ésima vez cae en examen. Por eso, **cuando un profe se sienta a corregir exámenes no suele estar de buen humor.**

Así las cosas, lo que escribamos o dibujemos en examen debe **diferenciarnos positivamente** de los demás, y para conseguir tal diferenciación y que **al profe se le caigan los pantalones**, basta **escribir o dibujar pensando que no se lo sabe y por tanto hay que llevarle de la mano**, explicándole todos los aspectos relevantes de las **conexiones neuronales** que establezcamos en cada caso.



## FONEMATO 2.7.22 (VARIABLE GEOMÉTRICA)

Determinense  $E(X)$  y  $V(X)$  si la función de cuantía de "X" es

$$P(X = x) = p \cdot q^{x-1} ; p > 0, q > 0, p + q = 1, x = 1, 2, 3, \dots$$

### SOLUCIÓN

- $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p \cdot q^{x-1} = \\ &= p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

VENTANA

Astutamente, observamos que  $x \cdot q^{x-1} = d(q^x)/dq$ ; por tanto:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d(q^x)}{dq} = \frac{d}{dq} \left( \sum_{x=1}^{\infty} q^x \right) = \frac{d}{dq} \left( \frac{q}{1-q} \right) = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} q^x = q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q}{1-q}$$

estamos ante una serie geométrica de razón "q"; como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie es convergente, y su suma es  $\frac{\text{primer sumando}}{1 - \text{razón}} = \frac{q}{1-q}$

- $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

VENTANA

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot P(X = x) = p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot q^{x-1} = \frac{2-p}{p^2}$$

Astutamente, observamos que  $x^2 \cdot q^{x-1} = d(x \cdot q^x)/dq$ ; por tanto:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot q^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d(x \cdot q^x)}{dq} = \frac{d}{dq} \left( \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^x \right) = \frac{d}{dq} \left( q \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} \right) =$$

$$\text{Hace un momento hemos visto que } \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{d}{dq} \left( \frac{q}{(1-q)^2} \right) = \frac{(1-q)^2 + 2 \cdot q \cdot (1-q)}{(1-q)^4} = \frac{(1-q) + 2 \cdot q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^3} =$$

$$= \frac{1 + (1-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^3}$$

pues  $q = 1 - p$

### **FONEMATO 2.7.23**

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria "X" que sólo toma valores en el intervalo  $[0;1]$  es proporcional a  $m \cdot x + n$ .

Determinense "m" y "n" sabiendo que  $E(X) = 4/7$  y  $E(X^2) = 17/42$ .

### **SOLUCIÓN**

Sea "f" la función de densidad de probabilidad de la variable "X".

- Siempre hay algún principiante que al leer que "f" es proporcional a " $m \cdot x + n$ " escribe  $f(x) = k \cdot (m \cdot x + n)$ , donde "k" es la constante de proporcionalidad.

No hace falta introducir "k" en la historia, pues al escribir

$$f(x) = k \cdot (m \cdot x + n) = k \cdot m \cdot x + k \cdot n = c \cdot x + d$$

$$k \cdot m = c ; k \cdot n = d$$

de nuevo encontramos una función lineal  $f(x) = (\text{constante}) \cdot x + (\text{constante})$ , y así no ganamos nada.

**Exijamos** que  $E(X) = 4/7$  y  $E(X^2) = 17/42$ :

$$E(X) = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{m}{3} + \frac{n}{2} = \frac{4}{7} \quad (\text{I})$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot (m \cdot x + n) \cdot dx = \dots = \frac{m}{3} + \frac{n}{2}$$

$$E(X) = \frac{17}{42} \Rightarrow \frac{m}{4} + \frac{n}{3} = \frac{17}{42} \quad (\text{II})$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot (m \cdot x + n) \cdot dx = \dots = \frac{m}{4} + \frac{n}{3}$$

Suicídase si no sabe resolver el sistema de ecuaciones que forman (I) y (II).

## **FONEMATO 2.7.24**

Siendo "X" y "Z" variables aleatorias tales que  $Z = a + b.X$ , demuéstrese que tienen los mismos coeficientes de asimetría y de curtosis.

### **SOLUCIÓN**

En general, siendo  $Z = a + b.X$  y "k" un número natural, es:

$$\begin{aligned} E((Z - E(Z))^k) &= E((a + b.X - E(a + b.X))^k) = \\ &= E((a + b.X - a - b.E(X))^k) = E((b.X - b.E(X))^k) = \\ &= E((b.(X - E(X)))^k) = b^k.E((X - E(X))^k) \end{aligned}$$

Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los respectivos coeficientes de asimetría y de curtosis de "X":

$$\gamma_1 = \frac{E((X - E(X))^3)}{(\sqrt{E((X - E(X))^2)})^3} ; \gamma_2 = \frac{E((X - E(X))^4)}{(E((X - E(X))^2))^2} - 3$$

Siendo  $\gamma_1^*$  y  $\gamma_2^*$  los respectivos coeficientes de asimetría y de curtosis de "Z", es:

$$\begin{aligned} \gamma_1^* &= \frac{E((Z - E(Z))^3)}{(\sqrt{E((Z - E(Z))^2)})^3} = \frac{b^3.E((X - E(X))^3)}{(\sqrt{b^2.E((X - E(X))^2)})^3} = \gamma_1 \\ \gamma_2^* &= \frac{E((Z - E(Z))^4)}{(E((Z - E(Z))^2))^2} - 3 = \frac{b^4.E((X - E(X))^4)}{(b^2.E((X - E(X))^2))^2} - 3 = \gamma_2 \end{aligned}$$

## 2.8 VARIABLE TIPIFICADA

Si la variable aleatoria "X" tiene media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ , la variable aleatoria  $Z = (X - \mu)/\sigma$  tiene media 0 y desviación típica 1:

$$E(Z) = E((X - \mu)/\sigma) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

propiedades de la esperanza
 $E(X) = \mu$

$$V(Z) = V((X - \mu)/\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

propiedades de la varianza
 $V(X) = \sigma^2$

De "Z" se dice que es la **variable tipificada** correspondiente a "X".

## 2.9 TEOREMA DE MARKOV

Siendo "X" una variable aleatoria y  $g(X) \geq 0$  otra variable cuyo valor depende del valor de "X", si existe  $E(g(X))$ , para cada valor positivo  $\lambda$  que fijemos, es:

$$P(g(X) \geq \lambda) \leq \frac{E(g(X))}{\lambda}$$

Supuesto que "X" es discreta y que "f" es su función de probabilidad, se tiene que:

$$E(g(X)) = \sum_x g(x) \cdot f(x) = \sum_{x/g(x) \geq \lambda} g(x) \cdot f(x) + \sum_{x/g(x) < \lambda} g(x) \cdot f(x) \geq$$

$g(x) \geq 0 \text{ y } f(x) \geq 0 \Rightarrow \sum_{x/g(x) < \lambda} g(x) \cdot f(x) \geq 0$

$$\geq \sum_{x/g(x) \geq \lambda} g(x) \cdot f(x) \geq \lambda \cdot \left( \sum_{x/g(x) \geq \lambda} f(x) \right) = \lambda \cdot P(g(X) \geq \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(g(X) \geq \lambda) \leq \frac{E(g(X))}{\lambda}$$

O sea, Markov permite calcular una **cota superior** de la probabilidad del suceso de que una variable  $g(X) \geq 0$  tome un valor no inferior a una cantidad  $\lambda > 0$  fijada de antemano... y para obtener dicha cota basta conocer  $E(g(X))$ .

**Por ejemplo**, siendo  $E(g(X)) = 15$ , si tomamos  $\lambda = 75$ , Markov garantiza que  $P(g(X) \geq 75) \leq 15/75 = 0.2$ .

## 2.10 TEOREMA DE TCHEBYCHEF

Aplicando el teorema de Markov a  $g(X) = (X - E(X))^2$ , resulta:

$$P((X - E(X))^2 \geq \lambda) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\lambda} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{V(X)}{\lambda} \quad (I)$$

$$\text{pues } E((X - E(X))^2) = V(X)$$

Como  $(X - E(X))^2 \geq \lambda \Leftrightarrow |X - E(X)| \geq \sqrt{\lambda} = h > 0$ , podemos expresar (I) así:

$$P(|X - E(X)| \geq h) \leq V(X)/h^2 \quad (II)$$

Recordando que el número  $E(X)$  indica la posición del centro de gravedad de la distribución de masa de probabilidad asociada a la variable "X", la expresión (II) indica que la probabilidad del suceso  $|X - E(X)| \geq h$  de que "X" tome un valor que se diferencie de  $E(X)$  en al menos "h" no es superior a  $V(X)/h^2$ .

Para el suceso  $|X - E(X)| > h$ :

$$P(|X - E(X)| > h) \leq P(|X - E(X)| \geq h) \leq V(X)/h^2 \quad (III)$$

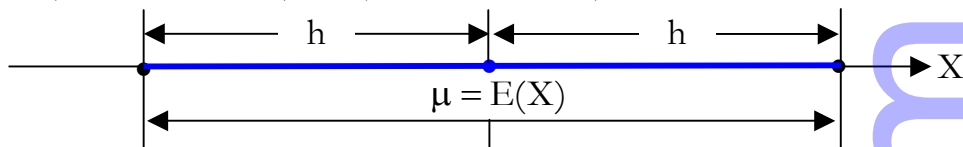
Para el suceso  $|X - E(X)| < h$  complementario del  $|X - E(X)| \geq h$ , es:

$$P(|X - E(X)| < h) = 1 - P(|X - E(X)| \geq h) \stackrel{\uparrow}{\geq} 1 - (V(X)/h^2)$$

$$\text{pues sabemos que } P(|X - E(X)| \geq h) \leq V(X)/h^2$$

Para el suceso  $|X - E(X)| \leq h$ :

$$P(|X - E(X)| \leq h) \geq P(|X - E(X)| < h) \geq 1 - (V(X)/h^2) \quad (IV)$$



La masa que hay en el intervalo  $[\mu-h; \mu+h]$  no es inferior a  $1 - (V(X)/h^2)$ , y la que hay fuera de él no es superior a  $V(X)/h^2$ .

**Por ejemplo**, si  $E(X) = 9$ ,  $V(X) = 5$  y tomamos  $h = 7$ , Tchebychef dice que

$$P(|X - 9| > 7) \leq P(|X - 9| \geq 7) \leq 5/7^2$$

o lo que es igual:

$$P(|X - 9| \leq 7) \geq P(|X - 9| < 7) \geq 1 - \frac{5}{7^2}$$

O sea, Tchebychef garantiza que no es superior a  $5/7^2$  la probabilidad de que la variable "X" tome un valor cuya distancia a 9 sea mayor que 7; y esto es lo mismo que decir que la probabilidad de que la variable "X" tome un valor fuera del intervalo  $(9 - 7; 9 + 7) \equiv (2; 16)$  no es superior a  $5/7^2$ .

Por tanto, la probabilidad de que "X" tome un valor en  $(9 - 7; 9 + 7) \equiv (2; 16)$  no es inferior a  $1 - (5/7^2)$ .

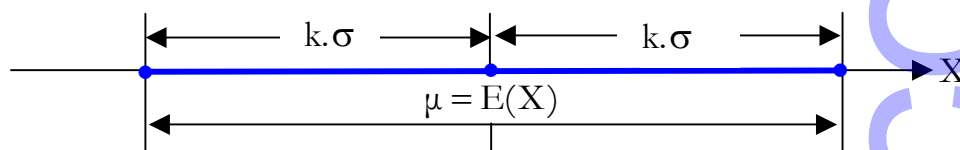
### Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

Siendo  $\sigma$  la desviación típica de "X" (o sea,  $V(X) = \sigma^2$ ), como  $\sigma$  se expresa en las mismas unidades que la variable "X", no es ninguna tontería entronizar a  $\sigma$  como unidad de referencia para medir lo cerca o lejos de  $E(X)$  que están los valores que toma la variable "X"; así, si hacemos  $h = k \cdot \sigma$ , la expresión (III) se transforma en:

$$P(|X - E(X)| > k \cdot \sigma) \leq P(|X - E(X)| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{V(X)}{k^2 \cdot \sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

Y la expresión (IV) se transforma en

$$P(|X - E(X)| \leq k \cdot \sigma) \geq P(|X - E(X)| < k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{V(X)}{k^2 \cdot \sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$



La masa que hay en el intervalo  $[\mu - k \cdot \sigma; \mu + k \cdot \sigma]$  no es inferior a  $1 - (1/k^2)$ , y la que hay fuera de él no es superior a  $1/k^2$

La siguiente tabla recoge las acotaciones que proporciona Tchebychef para distintos valores de "k":

|                                                                                       | Dentro        | Fuera         |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---------------|
| $k = 2 \Rightarrow P( X - E(X)  \leq 2 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0'7500$ | $\geq 0'7500$ | $\leq 0'2500$ |
| $k = 3 \Rightarrow P( X - E(X)  \leq 3 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{3^2} = 0'8889$ | $\geq 0'8889$ | $\leq 0'1111$ |
| $k = 4 \Rightarrow P( X - E(X)  \leq 4 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{4^2} = 0'9375$ | $\geq 0'9375$ | $\leq 0'0625$ |

**Tchebychef es famoso porque sin más que conocer la media y la varianza de una variable aleatoria "X", permite acotar la masa de probabilidad que hay dentro o fuera de un intervalo simétrico respecto al centro de gravedad de la distribución de masa asociada a "X", y ello sin necesidad de conocer la distribución de probabilidad de "X".**

**Nadie se acuerda de Tchebychef si se conoce la distribución de probabilidad de "X",** pues en tal caso puede calcularse con exactitud matemática la masa de probabilidad que hay dentro o fuera de cualquier intervalo **(sólo acota quien no tiene certezas plenas).**

**Por ejemplo,** si "X" es continua y se conoce su función "f" de densidad de probabilidad, entonces:

$$P(|X - E(X)| < k \cdot \sigma) = \int_{E(X) - k \cdot \sigma}^{E(X) + k \cdot \sigma} f(x) \cdot dx$$

$$P(|X - E(X)| \geq k \cdot \sigma) = 1 - P(|X - E(X)| < k \cdot \sigma) = 1 - \int_{E(X) - k \cdot \sigma}^{E(X) + k \cdot \sigma} f(x) \cdot dx$$

## FONEMATO 2.10.1

Si de la variable aleatoria "X" que expresa el número mensual de bostezos de un bípido implume se sabe que tiene media 80 y varianza 25, determínese la probabilidad de los siguientes sucesos:

- |                         |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 01) $76 < X < 84$       | 02) $X \notin (77;83)$  | 03) $65 < X < 95$       |
| 04) $X \notin (70;90)$  | 05) $55 < X < 98$       | 06) $70 < X < 95$       |
| 07) $X < 97$            | 08) $X > 90$            | 09) $X > 65$            |
| 10) $X < 69$            | 11) $66 \leq X \leq 94$ | 12) $57 \leq X \leq 99$ |
| 13) $65 \leq X \leq 99$ | 14) $ X - 80  \geq 20$  | 15) $X \notin (50;99)$  |
| 16) $66 < X \leq 94$    | 17) $60 < X < 70$       | 18) $86 < X < 95$       |

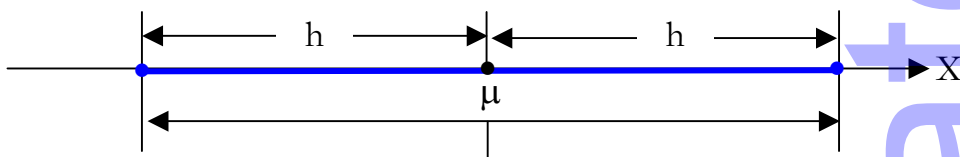
## SOLUCIÓN

Como se desconoce la distribución de probabilidad de "X", ni los japoneses más listos pueden calcular probabilidades de sucesos relacionados con "X"; lo único que puede hacerse es llamar a Tchebychef para acotar probabilidades.

Siendo  $\mu$  y  $V(X)$  las respectivas media y varianza de "X", es:

$$P(|X - \mu| \leq h) \geq P(|X - \mu| < h) \geq 1 - (V(X)/h^2)$$

$$P(|X - \mu| > h) \leq P(|X - \mu| \geq h) \leq V(X)/h^2$$

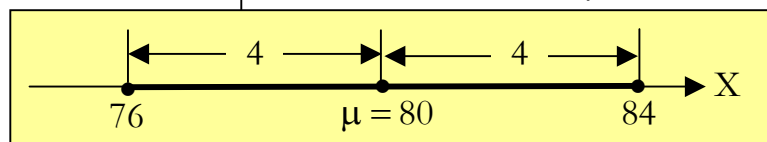


La masa que hay en el intervalo  $[\mu-h; \mu+h]$  no es inferior a  $1 - (V(X)/h^2)$ , y la que hay fuera de él no es superior a  $V(X)/h^2$

En nuestro caso es  $\mu = 80$  y  $V(X) = 25$ .

1) El intervalo  $(76;84)$  contiene a la media  $\mu = 80$  y es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(76 < X < 84) = P(|X - \mu| < 4) \geq 1 - \frac{V(X)}{4^2} = 1 - \frac{25}{16}$$

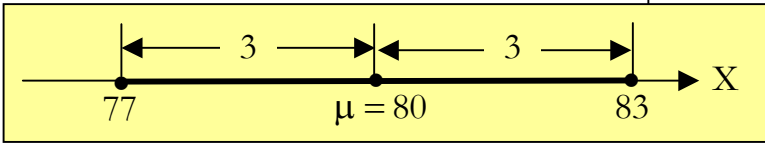


Como  $1 - (25/16) < 0$ , la acotación obtenida es trivial: no hace falta llamarse Tchebychef para proclamar a los 4 vientos que la masa de probabilidad que hay un intervalo es mayor o igual que un número negativo.

Si  $h^2 \leq V(X)$  es  $1 - (V(X)/h^2) \leq 0$ , y en tal caso, la acotación  $P(|X - \mu| \leq h) \geq 1 - (V(X)/h^2)$  se llama de **Perogrullo**



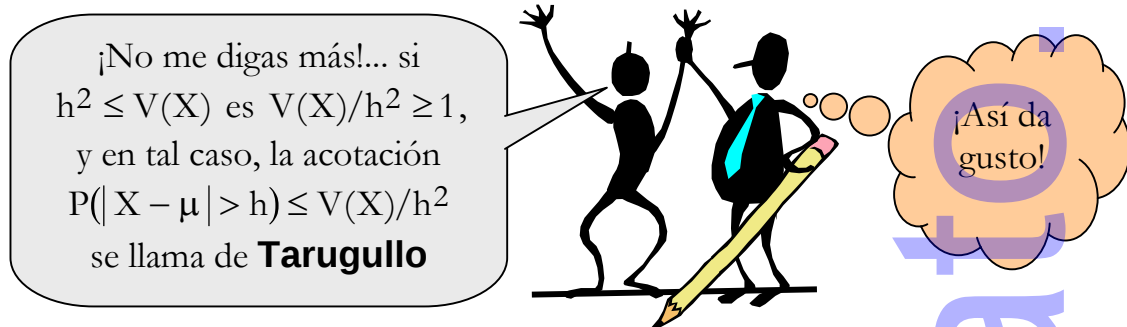
- 2) El intervalo complementario del (77;83) no contiene a la media  $\mu = 80$  y es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(X \notin (77;83)) = 1 - P(77 < X < 83) =$$


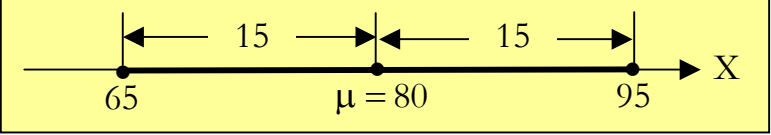
$$= 1 - P(|X - \mu| < 3) \leq 1 - \left(1 - \frac{V(X)}{3^2}\right) = \frac{25}{9}$$

$$P(|X - \mu| < 3) \geq 1 - \frac{V(X)}{3^2}$$

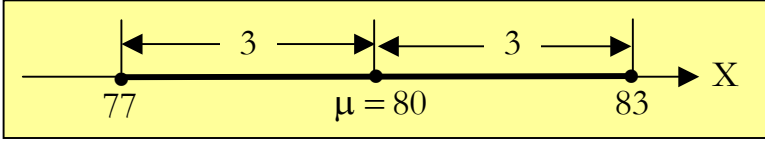
Como  $25/9 > 1$ , la acotación obtenida es trivial: no hace falta llamarse Tchebychef para pregonar por los 5 continentes que la masa de probabilidad que hay un intervalo no es superior a 1.



- 3) El intervalo (65;95) contiene a la media  $\mu = 80$  y es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(65 < X < 95) = P(|X - \mu| < 15) \geq 1 - \frac{V(X)}{15^2} = 1 - \frac{25}{15^2}$$


- 4) El intervalo complementario del (70;90) no contiene a la media  $\mu = 80$  y es simétrico respecto a  $\mu$ .

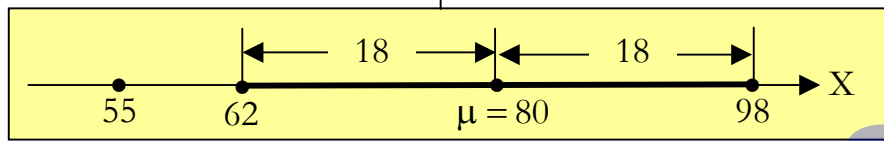
$$P(X \notin (70;90)) = 1 - P(70 < X < 90) =$$


$$= 1 - P(|X - \mu| < 10) \leq 1 - \left(1 - \frac{V(X)}{10^2}\right) = \frac{25}{100}$$

$$P(|X - \mu| < 10) \geq 1 - \frac{V(X)}{10^2}$$

5) El intervalo  $(55;98)$  contiene a  $\mu = 80$  y no es simétrico respecto a  $\mu$ .

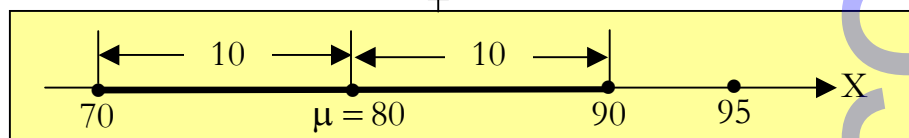
$$P(55 < X < 98) \geq P(62 < X < 98) =$$



$$= P(|X - \mu| < 18) \geq 1 - \frac{V(X)}{18^2} = 1 - \frac{25}{18^2}$$

6) El intervalo  $(70;95)$  contiene a  $\mu = 80$  y no es simétrico respecto a  $\mu$ .

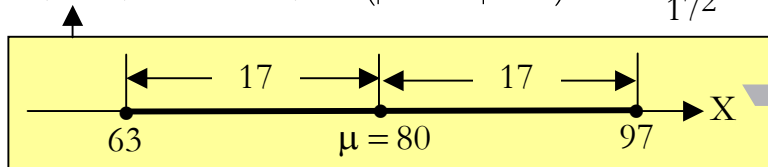
$$P(70 < X < 95) \geq P(70 < X < 90) =$$



$$= P(|X - \mu| < 10) \geq 1 - \frac{V(X)}{10^2} = 1 - \frac{25}{10^2}$$

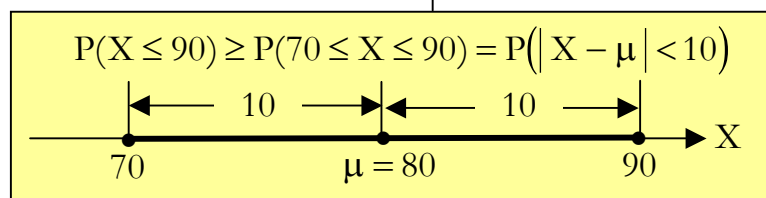
7) El intervalo  $(-\infty;97)$  contiene a  $\mu = 80$  y no es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(X < 97) \geq P(63 < X < 97) = P(|X - \mu| < 17) \geq 1 - \frac{V(X)}{17^2} = 1 - \frac{25}{17^2}$$



8) El intervalo  $(90; +\infty)$  no contiene a  $\mu = 80$  ni es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(X > 90) = 1 - P(X \leq 90) \leq 1 - P(|X - \mu| < 10) \leq$$

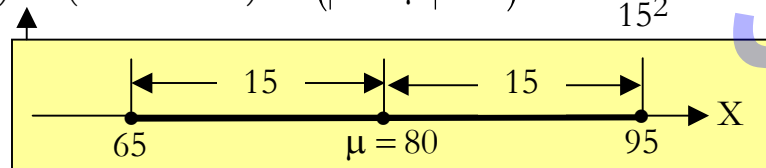


$$\leq 1 - \left(1 - \frac{V(X)}{10^2}\right) = \frac{25}{10^2}$$

$$P(|X - \mu| < 10) \geq 1 - \frac{V(X)}{10^2}$$

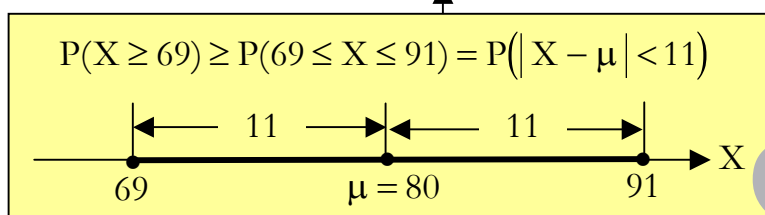
9) El intervalo  $(65; +\infty)$  contiene a  $\mu = 80$  y no es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(X > 65) \geq P(65 < X < 95) = P(|X - \mu| < 15) \geq 1 - \frac{V(X)}{15^2} = 1 - \frac{25}{225}$$



10) El intervalo  $(-\infty; 69)$  no contiene a  $\mu = 80$  ni es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(X < 69) = 1 - P(X \geq 69) \leq 1 - P(|X - \mu| < 11) \leq$$

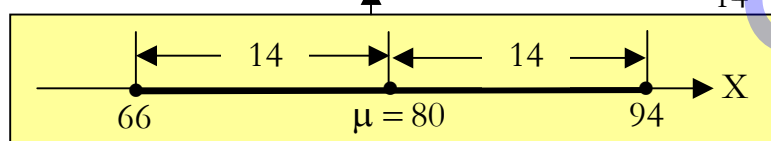


$$\leq 1 - \left(1 - \frac{V(X)}{11^2}\right) = \frac{25}{121}$$

$$P(|X - \mu| < 11) \geq 1 - \frac{V(X)}{11^2}$$

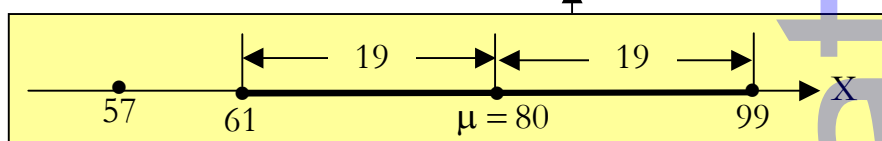
11) El intervalo  $[66; 94]$  contiene a la media  $\mu = 80$  y es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(66 \leq X \leq 94) \geq P(66 < X < 94) = P(|X - \mu| < 14) \geq 1 - \frac{V(X)}{14^2} = 1 - \frac{25}{14^2}$$



12) El intervalo  $[57; 99]$  contiene a  $\mu = 80$  pero no es simétrico respecto a  $\mu$ .

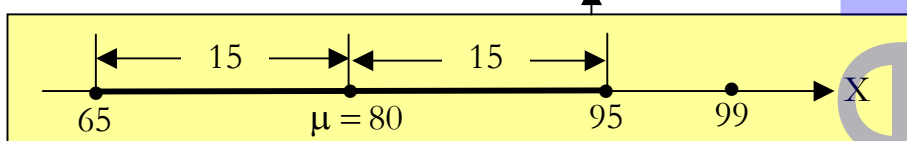
$$P(57 \leq X \leq 99) \geq P(57 < X < 99) \geq P(61 < X < 99) =$$



$$= P(|X - \mu| < 19) \geq 1 - \frac{V(X)}{19^2} = 1 - \frac{25}{19^2}$$

13) El intervalo  $[65; 99]$  contiene a  $\mu = 80$  pero no es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(65 \leq X \leq 99) \geq P(65 < X < 99) \geq P(65 < X < 95) =$$

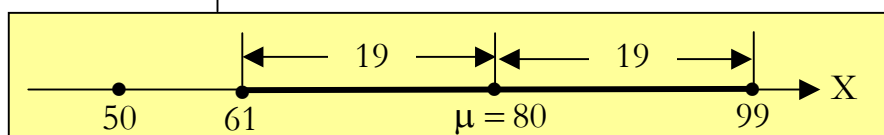


$$= P(|X - \mu| < 15) \geq 1 - \frac{V(X)}{15^2} = 1 - \frac{25}{15^2}$$

$$14) \quad P(|X - 80| \geq 20) \leq \frac{V(X)}{20^2} = \frac{25}{400}$$

15) El intervalo complementario del  $(50; 99)$  no contiene a la media  $\mu = 80$  y no es simétrico respecto a  $\mu$ .

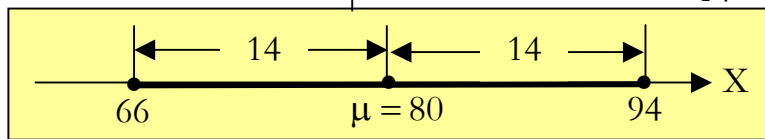
$$P(X \notin (50; 99)) \leq P(X \notin (61; 99)) = P(|X - \mu| \geq 19) \leq \frac{V(X)}{19^2} = \frac{25}{19^2}$$



## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

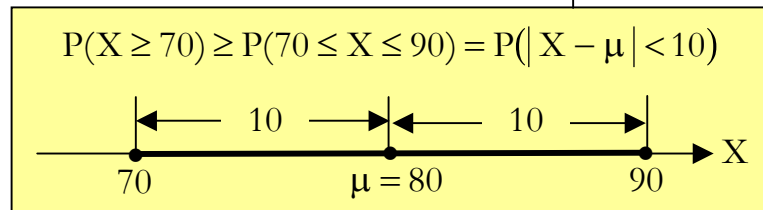
16) El intervalo  $(66;94]$  contiene a  $\mu = 80$  y es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(66 < X \leq 94) \geq P(66 < X < 94) = P(|X - \mu| < 14) \geq 1 - \frac{V(X)}{14^2} = 1 - \frac{25}{14^2}$$



17) El intervalo  $(60;70)$  no contiene a  $\mu = 80$  ni es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(60 < X < 70) < P(X < 70) = 1 - P(X \geq 70) \leq 1 - P(|X - \mu| < 10) \leq$$



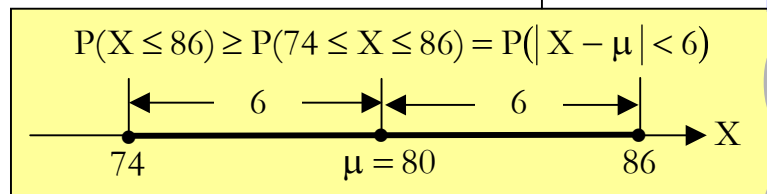
$$P(X \geq 70) \geq P(70 \leq X \leq 90) = P(|X - \mu| < 10)$$

$$\leq 1 - (1 - (V(X)/10^2)) = 25/100$$

$$P(|X - \mu| < 10) \geq 1 - (V(X)/10^2)$$

18) El intervalo  $(86;95)$  no contiene a  $\mu = 80$  ni es simétrico respecto a  $\mu$ .

$$P(86 < X < 95) < P(X > 86) = 1 - P(X \leq 86) \leq 1 - P(|X - \mu| < 6) \leq$$



$$P(X \leq 86) \geq P(74 \leq X \leq 86) = P(|X - \mu| < 6)$$

$$\leq 1 - (1 - (V(X)/6^2)) = 25/36$$

$$P(|X - \mu| < 6) \geq 1 - (V(X)/6^2)$$

## **FONEMATO 2.10.2**

El número de clientes que entran al día en un almacén tiene media 20 y desviación típica 2. Determinése una cota inferior para la probabilidad de que:

- 1) El número de clientes esté entre 16 y 24, ambos exclusive.
- 2) El número de clientes esté entre 17 y 24, ambos inclusive.
- 3) Entren menos de 25 clientes.

### **SOLUCIÓN**

Sea "X" la variable aleatoria que expresa el número de clientes que entran al día en el almacén.

- 1) Como el intervalo (16;24) es simétrico respecto a la media de "X" (20), la aplicación de la desigualdad de Tchebychef es una gilipollez:

$$P(16 < X < 24) = P(|X - 20| < 4) \geq 1 - \frac{V(X)}{4^2} = 1 - \frac{2^2}{4^2} = 0.75$$

- 2) Como el intervalo (17;24) no es simétrico respecto de la media, 20, de "X", la aplicación de la desigualdad de Tchebychef sólo es para listos:

$$P(17 \leq X \leq 24) \geq P(17 \leq X \leq 23) = P(|X - 20| < 3) \geq 1 - \frac{V(X)}{3^2} = 1 - \frac{2^2}{3^2}$$

- 3) Como el intervalo  $(-\infty; 25)$  no es simétrico respecto de la media, 20, de "X", la aplicación de la desigualdad de Tchebychef sólo es para muy listos:

$$P(X < 25) \geq P(15 \leq X \leq 25) = P(|X - 20| < 5) \geq 1 - \frac{V(X)}{5^2} = 1 - \frac{2^2}{5^2}$$



### **FONEMATO 2.10.3**

- 1) Sea "X" una variable aleatoria con media 0 y varianza  $\sigma^2$ . Sea  $Y = a.X$ , siendo  $a > 0$ . Pruébese que  $P(|Y| > h) \leq a^2 \cdot \sigma^2 / h^2$ .
- 2) Imponiendo las condiciones que se consideren oportunas, demuéstrese que dadas las variables "X" y  $g(X)$ , es  $P(g(X) < k) \geq 1 - E(g(X))$ .
- 3) Sean  $\mu$  y  $\sigma^2$  la media y la varianza de la variable "X" cuya función de densidad es  $f(x) = x^2/243$ ,  $x \in [0;9]$ . Determinése  $P(\mu - 2.\sigma \leq X \leq \mu + 2.\sigma)$  y compárese el resultado con la cota de Tchebychef.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Siendo  $E(Y) = E(a.X) = a.E(X) = 0$  y  $V(Y) = V(a.X) = a^2.V(X) = a^2.\sigma^2$ , es:

$$P(|Y - E(Y)| \geq h) = P(|Y - 0| \geq h) \leq V(Y)/h^2 = a^2.\sigma^2/h^2$$

- 2) Se tiene que:

Markov: si  $k > 0$  y  $g(X) \geq 0$ , es  $P(g(X) \geq k) \leq E(g(X))/k$

$$P(g(X) < k) = 1 - P(g(X) \geq k) \geq 1 - (E(g(X))/k) \geq 1 - E(g(X))$$

siendo  $k > 1$ , es  $E(g(X))/k \leq E(g(X))$

- 3) Se tiene que:

$$P(\mu - 2.\sigma \leq X \leq \mu + 2.\sigma) = \int_{\mu-2.\sigma}^{\mu+2.\sigma} f(x).dx = \int_{3'27}^{10'23} f(x).dx = 0'952$$

#### **VENTANA**

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \int_0^9 x.f(x).dx = \dots = 6'75$
- $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^9 x^2.f(x).dx - 6'75^2 = \dots = 3'375$
- Es  $\begin{cases} \mu - 2.\sigma = 6'75 - 2.\sqrt{3'375} = 3'27 \\ \mu + 2.\sigma = 6'75 + 2.\sqrt{3'375} = 10'23 \end{cases}$

Según Tchebychef:

$$\begin{aligned} P(\mu - 2.\sigma \leq X \leq \mu + 2.\sigma) &= P(|X - \mu| \leq 2.\sigma) \geq \\ &\geq 1 - \frac{V(X)}{(2.\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{(2.\sigma)^2} = 0'75 \end{aligned}$$

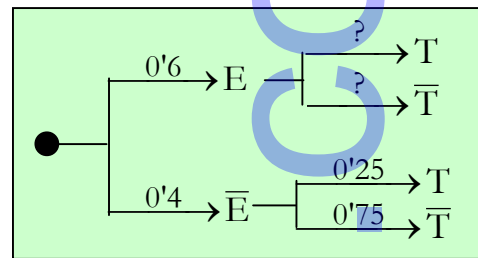
## FONEMATO 2.10.4

- 1) En una Universidad en la que sólo hay estudiantes de Derecho y de Economía, se sabe que el 60 % estudian Economía. Se sabe que el 25 % de los estudiantes de Derecho terminan la Carrera. Sabiendo que la probabilidad de terminar una Carrera en esa Universidad es 0'19, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que ha terminado sea de Economía?
- 2) Si el número medio de estudiantes que acuden a un examen es 300, con varianza 100, ¿cuál es el número de sillas necesario para poder asegurar que todos los asistentes podrán sentarse con una probabilidad no menor de 0'75?

### SOLUCIÓN

- 1) Si "E" es el suceso de que un alumno estudie Economía, dicen que  $P(E) = 0'6$  y  $P(\bar{E}) = 1 - 0'6 = 0'4$ ; y siendo "T" el suceso de que un alumno termine la Carrera, dicen que  $P(T) = 0'19$  y  $P(\bar{T} / \bar{E}) = 0'25$ .

La probabilidad pedida  $P(T/E)$  se obtiene al exigir que  $P(T) = 0'19$ , aplicando el **teorema de la probabilidad total**:



$$\begin{aligned} 0'25 &= P(T) = P(E) \cdot P(T/E) + P(\bar{E}) \cdot P(\bar{T}/\bar{E}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0'25 &= 0'6 \cdot P(T/E) + 0'4 \cdot 0'25 \Rightarrow P(T/E) = 0'15 \end{aligned}$$

**Se mira el resultado de un experimento aleatorio** (un alumno ha terminado la Carrera) **y luego se busca la probabilidad de que dicho resultado sea debido a una causa particular entre todas las posibles causas** (piden la probabilidad de que sea de Economía). Según el **teorema de Bayes** (versión cinemascope), es:

$$P(E/T) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E) \cdot P(T/E)}{P(E) \cdot P(T/E) + P(\bar{E}) \cdot P(\bar{T}/\bar{E})} = \frac{0'6 \cdot 0'15}{0'6 \cdot 0'15 + 0'4 \cdot 0'25}$$

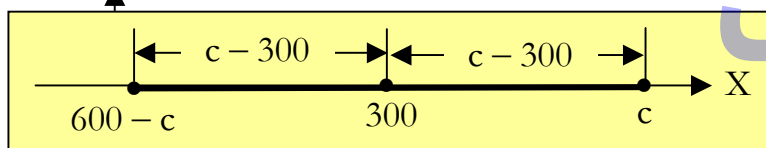
\* Regla de la multiplicación:  $P(E \cap T) = P(E) \cdot P(T/E)$

\* Según el teorema de la probabilidad total, es:

$$P(T) = P(E) \cdot P(T/E) + P(\bar{E}) \cdot P(\bar{T}/\bar{E})$$

- 2) Siendo "X" la variable aleatoria que expresa el número de estudiantes que van al examen, buscamos "c" tal que  $P(X \leq c) \geq 0'75$ ... y como de "X" sólo conocemos su media y su varianza, hay que lidiar con el capote de Tchebychef:

$$\begin{aligned} P(X \leq c) &\geq P(600 - c \leq X \leq c) = P(|X - 300| \leq c - 300) \geq \\ &\geq 1 - \frac{V(X)}{(c - 300)^2} = 1 - \frac{100}{(c - 300)^2} \geq 0'75 \Rightarrow \dots \Rightarrow c \geq 320 \end{aligned}$$



## 2.11 FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

La f.g.m es un caso particular de la Esperanza Matemática



La **función generatriz de momentos** de la variable aleatoria "X" es la  $\Phi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(t) = E(e^{t \cdot X})$ . Puede ocurrir que  $\Phi(t)$  no esté definida para algunos valores de "t".

- Si "X" es **discreta** y puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , siendo "f" su función de probabilidad o cuantía ( $f(x_i) = P(X = x_i)$ ), es:

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = e^{t \cdot x_1} \cdot f(x_1) + \dots + e^{t \cdot x_n} \cdot f(x_n) + \dots$$

- Si "X" es **continua** y "f" es su función de densidad de probabilidad, entonces:

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx$$

### Propiedades de la f.g.m

- La función generatriz de momentos de "X" es única, y caracteriza plenamente a la variable; es decir, dos variables aleatorias son iguales sólo si tienen la misma función generatriz de momentos.
- La f.g.m de "X" puede no estar definida para algunos valores de "t".
- $\Phi(0) = E(e^{0 \cdot X}) = E(e^0) = E(1) = 1$ .
- Siendo  $\Phi(t) = E(e^{t \cdot X})$ , es claro que  $\Phi(t)$  no puede tomar valores negativos, pues  $\Phi(t)$  es la esperanza matemática de una función de "X" ( $e^{t \cdot X}$ ) que no toma valores negativos.
- Si existe  $\Phi(t)$ , existen sus derivadas de todo orden en el punto  $t = 0$ , siendo

$$\frac{d^k \Phi(0)}{dt^k} = E(X^k)$$

En efecto, supuesto que "X" es continua y que "f" es su función de densidad de probabilidad, siendo

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx$$

### Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

es:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(0)}{dt} &= \left( \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx \right)_{t=0} = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = E(X) \\ \frac{d^2\Phi(0)}{dt^2} &= \left( \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^2 \cdot e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx \right)_{t=0} = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = E(X^2) \\ &\vdots \\ \frac{d^k\Phi(0)}{dt^k} &= \left( \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^k \cdot e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx \right)_{t=0} = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx = E(X^k)\end{aligned}$$

Si "X" es discreta y "f" es su función de probabilidad o cuantía, basta sustituir las integrales por los correspondientes sumatorios.

- Si existe  $\Phi(t)$ , es  $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} \cdot t^k$ . En efecto:

debido a la linealidad del operador "esperanza"

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot X)^k\right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\frac{1}{k!} \cdot (t \cdot X)^k\right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} \cdot t^k$$

$e^{t \cdot X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot X)^k$

$\uparrow$

Si el cálculo de  $d^k\Phi(0)/dt^k$  es infumable (como en el ejercicio 2.11.2), no podremos calcular  $E(X^k)$  usando la formulita  $E(X^k) = d^k\Phi(0)/dt^k$ ; en tal caso efectuaremos el desarrollo de  $\Phi(t)$  en serie de potencias de "t", y tendremos en cuenta que el coeficiente de  $t^k$  en dicho desarrollo es  $E(X^k)/k!$ .

## FONEMATO 2.11.1 (VARIABLES GEOMÉTRICAS)

- 1) Si en una moneda la probabilidad de obtener cara es "p", determínese la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "X" que expresa el número de veces que debe lanzarse una moneda hasta obtener una cara. Utilícese la función generatriz de momentos para calcular la media y la varianza de "X".
- 2) Determínese la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "Z" que expresa el número cruces que se obtienen hasta obtener una cara. Calcúlense la media y la varianza de "Z".
- 3) Determínese la función generatriz de momentos de  $U = a + b.X$ .

### SOLUCIÓN

- 1) Denotando  $C_k$  al suceso de obtener "cara" en el k-ésimo lanzamiento de la moneda ( $k = 1, 2, \dots$ ), es  $P(C_k) = p$  y  $P(\bar{C}_k) = 1 - p = q$ . Si "X" expresa el número de veces que debe lanzarse la moneda hasta obtener cara, ocurre el suceso  $X = x$  sólo si ocurre el suceso  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_{x-1} \cap C_x$ ; por tanto:

$$P(X = x) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_{x-1} \cap C_x) =$$

los lanzamientos son independientes

$$= P(\bar{C}_1) \cdot P(\bar{C}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{C}_{x-1}) \cdot P(C_x) = q^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, \dots$$

• Es:

$$\Phi_X(t) = E(e^{t \cdot X}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot q^{x-1} \cdot p =$$

$$= p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} e^{t \cdot x} \cdot q^{x-1} = p \cdot e^t \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{t \cdot x}}{e^t} \cdot q^{x-1} = p \cdot e^t \cdot \sum_{x=1}^{\infty} e^{t \cdot (x-1)} \cdot q^{x-1} =$$

$$= p \cdot e^t \cdot \sum_{x=1}^{\infty} (q \cdot e^t)^{x-1} = p \cdot e^t \cdot (1 + q \cdot e^t + (q \cdot e^t)^2 + \dots) =$$

$$\uparrow = p \cdot e^t \cdot \frac{1}{1 - q \cdot e^t} ; t < -\ln q$$

$1 + q \cdot e^t + (q \cdot e^t)^2 + \dots$  es una serie geométrica de razón  $q \cdot e^t > 0$ ; si  $0 < \text{razón} < 1 \Rightarrow t < -\ln q$  la serie es convergente

**VENTANA**

y su suma es  $\frac{\text{Primer Sumando}}{1 - \text{Razón}}$



• Es:

$$E(X) = \frac{d\Phi(0)}{dt} = p \cdot \left( \frac{e^t \cdot (1 - q \cdot e^t) + q \cdot e^{2 \cdot t}}{(1 - q \cdot e^t)^2} \right)_{t=0} = \dots = \frac{1}{p}$$

### Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

- Es

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dots = q/p^2$$

$$E(X^2) = \frac{d^2 \Phi(0)}{dt^2} = \dots$$

2) Si "Z" expresa el número de cruces que se obtienen hasta obtener cara, ocurre el suceso  $Z = z$  sólo si ocurre el suceso  $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_z \cap C_{z+1}$ ; así:

$$P(Z = z) = P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_z \cap C_{z+1}) =$$

los lanzamientos son independientes

$$= P(\bar{C}_1) \cdot P(\bar{C}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{C}_z) \cdot P(C_{z+1}) = q^z \cdot p, \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

- **Observa:** siendo obvio que  $Z = X - 1$ , también puede lidiarse así:

$$P(Z = z) = P(X - 1 = z) = P(X = 1 + z) = q^{(1+z)-1} \cdot p = q^z \cdot p, \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X = x) = q^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, \dots$$

- $$E(Z) = E(X - 1) = E(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

- $$V(Z) = V(X - 1) = V(X) = \frac{q}{p^2}$$

3) Es:

$$\Phi_U(t) = E(e^{t \cdot U}) = E(e^{t \cdot (a+b \cdot X)}) = E(e^{a \cdot t} \cdot e^{b \cdot t \cdot X}) = e^{a \cdot t} \cdot E(e^{b \cdot t \cdot X}) =$$

$$E(e^{\text{Pepe} \cdot X}) = \Phi_X(\text{Pepe}); \text{ en nuestro caso, } \text{Pepe} \equiv b \cdot t$$

$$= e^{a \cdot t} \cdot \Phi_X(b \cdot t) = e^{a \cdot t} \cdot p \cdot e^{b \cdot t} \cdot \frac{1}{1 - q \cdot e^{b \cdot t}}; \quad b \cdot t < -\ln q$$

## FONEMATO 2.11.2

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- 1) Determinése el k-ésimo momento respecto al origen.
- 2) A partir de la función generatriz de momentos, determinése el k-ésimo momento respecto al origen.

### SOLUCIÓN

$$1) \quad E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x^{k+1} \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot (k+2)} \cdot (x^{k+2})_0^2 = \frac{2^{k+1}}{k+2}$$

$$2) \quad \Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x \cdot e^{t \cdot x} \cdot dx =$$

VENTANA

$$\text{Por partes: } \int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{t \cdot x} \cdot dx \Rightarrow v = \int e^{t \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{t} \cdot e^{t \cdot x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{x}{t} \cdot e^{t \cdot x} \right)_0^2 - \frac{1}{t} \cdot \int_0^2 e^{t \cdot x} \cdot dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{x}{t} \cdot e^{t \cdot x} \right)_0^2 - \frac{1}{t^2} \cdot (e^{t \cdot x})_0^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{2}{t} \cdot e^{2 \cdot t} \right) - \frac{1}{t^2} \cdot (e^{2 \cdot t} - 1) \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot t^2} \cdot (1 + (2 \cdot t - 1) \cdot e^{2 \cdot t})$$

Es  $E(X^k) = d^k \Phi(0) / dt^k$  ... pero nos entran ganas de suicidarnos al pensar en el petardo de calcular la k-ésima derivada de  $\Phi(t) = (1 + (2 \cdot t - 1) \cdot e^{2 \cdot t}) / (2 \cdot t^2)$ .

**Descartado el suicidio y la derivación de tan espantosa función generatriz de momentos, la única alternativa es desarrollar la función generatriz de momentos en serie de potencias de "t",** pues sa-

bemos que el coeficiente de  $t^k$  en dicho desarrollo es  $E(X^k) / k!$ .

Vamos a la guerra:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2 \cdot t^2} \cdot (1 + (2 \cdot t - 1) \cdot e^{2 \cdot t}) =$$

$$\text{como } e^{\text{Pepe}} = 1 + \frac{\text{Pepe}}{1!} + \frac{\text{Pepe}^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{Pepe}^k}{k!}, \text{ es } e^{2 \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot t)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot t^2} \cdot \left( 1 + (2 \cdot t - 1) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot t}{1!} + \frac{(2 \cdot t)^2}{2!} + \dots + \frac{(2 \cdot t)^k}{k!} + \dots \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2.t^2} \cdot \left( 1 + \left( 2.t + \frac{(2.t)^2}{1!} + \frac{(2.t)^3}{2!} + \dots + \frac{(2.t)^{k+1}}{k!} + \dots \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( 1 + \frac{2.t}{1!} + \frac{(2.t)^2}{2!} + \frac{(2.t)^3}{3!} + \dots + \frac{(2.t)^k}{k!} + \dots \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2.t^2} \cdot \left( \left( \frac{(2.t)^2}{1!} + \frac{(2.t)^3}{2!} + \dots + \frac{(2.t)^{k+1}}{k!} + \dots \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{(2.t)^2}{2!} + \frac{(2.t)^3}{3!} + \dots + \frac{(2.t)^k}{k!} + \dots \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2.t^2} \cdot \left( \frac{(2.t)^2}{1!} - \frac{(2.t)^2}{2!} \right) + \frac{1}{2.t^2} \cdot \left( \frac{(2.t)^3}{2!} - \frac{(2.t)^3}{3!} \right) + \\
&\quad + \dots + \frac{1}{2.t^2} \cdot \left( \frac{(2.t)^k}{(k-1)!} - \frac{(2.t)^k}{k!} \right) + \dots = \\
&= 1 + t \cdot \left( \frac{2^2}{2!} - \frac{2^2}{3!} \right) + t^2 \cdot \left( \frac{2^3}{3!} - \frac{2^3}{4!} \right) + \dots + t^k \cdot \left( \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \right) + \dots
\end{aligned}$$

Como el coeficiente de  $t^k$  en el desarrollo en serie de potencias de la función  $\Phi(t)$  es  $E(X^k)/k!$ , resulta:

$$\frac{E(X^k)}{k!} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}$$

Por tanto:

$$E(X^k) = \left( \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \right) \cdot k! = \frac{2^{k+1}}{k+2}$$

### **FONEMATO 2.11.3 (VARIABLE EXPONENCIAL)**

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ .

- 1) Determinése el k-ésimo momento respecto al origen.
- 2) Determinése  $E(X^k)$  a partir de la función generatriz de momentos.

#### **SOLUCIÓN**

$$1) \quad E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} x^k \cdot e^{-x} \cdot dx = \Gamma(k+1) = k!$$

Siendo natural "p", es  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx = (p-1)!$

En nuestro caso es  $p-1 = k$ , por lo que  $p = k+1$

$$2) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= E(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot e^{-x} \cdot dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(1-t) \cdot x} \cdot dx = \frac{1}{1-t} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-z} \cdot dz = \frac{\Gamma(1)}{1-t} = (1-t)^{-1}; \quad t < 1 \end{aligned}$$

La integral sólo converge si  $1-t > 0$ ; en tal caso, haciendo  $(1-t) \cdot x = z$  es  $x = \frac{dz}{1-t}$ , y los límites de integración no cambian

Por tanto: 
$$E(X) = \frac{d\Phi(0)}{dt} = (1 \cdot (1-t)^{-2})_{t=0} = 1$$

$$E(X^2) = \frac{d^2\Phi(0)}{dt^2} = (1 \cdot 2 \cdot (1-t)^{-3})_{t=0} = 2!$$

.....

$$E(X^k) = \frac{d^k\Phi(0)}{dt^k} = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot (1-t)^{-(k+1)})_{t=0} = k!$$

### **FONEMATO 2.11.4**

Sea "X" la variable aleatoria tal que  $P(X = 0) = 1/3$  y  $P(X = 1) = 2/3$ .

Determinese  $E(X^k)$  a partir de la función generatriz de momentos.

### **SOLUCIÓN**

Es:

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \sum_{x=0}^1 e^{t \cdot x} \cdot P(X = x) = \frac{1}{3} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{2}{3} \cdot e^{1 \cdot t} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^t$$

Como  $\Phi'(0) = \Phi''(0) = \dots = \Phi^{(k)}(0) = 2/3$ , es  $E(X^k) = \frac{d^k \Phi(0)}{dt^k} = \frac{2}{3}$

También podemos calcular  $E(X^k)$  teniendo en cuenta que el coeficiente de  $t^k$  en el desarrollo en serie de  $\Phi(t)$  es  $E(X^k)/k!$ , y como dicho desarrollo es

$$\Phi(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot e^t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left( 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \dots \right)$$

resulta ser  $\frac{E(X^k)}{k!} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k!}$ , por lo que  $E(X^k) = \frac{2}{3}$ .

## **FONEMATO 2.11.5**

Determinése la función generatriz de momentos de la variable aleatoria "X" cuya función de densidad es  $f(x) = 2 \cdot \cos 2x$ ,  $x \in [0; \pi/4]$ .

### **SOLUCIÓN**

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx =$$

$$\int e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx = \frac{e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x}{2} - \frac{t}{2} \cdot \int e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x \cdot dx =$$

$$* u = e^{t \cdot x} \Rightarrow du = t \cdot e^{t \cdot x} \cdot dx$$

$$* dv = \cos 2x \cdot dx \Rightarrow v = \int \cos 2x \cdot dx = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$= \frac{e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x}{2} - \frac{t}{2} \cdot \left( -\frac{e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x}{2} + \frac{t}{2} \cdot \int e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx \right)$$

$$* u = e^{t \cdot x} \Rightarrow du = t \cdot e^{t \cdot x} \cdot dx$$

$$* dv = \sin 2x \cdot dx \Rightarrow v = \int \sin 2x \cdot dx = -\frac{\cos 2x}{2}$$

O sea, aparece de nuevo la primitiva que hemos de calcular:

$$\int e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx = \frac{e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x}{2} + \frac{t \cdot e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x}{4} - \frac{t^2}{4} \cdot \int e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx$$

por tanto:

$$\left(1 + \frac{t^2}{4}\right) \cdot \int e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx = \frac{e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x}{2} + \frac{t \cdot e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x \cdot dx = \frac{4}{4 + t^2} \cdot \left( \frac{e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x}{2} + \frac{t \cdot e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x}{4} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{4 + t^2} \cdot \left( \frac{e^{t \cdot x} \cdot \sin 2x}{2} + \frac{t \cdot e^{t \cdot x} \cdot \cos 2x}{4} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\pi/4} =$$

$$= \frac{8}{4 + t^2} \cdot \left( \frac{e^{\pi \cdot t / 2}}{2} - \frac{t}{4} \right)$$

### **FONEMATO 2.11.6**

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Determinense la función generatriz de momentos, la media y la varianza.

### **SOLUCIÓN**

$$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left( \int_{-\infty}^0 e^{t \cdot x} \cdot e^x \cdot dx + \int_0^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot e^{-x} \cdot dx \right) =$$

$$\begin{array}{l} \text{si } x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x \\ \text{si } x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \end{array}$$

si  $t \in (-1; 1)$ , pues la 1ª integral sólo converge si  $1 + t > 0$  ( $\Rightarrow t > -1$ ) y la 2ª sólo converge si  $1 - t > 0$  ( $\Rightarrow t < 1$ )

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \int_{-\infty}^0 e^{(1+t) \cdot x} \cdot dx + \int_0^{+\infty} e^{-(1-t) \cdot x} \cdot dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{1+t} \cdot \left( e^{(1+t) \cdot x} \right)_{-\infty}^0 - \frac{1}{1-t} \cdot \left( e^{-(1-t) \cdot x} \right)_0^{+\infty} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{1+t} \cdot (1 - 0) - \frac{1}{1-t} \cdot (0 - 1) \right) = \frac{1}{1-t^2} ; t \in (-1; 1) \end{aligned}$$

- Como la función de densidad es "par" (pues  $f(-x) = f(x)$ ), todos los momentos de orden impar respecto al origen son nulos; en particular,  $E(X) = 0$ .
- $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{d^2 \Phi(0)}{dt^2} - 0 = \dots = 2$$

## **FONEMATO 2.11.7**

Sea "X" la variable aleatoria con densidad  $f(x) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot |x-k|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta > 0$ .

Calcule su función generatriz de momentos,  $E(X)$  y el coeficiente de asimetría.

### **SOLUCIÓN**

- $$\Phi(t) = E(e^{t \cdot X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx =$$
$$\stackrel{\uparrow}{=} \frac{\theta}{2} \cdot \left( \int_{-\infty}^k e^{t \cdot x} \cdot e^{\theta \cdot (x-k)} \cdot dx + \int_k^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot e^{-\theta \cdot (x-k)} \cdot dx \right) =$$

\* si  $x \leq k \Rightarrow -|x-k| = x-k \Rightarrow f(x) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{\theta \cdot (x-k)}$

\* si  $x > k \Rightarrow -|x-k| = -(x-k) \Rightarrow f(x) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot (x-k)}$

$$= \frac{\theta}{2} \cdot \left( e^{-\theta \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^k e^{(t+\theta) \cdot x} \cdot dx + e^{\theta \cdot k} \cdot \int_k^{+\infty} e^{(t-\theta) \cdot x} \cdot dx \right) =$$
$$\stackrel{\uparrow}{=} \frac{\theta}{2} \cdot \left( \frac{e^{-\theta \cdot k}}{t+\theta} \cdot \left( e^{(t+\theta) \cdot x} \right)_{-\infty}^k + \frac{e^{\theta \cdot k}}{t-\theta} \cdot \left( e^{(t-\theta) \cdot x} \right)_k^{+\infty} \right) =$$

si  $t \in (-\theta; \theta)$ , pues la 1ª integral sólo converge si  $t+\theta > 0$  ( $\Rightarrow t > -\theta$ ) y la 2ª sólo converge si  $t-\theta < 0$  ( $\Rightarrow t < \theta$ )

$$= \frac{\theta}{2} \cdot \left( \frac{e^{-\theta \cdot k}}{t+\theta} \cdot (e^{(t+\theta) \cdot k} - 0) + \frac{e^{\theta \cdot k}}{t-\theta} \cdot (0 - e^{(t-\theta) \cdot k}) \right) =$$
$$= \frac{\theta}{2} \cdot \left( \frac{e^{t \cdot k}}{t+\theta} - \frac{e^{t \cdot k}}{t-\theta} \right) = \frac{\theta \cdot e^{t \cdot k}}{2} \cdot \left( \frac{1}{t+\theta} - \frac{1}{t-\theta} \right) = \frac{\theta^2 \cdot e^{t \cdot k}}{\theta^2 - t^2}; t \in (-\theta; \theta)$$
- La densidad es simétrica respecto al punto  $x = k$ , pues  $f(k+x) = f(k-x)$ :
$$f(k+x) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot |(k+x)-k|} = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot |x|}$$
$$f(k-x) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot |(k-x)-k|} = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot |-x|} = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\theta \cdot |x|} = f(k+x)$$

Así, podemos apostar tranquilamente un brazo a que  $E(X) = k$  y a que son nulos todos los momentos de orden impar respecto de la media; por tanto, el coeficiente de asimetría  $\gamma_1$  es nulo, pues  $\gamma_1 = E((X - E(X))^3) / \sigma^3$ .

## **FONEMATO 2.11.8**

Sea "X" la variable aleatoria cuya función de densidad es  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ .  
Determínese la función generatriz de momentos de  $Z = X - E(X)$ .

### **SOLUCIÓN**

Es:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \int_0^{+\infty} x.e^{-x}.dx = \Gamma(2) = 1! = 1$

Siendo natural "p", es  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x}.dx = (p-1)!$   
En nuestro caso es  $p-1 = 1$ , por lo que  $p = 2$

Es:  $\Phi(t) = E(e^{t.Z}) = E(e^{t.(X-1)}) = E(e^{t.X}.e^{-t}) = e^{-t}.E(e^{t.X}) =$   
 $= e^{-t}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t.x}.f(x).dx = e^{-t}.\int_0^{+\infty} e^{t.x}.e^{-x}.dx =$   
 $= e^{-t}.\int_0^{+\infty} e^{-(1-t).x}.dx = -\frac{e^{-t}}{1-t}.(e^{-(1-t).x})_0^{+\infty} = -\frac{e^{-t}}{1-t}.(0-1) = \frac{e^{-t}}{t-1}; t < 1$

La integral sólo es convergente si  $1-t > 0$

## **FONEMATO 2.11.9**

- 1) Calcúlese la varianza de la variable aleatoria "X" cuya función generatriz de momentos es  $\Phi_X(t) = (0'8 + 0'2 \cdot e^t)^4$ .
- 2) Determinése la función generatriz de momentos de  $Z = a + b \cdot X$ .

### **SOLUCIÓN**

1) Es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dots$$

$$E(X) = \frac{d\Phi(0)}{dt} = \dots ; E(X^2) = \frac{d^2\Phi(0)}{dt^2} = \dots$$

2) Es:

$$\Phi_Z(t) = E(e^{t \cdot Z}) = E(e^{t \cdot (a + b \cdot X)}) = E(e^{t \cdot a} \cdot e^{b \cdot t \cdot X}) =$$

$$Z = a + b \cdot X$$

$e^{t \cdot a}$  no depende de "X"

$$= e^{t \cdot a} \cdot E(e^{b \cdot t \cdot X}) = e^{t \cdot a} \cdot \Phi_X(b \cdot t) =$$

$$E(e^{\text{Pepe} \cdot X}) = \Phi_X(\text{Pepe}), \text{ y en nuestro caso } \text{Pepe} \equiv b \cdot t$$

$$= e^{t \cdot a} \cdot (0'8 + 0'2 \cdot e^{t \cdot b})^4$$

$$\text{en } \Phi_X(t) = (0'8 + 0'2 \cdot e^t)^4 \text{ sustituimos "t" por "t \cdot b"}$$

### **FONEMATO 2.11.10**

Determinése la función generatriz de momentos de la variable aleatoria "X" que tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = 0) = 0'2 ; P(X = 1) = 0'3 ; f(x) = 0'1, x \in [2;7]$$

### **SOLUCIÓN**

La variable "X" reparte su unidad de masa de probabilidad de modo "mixto": en los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$  hay sendas masas puntuales, y el resto de la masa se reparte de modo continuo entre los puntos del intervalo  $[2;7]$ .

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= E(e^{t \cdot X}) = e^{t \cdot 0} \cdot P(X = 0) + e^{t \cdot 1} \cdot P(X = 1) + \int_2^7 e^{t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= 0'2 + 0'3 \cdot e^t + 0'1 \cdot \int_2^7 e^{t \cdot x} \cdot dx = \\ &= 0'2 + 0'3 \cdot e^t + \frac{0'1}{t} \cdot (e^{t \cdot x})_2^7 = 0'2 + 0'3 \cdot e^t + \frac{0'1}{t} \cdot (e^{7 \cdot t} - e^{2 \cdot t})\end{aligned}$$

## FONEMATO 2.11.11

Una empresa fabrica un producto que comercializa sólo en España. La función de densidad de la variable aleatoria "X" que expresa la demanda mensual (en miles de unidades) es

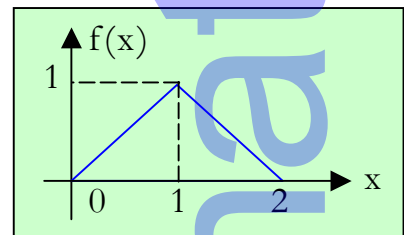
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- 1) ¿Cuál ha de ser la cantidad producida para que se satisfaga la demanda con probabilidad 0'9?
- 2) Si un mes la demanda ha sido superior a 800 unidades, calcúlese la probabilidad de haya sido superior a 1500 unidades.
- 3) Determinése la función generatriz de momentos de "X".
- 4) Determinése la probabilidad de que la demanda difiera de su media es más de 200 unidades. Compárese el resultado con el obtenido mediante la acotación de Tchebychef.
- 5) Determinése el valor esperado de la demanda total si la empresa decide exportar y la función generatriz de momentos de la demanda en el extranjero (también mensual y en miles de unidades) es

$$\Phi(t) = \frac{1}{6} \cdot e^t + \frac{1}{3} \cdot e^{2 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot e^{3 \cdot t}$$

## SOLUCIÓN

- 1) La gráfica de la función de densidad es la de la figura adjunta. Resulta obvio que la distribución de masa es simétrica respecto al punto  $x = 1$ , por eso apostamos la vida a que  $E(X) = 1$  y a que la mediana de "X" también es 1.



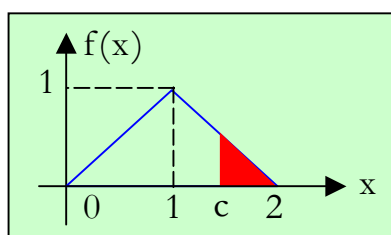
Debemos hallar "c" de modo que  $P(X \leq c) = 0'9$ ,

y es evidente que dicho punto, que es el **noveno decil** de la distribución de probabilidad de "X", está en el intervalo  $[1; 2]$ .

$$\begin{aligned} P(X \leq c) = 0'9 &\Rightarrow P(X > c) = 0'1 \Rightarrow \int_c^2 (2 - x) \cdot dx = 0'1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( 2x - \frac{1}{2}x^2 \right)_c^2 = 0'1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot c^2 - 2 \cdot c + 1'9 = 0 \Rightarrow c = 2 - \sqrt{0'2} \end{aligned}$$

**Observa:** puedes lidiar con la **cuenta de la vieja**, pues hay que calcular "c" de modo que el área del triángulo sombreado sea 0'1... y como la base y la altura son " $2 - c$ ", ha de ser:

$$\frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2} = \frac{(2 - c)^2}{2} = 0'1$$



2) Debemos calcular la probabilidad del suceso  $X > 1'5 / X > 0'8$ :

$$P(X > 1'5 / X > 0'8) = \frac{P(X > 1'5 ; X > 0'8)}{P(X > 0'8)} = \frac{P(X > 1'5)}{P(X > 0'8)} =$$

$$= \frac{\int_{1'5}^2 f(x).dx}{\int_{0'8}^2 f(x).dx} = \frac{\int_{1'5}^2 (2-x).dx}{\int_{0'8}^1 x.dx + \int_1^2 (2-x).dx} = \dots$$

3) Es:  $\Phi(t) = E(e^{t.X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t.x} f(x).dx = \int_0^1 x.e^{t.x}.dx + \int_1^2 (2-x).e^{t.x}.dx =$

$$= \int_0^1 x.e^{t.x}.dx + 2.\int_1^2 e^{t.x}.dx - \int_1^2 x.e^{t.x}.dx = \dots$$

**VENTANA**

$$\int x.e^{t.x}.dx = \frac{x}{t}.e^{t.x} - \frac{1}{t} \int e^{t.x}.dx = \frac{x}{t}.e^{t.x} - \frac{1}{t^2}.e^{t.x} = \frac{e^{t.x}}{t} \cdot \left(x - \frac{1}{t}\right)$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dx = e^{t.x}.dx \Rightarrow v = \int e^{t.x}.dx = e^{t.x} / t$$

4) Siendo  $E(X) = 1$ , la demanda diferirá de su media es más de 200 unidades sólo si ocurre el suceso  $|X - 1| > 0'2$ :

$$P(|X - 1| > 0'2) = 1 - P(|X - 1| \leq 0'2) = 1 - P(0'8 \leq X \leq 1'2) =$$

$$= 1 - \int_{0'8}^{1'2} f(x).dx = 1 - \int_{0'8}^1 x.dx - \int_1^{1'2} (2-x).dx = \dots$$

Según Tchebychef, si  $E(X) = 1$ , es:

$$P(|X - 1| > 0'2) = P(|X - E(X)| > 0'2) \leq \frac{V(X)}{0'2^2} = \dots$$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - 1 = \dots$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x).dx = \int_0^1 x^3.dx + \int_1^2 x^2.(2-x).dx = \dots$$

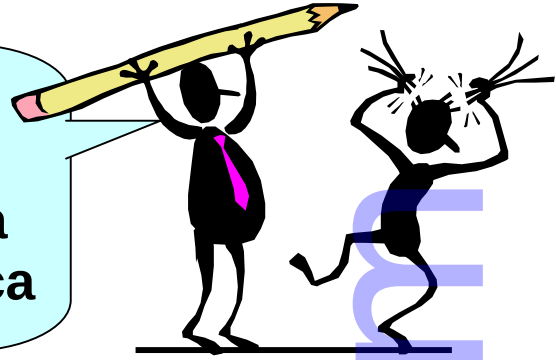
5) Si "Z" expresa la demanda en el extranjero, la demanda total está expresada por  $T = X + Z$ , siendo:

$$E(T) = E(X + Z) = E(X) + E(Z) = 1 + \frac{7}{3}$$

$$E(Z) = \frac{d\Phi(0)}{dt} = \left(\frac{1}{6}.e^t + \frac{2}{3}.e^{2.t} + \frac{3}{2}.e^{3.t}\right)_{t=0} = \frac{7}{3}$$

## 2.12 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

La **función característica** es un caso particular de la Esperanza Matemática



**Recuerda:** los números complejos son de la forma  $z = a + b.i$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$  y "a" y "b" números reales; del número real  $\sqrt{a^2 + b^2}$  se dice que es el **módulo** de  $z = a + b.i$ , y se denota  $\|z\|$ . Del número complejo  $\bar{z} = a - b.i$  se dice que es el **conjugado** de  $z = a + b.i$ .

La **función característica** de la variable aleatoria "X" se denota  $\varphi$ , y es la función compleja de variable real "t" que definimos

$$\varphi(t) = E(e^{i.t.X}), t \in \mathfrak{R}$$

- Si "X" es discreta y puede tomar los valores  $x_1, \dots, x_n, \dots$ , siendo "f" su función de probabilidad o cuantía ( $f(x_i) = P(X = x_i)$ ), es:

$$\varphi(t) = E(e^{i.t.X}) = e^{i.t.x_1} \cdot f(x_1) + \dots + e^{i.t.x_n} \cdot f(x_n) + \dots$$

- Si "X" es continua y "f" es su función de densidad de probabilidad, entonces:

$$\varphi(t) = E(e^{i.t.X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i.t.x} \cdot f(x) \cdot dx$$

### Propiedades de la función característica

- La función característica de "X" es única e identifica plenamente a la variable; es decir, dos variables aleatorias son iguales sólo si tienen la misma función característica.
- Existe  $\varphi(t)$  para todo valor de "t", siendo  $\|\varphi(t)\| \leq 1$ .
- $\varphi(0) = E(e^{i.0.X}) = E(e^0) = E(1) = 1$ .
- Es  $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ .
- La función característica es continua en todo punto; o sea:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi(t+h) - \varphi(t)\| = 0, \forall t \in \mathfrak{R}$$

- Si la variable "X" tiene momento de orden "k" respecto al origen, es:

$$\frac{d^k \varphi(0)}{dt^k} = i^k \cdot E(X^k)$$

En efecto, supuesto que "X" es continua y que "f" es su función de densidad de probabilidad, siendo

$$\varphi(t) = E(e^{i.t.X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i.t.x} . f(x) . dx$$

es:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(0)}{dt} &= \left( \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} i.x . e^{i.t.x} . f(x) . dx \right)_{t=0} = i . \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x . f(x) . dx = i . E(X) \\ \frac{d^2\varphi(0)}{dt^2} &= \left( \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} i^2 . x^2 . e^{i.t.x} . f(x) . dx \right)_{t=0} = i^2 . \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^2 . f(x) . dx = i^2 . E(X^2) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^k\varphi(0)}{dt^k} &= \left( \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} i^k . x^k . e^{i.t.x} . f(x) . dx \right)_{t=0} = i^k . \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^k . f(x) . dx = i^k . E(X^k) \end{aligned}$$

Si "X" es discreta y "f" es su función de probabilidad o cuantía, basta sustituir las integrales por los correspondientes sumatorios.

- Es  $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} . (i.t)^k$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E(e^{i.t.X}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} . (i.t.X)^k\right) = \\ &\quad \boxed{e^{i.t.X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} . (i.t.X)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\frac{1}{k!} . (i.t.X)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!} . (i.t)^k \\ &\quad \boxed{\text{debido a la linealidad del operador "esperanza"}} \end{aligned}$$

## **FONEMATO 2.12.1**

Siendo  $0 < p < 1$ , sea "X" la variable cuya función de cuantía es

| x        | 0     | 1   |
|----------|-------|-----|
| $P(X=x)$ | $1-p$ | $p$ |

- 1) Determinése la función característica de "X", empleándola para calcular la media y la varianza de "X".
- 2) Determinése la función característica de la variable  $U = a + b \cdot X$ .

### **SOLUCIÓN**

1) Es: 
$$\varphi_X(t) = E(e^{i \cdot t \cdot X}) = \sum_{x=0}^1 e^{i \cdot t \cdot x} \cdot P(X=x) =$$
$$= e^{i \cdot t \cdot 0} \cdot P(X=0) + e^{i \cdot t \cdot 1} \cdot P(X=1) = P(X=0) + e^{i \cdot t} \cdot P(X=1) = 1 - p + p \cdot e^{i \cdot t}$$

Es: 
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p)$$

$$d\varphi_X(0)/dt = i \cdot E(X) \Rightarrow i \cdot p = i \cdot E(X) \Rightarrow E(X) = p$$

$d\varphi_X(0)/dt = (i \cdot p \cdot e^{i \cdot t})_{t=0} = i \cdot p$

**VENTANA**
$$d^2\varphi_X(0)/dt^2 = i^2 \cdot E(X^2) \Rightarrow i^2 \cdot p = i^2 \cdot E(X^2) \Rightarrow E(X^2) = p$$

$d^2\varphi_X(0)/dt^2 = (i^2 \cdot p \cdot e^{i \cdot t})_{t=0} = i^2 \cdot p$

- 2) Sea  $\varphi_U(t)$  la función característica de "U". Es:

$$\varphi_U(t) = E(e^{i \cdot t \cdot U}) = E(e^{i \cdot t \cdot (a+b \cdot X)}) = E(e^{i \cdot t \cdot a} \cdot e^{i \cdot t \cdot b \cdot X}) =$$

pues  $U = a + b \cdot X$

$$= e^{i \cdot t \cdot a} \cdot E(e^{i \cdot t \cdot b \cdot X}) = e^{i \cdot t \cdot a} \cdot \varphi_X(t \cdot b) =$$

pues  $E(e^{i \cdot \text{Pepe} \cdot X}) = \varphi_X(\text{Pepe})$ ; en este caso es  $\text{Pepe} \equiv t \cdot b$

$$= e^{i \cdot t \cdot a} \cdot (1 - p + p \cdot e^{i \cdot t \cdot b})$$

sustituimos "t" por "t.b" en la expresión matemática de  $\varphi_X(t)$

## **FONEMATO 2.12.2**

Siendo  $0 < p < 1$  y  $q = 1 - p$ , sea "X" la variable cuya función de cuantía es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} ; x = 0, 1, \dots, n$$

Determinése la función característica de "X", empleándola para calcular  $E(X)$ .

### **SOLUCIÓN**

• Es: 
$$\varphi(t) = E(e^{i \cdot t \cdot X}) = \sum_{x=0}^n e^{i \cdot t \cdot x} \cdot P(X = x) =$$

$$= \sum_{x=0}^n e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \cdot (p \cdot e^{i \cdot t})^x \cdot q^{n-x} = (p \cdot e^{i \cdot t} + q)^n$$

BINOMIO DE NEWTON:  $(a + b)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \cdot a^x \cdot b^{n-x}$

• Es: 
$$d\varphi(0)/dt = i \cdot E(X) \Rightarrow n \cdot p \cdot i = i \cdot E(X) \Rightarrow E(X) = n \cdot p$$

$$d\varphi(0)/dt = \left( n \cdot (p \cdot e^{i \cdot t} + q)^{n-1} \cdot p \cdot i \cdot e^{i \cdot t} \right)_{t=0} = n \cdot p \cdot i \cdot (p + q)^{n-1} = n \cdot p \cdot i$$

**VENTANA**

$$p + q = 1$$

### **FONEMATO 2.12.3**

Sea  $\theta > 0$  y "X" la variable con cuantía  $P(X = x) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}$  ;  $x = 0, 1, 2, \dots$

Determinése la función característica de "X", empleándola para calcular  $E(X)$ .

### **SOLUCIÓN**

• Es:

$$\varphi(t) = E(e^{i \cdot t \cdot X}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot P(X = x) =$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!} = e^{-\theta} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\theta \cdot e^{i \cdot t})^x}{x!} = e^{-\theta} \cdot e^{\theta \cdot e^{i \cdot t}} = e^{\theta \cdot (e^{i \cdot t} - 1)}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\theta \cdot e^{i \cdot t})^x}{x!} = e^{\theta \cdot e^{i \cdot t}}$$

• Es:

$$d\varphi(0)/dt = i \cdot E(X) \Rightarrow \theta \cdot i = i \cdot E(X) \Rightarrow E(X) = \theta$$

$$d\varphi(0)/dt = \left( e^{\theta \cdot (e^{i \cdot t} - 1)} \cdot \theta \cdot i \cdot e^{i \cdot t} \right)_{t=0} = \theta \cdot i$$

## **FONEMATO 2.12.4**

Siendo  $f(x)$  la densidad de "X", determínese la función característica.

$$1) f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b ; 2) f(x) = \frac{a^k}{\Gamma(k)} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-a \cdot x}, x > 0, a > 0, k > 0$$

### **SOLUCIÓN**

1) Es:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(e^{i \cdot t \cdot X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_{x=a}^{x=b} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left( \frac{1}{i \cdot t} \cdot e^{i \cdot t \cdot x} \right)_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{i \cdot t \cdot b} - e^{i \cdot t \cdot a}}{i \cdot t \cdot (b-a)}\end{aligned}$$

2) Es:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(e^{i \cdot t \cdot X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= \frac{a^k}{\Gamma(k)} \cdot \int_{x=0}^{x=+\infty} e^{i \cdot t \cdot x} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-a \cdot x} \cdot dx = \\ &= \frac{a^k}{\Gamma(k)} \cdot \int_{x=0}^{x=+\infty} x^{k-1} \cdot e^{-(a-i \cdot t) \cdot x} \cdot dx = \\ &= \frac{a^k}{\Gamma(k)} \cdot (a-i \cdot t)^{-k} \cdot \int_{x=0}^{x=+\infty} (a-i \cdot t)^k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-(a-i \cdot t) \cdot x} \cdot dx = \\ &= \frac{a^k}{\Gamma(k)} \cdot (a-i \cdot t)^{-k} \cdot \Gamma(k) = a^k \cdot (a-i \cdot t)^{-k}\end{aligned}$$

$$\Gamma(k) = \int_{x=0}^{x=+\infty} c^k \cdot x^{k-1} \cdot e^{-c \cdot x} \cdot dx ; \text{ en nuestro caso es } c \equiv a - i \cdot t$$

## **FONEMATO 2.12.5**

Siendo  $f(x)$  la densidad de "X", determínese la función característica:

$$1) f(x) = x/2, 0 \leq x \leq 2 ; 2) f(x) = e^{-x}, x > 0$$

### **SOLUCIÓN**

1) Es:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(e^{i.t.X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i.t.x} \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{x=2} x \cdot e^{i.t.x} \cdot dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Por partes: } \int_a^b u \cdot dv &= (u \cdot v)_a^b - \int_a^b v \cdot du \\ u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^{i.t.x} \cdot dx &\Rightarrow v = \int e^{i.t.x} \cdot dx = \frac{1}{i.t} \cdot e^{i.t.x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{x}{i.t} \cdot e^{i.t.x} \right)_0^2 - \frac{1}{i.t} \cdot \int_0^2 e^{i.t.x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{x}{i.t} \cdot e^{i.t.x} \right)_0^2 - \frac{1}{(i.t)^2} \cdot (e^{i.t.x})_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{2}{i.t} \cdot e^{2.i.t} \right) - \frac{1}{(i.t)^2} \cdot (e^{2.i.t} - 1) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{2}{i.t} \cdot e^{2.i.t} \right) + \frac{1}{t^2} \cdot (e^{2.i.t} - 1) \right)\end{aligned}$$

2) Es:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(e^{i.t.X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{i.t.x} \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{i.t.x} \cdot e^{-x} \cdot dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(1-i.t).x} \cdot dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-i.t).x = z &\Rightarrow dx = \frac{dz}{1-i.t} \\ \text{los límites de integración no cambian}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-i.t} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-z} \cdot dz = \frac{\Gamma(1)}{1-i.t} = (1-i.t)^{-1}$$

### **FONEMATO 2.12.6**

Determinése la función característica de la variable aleatoria "X" que tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = 0) = 0'2 ; P(X = 1) = 0'3 ; f(x) = 0'1, x \in [2;7]$$

### **SOLUCIÓN**

**La variable "X" reparte su unidad de masa de modo mixto:** en los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$  hay sendas masas puntuales, y el resto de la masa se reparte de modo continuo entre los puntos del intervalo  $[2;7]$ .

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= E(e^{i.t.X}) = e^{i.t.0}.P(X = 0) + e^{i.t.1}.P(X = 1) + \int_2^7 e^{i.t.x}.f(x).dx = \\ &= 0'2 + 0'3.e^{i.t} + 0'1.\int_2^7 e^{i.t.x}.dx = \\ &= 0'2 + 0'3.e^{i.t} + \frac{0'1}{i.t}.(e^{i.t.x})_2^7 = \\ &= 0'2 + 0'3.e^{i.t} + \frac{0'1}{i.t}.(e^{7.i.t} - e^{2.i.t})\end{aligned}$$

## 2.13 CAMBIOS DE VARIABLE

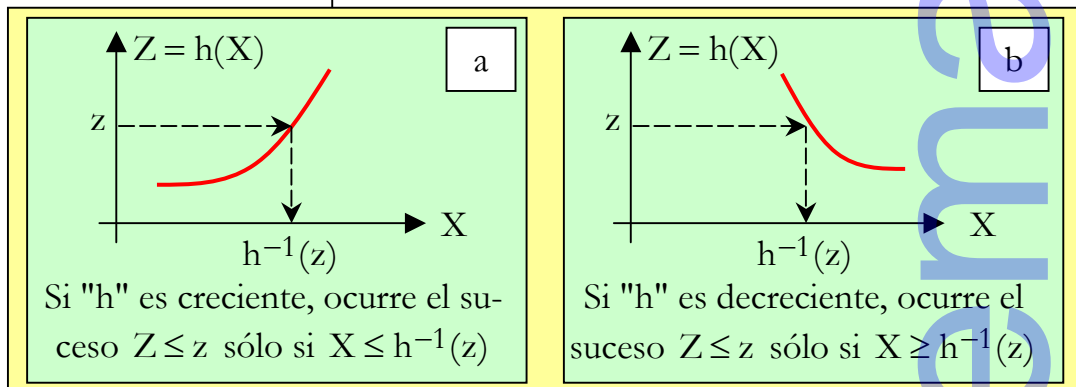
### EL PROBLEMA TIPO

Dada la distribución de probabilidad de una **variable vieja** "Pepa", determínese la distribución de probabilidad de una **variable nueva** "Juana" cuyo valor depende del valor de "Pepa"; o sea:  $Juana = h(Pepa)$ .

- Si la variable "vieja" es **discreta**, calcularemos el valor de la variable "nueva" en cada punto de la distribución puntual de masa de probabilidad asociada a la "vieja"; y después obraremos en consecuencia.
- Si la variable vieja es **continua** y la función "h" es monótona (creciente o decreciente) hay una **formulita** que da la densidad de la "nueva" a partir de la densidad de la "vieja".

En efecto, si  $f_X$  y  $F_X$  son respectivamente las funciones de densidad y de distribución de "X" y  $f_Z$  y  $F_Z$  son las respectivas funciones de densidad y de distribución de "Z", es:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} a & = P(X \leq h^{-1}(z)) = F_X(h^{-1}(z)) \\ b & = P(X \geq h^{-1}(z)) = 1 - F_X(h^{-1}(z)) \end{cases}$$



Por tanto, como  $f_Z$  es la función derivada de  $F_Z$ , resulta:

$$\begin{aligned} f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} &= \begin{cases} a & = \frac{dF_X(h^{-1}(z))}{dz} \\ b & = \frac{d(1 - F_X(h^{-1}(z)))}{dz} = -\frac{dF_X(h^{-1}(z))}{dz} \end{cases} \\ &= \frac{dF_X(h^{-1}(z))}{d(h^{-1}(z))} \cdot \left| \frac{d(h^{-1}(z))}{dz} \right| = f_X(h^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{d(h^{-1}(z))}{dz} \right| \\ &\quad \text{pues } \frac{dF_X(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f_X(\text{Pepe}) \end{aligned}$$

**Por ejemplo,** si la densidad de "X" es  $f_X(x) = \frac{3}{7} \cdot x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , entonces:

- Siendo monótona  $Z = h(X) = 7 \cdot X$ , es  $X = h^{-1}(Z) = Z/7$ ; por tanto:

$$f_Z(z) = f_X(z/7) \cdot \left| \frac{d(z/7)}{dz} \right| = \frac{1}{7} \cdot f_X(z/7) = \frac{1}{7} \cdot \left( \frac{3}{7} \cdot (z/7)^2 \right), \quad 7 \leq z \leq 14$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq z/7 \leq 2 \Rightarrow 7 \leq z \leq 14$$

- Siendo monótona  $Z = h(X) = e^X$ , es  $X = h^{-1}(Z) = \ln Z$ ; por tanto:

$$f_Z(z) = f_X(\ln z) \cdot \left| \frac{d(\ln z)}{dz} \right| = \frac{1}{z} \cdot f_X(\ln z) = \frac{1}{z} \cdot \left( \frac{3}{7} \cdot (\ln z)^2 \right), \quad e \leq z \leq e^2$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \ln z \leq 2 \Rightarrow e \leq z \leq e^2$$

- Siendo monótona  $Z = h(X) = 1/X$ , es  $X = h^{-1}(Z) = 1/Z$ ; por tanto:

$$f_Z(z) = f_X(1/z) \cdot \left| \frac{d(1/z)}{dz} \right| = \frac{1}{z^2} \cdot f_X(1/z) = \frac{1}{z^2} \cdot \left( \frac{3}{7} \cdot (1/z)^2 \right), \quad 1/2 \leq z \leq 1$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 1/z \leq 2 \Rightarrow 1/2 \leq z \leq 1$$

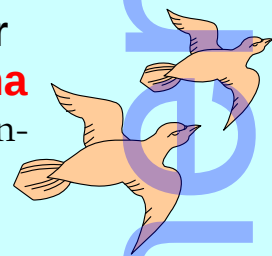
- Siendo monótona  $Z = h(X) = \ln X$ , es  $X = h^{-1}(Z) = e^Z$ ; por tanto:

$$f_Z(z) = f_X(e^z) \cdot \left| \frac{d(e^z)}{dz} \right| = e^z \cdot f_X(e^z) = e^z \cdot \left( \frac{3}{7} \cdot (e^z)^2 \right), \quad 0 \leq z \leq \ln 2$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq e^z \leq 2 \Rightarrow 0 \leq z \leq \ln 2$$

**Si la variable vieja "X" es continua y por desgracia la función "h" no es monótona**

(al contrario que sucede en los ejemplos precedentes), **debemos lidiar a lo bestia**, como en los ejercicios 2.13.7, 2.13.8 y 2.13.16.



### **FONEMATO 2.13.1**

Determinése la función de probabilidad de la variable aleatoria  $Z = 3 + 2.X$  si la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

### **SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= P(3 + 2.X = z) = \\ &= P\left(X = \frac{z-3}{2}\right) = \\ &= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{(z-3)/2}}{\left(\frac{z-3}{2}\right)!}, \quad \underbrace{z = 3, 5, 7, \dots}_{\uparrow} \end{aligned}$$

si "X" puede tomar los valores 0,1,2,... es claro que  $Z = 3 + 2.X$  puede tomar valores  $3 + 2.0, 3 + 2.1, 3 + 2.2, \dots$

### **FONEMATO 2.13.2**

Determinése la función de probabilidad de la variable aleatoria  $Z = X^2$  si la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

|            |       |       |       |        |         |
|------------|-------|-------|-------|--------|---------|
| $x$        | -2    | -1    | 0     | 1      | 2       |
| $P(X = x)$ | $1/5$ | $1/6$ | $1/5$ | $1/15$ | $11/30$ |

### **SOLUCIÓN**

**Calculemos el valor de la variable "Z" en cada punto de la distribución de probabilidad de la variable "X":**

$$Z = X^2 = \begin{cases} 4 & \text{si } X = -2 \\ 1 & \text{si } X = -1 \\ 0 & \text{si } X = 0 \\ 1 & \text{si } X = 1 \\ 4 & \text{si } X = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la variable "Z" sólo puede tomar los valores 0, 1, 4, siendo:

$$P(Z = 0) = P(X = 0) = 1/5$$

$$P(Z = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 7/30$$

$$P(Z = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = 17/30$$

### FONEMATO 2.13.3

Determinése la función de probabilidad de la variable  $Z = \sin(\pi \cdot X/2)$  y su esperanza si la función de probabilidad de la variable aleatoria "X" es

$$P(X = x) = 2^{-(x+1)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

### SOLUCIÓN

Distribución de probabilidad de "X":

|          |     |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                  |       |
|----------|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| x        | 0   | 1                | 2                | 3                | 4                | 5                | 6                | 7                | 8                | ..... |
| P(X = x) | 1/2 | 1/2 <sup>2</sup> | 1/2 <sup>3</sup> | 1/2 <sup>4</sup> | 1/2 <sup>5</sup> | 1/2 <sup>6</sup> | 1/2 <sup>7</sup> | 1/2 <sup>8</sup> | 1/2 <sup>9</sup> | ..... |

**Calculemos el valor de la variable "Z" en cada punto de la distribución de probabilidad de la variable "X":**

|                                  |                              |                              |                              |                              |                              |                              |     |
|----------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----|
| x                                | 0                            | 1                            | 2                            | 3                            | 4                            | 5                            | ... |
| $z = \sin \frac{\pi \cdot x}{2}$ | $\sin \frac{0 \cdot \pi}{2}$ | $\sin \frac{1 \cdot \pi}{2}$ | $\sin \frac{2 \cdot \pi}{2}$ | $\sin \frac{3 \cdot \pi}{2}$ | $\sin \frac{4 \cdot \pi}{2}$ | $\sin \frac{5 \cdot \pi}{2}$ | ... |

O sea:

|                                  |   |   |   |    |   |   |   |
|----------------------------------|---|---|---|----|---|---|---|
| x                                | 0 | 1 | 2 | 3  | 4 | 5 | 6 |
| $z = \sin \frac{\pi \cdot x}{2}$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |

Repita la secuencia de 4 en 4

Por tanto:

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(Z = 0) &= P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

serie geométrica de razón  $1/2^2$ ; como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie converge y su suma es  $\frac{\text{primer sumando}}{1 - \text{razon}} = \frac{1/2}{1 - (1/2^2)} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(Z = 1) &= P(X = 1) + P(X = 5) + P(X = 9) + P(X = 13) + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \dots = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

serie geométrica de razón  $1/2^4$ ; como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie converge y su suma es  $\frac{\text{primer sumando}}{1 - \text{razon}} = \frac{1/2^2}{1 - (1/2^4)} = \frac{4}{15}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(Z = -1) &= P(X = 3) + P(X = 7) + P(X = 11) + P(X = 15) + \dots = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \dots = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

serie geométrica de razón  $1/2^4$ ; como  $| \text{razón} | < 1$ , la serie converge y su suma es  $\frac{\text{primer sumando}}{1 - \text{razon}} = \frac{1/2^4}{1 - (1/2^4)} = \frac{1}{15}$

$$\bullet \quad \text{Siendo } \frac{z}{P(Z = z)} \quad \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ 1/15 & 2/3 & 4/15 \end{array} \right., \text{ es:}$$

$$E(Z) = \sum_{z=-1}^1 z \cdot P(Z = z) = (-1) \cdot \frac{1}{15} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{3}$$

### Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

## FONEMATO 2.13.4

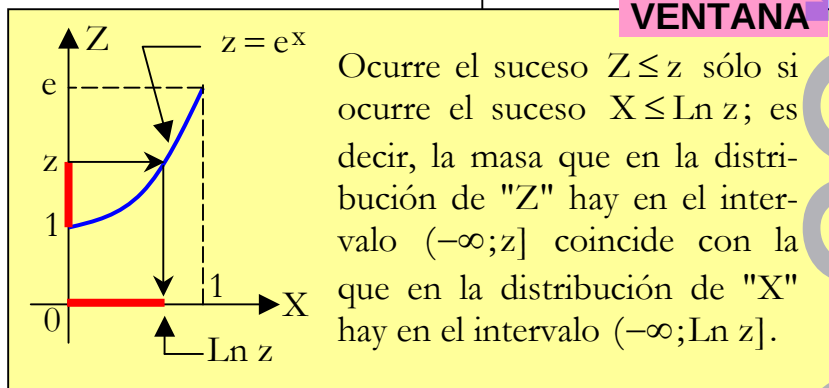
La densidad de probabilidad de la variable "X" es  $f(x) = 1$ ,  $x \in (0;1)$ .

Determinese la densidad de probabilidad de la variable  $Z = e^X$ .

### SOLUCIÓN

Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = e^X$ :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(e^X \leq z) \stackrel{\uparrow}{=} P(X \leq \ln z) = F(\ln z)$$



La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

regla de la cadena

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{dF(\ln z)}{dz} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{dF(\ln z)}{d(\ln z)} \cdot \frac{d \ln z}{dz} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{z} \cdot f(\ln z) = \frac{1}{z}, \quad 1 < z < e$$

$\frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe}) ; \quad \frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$

en la expresión matemática de  $f(x)$  sustituimos "x" por " $\ln z$ "

$0 < x < 1 \Rightarrow e^0 < e^x < e^1 \Rightarrow 1 < z < e$



## FONEMATO 2.13.5

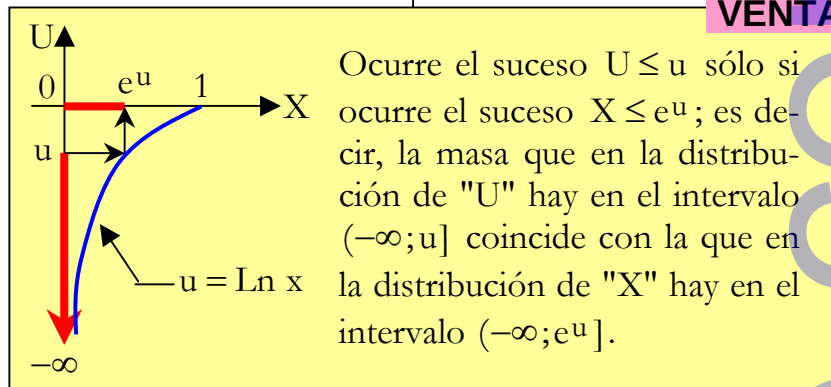
La densidad de probabilidad de la variable "X" es  $f(x) = 1$ ,  $x \in (0;1)$ .

Determinése la densidad de probabilidad de la variable  $U = \ln X$ .

### SOLUCIÓN

Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_U(u)$  de la variable  $U = \ln X$ :

$$F_U(u) = P(U \leq u) \stackrel{\uparrow}{=} P(X \leq e^u) = F(e^u)$$



La densidad  $f_U(u)$  de la variable "U" es la derivada de  $F_U(u)$ :

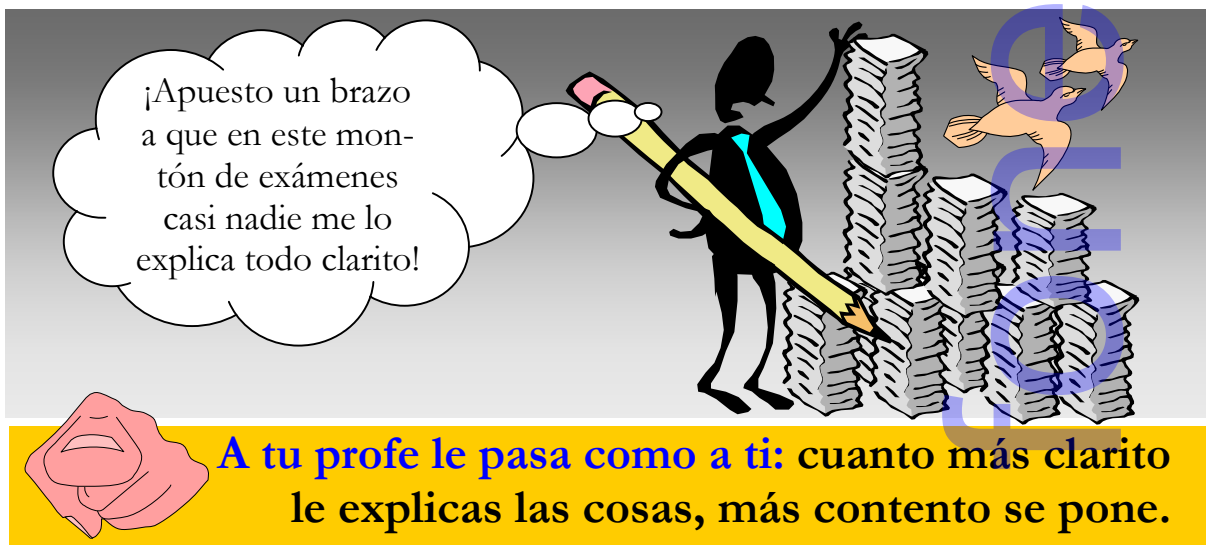
regla de la cadena

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dF(e^u)}{du} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{dF(e^u)}{d(e^u)} \cdot \frac{d(e^u)}{du} \stackrel{\uparrow}{=} e^u \cdot f(e^u) \stackrel{\uparrow}{=} e^u, u < 0$$

$$\frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe}) ; \frac{d(e^u)}{du} = e^u$$

en la expresión matemática de  $f(x)$  sustituimos "x" por  $e^u$

$$0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow u < 0$$



## FONEMATO 2.13.6

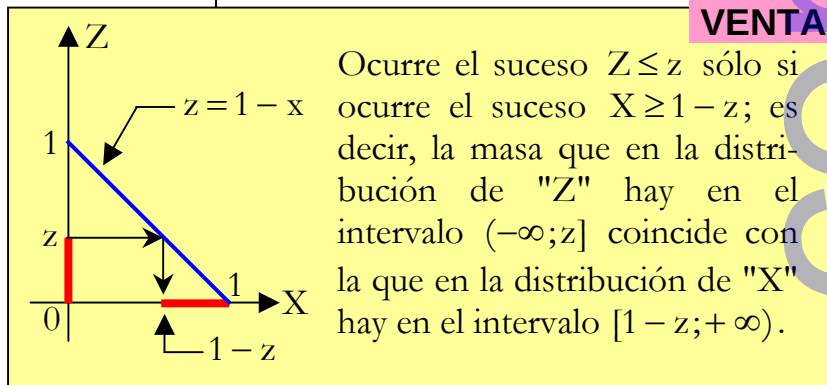
La densidad de probabilidad de la variable "X" es  $f(x) = 2 - 2x$ ,  $x \in (0;1)$ .  
 Determinése la densidad de probabilidad de las variables  $Z = 1 - X$  y  $U = 1/X$ .

### SOLUCIÓN

Sea  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X".

- Determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = 1 - X$ :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X \geq 1 - z) = 1 - P(X < 1 - z) = 1 - F(1 - z)$$



La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d(1 - F(1 - z))}{dz} = - \frac{dF(1 - z)}{dz} \\ &= - \frac{dF(1 - z)}{d(1 - z)} \cdot \frac{d(1 - z)}{dz} = f(1 - z) = 2 - 2(1 - z), \quad 0 < z < 1 \end{aligned}$$

regla de la cadena

$\frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe}) ; \frac{d(1 - z)}{dz} = -1$

$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow 0 < 1 - x < 1 \Rightarrow 0 < z < 1$

- Determinemos la función de distribución  $F_U(u)$  de la variable  $U = 1/X$ :

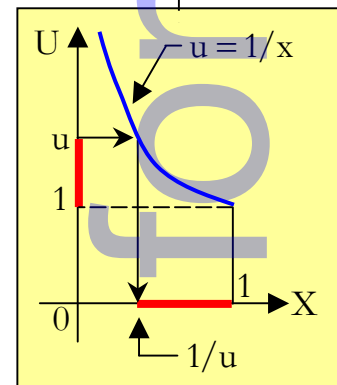
$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(X \geq 1/u) = 1 - P(X < 1/u) = 1 - F(1/u)$$

La densidad  $f_U(u)$  de la variable "U" es la derivada de  $F_U(u)$ :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{d(1 - F(1/u))}{du} = - \frac{dF(1/u)}{du} \\ &= - \frac{dF(1/u)}{d(1/u)} \cdot \frac{d(1/u)}{du} = \\ &= \frac{1}{u^2} \cdot f(1/u) = \frac{1}{u^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{1}{u}\right), \quad u > 1 \end{aligned}$$

$\frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe}) ; \frac{d(1/u)}{du} = -1/u^2$

$0 < x < 1 \Rightarrow 1/x > 1 \Rightarrow u > 1$



### **FONEMATO 2.13.7**

Determinése la función de densidad de probabilidad de la variable  $Z = X^2$  si la variable "X" tiene distribución  $N(0;1)$ ; es decir, si la densidad de "X" es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

### **SOLUCIÓN**

Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = X^2$ :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = \\ &= P(X \leq \sqrt{z}) - P(X < -\sqrt{z}) = F(\sqrt{z}) - F(-\sqrt{z}) \end{aligned}$$

La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d(F(\sqrt{z}) - F(-\sqrt{z}))}{dz} = \frac{dF(\sqrt{z})}{dz} - \frac{dF(-\sqrt{z})}{dz} = \\ &= \frac{dF(\sqrt{z})}{d(\sqrt{z})} \cdot \frac{d(\sqrt{z})}{dz} - \frac{dF(-\sqrt{z})}{d(-\sqrt{z})} \cdot \frac{d(-\sqrt{z})}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot f(\sqrt{z}) + \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot f(-\sqrt{z}) = \end{aligned}$$

$$\frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe}) ; \quad \frac{d(\sqrt{z})}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} ; \quad \frac{d(-\sqrt{z})}{dz} = -\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \left( e^{-(\sqrt{z})^2/2} + e^{-(-\sqrt{z})^2/2} \right) = \frac{e^{-z/2}}{\sqrt{2\pi \cdot z}}, \quad z \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow z = x^2 \geq 0$$

Si la variable "X" tiene distribución  $N(0;1)$  y  $Z = X^2$ , se dice que "Z" tiene **distribución ji-dos con un grado de libertad**.

### **FONEMATO 2.13.8**

Determinése la función de distribución de la variable  $U = (3 \cdot X - 1)^2$  si la función de densidad de probabilidad de la variable "X" es  $f(x) = 2 \cdot x$ ,  $x \in [0;1]$ .

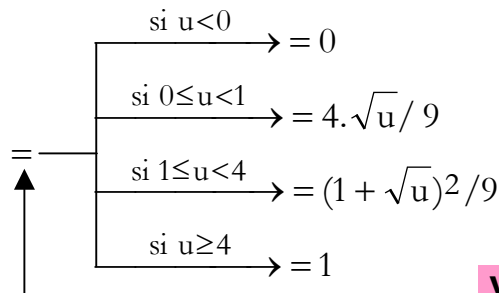
### **SOLUCIÓN**

Siendo  $F(z) = P(X \leq z)$  la función de distribución de "X", es:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \int_0^z 2 \cdot x \cdot dx = (x^2)_0^z = z^2 & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

Siendo  $F_U(u) = P(U \leq u)$  la función de distribución de  $U = (3 \cdot X - 1)^2$ , es:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) = P((3 \cdot X - 1)^2 \leq u) = P(-\sqrt{u} \leq 3 \cdot X - 1 \leq \sqrt{u}) = \\ &= P(1 - \sqrt{u} \leq 3 \cdot X \leq 1 + \sqrt{u}) = P\left(\frac{1 - \sqrt{u}}{3} \leq X \leq \frac{1 + \sqrt{u}}{3}\right) = \\ &= P\left(X \leq \frac{1 + \sqrt{u}}{3}\right) - P\left(X < \frac{1 - \sqrt{u}}{3}\right) = F\left(\frac{1 + \sqrt{u}}{3}\right) - F\left(\frac{1 - \sqrt{u}}{3}\right) = \end{aligned}$$

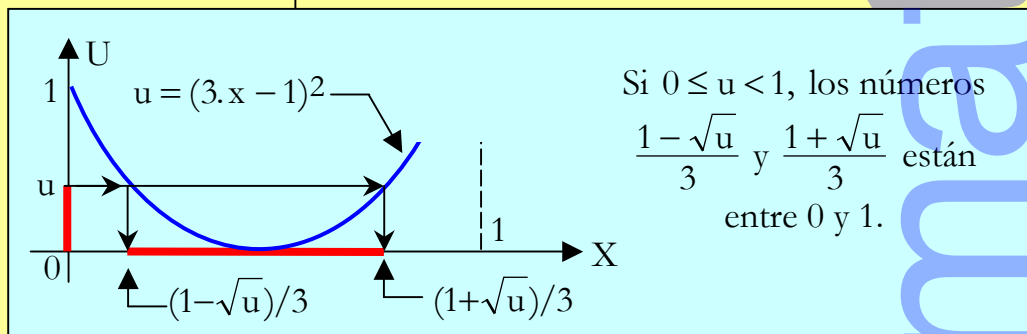


**VENTANA**

La función  $u = 3 \cdot (x - 1)^2$  no es monótona en el campo de variación "X": es decreciente a la izquierda del punto  $x = 1/3$  y creciente a la derecha de él. La variable "U" toma valores entre 0 y 4, y a cada valor de "u" en  $[0;1]$  le corresponden dos valores de "x" (en concreto,  $(1-\sqrt{u})/3$  y  $x = (1+\sqrt{u})/3$ ); pero a cada valor de "u" en  $(1;4]$  le corresponde un único valor de "x" (en concreto,  $x = (1+\sqrt{u})/3$ ).

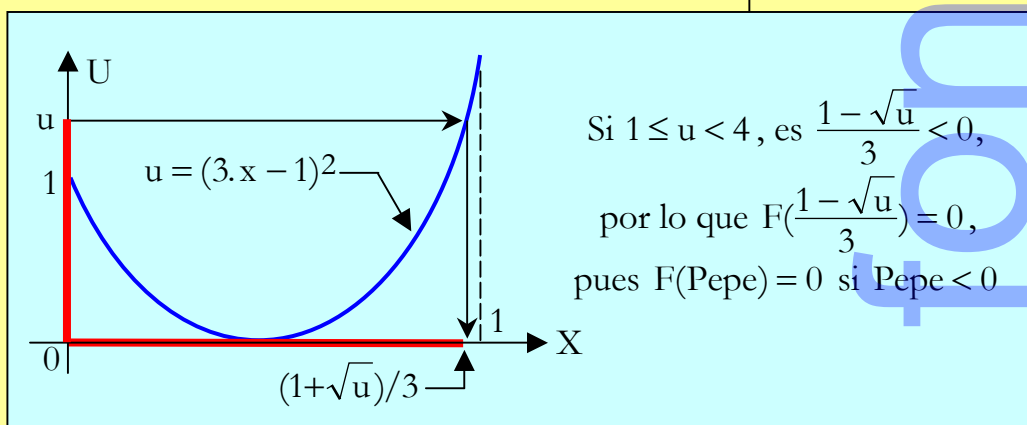
- Como "U" no toma valores negativos, si  $u < 0$  es  $F_U(u) = P(U \leq u) = 0$ .
- Si  $u \geq 4 \Rightarrow F_U(u) = P(U \leq u) = 1$ , pues "U" no toma valores mayores que 4
- Si  $0 \leq u < 1$ , es

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &= P(U \leq u) = F\left(\frac{1+\sqrt{u}}{3}\right) - F\left(\frac{1-\sqrt{u}}{3}\right) = \\
 &= \left(\frac{1+\sqrt{u}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{u}}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot \sqrt{u}}{9}
 \end{aligned}$$



- Si  $1 \leq u < 4$ , es

$$F_U(u) = P(U \leq u) = F\left(\frac{1+\sqrt{u}}{3}\right) - F\left(\frac{1-\sqrt{u}}{3}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{u}}{3}\right)^2 - 0$$

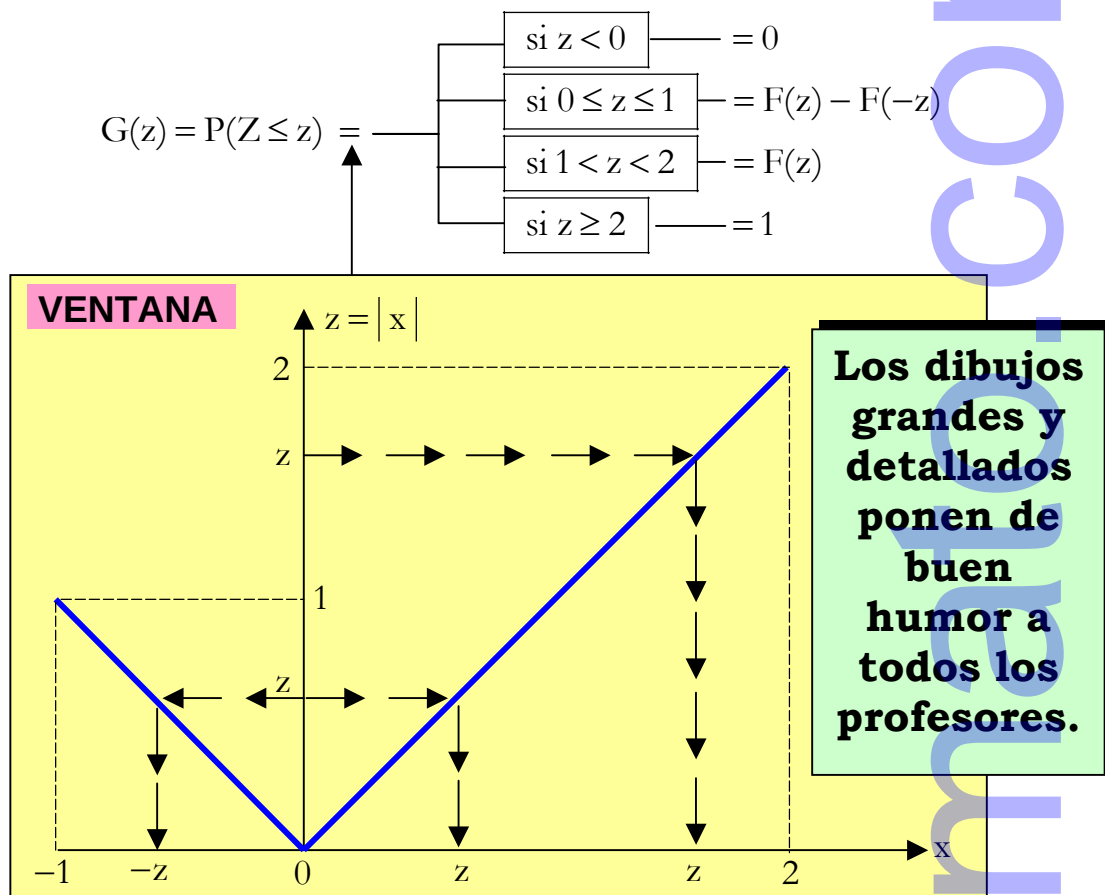


### **FONEMATO 2.13.9**

Determine la función de densidad de la variable aleatoria  $Z = |X|$  si la función de densidad de la variable "X" es  $f(x) = 1/3$ ,  $x \in (-1;2)$ .

### **SOLUCIÓN**

Sea "F" la función de distribución de "X"; o sea,  $F(x) = P(X \leq x)$ . Si "X" sólo toma valores en el intervalo  $(-1;2)$ , la variable  $Z = |X|$  sólo toma valores en el intervalo  $[0;2)$ , y siendo "G" la función de distribución de la variable "Z", es:



Siendo "g" la función de densidad de la variable "Z", es  $g(z) = dG(z)/dz$ ; por tanto, "g" es nula tanto si  $z < 0$  como si  $z \geq 2$ .

Si  $z \in [0;1]$ , es:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{dG(z)}{dz} = \frac{d(F(z) - F(-z))}{dz} = \frac{dF(z)}{dz} - \frac{dF(-z)}{dz} = \\ &= \frac{dF(z)}{dz} - \frac{dF(-z)}{d(-z)} \cdot \frac{d(-z)}{dz} = f(z) + f(-z) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

pues  $\frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe})$

Si  $z \in (1;2)$ , es:

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = \frac{dF(z)}{dz} = f(z) = \frac{1}{3}$$

### **FONEMATO 2.13.10**

Determinese la función de densidad de probabilidad de la variable  $Z = e^{-X}$  si la función de densidad de probabilidad de "X" es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 \cdot x^2 / 14 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

### **SOLUCIÓN**

Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = e^{-X}$ :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(e^{-X} \leq z) = P(-X \leq \ln z) = \\ &= P(X \geq -\ln z) = 1 - P(X < -\ln z) = 1 - F(-\ln z) \end{aligned}$$

La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d(1 - F(-\ln z))}{dz} = - \frac{dF(-\ln z)}{dz} =$$

regla de la cadena

$$= - \frac{dF(-\ln z)}{d(-\ln z)} \cdot \frac{d(-\ln z)}{dz} = \frac{1}{z} \cdot f(-\ln z) =$$

$$\frac{dF(\text{Juan})}{d(\text{Juan})} = f(\text{Juan}) ; \quad \frac{d(-\ln z)}{dz} = -\frac{1}{z}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq z \leq 1$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{z} \cdot (-\ln z) & \text{si } e^{-1} \leq z \leq 1 \\ \frac{1}{z} \cdot \frac{3}{14} \cdot (-\ln z)^2 & \text{si } e^{-2} \leq z < e^{-1} \end{cases}$$

$$1 < x \leq 2 \Rightarrow e^1 < e^x \leq e^2 \Rightarrow \frac{1}{e^2} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} < \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-2} \leq z < e^{-1}$$

## FONEMATO 2.13.11

Supuesta conocida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria "X", determínese la distribución de probabilidad de "Z" en los siguientes casos:

$$1) Z = \begin{cases} -1 & \text{si } X \leq 0 \\ 1 & \text{si } X > 0 \end{cases}; \quad 2) Z = \begin{cases} X & \text{si } X \geq 3 \\ 0 & \text{si } X < 3 \end{cases}; \quad 3) Z = \begin{cases} X & \text{si } X \geq -1 \\ 0 & \text{si } X < -1 \end{cases}$$

### SOLUCIÓN

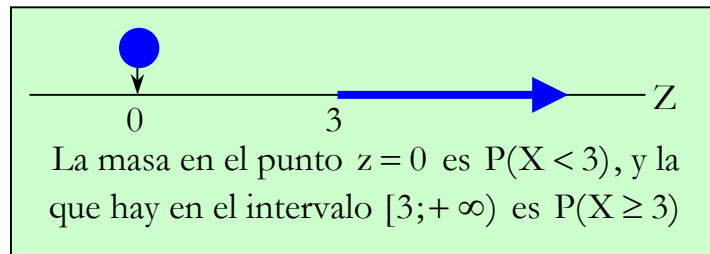
Sea  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de "X".

1) La variable "Z" sólo puede tomar los valores  $-1$  y  $0$ , siendo:

$$P(Z = -1) = P(X \leq 0) = F(0)$$

$$P(Z = 1) = P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0)$$

2) La variable "Z" toma el valor  $0$  (sucede eso si  $X < 3$ ) o toma valores mayores o iguales que  $3$  (sucede eso si  $X \geq 3$ , pues en tal caso  $Z = X$ ).



• Si  $z < 0$ , es:  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$

• Si  $z = 0$ , es:

$$F_Z(0) = P(Z \leq 0) = P(Z = 0) = P(X < 3) = P(X \leq 3) - P(X = 3) = F(3) - P(X = 3)$$

• Si  $0 < z < 3$ , es:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z = 0) = P(X < 3) = P(X \leq 3) - P(X = 3) = F(3) - P(X = 3)$$

• Si  $z = 3$ , es:

$$F_Z(3) = P(Z \leq 3) = P(Z < 3) + P(Z = 3) = P(Z < 3) + P(X = 3) = (P(X \leq 3) - P(X = 3)) + P(X = 3) = P(X \leq 3) = F(3)$$

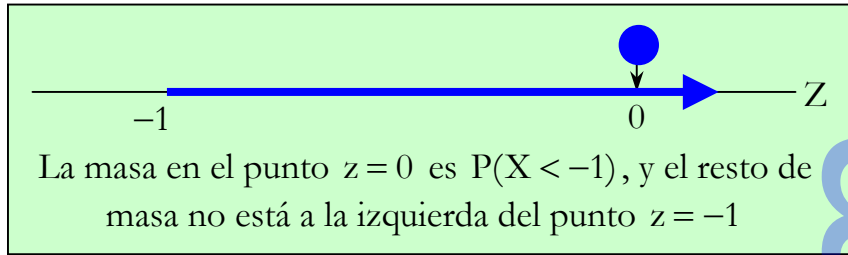
• Si  $z > 3$ , es:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z \leq 3) + P(3 < Z \leq z) = F_Z(3) + P(3 < X \leq z) = P(X \leq z) = F(z)$$

• En definitiva, la función de distribución de la variable "Z" es:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ F(3) - P(X = 3) & \text{si } 0 \leq z < 3 \\ F(z) & \text{si } z \geq 3 \end{cases}$$

- 3) La variable "Z" toma el valor 0 (sucede eso si  $X < -1$ ) o toma valores mayores o iguales que  $-1$  (sucede eso si  $X \geq -1$ , pues en tal caso  $Z = X$ ).



- Si  $z < -1$ , es:  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 0$
- Si  $z = -1$ , es:

$$F_Z(-1) = P(Z \leq -1) = P(Z < -1) + P(Z = -1) = 0 + P(Z = -1) = P(X = -1) = F(-1) - P(X = -1)$$

- Si  $-1 < z < 0$ , es:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z \leq -1) + P(-1 < Z \leq z) =$$

$$P(Z \leq -1) = F_Z(-1) = F(-1) - P(X = -1)$$

$$\text{Si } -1 < z < 0 \text{ entonces } Z = X$$

$$\begin{aligned} &= F(-1) - P(X = -1) + P(-1 < X \leq z) = \\ &= P(X \leq -1) - P(X = -1) + P(-1 < X \leq z) = \\ &= P(X < -1) + P(X = -1) - P(X = -1) + P(-1 < X \leq z) = \\ &= P(X < -1) + P(-1 < X \leq z) = \\ &= P(X \leq z) - P(X = -1) = F(z) - P(X = -1) \end{aligned}$$

- Si  $z = 0$ , es:  $F_Z(0) = P(Z \leq 0) = P(Z < 0) + P(Z = 0) =$

La variable "Z" toma el valor 0 si  $X < -1$  o si  $X = 0$ , y como estos dos sucesos son incompatibles,  $P(Z = 0) = P(X < -1) + P(X = 0)$

$$= P(Z < 0) + P(X < -1) + P(X = 0) =$$

Ocorre el suceso  $Z < 0$  sólo si ocurre el suceso  $-1 \leq X < 0$

$$= \underbrace{P(-1 \leq X < 0)}_{P(X < 0)} + P(X < -1) + P(X = 0) =$$

$$= P(X < 0) + P(X = 0) = P(X \leq 0) = F(0)$$

- Si  $z > 0$ , es:  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + P(0 < Z \leq z) =$

$$P(Z \leq 0) = F(0)$$

Ocorre el suceso  $0 < Z \leq z$  sólo si ocurre el suceso  $0 < X \leq z$

$$= F(0) + P(0 < X \leq z) = P(X \leq 0) + P(0 < X \leq z) = P(X \leq z) = F(z)$$

- En definitiva, la función de distribución de la variable "Z" es:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -1 \\ F(z) - P(X = -1) & \text{si } -1 \leq z < 0 \\ F(z) & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

### **FONEMATO 2.13.12**

La función de cuantía de la variable aleatoria "X" que expresa el número de obreros necesarios para concluir un cierto trabajo es

|          |     |     |     |     |     |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| x        | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  |
| P(X = x) | 0'2 | 0'3 | 0'3 | 0'1 | 0'1 |

El beneficio que se obtiene por el trabajo es  $Z = 1000 \cdot (12 - X)$

- 1) Determinése la distribución de probabilidad de "Z".
- 2) Determinése la media y la varianza de "X" y de "Z".

### **SOLUCIÓN**

- 1) **Determinemos el valor de la variable "Z" en cada punto de la distribución de probabilidad de la variable "X".**

|          |        |        |     |         |         |
|----------|--------|--------|-----|---------|---------|
|          | Z=2000 | Z=1000 | Z=0 | Z=-1000 | Z=-2000 |
|          | ↑↑     | ↑↑     | ↑↑  | ↑↑      | ↑↑      |
| x        | 10     | 11     | 12  | 13      | 14      |
| P(X = x) | 0'2    | 0'3    | 0'3 | 0'1     | 0'1     |

Por tanto, la función de probabilidad o cuantía de la variable "Z" es:

|          |       |       |     |      |      |
|----------|-------|-------|-----|------|------|
| z        | -2000 | -1000 | 0   | 1000 | 2000 |
| P(Z = z) | 0'1   | 0'1   | 0'3 | 0'2  | 0'2  |

2) Es:

$$E(X) = 10 \cdot 0'2 + 11 \cdot 0'3 + 12 \cdot 0'3 + 13 \cdot 0'1 + 14 \cdot 0'1 = 11'6$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 136 - 11'6^2 = 1'44$$

$$E(X^2) = 10^2 \cdot 0'2 + 11^2 \cdot 0'3 + 12^2 \cdot 0'3 + 13^2 \cdot 0'1 + 14^2 \cdot 0'1 = 136$$

$$E(Z) = E(1000 \cdot (12 - X)) = 1000 \cdot (12 - E(X)) = 1000 \cdot (12 - 11'6) = 400$$

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(1000 \cdot (12 - X)) = 1000^2 \cdot V(12 - X) = 1000^2 \cdot V(-X) = \\ &= 1000^2 \cdot (-1)^2 \cdot V(X) = 1000^2 \cdot 1'44 = 144000 \end{aligned}$$

### **FONEMATO 2.13.13**

La concentración de un reactivo empleado en un proceso químico es una variable aleatoria "X" cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 6 \cdot x \cdot (1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El beneficio asociado al proceso es  $Z = 1 + 3 \cdot X$

- 1) Determinése el valor esperado de "Z".
- 2) Determinése la función de densidad de "Z".

### **SOLUCIÓN**

1) Es:  $E(Z) = E(1 + 3 \cdot X) = 1 + 3 \cdot E(X) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 6 \cdot x^2 \cdot (1-x) \cdot dx = 6 \cdot \beta(3;2) =$$

$$\beta(p;q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{(p-1)! \cdot (q-1)!}{(p+q-1)!}$$

si  $p > 0$  y  $q > 0$   
si los números "p" y "q" son naturales

$$= 6 \cdot \frac{\Gamma(3) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(3+2)} = 6 \cdot \frac{2! \cdot 1!}{4!} = \frac{1}{2}$$

**VENTANA**

- 2) Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = 1 + 3 \cdot X$ :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(1 + 3 \cdot X \leq z) = P(X \leq (z-1)/3) = F((z-1)/3)$$

La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{dF((z-1)/3)}{dz} = \frac{dF((z-1)/3)}{d((z-1)/3)} \cdot \frac{d((z-1)/3)}{dz} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot f((z-1)/3) = \\ &= \frac{dF(\text{Pepe})}{d(\text{Pepe})} = f(\text{Pepe}) ; \quad \frac{d((z-1)/3)}{dz} = \frac{1}{3} \\ &= \begin{cases} 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{z-1}{3} \cdot (1 - \frac{z-1}{3}) & \text{si } 1 < z < 4 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{aligned}$$

## **FONEMATO 2.13.14**

La proporción de alcohol en un cierto compuesto es una variable aleatoria "X" cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 20 \cdot x^3 \cdot (1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

El precio "Z" de venta (por litro) y la demanda "Q" (expresada en litros) son respectivamente  $Z = 500 + 1000 \cdot X$  y  $Q = 5000/X$ .

- 1) Determinése la función de densidad de la demanda.
- 2) Determinése el valor esperado de la venta total del compuesto.

### **SOLUCIÓN**

- 1) Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_Q(q)$  de la variable  $Q = 5000/X$ :

$$\begin{aligned} F_Q(q) &= P(Q \leq q) = P(5000/X \leq q) = P(X \geq 5000/q) = \\ &= 1 - P(X < 5000/q) = 1 - F(5000/q) \end{aligned}$$

La densidad  $f_Q(q)$  de la variable "Q" es la derivada de  $F_Q(q)$ :

$$\begin{aligned} f_Q(q) &= \frac{dF_Q(q)}{dq} = \frac{d(1 - F(5000/q))}{dz} = -\frac{dF(5000/q)}{dz} = \\ &= -\frac{dF(5000/q)}{d(5000/q)} \cdot \frac{d(5000/q)}{dz} = \frac{5000}{q^2} \cdot f(5000/q) = \\ &\quad \boxed{\frac{dF(P_{io})}{d(P_{io})} = f(P_{io}) ; \quad \frac{d(5000/q)}{dq} = -\frac{5000}{q^2}} \\ &= \begin{cases} 20 \cdot \frac{5000}{q^2} \cdot \left(\frac{5000}{q}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{5000}{q}\right) & \text{si } q > 5000 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \end{aligned}$$

- 2) El aleatorio valor de la venta está expresado por  $U = Z \cdot Q$ , siendo:

$$\begin{aligned} E(U) &= E(Z \cdot Q) = E\left((500 + 1000 \cdot X) \cdot \frac{5000}{X}\right) = E\left(5 \cdot 10^6 + \frac{25 \cdot 10^5}{X}\right) = \\ &= 5 \cdot 10^6 + 25 \cdot 10^5 \cdot E\left(\frac{1}{X}\right) = 5 \cdot 10^6 + 25 \cdot 10^5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x) \cdot dx = \\ &= 5 \cdot 10^6 + 25 \cdot 10^5 \cdot \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot 20 \cdot x^3 \cdot (1-x) \cdot dx = \\ &= 5 \cdot 10^6 + 25 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot (1-x) \cdot dx = 5 \cdot 10^6 + 25 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot \beta(3;2) \end{aligned}$$

## **FONEMATO 2.13.15**

Determinése la función de densidad de probabilidad de la variable  $Z = X^2$  si la función de densidad de probabilidad de "X" es  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ .

### **SOLUCIÓN**

Siendo  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X", determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = X^2$ :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z}) = \\ = P(X \leq \sqrt{z}) = F(\sqrt{z})$$

pues "X" no toma valores negativos

La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{dF(\sqrt{z})}{dz} = \frac{dF(\sqrt{z})}{d(\sqrt{z})} \cdot \frac{d(\sqrt{z})}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot f(\sqrt{z}) =$$

$$\frac{dF(\text{Pío})}{d(\text{Pío})} = f(\text{Pío}) ; \quad \frac{d(\sqrt{z})}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot e^{-\sqrt{z}}, \quad z > 0$$

#### **VENTANA**

**¡Ojo!**, aunque  $x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$ , la densidad  $f_Z(z)$  no está acotada en el punto  $z = 0$  (en ese punto se anula el denominador  $\sqrt{z}$ ), pues  $f_Z(z) \rightarrow +\infty$  si  $z \rightarrow 0^+$ ; no obstante, la masa "encerrada" por la densidad  $f_Z(z)$  es la unidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z) \cdot dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot e^{-\sqrt{z}} \cdot dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2 \cdot u} \cdot e^{-u} \cdot 2 \cdot u \cdot du =$$

$$\sqrt{z} = u \Rightarrow z = u^2 \Rightarrow dz = 2 \cdot u \cdot du \\ \text{los límites de integración no cambian}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot du = \Gamma(1) = 0! = 1$$

## FONEMATO 2.13.16

Sea "X" una variable aleatoria cuya función de densidad es  $f(x) = 0.5$ ,  $x \in [-1;1]$ .

Determinese la función de densidad de  $Z = 3.X^2 - 2$ .

### SOLUCIÓN

Sea  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X".

Determinemos la función de distribución  $F_Z(z)$  de la variable  $Z = 3.X^2 - 2$ :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(3.X^2 - 2 \leq z) = P(X^2 \leq (z+2)/3) = \\ &= P(-\sqrt{(z+2)/3} \leq X \leq \sqrt{(z+2)/3}) = \\ &= P(X \leq \sqrt{(z+2)/3}) - P(X < -\sqrt{(z+2)/3}) = \\ &= F(\sqrt{(z+2)/3}) - F(-\sqrt{(z+2)/3}) \end{aligned}$$

La densidad  $f_Z(z)$  de la variable "Z" es la derivada de  $F_Z(z)$ :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d(F(\sqrt{(z+2)/3}) - F(-\sqrt{(z+2)/3}))}{dz} = \\ &= \frac{d(F(\sqrt{(z+2)/3}))}{d(\sqrt{(z+2)/3})} \cdot \frac{d(\sqrt{(z+2)/3})}{dz} - \frac{d(F(-\sqrt{(z+2)/3}))}{d(-\sqrt{(z+2)/3})} \cdot \frac{d(-\sqrt{(z+2)/3})}{dz} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(\text{Pío})}{d(\text{Pío})} &= f(\text{Pío}) \\ \frac{d(\sqrt{(z+2)/3})}{dz} &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{z+2}}; \quad \frac{d(-\sqrt{(z+2)/3})}{dz} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{z+2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{z+2}} \cdot (f(\sqrt{(z+2)/3}) + f(-\sqrt{(z+2)/3})) =$$

$$f(\sqrt{(z+2)/3}) = f(-\sqrt{(z+2)/3}) = 0.5$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{z+2}}, \quad -2 < z \leq 1$$

### VENTANA

**¡Ojo!**, aunque  $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow z = 3.x^2 - 2 \in [-2;1]$ , la densidad  $f_Z(z)$  no está acotada en el punto  $z = -2$  (en ese punto se anula el denominador  $\sqrt{z+2}$ ) pues  $f_Z(z) \rightarrow +\infty$  si  $z \rightarrow -2^+$ ; no obstante, la masa "encerrada" por la densidad  $f_Z(z)$  es la unidad:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z) \cdot dz &= \int_{-2}^1 \frac{dz}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{z+2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-2+h}^1 \frac{dz}{\sqrt{z+2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{z+2} \right)_{-2+h}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{3} - \sqrt{(-2+h)+2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{3} - \sqrt{h} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - 0) = 1 \end{aligned}$$

### **FONEMATO 2.13.17**

Sea "X" una variable aleatoria cuya función de densidad es  $f(x) = 0.5$ ,  $x \in [-1;1]$ .  
Determínese la función de densidad de  $U = 1 + X^3$ .

### **SOLUCIÓN**

Sea  $F(x) = P(X \leq x)$  la función de distribución de la variable "X".

Determinemos la función de distribución  $F_U(u)$  de la variable  $U = 1 + X^3$ :

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(1 + X^3 \leq u) = P(X \leq \sqrt[3]{u-1}) = F(\sqrt[3]{u-1})$$

La densidad  $f_U(u)$  de la variable "U" es la derivada de  $F_U(u)$ :

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dF(\sqrt[3]{u-1})}{du} = \frac{dF(\sqrt[3]{u-1})}{d(\sqrt[3]{u-1})} \cdot \frac{d(\sqrt[3]{u-1})}{du} =$$

$$\boxed{\frac{dF(\text{Pío})}{d(\text{Pío})} = f(\text{Pío}) ; \frac{d(\sqrt[3]{u-1})}{du} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(u-1)^2}}}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(u-1)^2}} \cdot f(\sqrt[3]{u-1}) = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{(u-1)^2}}, \quad 0 \leq u \leq 2, \quad u \neq 1$$

**¡Ojo!**, aunque  $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow u = 1 + x^3 \in [0;2]$ , la densidad  $f_U(u)$  no está acotada en el punto  $u = 1$  (en ese punto se anula el denominador  $6 \cdot \sqrt[3]{(u-1)^2}$ ) pues  $f_U(u) \rightarrow +\infty$  si  $u \rightarrow 1$ ; no obstante, la masa "encerrada" por la densidad  $f_U(u)$  es la unidad:

**VENTANA**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(u) \cdot du &= \int_0^2 f_U(u) \cdot du = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \int_0^{1-h} \frac{1}{\sqrt[3]{(u-1)^2}} \cdot du + \int_{1+h}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(u-1)^2}} \cdot du \right) = \\ &= \frac{3}{6} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \left( \sqrt[3]{u-1} \right)_0^{1-h} + \left( \sqrt[3]{u-1} \right)_{1+h}^2 \right) = \\ &= \frac{3}{6} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \left( \sqrt[3]{(1-h)-1} - \sqrt[3]{0-1} \right) + \left( \sqrt[3]{2-1} - \sqrt[3]{(1+h)-1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \left( \sqrt[3]{-h} - \sqrt[3]{-1} \right) + \left( \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{h} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot (0 - (-1) + 1 - 0) = 1 \end{aligned}$$

## FONEMATO 2.13.18

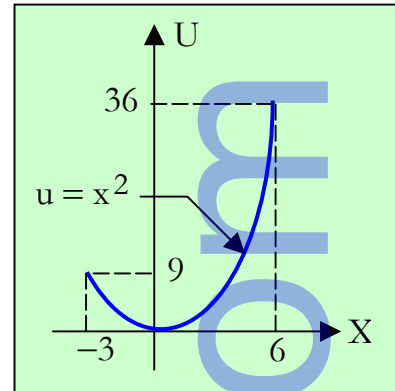
Sea "X" una variable aleatoria con densidad  $f(x) = x^2/81$ ,  $x \in [-3;6]$ .

Determinése la función de densidad de  $U = X^2$ .

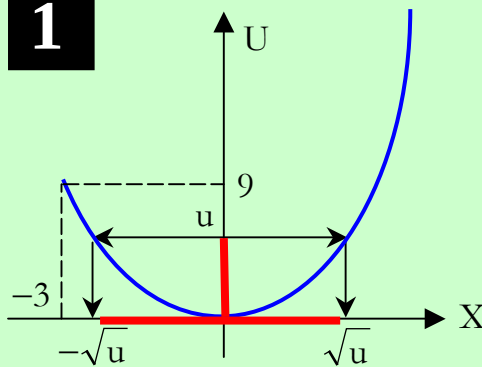
### SOLUCIÓN

Lidiemos utilizando el sentido de la vista: es claro que como la variable aleatoria "X" sólo toma valores en el intervalo  $[-3;6]$ , siendo  $U = X^2$ , la variable "U" sólo toma valores en el intervalo  $[0;36]$ .

Naturalmente, siendo  $u \in [0;36]$ , a la hora de calcular  $F_U(u) = P(U \leq u)$  hay que distinguir dos casos.



1



La variable "U" toma un valor no superior a  $u \in [0;9]$  sólo si la variable "X" toma un valor entre  $-\sqrt{u}$  y  $\sqrt{u}$ ; es decir, siendo  $u \in [0;9]$ , la masa que en la distribución de "U" hay en el intervalo  $(-\infty; u]$  coincide con la masa que en la distribución de "X" hay en el intervalo  $[-\sqrt{u}; \sqrt{u}]$ :

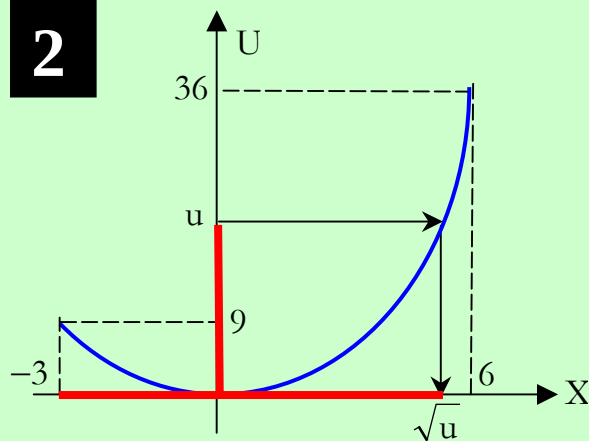
$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) = \\ &= P(-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}) = F(\sqrt{u}) - F(-\sqrt{u}) \end{aligned}$$

Por tanto, siendo  $u \in [0;9]$ , es:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{d(F(\sqrt{u}) - F(-\sqrt{u}))}{du} = \\ &= \frac{dF(\sqrt{u})}{d(\sqrt{u})} \cdot \frac{d(\sqrt{u})}{du} - \frac{dF(-\sqrt{u})}{d(-\sqrt{u})} \cdot \frac{d(-\sqrt{u})}{du} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u})) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{81} \cdot ((\sqrt{u})^2 + (-\sqrt{u})^2) = \frac{u}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{81} = \frac{\sqrt{u}}{81} \end{aligned}$$

**Recuerda: los dibujos grandes y detallados ponen de buen humor a todos los profesores.**

2



Por tanto, siendo  $u \in (9; 36]$ , es:

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dF(\sqrt{u})}{du} = \frac{dF(\sqrt{u})}{d(\sqrt{u})} \cdot \frac{d(\sqrt{u})}{du} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot f(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{(\sqrt{u})^2}{81} = \frac{\sqrt{u}}{162}$$

La variable "U" toma un valor no superior a  $u \in (9; 36]$  sólo si la variable "X" toma un valor no superior a  $\sqrt{u}$ ; es decir, siendo  $u \in (9; 36]$ , la masa que en la distribución de "U" hay en el intervalo  $(-\infty; u]$  coincide con la masa que en la distribución de "X" hay en el intervalo  $(-\infty; \sqrt{u}]$ :

$$F_U(u) = P(U \leq u) =$$

$$= P(X \leq \sqrt{u}) = F(\sqrt{u})$$

Acostúmbrate a usar **ventanas**,  
pues facilitan mucho la lectura de  
lo escrito, por lo que el profesor que  
corrija tu examen te lo agradecerá  
con su **cariño y simpatía**



**Pedrusco "K" = Pedrusco "T"**

**VENTANA**

Razonamientos o cálculos que permiten  
**pasar** de un lado a otro del "=" o de " $\Rightarrow$ "

**Pedrusco "K"  $\Rightarrow$  Pedrusco "T"**

## FONEMATO 2.13.19

La densidad de probabilidad de la variable "X" es  $f(x) = 2 - 2x$ ,  $x \in (0;1)$ .

Determinese la densidad  $Z = 2X + 3$  y la de  $U = +\sqrt{X}$ .

### SOLUCIÓN

**Receta:** siendo  $f_X(x)$  la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua "X", si  $Z = h(X)$  y "h" es monótona, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria "Z" es

$$f_Z(z) = f_X(h^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{d(h^{-1}(z))}{dz} \right|$$

- Siendo monótona  $Z = h(X) = 2X + 3$ , es  $X = h^{-1}(Z) = (Z - 3)/2$ ; por tanto:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X((z-3)/2) \cdot \left| \frac{d((z-3)/2)}{dz} \right| = \frac{1}{2} \cdot f_X((z-3)/2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( 2 - 2 \cdot \frac{z-3}{2} \right), \quad \underbrace{3 \leq z < 5} \end{aligned}$$

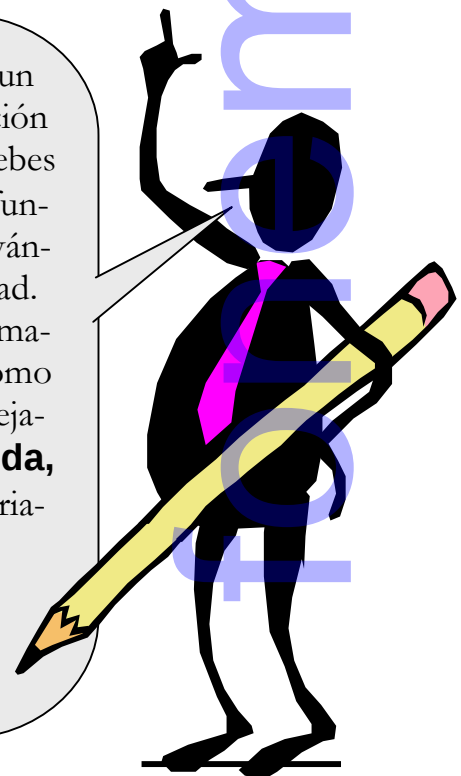
$$0 < x < 1 \Rightarrow 3 < 2x + 3 < 5 \Rightarrow 3 < z < 5$$

- Siendo monótona  $Z = h(X) = +\sqrt{X}$ , es  $X = h^{-1}(Z) = Z^2$ ; por tanto:

$$f_Z(z) = f_X(z^2) \cdot \left| \frac{d(z^2)}{dz} \right| = 2z \cdot f_X(z^2) = 2z \cdot (2 - 2z^2), \quad \underbrace{0 < z < 1}$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 0 < z < 1$$

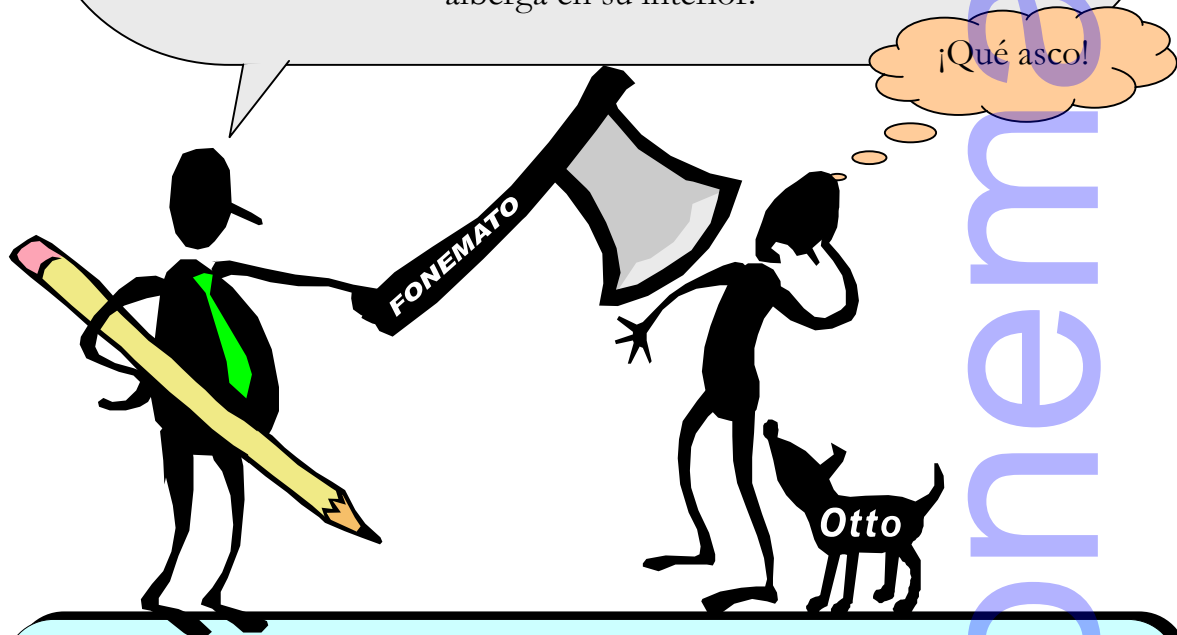
Si en examen te **plantean expresamente** un cambio de variables continuas, aunque la situación sea tan tonta que pueda lidiarse con la receta, debes lidiar como **torero de tronío**, calculando la función de distribución de la variable nueva y derivándola después, para obtener así la nueva densidad. Para mayor gloria, muerto ya el toro, puedes rematar dejando escrito que podrías haber lidiado como autómatas, con la famosa receta, que también dejarás escrita.... **pero como la eficiencia manda, usa la receta sin pudor** si el cambio de variables te lo encuentras en mitad de la guerra de las Termópilas y vas tan jodido de tiempo que no puedes perderlo entreteniéndote con florituras



## 2.14 VARIABLE TRUNCADA

Ahora someteremos la distribución de "masa" de probabilidad de la variable aleatoria "X" a una operación de cirugía mayor consistente en **amputar una parte de la distribución, de modo que nos quedaremos sólo con la "masa" que hay en un intervalo y tiraremos el resto a la basura.** Para la variable "X" el trance es amargo y doloroso, como le pasa a cualquiera al que amputan una parte sustancial de su ser: cuando "X" se entera de que va a ser **truncada** sufre y se apena lo que no está escrito, y tú, solidario, te apenarás y sufrirás con ella, la mimarás y le darás cariños y besitos; le dirás que no se preocupe, que hay vida después del "truncamiento", que ya inventaremos algo para que la "masa" que sobreviva se "sienta" como antes de la amputación.

Pero como la obligación es antes que la devoción, llegado el momento del truncamiento, asirás firmemente este hacha de cortar masa de probabilidad, y sin dudar un ápice seccionarás la distribución de "masa" de "X" en el punto "a" y en el punto "b", quedándote sólo con la "masa" que haya en el intervalo de extremos "a" y "b" y tirando el resto a la basura ... ¡Ojo!, el truncamiento es muy peligroso: te convertirás en ectoplasma si te salpica una sola gota de las churretosas viscosidades que la "masa" de probabilidad alberga en su interior.



Se dice que la variable "Z" es la **truncada** de "X" en un intervalo si "Z" expresa cómo se reparte o distribuye la masa que "X" tiene en ese intervalo cuando se toma como universo referencial la masa que hay en él.

## FONEMATO 2.14.1

La renta de los ciudadanos está expresada por la variable aleatoria "X" cuya función de densidad de probabilidad  $f(x) = x/8$ ,  $x \in [0;4]$ . Una empresa considera que sólo son clientes potenciales los de renta comprendida entre 1 y 3.

- 1) Determinése la media y la varianza de la renta de los clientes potenciales.
- 2) Calcúlese la probabilidad de que un cliente potencial tenga renta superior a 2.

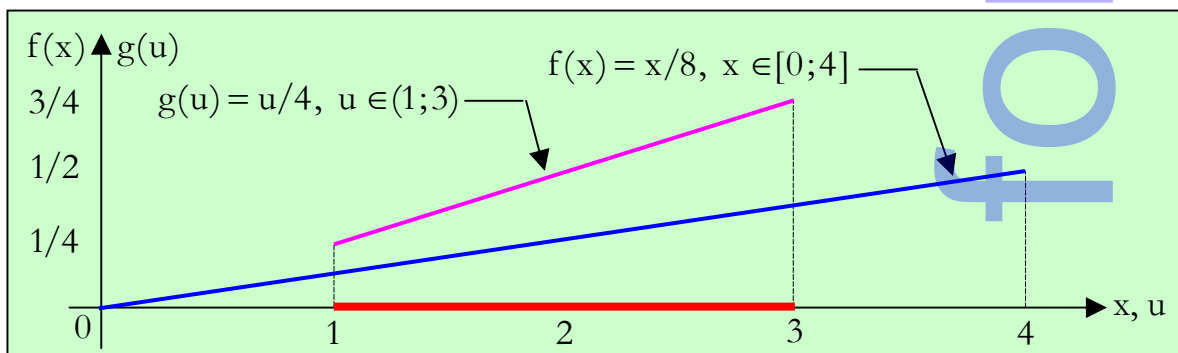
### SOLUCIÓN

Sea "F" la función de distribución de la variable "X":  $F(x) = P(X \leq x)$ . Como los clientes potenciales tienen rentas entre 1 y 3, **amputamos** la distribución continua de masa de probabilidad asociada a "X", pues sólo interesa la masa  $F(3) - F(1)$  que "X" tiene repartida en el intervalo (1;3). De la variable aleatoria "U" que expresa la renta de los clientes potenciales se dice que es la **truncada** de "X" en el intervalo (1;3); y con eso quiere decirse que "U" expresa cómo se distribuye o reparte la masa que "X" tiene en el intervalo (1;3) si se toma como universo referencial esa masa. **Que quede claro: "U" es una variable aleatoria corriente y moliente... y para ella cabe plantear cualquiera de las historias estudiadas en este tema.**

Siendo "G" la función de distribución de "U", como "U" sólo toma valores en el intervalo (1;3), es  $G(u) = P(U \leq u) = 0$  si  $u \leq 1$ , y  $G(u) = P(U \leq u) = 1$  si  $u \geq 3$ . Si  $u \in (1;3)$ , es:

$$\begin{aligned} G(u) &= P(U \leq u) = P(X \leq u / 1 < X < 3) = \frac{P((X \leq u) \cap (1 < X < 3))}{P(1 < X < 3)} = \\ &= \frac{P(1 < X \leq u)}{P(1 < X < 3)} = \frac{\text{masa que "X" tiene en } (1;u]}{\text{masa que "X" tiene en } (1;3)} = \frac{F(u) - F(1)}{F(3) - F(1)} = \\ &= \frac{(u^2/16) - (1/16)}{(3^2/16) - (1^2/16)} = \frac{u^2 - 1}{8} \end{aligned}$$

La función  $g(u)$  de densidad de probabilidad de "U" es nula fuera del intervalo (1;3). En un punto  $u \in (1;3)$  es  $g(u) = dG(u)/du = u/4$ .



1) Es: 
$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot g(u) \cdot du = \int_1^3 u \cdot \frac{u}{4} \cdot du = \frac{1}{12} \cdot (u^3)_1^3 = \frac{26}{12}$$

$$V(U) = E(U^2) - (E(U))^2 = \frac{80}{16} - \left(\frac{26}{12}\right)^2$$

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot g(u) \cdot du = \int_1^3 u^2 \cdot \frac{u}{4} \cdot du = \frac{1}{16} \cdot (u^4)_1^3 = \frac{80}{16}$$

2) Probabilidad del suceso de que un cliente potencial tenga renta superior a 2:

$$P(U > 2) = 1 - P(U \leq 2) = 1 - G(2) = 1 - \frac{1}{8} \cdot (2^2 - 1) = \frac{5}{8}$$

Probabilidad del suceso  $X > 2$  de que un ciudadano tenga renta superior a 2:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2^2}{16} = \frac{3}{4}$$

## **FONEMATO 2.14.2**

Siendo "X" una variable aleatoria continua, determínense las funciones de distribución y de densidad de la variable truncada de "X" en el intervalo (a;b).

## **SOLUCIÓN**

Siendo "F" la función de distribución de la variable "X" ( $F(x) = P(X \leq x)$ ), sea "f" la función de densidad de probabilidad ( $f(x) = dF(x)/dx$ ). **La variable "U" truncada de "X" en el intervalo (a;b) expresa cómo se reparte o distribuye la masa que "X" tiene en el intervalo (a;b) si se toma como universo referencial dicha masa.**

Siendo "G" la función de distribución de "U", como "U" sólo toma valores en (a;b), si  $u \leq a$  es  $G(u) = P(U \leq u) = 0$ , y si  $u \geq b$  es  $G(u) = P(U \leq u) = 1$ .

Si  $u \in (a;b)$ , es:

$$G(u) = P(U \leq u) = P(X \leq u / a < X < b) = \frac{P((X \leq u) \cap (a < X < b))}{P(a < X < b)} =$$

definición de probabilidad condicionada

$$= \frac{P(a < X \leq u)}{P(a < X < b)} = \frac{\text{masa que "X" tiene en } (a;u]}{\text{masa que "X" tiene en } (a;b)} = \frac{F(u) - F(a)}{F(b) - F(a)}$$

La función  $g(u)$  de densidad de probabilidad de "U" es nula fuera del intervalo (a;b); y si  $u \in (a;b)$ , es:

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{dG(u)}{du} = \frac{d\left(\frac{F(u) - F(a)}{F(b) - F(a)}\right)}{du} = \frac{1}{F(b) - F(a)} \cdot \frac{d(F(u) - F(a))}{du} = \\ &= \frac{1}{F(b) - F(a)} \cdot \frac{dF(u)}{du} = \frac{f(u)}{F(b) - F(a)} \end{aligned}$$

$$\frac{dF(u)}{du} = f(u)$$

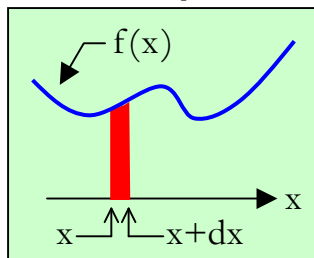
**En examen no importa lo que sabes,  
importa lo que parece que sabes.**

En examen debes acreditar que distingues una v.a (variable aleatoria) discreta de otra continua, y que entiendes que **"distribuir" es sinónimo de "repartir"**.... y puedes matar esos dos pájaros de un tiro en el arranque de la solución de cualquier ejercicio sobre variables aleatorias unidimensionales, escribiendo:

- La v.a discreta "X" **distribuye o reparte** su masa 1 de prob. entre un **número finito o infinito numerable** de puntos "Pepe", "Juan" y otros parientes de  $\mathcal{R}$ .
- La v.a continua "Y" **distribuye o reparte** su masa 1 de prob. entre la **infinitud no numerable** de puntos del intervalo "Tal" de  $\mathcal{R}$ .

## Para variables continuas

- **Acredita que entiendes el concepto de densidad** (en un universo



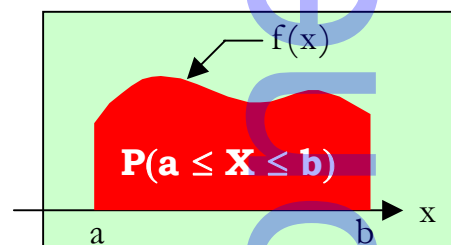
unidimensional, relación entre masa y longitud), escribiendo: si " $f$ " es la **función de densidad de probab.** de la v.a "Pepa", la masa en  $(x; x+dx)$  es el producto de la densidad  $f(x)$  en " $x$ " por la amplitud " $dx$ " del intervalo; o sea, el área que limitan la gráfica de " $f$ " y el eje de abscisas en  $(x; x+dx)$ .... con su dibujito.

- **Acredita que entiendes cómo se calcula la probabilidad de un suceso  $a \leq X \leq b$ , que es la masa en el intervalo  $[a; b]$ ; o sea, el área que en  $[a; b]$  limitan la gráfica de " $f$ " y el eje de abscisas...** escribirás:

Integramos para la infinitud no numerable de intervalos como  $(x; x+dx)$  que forman  $[a; b]$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{x=a}^{x=b} \underbrace{f(x) \cdot dx}_{\text{Masa en el intervalo } (x; x+dx)} = \dots = 0'69$$

Masa en el intervalo  $(x; x+dx)$



**Megalatiguiillo:** la frecuencia relativa del suceso  $a \leq X \leq b$  converge en probabilidad a 0'69: repitiendo el experimento un número lo bastante grande de veces, dicha frecuencia se aproxima a 0'69 tanto como se quiera.

- Tras hablar una vez de la **función de densidad de probabilidad** de una v.a continua, **no pierdas tiempo** escribiendo tanto, habla simplemente de la **densidad** de la v.a "Pepa" o la **densidad** de la v.a "Juana".

## Tema 2: Variables aleatorias unidimensionales

- Si la **densidad es lineal** ( $f(x) = m \cdot x + n$ , con "m" y "n" constantes), aunque uses integrales para hallar la prob. de un suceso  $a \leq X \leq b$ , **no olvides explicar que no hacen falta**, pues para calcular  $P(a \leq X \leq b)$  basta calcular áreas de triángulos y rectángulos.

## Para variables discretas

- Acredita que el concepto **función de probabilidad o cuantía** no tiene secretos para ti.... escribirás: si "f" es la función de cuantía de la v.a "Pepa", la **masa puntual** ( $m.p$ ) de probab. que hay en el punto "x" es  $f(x)$ .
- Acredita que entiendes cómo calcular la prob. de un suceso  $a \leq X \leq b$ : **suma de las masas puntuales** que hay en el intervalo  $[a;b]$ ... escribirás:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} \overbrace{f(x_i)}^{\text{m.p en } x_i} = \dots = 0'21$$

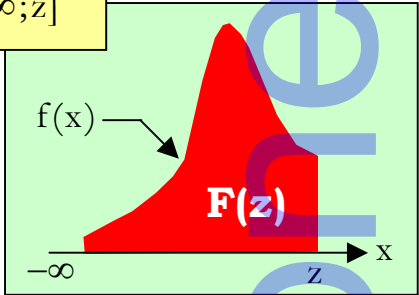
Sumamos para los puntos de  $[a;b]$  en que hay una m.p

## Para la función de distribución

**Defínela siempre:** es la  $F: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  que a cada  $z \in \mathcal{R}$  le asocia la masa que hay en el intervalo  $(-\infty; z]$ ; o sea, al punto "z" la función "F" le asocia la probabilidad del suceso  $X \leq z$  ... y al calcularla, escribirás:

- **Variable aleatoria continua:**

Integramos para la infinidad no numerable de intervalos como el  $(x; x+dx)$  que forman  $(-\infty; z]$

$$F(z) = P(X \leq z) = \int_{x=-\infty}^{x=z} \underbrace{f(x)}_{\text{Masa en el intervalo } (x; x+dx)} \cdot dx = \dots$$


- **Variable aleatoria discreta:**

$$F(z) = P(X \leq z) = \sum_{x_i \leq z} \underbrace{f(x_i)}_{\text{m.p en } x_i} = \dots$$

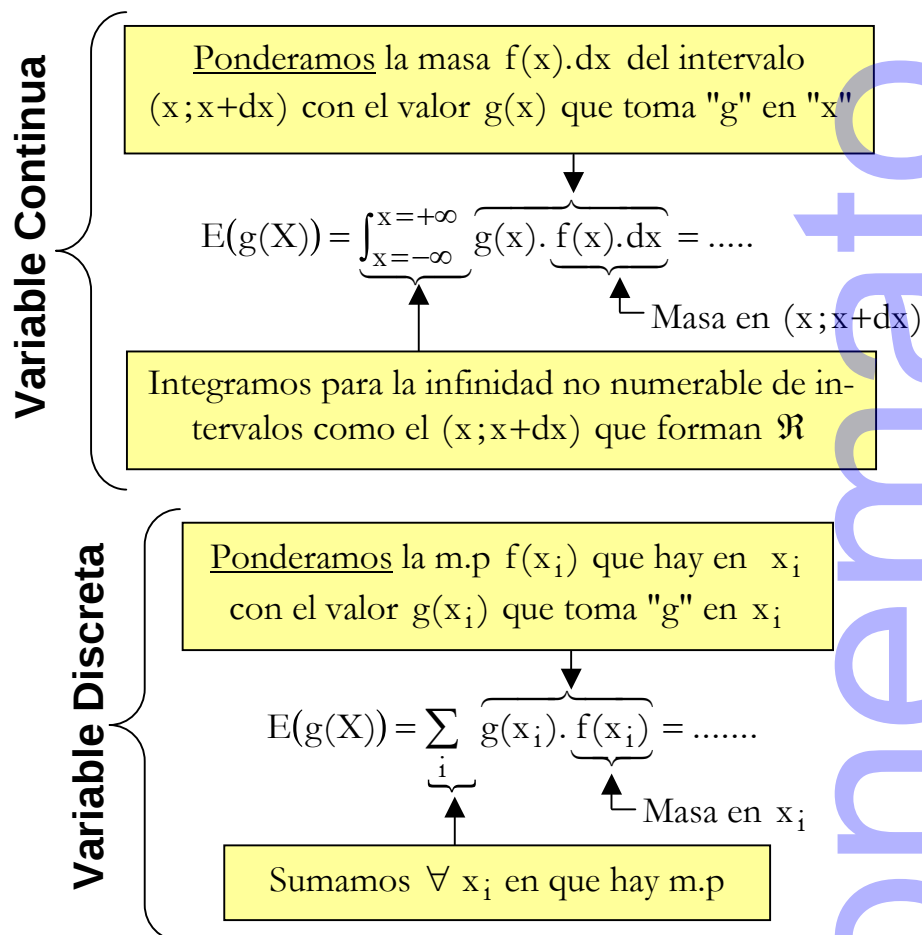
Sumamos la m.p  $\forall x_i$  no situado a la derecha de "z"

- **Dos latiguillos para rematar el cálculo de "F":**

- 1) **Breve comentario de sus propiedades:**  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ , es monót. no decrec.  $\forall z$  y cont. por la dcha  $\forall z$ . Por la izq. es "F" cont. en "z" sólo si él no hay una m.p ( $P(X = z) = 0$ ); si la hay ( $P(X = z) \neq 0$ ), entonces "F" da salto de amplitud  $f(z)$  en "z"... por eso la gráfica de "F" es escalonada (continua, no "rota") si la v.a es discreta (continua).
- 2) **Conocer "F" es un chollo si la v.a es continua:** conociendo "F" puede hallarse la prob. de un suceso  $a \leq X \leq b$  sin más integrales, pues  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ ... no hay chollo si la v.a es discreta; en tal caso, para calcular  $P(a \leq X \leq b)$  olvida a "F" y suma las m.p que haya en  $[a; b]$ .

## Para la esperanza matemática

Acredita que entiendes el concepto de **esperanza matemática** (el operador "E") y su relación con el verbo **ponderar** (relativizar, dar importancia)... escribirás:



- **Primer latiguillo sobre el centro de gravedad**

Tanto si "X" es discreta como si es continua, tras obtener que, por ejemplo, es "7" el piojoso número real que denotamos  $E(g(X))$ , **rematarás** diciendo que el **centro de gravedad** (CG) de la distribución de masa de prob. asociada a la v.a unidimensional  $g(X)$  está en el punto "7" de la recta real.

- Si en algún momento empleas las propiedades de "E" (cosa harto probable), habla de la **linealidad** de "E":

$$E(7.g_1(X) - 13.g_2(X)) = 7.E(g_1(X)) - 13.E(g_2(X))$$

Debido a la **linealidad** de "E"

## Para los momentos respecto a un punto "c"

**Acredita que entiendes el concepto de momento respecto a un punto "c"....** escribirás: el momento de orden "k" de la v.a "X" respecto al punto "c" es la esperanza matemática de  $g(X) = (X - c)^k$ ; es decir:

- **V.a continua:** ponderamos la masa  $f(x).dx$  que hay en  $(x; x+dx)$  con la potencia k-ésima del número " $x - c$ " que expresa su posición respecto a "c", integrando para la infinitud no numerable de intervalos que forman  $\mathbb{R}$ .

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - c)^k \cdot \underbrace{f(x).dx}_{\text{Masa en } (x; x+dx)} = \dots\dots$$

Masa en  $(x; x+dx)$

- **V.a discreta:** ponderamos la m.p  $f(x_i)$  que hay en  $x_i$  con la potencia k-ésima del número " $x_i - c$ " que expresa su posición respecto a "c", sumando para todos los puntos que forman la distribución discreta.

$$\sum_i (x_i - c)^k \cdot \underbrace{f(x_i)}_{\text{m.p en } x_i} = \dots\dots\dots$$

m.p en  $x_i$

- **Segundo latiguillo sobre el centro de gravedad:** tanto si "X" es discreta como si es continua, tras obtener que  $E(X) = 45$  (por ejemplo), **rematarás** diciendo que el **centro de gravedad** de la distribución de prob. asociada a "X" está en el punto "45" de la recta real; o sea, concentrando la masa 1 asociada a "X" en el punto "45", se obtiene una v.a **degenerada** "W" tal que  $E(W) = E(X)$ .... por eso, el número 45 puede emplearse como **medida de la posición respecto de la que está centrada la distribución de prob. de "X"**, sin olvidar que  $E(X)$  se expresa en las mismas unidades que "X".
- **Latiguillo sobre la varianza:** tanto si "X" es discreta como si es continua, tras calcular  $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$ , **rematarás** diciendo que la varianza es **una medida de la dispersión que respecto a su CG tiene la distribución de masa asociada a "X"**, pues siendo  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ , ponderamos la masa con el cuadrado del número que

expresa la posición de la masa respecto al CG ..... por tanto, la varianza, que jamás es negativa, será pequeña o grande según que la masa esté muy concentrada o poco concentrada entorno al CG.

## Para la acotación de Tchebychef

**Latiguillo:** como no se conoce la distribución de probabilidad de "X", es imposible calcular la prob. de todo suceso relacionado con "X"... pero Tchebychef permite acotar dicha prob; siendo  $\mu$  la media de "X" y  $V(X)$  la varianza, es:

$$P(|X - \mu| \leq h) \geq P(|X - \mu| < h) \geq 1 - (V(X)/h^2)$$

$$P(|X - \mu| > h) \leq P(|X - \mu| \geq h) \leq V(X)/h^2$$

## Para la f.g.m

**Latiguillo:** caso particular de  $E(g(X))$  cuando  $g(X) = e^{t.X}$ :

Ponderamos la masa  $f(x).dx$  que hay en  $(x; x+dx)$  con el número  $e^{t.x}$

$$\Phi(t) = E(e^{t.X}) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{t.x} \cdot f(x).dx = \dots\dots$$

Masa en  $(x; x+dx)$

Integramos para la infinidad no numerable de intervalos que forman  $\mathcal{R}$

Ponderamos la m.p  $f(x_i)$  que hay en  $x_i$  con el número  $e^{t.x_i}$

$$\Phi(t) = E(e^{t.X}) = \sum_i e^{t.x_i} \cdot f(x_i) = \dots\dots\dots$$

Masa puntual en  $x_i$

Sumamos para los puntos en que hay m.p

Si calculas la f.g.m de una v.a "X", **remata comentando brevemente sus propiedades:**  $\Phi(0) = 1$ ;  $\Phi(t)$  no puede tomar valores negativos; existen las derivadas de todo orden de  $\Phi(t)$  en el punto "0", y  $d^k \Phi(0)/dt^k = E(X^k)$ ; el coef. de  $t^k$  en el desarrollo de  $\Phi(t)$  en serie de potencias de "t" es  $E(X^k)/k!$ .

## Para los cambios de variable

### • Variables discretas

Arrancas escribiendo: **calculemos el valor de la variable "nueva" en cada punto de la distribución discreta de masa de prob. asociada a la variable "vieja"....** y tras hacer las correspondientes "cuentas", actúas en consecuencia.

## • Variables continuas

Siendo "X" la variable "vieja" y  $Z = h(X)$  la "nueva", si la función "h" es **monótona** en el campo de variación de "X", puedes **lidiar como un autómatas**, diciendo que la densidad  $f_Z(z)$  de "Z" es

$$f_Z(z) = f_X(h^{-1}(z)) \cdot \left| \frac{d(h^{-1}(z))}{dz} \right|$$

donde  $f_X(x)$  es la densidad de la vieja "X" ... **pero es más elegante lidiar a lo bestia** (que es lo que deberás hacer por fuerza si "h" no es monótona en el campo de variación de "X"): calculas la función de distribución  $F_Z(z) = P(Z \leq z)$  de "Z" y tras derivarla (**sin olvidar mencionar la regla de la cadena**) obtienes la densidad  $f_Z(z)$  de "Z" ... y todo ello acompañado por hermosos y detallados dibujitos que llenen de gozo a tu profe.

**Acostúmbrate a usar "ventanas": como facilitan mucho la lectura de lo escrito, tu profe te lo agradecerá con su cariño y simpatía.**

**Por ejemplo:** siendo  $f(x) = 6 \cdot x \cdot (1 - x)$ ,  $x \in [0;1]$ , es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0'05$$

$$\bullet E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot (6 \cdot x \cdot (1 - x)) \cdot dx =$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$  y  $f(x) = 6 \cdot x \cdot (1 - x)$  si  $x \in [0;1]$

$$= 6 \cdot \int_{x=0}^{x=1} (x^2 - x^3) \cdot dx = 6 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet E(X^2) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{x=0}^{x=1} x^2 \cdot (6 \cdot x \cdot (1 - x)) \cdot dx =$$

pues  $f(x) = 0$  si  $x \notin [0;1]$  y  $f(x) = 6 \cdot x \cdot (1 - x)$  si  $x \in [0;1]$

$$= 6 \cdot \int_{x=0}^{x=1} (x^3 - x^4) \cdot dx = 6 \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{5} \cdot x^5 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{10}$$

**Recuerda: todo error conceptual anula el efecto de los latiguillos y te deja con el culo al aire:** tu profe se sentirá engañado si tras embelesarle con los más dulces latiguillos, metes la pata en algo "estructural"... y ya sabes la mala uva que le entra a la gente al sentirse engañada.