Tema 1

Campos escalares y vectoriales

Dios inventó el número natural, lo demás es obra del hombre

Kronecker

1.1 LOS NÚMEROS REALES

Desde nuestra más tierna infancia todos estamos familiarizados con los **números naturales** 1, 2, 3, 4, 5, ... pues con ellos aprendimos a "contar". Podemos visualizar dicho conjunto si, tomando como "soporte" una recta, convenimos en representar cada número natural mediante un punto.

VISUALIZACIÓN DE LOS NATURALES

1 2 3 4 5 6 7 8 9 . . . ← recta soporte

Con los números naturales no puede irse muy lejos, pues todos son positivos; así, **dados dos números naturales "a" y "b", no siempre existe otro número natural "x" tal que a + x = b.** Por ejemplo, $4 + x = 2 \Rightarrow x = -2$, que no es un número natural.

Esta limitación del conjunto de los números naturales no se presenta en el conjunto de los números enteros $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...)$. Consideramos que el número "cero" es entero; el "cero" es tan especial que hasta bien entrado el segundo milenio de nuestra era no se le admitió como número, para los sabios del siglo XI no era un número.

Si convenimos en representar cada número entero mediante un punto, podemos visualizar el conjunto de dichos números.

VISUALIZACIÓN DE LOS ENTEROS

. . −3 −2 −1 0 1 2 3 . .

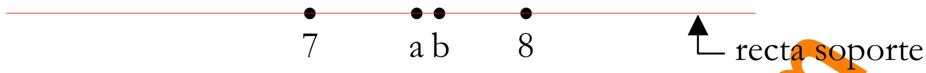
Con los enteros tampoco puede irse muy lejos ni construir puentes muy largos, pues **dados dos números enteros "a" y "b", no siempre hay otro entero "x" tal que a.x = b.** Por ejemplo, $7.x = 5 \Rightarrow x = 5/7$, que no es entero. Esta limitación de los enteros no se presenta en el conjunto de los **números racionales**, que son los que pueden expresarse como cociente entre un número entero y otro natural. De otro modo: **son racionales los números que tienen un número finito de cifras decimales, y también los números periódicos** (todo número periódico se puede expresar como cociente entre un número entero y otro natural).

La visualización del conjunto de los números racionales es asunto delicado, pues **por "parecidos" que sean dos racionales entre ellos hay infinidad de racionales, y eso hace que el sentido de la vista pueda engañarnos al representar cada número racional mediante un punto.**

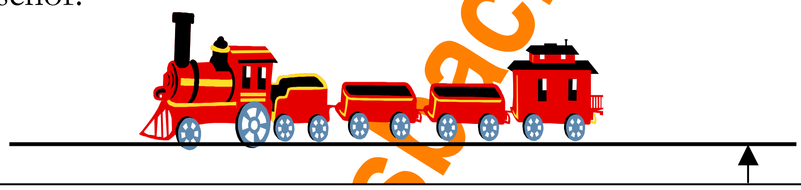
Por ejemplo, considera los números racionales "a" y "b":

a = 7'68673859347827645627838348342723474237412389734987
b = 7'68673859347827645627838348342723474237412389734988

Es evidente que son distintos y no muy famosos; además "a" es menor que "b" y ambos están comprendidos entre los números 7 y 8. Por tanto, al visualizar los números 7, 8, "a" y "b" obtendremos algo parecido a lo que sigue:



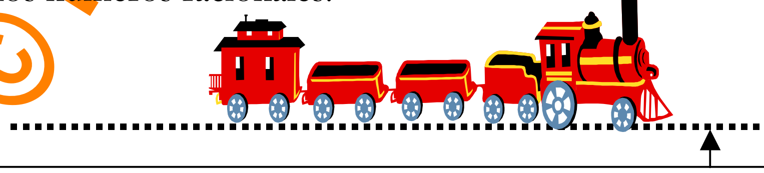
Como entre los números racionales "a" y "b" hay infinidad de números racionales, para visualizarlos todos deberíamos marcar infinidad de puntos entre el punto que representa al número "a" y el que representa al número "b". Así las cosas, es claro que **los números racionales comprendidos entre "a" y "b" están como sardinas en lata, tan "apretados" que, a simple vista, podría parecer que constituyen un "todo continuo" y que "llenan por completo" la recta soporte,** podría parecer que la visualización de los racionales es la propia recta soporte, un "raíl continuo" por el que rodaría con sigilo el tren de la figura, sin el escándalo que se produce si los raíles están un poco separados para que la vía no se levante por la dilatación que sufre cuando aprieta la calor, cuando canta la calandria y contesta el ruiseñor.



A simple vista, **la visualización del conjunto de los números racionales parece una recta, un todo continuo ...... pero no lo es**

Si mirásemos con microscopio veríamos que en realidad los números racionales no forman un todo continuo; es decir, no llenan por completo la recta soporte, pues "eso" que a simple vista parece un "todo continuo" está infectado de agujeros: cada uno de ellos corresponde a un número de los llamados "irracionales" (número con infinitos decimales y no periódico), como los números llamados "pi", "raíz cuadrada de dos" (no hay ningún racional cuyo cuadrado sea 2, por eso es necesario "inventar" un número que cumpla esa condición; se denota $\sqrt{2}$), etc.

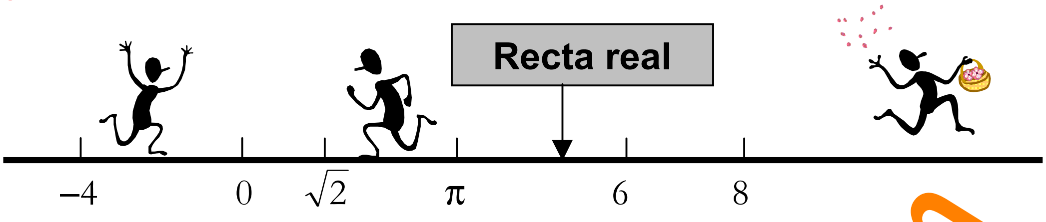
Aunque geométricamente no es posible distinguir un número racional de otro irracional, la siguiente figura es un burdo intento de la imposible visualización del conjunto de los números racionales.



Burdo intento de visualización del conjunto de los números racionales

Al unir el conjunto de los racionales y el de los irracionales se obtiene el conjunto $\Re$ de los números "reales". Para visualizarlo basta añadir los números irracionales al raíl infectado de agujeros que forman los racionales, con lo que cada agujero es "tapado" por el correspondiente irracional ..... y al ha-

cer eso, la recta soporte se llena por completo, resultando un "todo continuo" que llamamos recta real. Como cada punto de la recta real representa a un número real, en adelante consideraremos sinónimas las palabras "número" y "punto".



1.2 LA RECTA REAL AMPLIADA

- Llamamos **recta real ampliada** al conjunto que resulta al añadir a $\Re$ los símbolos $+\infty$ ("más infinito"; o sea, como estar hiperpodrido de dinero) y $-\infty$ ("menos infinito", como estar hiperpodrido de deudas).

> **¡Ojo!: $+\infty$ y $-\infty$ no son números, y para todo número real "x", es: $-\infty < x < +\infty$**

- En general, **con $+\infty$ y $-\infty$ no tienen sentido las operaciones que hacemos con los números**; en concreto, carecen de sentido las siguientes expresiones:

$$(+\infty)+(-\infty)\ ;\ 0.(+\infty)\ ;\ 0.(-\infty)\ ;\ \frac{+\infty}{+\infty}\ ;\ \frac{+\infty}{-\infty}\ ;\ \frac{-\infty}{+\infty}\ ;\ \frac{-\infty}{-\infty}$$

No obstante, **convenimos** que:

$$(+\infty).(+\infty)=(-\infty).(-\infty)=+\infty\ ;\ (+\infty).(-\infty)=(+\infty).(-\infty)=-\infty$$

También **convenimos** que, $\forall\ x\in\Re$, es:

$$x+(+\infty)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty\ ;\ x+(-\infty)=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$

$$x.(+\infty)=(+\infty).x=\begin{cases}+\infty \text{ si } x>0\\ -\infty \text{ si } x<0\end{cases}$$

$$x.(-\infty)=(-\infty).x=\begin{cases}-\infty \text{ si } x>0\\ +\infty \text{ si } x<0\end{cases}$$

$$\frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$$

1.3 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

- El **valor absoluto** del número real "x" es el número real no negativo que denotamos $|x|$, siendo

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

- Si "x" e "y" son números reales, se cumplen las siguientes propiedades:

$$|x|>0 \text{ si } x\neq 0\ ;\ |0|=0$$
$$|x|<k\Rightarrow -k<x<k\ \ (\text{si } k>0)$$
$$|x.y|=|x|.|y|\ ;\ |x+y|\leq|x|+|y|\ ;\ |x-y|\geq\big||x|-|y|\big|$$

1.4 INTERVALOS DE LA RECTA REAL

Siendo "a" y "b" números reales tales que $a < b$, llamamos **intervalos de origen "a" y extremo "b"** a los siguientes subconjuntos de $\Re$:

$$[a\,;b] = \{x \in \Re \,/\, a \leq x \leq b\} \equiv \text{intervalo "cerrado" } [a\,;b]\text{, incluye a "a" y a "b"}$$
$$(a\,;b) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \equiv \text{intervalo "abierto" } (a\,;b)\text{, excluye a "a" y a "b"}$$
$$[a\,;b) = \{x \in \Re \,/\, a \leq x < b\} \equiv \text{intervalo "cerrado" por la izquierda y "abierto" por la derecha}$$
$$(a\,;b] = \{x \in \Re \,/\, a < x \leq b\} \equiv \text{intervalo "abierto" por la izquierda y "cerrado" por la derecha}$$

De "a" también se dice que es el **extremo inferior** del intervalo, y de "b" se dice que es el **extremo superior.** Del número real positivo "$b - a$" se dice que es la **amplitud** del intervalo. ***Por ejemplo:***

$$[4;9] = \{x \in \Re \,/\, 4 \leq x \leq 9\} \;\; ; \;\; (2;5) = \{x \in \Re \,/\, 2 < x < 5\}$$
$$[-4;2) = \{x \in \Re \,/\, -4 \leq x < 2\} \;\; ; \;\; (6;8] = \{x \in \Re \,/\, 6 < x \leq 8\}$$

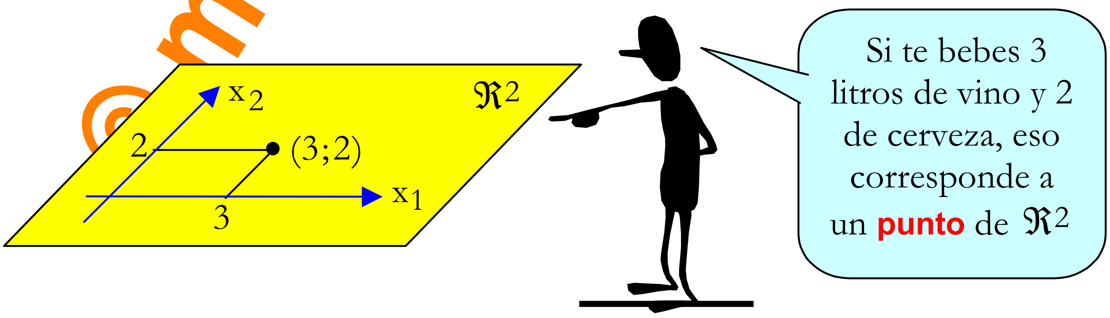
Los cuatro intervalos anteriores tienen **amplitud finita,** pues el valor absoluto de "x" no se hace infinitamente grande en ningún punto "x" del intervalo; para expresar esto de modo rápido se dice que son **acotados.** Se dice que un intervalo es **compacto** si es cerrado y acotado, como $[-2;3]$, $[1;8]$ y $[6;9]$.

Los cuatro intervalos siguientes tienen **amplitud infinita;** también se dice que son **no acotados,** para así indicar que el valor absoluto de "x" puede hacerse infinitamente grande en puntos "x" del intervalo:

$$[a\,;+\infty) = \{x \in \Re \,/\, x \geq a\} \;\; ; \;\; (a\,;+\infty) = \{x \in \Re \,/\, x > a\}$$
$$(-\infty;a] = \{x \in \Re \,/\, x \leq a\} \;\; ; \;\; (-\infty;a) = \{x \in \Re \,/\, x < a\}$$

1.5 LOS CONJUNTOS $\Re^2$, $\Re^3$, ... , $\Re^n$

- El conjunto $\Re^2 = \{\, \overline{x} = (x_1\,;x_2) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2 \}$ lo forman los **pares ordenados** de números reales, que en términos geométricos forman un plano; es decir, un universo bidimensional. Como cada punto de este plano representa a un elemento de $\Re^2$, **en lo sucesivo consideraremos que al hablar de un "punto" de $\Re^2$ se habla de un elemento de dicho conjunto.**



- El conjunto $\Re^3 = \{\, \overline{x} = (x_1\,;x_2\,;x_3) \,/\, x_i \in \Re,\ \forall\ i = 1,2,3 \}$ lo forman las **ternas ordenadas** de números reales, que en términos geométricos forman el universo tridimensional que percibimos con los sentidos; cabe decir que vivimos en $\Re^3$. Como cada punto de este universo tridimensional representa a un elemento de $\Re^3$, **en lo sucesivo consideraremos que al hablar de un "punto" de $\Re^3$ se habla de un elemento de dicho conjunto.**

- El conjunto $\Re^4$ lo forman los **cuartetos ordenados** de números reales:

$$\Re^4 = \{\bar{x} = (x_1;x_2;x_3;x_4) \,/\, x_i \in \Re, \forall\, i = 1,2,3,4\}$$

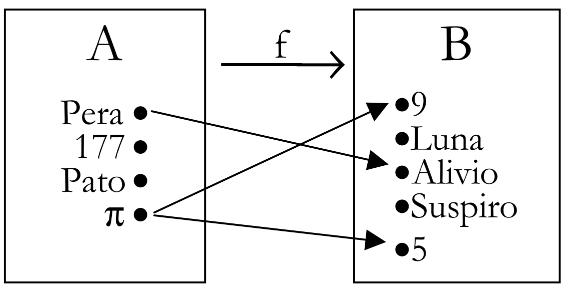
Aunque ni los japoneses pueden visualizar $\Re^4$ (no es posible dibujar con 4 ejes), **en lo sucesivo consideraremos que al hablar de un "punto" de $\Re^4$ se habla de un elemento de dicho conjunto.**

- Y así sucesiva e indefinidamente .... el conjunto $\Re^n$ lo forman las **n-uplas** $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ ordenadas de números reales:

$$\Re^n = \{\bar{x} = (x_1;x_2;\ldots;x_n) \,/\, x_i \in \Re, \forall\, i = 1,2,3,\ldots,n\}$$

En lo sucesivo consideraremos que al hablar de un punto de $\Re^n$ se habla de un elemento de dicho conjunto.

1.6 CORRESPONDENCIA ENTRE CONJUNTOS

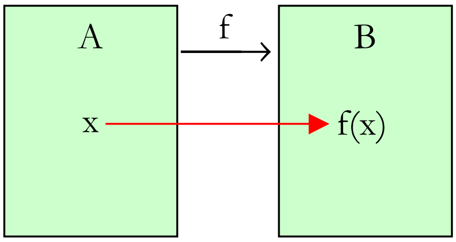


Siendo "A" y "B" conjuntos cualesquiera, se llama **correspondencia** de "A" en "B" a todo criterio o ley que asocie elementos de "A" con elementos de "B". Si el nombre del criterio es "f", para expresar que "f" es una correspondencia de "A" en "B" escribimos $f: A \mapsto B$, diciendo que "A" es el **conjunto inicial** de "f", y "B" el **conjunto final.**

En la definición de "correspondencia" no se impone ninguna restricción o traba al criterio "f" que asocia elementos de "A" con elementos "B"; por tanto, queda definida una "correspondencia" de "A" en "B" en el mismo instante en que se establece un criterio que asocie elementos de "A" con elementos "B", aunque ese criterio sea absurdo o chiripitiflaútico.

Observa: en el conjunto inicial "A" puede haber elementos a los que "f" no les asocia ningún elemento del conjunto final "B"; también puede ocurrir que "f" asocie varios elementos de "B" a un mismo elemento de "A".

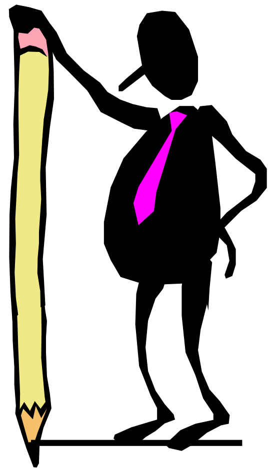
Importantísimo: si "x" es un elemento del conjunto inicial "A", para referirnos al elemento del conjunto final "B" que "f" asocia a "x", escribiremos "f(x)", que los profesionales leen **"efe de x"** ..... y los principiantes deben leer **imagen de "x" según "f".**



¡Están condenados al fracaso los principiantes que se empecinen en leer como los profesionales!, pues tras la notación "f(x)" hay 5 protagonistas:

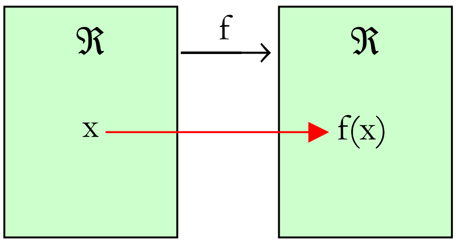
1) Un conjunto "A"; es protagonista "invisible", pues "A" no aparece por ningún lado en la notación "f(x)".
2) Un conjunto "B"; también invisible.
3) Una ley "f" que asocia elementos de "A" con elementos de "B"; es protagonista "visible", pues en la notación "f(x)" hay una "f".
4) El elemento "x" del conjunto "A"; también visible, pues en la notación "f(x)" hay una "x".
5) El quinto protagonista es un elemento del conjunto "B", pero no un elemento cualquiera de "B", el quinto protagonista es el elemento de "B" que la ley "f" asocia a "x", y para denotarlo nadie ha inventado una notación más clara y concisa que "f(x)".

Si "f(x)" lo lees <u>imagen de "x" según "f"</u> te será más fácil tener a la vez en el cerebro los 5 protagonistas que esconde la notación "f(x)" ...... y todo lo entenderás mucho mejor



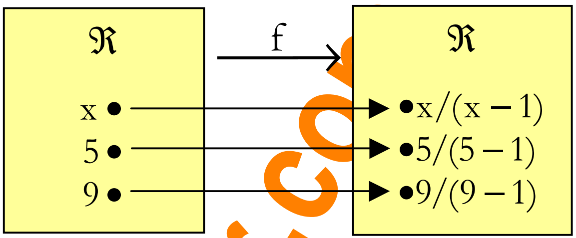
1.7 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

El concepto de **función** generó mucha polémica entre los sabios de los siglos XVIII y XIX, y hubo que esperar hasta que Dirichlet zanjó el asunto en el año 1854, llamando **función real de variable real** a toda correspondencia $f:\Re \mapsto \Re$; o sea, una función real de variable real es una ley o criterio "f" que asocia números reales con números reales. Para expresar que el número real $x \in \Re_{\text{inicial}}$ puede ser el que queramos, se dice que "x" es una **variable independiente** ..... y para indicar que el número real $f(x) \in \Re_{\text{final}}$ que "f" asocia a "x" escapa por completo a nuestro control (pues es "f" quien decide el valor de "f(x)"), se dice que "f(x)" es una **variable dependiente.**



Se dice que $f:\Re \mapsto \Re$ es una **función real** porque el conjunto final de "f" es el de los reales, y se dice que "f" es **de variable real** porque el conjunto inicial de "f" es el de los reales. Siguiendo el criterio de Dirichlet, si el conjunto inicial de "f" fuese el de los números racionales y el final fuese el de los reales, diríamos que "f" es una función real de variable racional.

Como sólo trabajaremos con funciones reales de variable real, por economía, para referirnos a una llamada "f", diremos sólo *sea la función "f"*. ***Por ejemplo,*** al hablar de la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $f(x) = x/(x-1)$, hablamos del criterio "f" que al número real "x" le asocia el número real $x/(x-1)$. Por tanto, al número 5 la ley "f" le asocia el número $5/(5-1)$, y al 9 le asocia el $9/(9-1)$; para expresarlo escribimos $f(5) = 5/(5-1)$ y $f(9) = 9/(9-1)$.

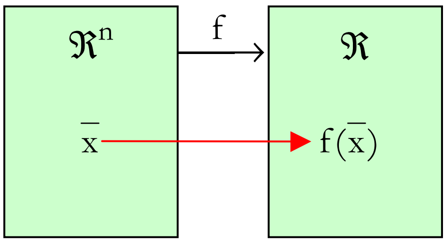


Entenderás la importancia de las funciones reales de variable real si piensas que la variable independiente "x" expresa la cantidad de capital que emplea una empresa y que la variable dependiente "f(x)" expresa su producción de acero:

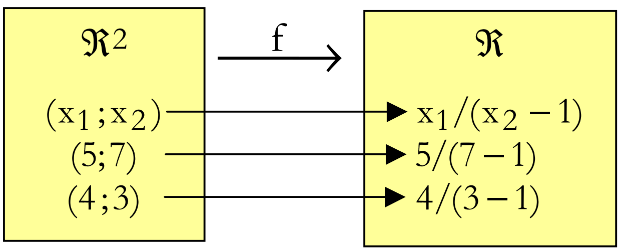
$$\text{capital} \xrightarrow{f} \text{producción}$$

1.8 CAMPO ESCALAR

Se llama **campo escalar** a toda correspondencia $f:\Re^n \mapsto \Re$ que asocie elementos del conjunto $\Re^n$ con números reales. De "f" también se dice que es una **función real de "n" variables reales.** Siendo $\bar{x} = (x_1; \dots ; x_n) \in \Re^n$, para indicar que cada uno de los "n" números reales $x_1, \dots , x_n$ que forman $\bar{x}$ puede ser los que queramos, se dice que $x_1, \dots , x_n$ son **variables independientes**, y para indicar que el número real $f(\bar{x})$ que "f" asocia a $\bar{x}$ escapa por completo a nuestro control, pues es la ley "f" quien decide el valor de $f(\bar{x})$, se dice que $f(\bar{x})$ es una **variable dependiente.**



Por ejemplo, el campo escalar $f:\Re^2 \mapsto \Re$ (función real de dos variables reales) tal que $f(x_1;x_2) = x_1/(x_2-1)$ es el criterio que al **punto** $(x_1;x_2) \in \Re^2$ le asocia el número real $x_1/(x_2-1)$. Así, al **punto** $(5;7) \in \Re^2$ la ley "f" le asocia el número real $5/(7-1)$, y a $(4;3) \in \Re^2$ le asocia $4/(3-1)$; y escribimos $f(5;7) = 5/(7-1)$ y $f(4;3) = 4/(3-1)$.



Por ejemplo, el campo escalar $f:\Re^3 \mapsto \Re$ (función real de tres variables reales) tal que $f(x;y;z) = x.y^3/z$ es el criterio o ley que al **punto** $(x;y;z) \in \Re^3$ le asocia el número real $x.y^3/z$. Así, al **punto** $(3;7;2) \in \Re^3$ la ley "f" le asocia el número real $3.7^3/2$, y para expresarlo escribimos $f(3;7;2) = 3.7^3/2$.

Utilidad de los campos escalares

Piensa en el campo escalar $f:\Re^2 \mapsto \Re$ que a $(x_1;x_2) \in \Re^2$ le asocia el número $f(x_1;x_2)$, donde las variables independientes x_1 y x_2 expresan las respectivas cantidades de capital y trabajo que emplea una empresa, y la variable dependiente $f(x_1;x_2)$ expresa su producción de acero:

$$(\text{capital};\text{trabajo}) \xrightarrow{f} \text{producción}$$

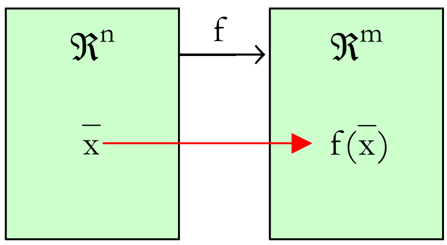
Piensa en el campo $g:\Re^3 \mapsto \Re$ que a $(z_1;z_2;z_3) \in \Re^3$ le asocia el número real $g(z_1;z_2;z_3)$, donde las variables independientes z_1, z_2 y z_3 expresan respectivamente las cantidades energía, agua y abono que consume una empresa hortofrutícola, y la variable dependiente $g(z_1;z_2;z_3)$ expresa los costes de la empresa:

$$(\text{energía};\text{agua};\text{abono}) \xrightarrow{g} \text{costes}$$

1.9 CAMPO VECTORIAL

Se llama **campo vectorial** a toda correspondencia $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ que asocie elementos de $\Re^n$ con elementos de $\Re^m$.

Siendo $\bar{x} = (x_1;\ldots;x_n) \in \Re^n$, para expresar que cada uno de los "n" números reales $x_1,\ldots,x_n$ que forman $\bar{x}$ puede ser los que queramos, se dice que $x_1,\ldots,x_n$ son **variables independientes;** y siendo $f(\bar{x}) = (y_1;\ldots;y_m) \in \Re^m$ la imagen de $\bar{x}$ según "f", para expresar que los "m" números reales $y_1,\ldots,y_m$ que forman $f(\bar{x})$ escapan por completo a nuestro control (pues es la ley "f" la que decide qué elemento $(y_1;\ldots;y_m) \in \Re^m$ es la imagen de $\bar{x}$), se dice que $y_1,\ldots,y_m$ son **variables dependientes.**



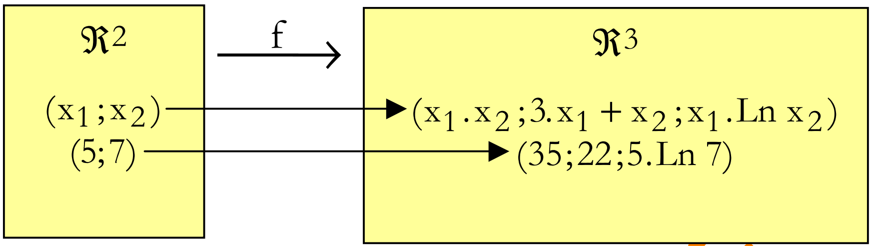
Grábalo en el cerebro

Un campo vectorial $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ está formado por "m" campos escalares de $\Re^n$ en $\Re$

Por ejemplo, al hablar del campo vectorial $f : \Re^2 \mapsto \Re^3$ tal que

$$f(x_1;x_2) = (x_1.x_2;3.x_1 + x_2;x_1.\text{Ln}\,x_2)$$

se está hablando del criterio o ley "f" que al punto $(x_1;x_2) \in \Re^2$ le asocia el punto $(x_1.x_2;3.x_1 + x_2;x_1.\text{Ln}\,x_2) \in \Re^3$.



Que quede claro: **si eres un artista trabajando con campos escalares, te partirás de risa con los campos vectoriales,** pues "trabajar" con un campo vectorial $f : \Re^n \mapsto \Re^m$ se reduce a "trabajar" a la vez con los "m" campos escalares que forman "f". ***Por ejemplo,*** trabajar con el campo vectorial $f : \Re^2 \mapsto \Re^3$ tal que $f(u;v) = (u.v^2;u/v;u+v)$ se reduce a trabajar a la vez con los siguientes 3 campos escalares:

$$f_1 : \Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_1(u;v) = u.v^2$$
$$f_2 : \Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_2(u;v) = u/v$$
$$f_3 : \Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_3(u;v) = u+v$$

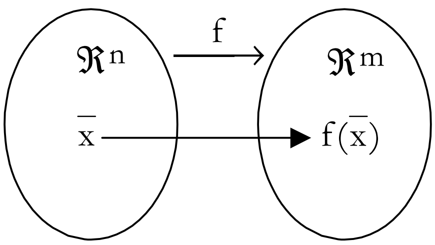
Utilidad de los campos vectoriales

Piensa en el campo vectorial $f : \Re^2 \mapsto \Re^3$ que a $(x_1;x_2) \in \Re^2$ le asocia la terna $(z_1;z_2;z_3) \in \Re^3$, siendo

$$z_1 \equiv f_1(x_1;x_2) = x_1.x_2$$
$$z_2 \equiv f_2(x_1;x_2) = 3.x_1 + x_2$$
$$z_3 \equiv f_3(x_1;x_2) = x_1.\text{Ln}\,x_2$$

donde las **variables independientes** x_1 y x_2 expresan las respectivas cantidades de capital y trabajo que emplea una empresa, y las **variables dependientes** z_1, z_2 y z_3 expresan las respectivas producciones de metano, etano y propano:

$$(\text{capital};\text{trabajo}) \xrightarrow{f} (\text{metano};\text{etano};\text{propano})$$



Observa: si campo vectorial $f : \Re^n \mapsto \Re^m$ es tal que $n = m = 1$, estamos ante una función real de una única variable real ..... y si $m = 1$, estamos ante un campo escalar o función real de "n" variables reales

1.10 LAS REGLAS SAGRADAS DEL CÁLCULO

Hay tres operaciones con números que son muy peligrosas y originan numerosos disgustos a los principiantes; debes imprimirlas a fuego en tu cerebro de inmediato.

REGLAS SAGRADAS DEL CÁLCULO

1) **Prohibido dividir por cero.** Es un gran pardillo todo el que diga que el cociente 7/0 es infinito, pues este cociente de números no tiene sentido matemático.
2) **El logaritmo en cualquier base de un número no positivo** (≤ 0) **no es un número real.**
3) **Toda raíz de índice par de un número negativo no es un número real.**

SE HACE SABER

Será inmisericordemente suspendido ipso facto todo el que viole una Regla Sagrada; caerán sobre él toneladas de desprestigio y deshonor, y el estigma de tan ignominioso acto apestará la honra de su linaje por los siglos de los siglos.

1.11 DE LAS FUNCIONES Y LAS SERPIENTES

Es momento de avisar sobre la que se nos viene encima; y básicamente, usando brocha gorda y no pincel, cabe decir que en las 500 páginas de este libro nos vamos a ocupar de poco más que los siguientes tres conceptos:

1) **Límite** de un campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ en un punto $\bar{x}_0 \in \Re^n$.
2) **Continuidad** de un campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ en un punto $\bar{x}_0 \in \Re^n$.
3) **Derivabilidad** de un campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ en un punto $\bar{x}_0 \in \Re^n$.

Pregunta: 500 páginas son muchas, ¿tan difícil es?

Respuesta: el problema no es que estos conceptos sean difíciles de entender. Al contrario, son tan sencillos que "entran" por los ojos; el sentido de la vista es la única herramienta necesaria para dar los primeros pasos por el proceloso mundo del límite, la continuidad y la derivabilidad del campo $f:\Re^n \mapsto \Re$ en el punto $\bar{x}_0 \in \Re^n$. El problema para los principiantes es que, en lo que a estos tres conceptos se refiere, y **debido a las Reglas Sagradas**, las funciones son como las serpientes: hay gran variedad de familias, y sobre todo, y eso es lo importante, las hay inofensivas y las hay que pueden ser muy peligrosas.

Así las cosas, para que tu andadura con el Cálculo Infinitesimal (ya sea Cálculo Diferencial o Cálculo Integral) llegue a buen puerto y te haga sufrir lo menos posible, **de inmediato debes aprender a "catalogar" la peligrosidad de las distintas "familias" de funciones,** como haría con las serpientes toda persona sensata que viviera entre infinidad de todo tipo de tan inquietantes animales, **pues así podrás valorar en unos pocos segundos** (dos o tres) **los peligros que te acecharán cuando trabajes** (límite, continuidad, derivabilidad) **con una función** $f:\Re^n \mapsto \Re$ **en un punto** $\bar{x}_0 \in \Re^n$**.**

A veces las serpientes de familias extremadamente peligrosas pueden ser inofensivas: ¿quién no ha observado a pocos centímetros de su nariz los movimientos de una temible serpiente de cascabel que para su desgracia y mayor tranquilidad del observador ha sido introducida en una urna de cristal de dos centímetros de espesor? .... ¿pero qué pasa con la tranquilidad si la urna cae al suelo destrozándose y la serpiente de cascabel queda en libertad y de mal humor por el golpe recibido? Pues bien, con los campos escalares pasa un poco lo mismo, el trabajo (límite, continuidad, derivabilidad) con un campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ puede ser inofensivo (o sea, fácil) en el punto "Pepe" y ser extremadamente peligroso (o sea, difícil) en el punto "Juan".

En definitiva, **los peligros que te acecharán al trabajar** (límite, continuidad, derivabilidad) **con un campo escalar "f" en un punto "Pepe" dependen de dos factores: la "familia" a que pertenece "f", y el punto "Pepe" en que se desarrolla el trabajo** (límite, continuidad, derivabilidad) **con "f".**

1.12 CATÁLOGO DE PELIGROS

El catálogo que exponemos a continuación no es exhaustivo, quedan fuera de él algunas situaciones que de momento no comentamos para no complicar en demasía los primeros pasos.

Campos racionales enteros

Son de la forma $f(\bar{x}) = \text{polinomio}$. Son inofensivos sea cual sea el punto en que desarrolle nuestro trabajo con ellos.

Por ejemplo, los siguientes campos escalares son racionales enteros:

$$f:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f(x_1;x_2) = 3.x_1^6.x_2^4 + x_1^2 - 3.x_2^3$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re \;/\; g(x_1;x_2;x_3) = x_1^2.x_3^5 - x_2^2.x_3^3$$
$$h:\Re^4 \mapsto \Re \;/\; h(x_1;x_2;x_3;x_4) = x_3^4.x_4^7 - x_1^2.x_2^5$$
$$u:\Re^5 \mapsto \Re \;/\; h(x;y;z;w;t) = x.t^2 - y.z.w$$

Campos racionales fraccionarios

Son de la forma $f(\bar{x}) = \text{cociente de polinomios}$. Sólo son peligrosos en los puntos en que se anule el denominador, pues en esos puntos se viola la regla que prohibe dividir por cero.

Por ejemplo, los siguientes campos escalares son racionales fraccionarios:

$$f:\Re^2 \mapsto \Re \,/\, f(x_1;x_2) = \frac{x_1}{x_1 + x_2 - 2}$$

$$g:\Re^2 \mapsto \Re \,/\, g(x_1;x_2) = \frac{234}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$h:\Re^2 \mapsto \Re \,/\, h(x_1;x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

$$t:\Re^2 \mapsto \Re \,/\, t(x_1;x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2 - 1}$$

El campo "f" sólo es peligroso en los puntos $(x_1;x_2)$ tales que $x_1 + x_2 - 2 = 0$, pues el denominador de $f(x_1;x_2)$ sólo se anula en esos puntos.

El campo "g" sólo es peligroso en el punto $(0;0)$, pues el denominador $x_1^2 + x_2^2$ de $g(x_1;x_2)$ sólo se anula en $(0;0)$.

El campo "h" es inofensivo en todo punto, pues el denominador $x_1^2 + x_2^2 + 1$ de $h(x_1;x_2)$ no se anula en ningún punto de $\Re^2$.

El campo "t" sólo es peligroso en los puntos $(x_1;x_2)$ tales que $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, pues el denominador de $f(x_1;x_2)$ sólo se anula en esos puntos.

Raíces de índice impar

En lo referido al "límite" y la "continuidad", los campos escalares de la forma $f(\bar{x}) = \sqrt[\text{impar}]{u(\bar{x})}$ son inofensivos o peligrosos en el punto $\bar{x}_0$ según que el campo "u" sea inofensivo o peligroso en dicho punto.

Por ejemplo, sean "f", "g" y "h" los campos escalares tales que

$$f(x_1;x_2) = \sqrt[3]{x_1.x_2 - 1} \;;\; g(x_1;x_2) = \sqrt[5]{x_1/(9 - x_2^2)} \;;\; h(x_1;x_2) = \sqrt[7]{x_1/(9 + x_2^2)}$$

El campo "f" es inofensivo en todo punto, pues es inofensivo en todo punto el polinomio $u:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $u(x_1;x_2) = x_1.x_2 - 1$.

El campo "g" sólo es peligroso en los puntos en que $x_2 = 3$ ó $x_2 = -3$, pues el cociente de polinomios $v(x_1;x_2) = x_1/(9 - x_2^2)$ sólo es peligroso en los puntos que anulan su denominador, que son aquéllos en que $x_2 = 3$ ó $x_2 = -3$.

El campo "h" es inofensivo en todo punto de $\Re^2$, pues el cociente de polinomios $w(x_1;x_2) = x_1/(9 + x_2^2)$ es inofensivo en todo punto, ya que su denominador $9 + x_2^2$ no se anula en ningún punto de $\Re^2$.

- El trabajo con $f(\bar{x}) = \sqrt[\text{impar}]{u(\bar{x})}$ en el punto $\bar{x}_0$ puede ser inofensivo en lo referido al "límite" y la "continuidad", pero ser peligroso en lo referido a la "derivabilidad". Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para trabajos relacionados con la "derivabilidad".

Raíces de índice par

En lo referido al "límite" y la "continuidad", los campos escalares de la forma $f(\bar{x}) = \sqrt[par]{u(\bar{x})}$ son inofensivos en el punto $\bar{x}_0$ si el campo "u" es inofensivo en $\bar{x}_0$ y $u(\bar{x}_0) > 0$. Son peligrosos en $\bar{x}_0$ si "u" es peligroso $\bar{x}_0$ o si $u(\bar{x}_0) < 0$, pues si $u(\bar{x}_0) < 0$ se viola la segunda Regla Sagrada:

$$\sqrt[par]{\text{número negativo}} \notin \Re$$

Si el campo "u" es inofensivo en $\bar{x}_0$ y $u(\bar{x}_0) = 0$, lo normal es que haya peligro al trabajar con $f(\bar{x}) = \sqrt[par]{u(\bar{x})}$ en dicho punto, aunque puede no haberlo.

Por ejemplo, el polinomio $u: \Re^2 \mapsto \Re$ tal que $u(x_1; x_2) = x_1 + x_2 - 1$ es inofensivo en todo punto; así, el trabajo con $f(x_1; x_2) = \sqrt{x_1 + x_2 - 1}$ es inofensivo en todo punto $\bar{x} = (x_1; x_2)$ tal que $x_1 + x_2 - 1 > 0$, y es peligroso en los puntos en que $x_1 + x_2 - 1 < 0$. En los puntos tales que $x_1 + x_2 - 1 = 0$ lo más probable es que haya peligro, aunque podría no haberlo.

Por ejemplo, el cociente de polinomios $x_1/(x_1.x_2 - 4)$ sólo es peligroso en los puntos en que se anula su denominador, que son aquéllos en que $x_1.x_2 - 4 = 0$; en consecuencia, el trabajo con $g(\bar{x}) = \sqrt[4]{x_1/(x_1.x_2 - 4)}$ es peligroso en dichos puntos y en todo punto $\bar{x} = (x_1; x_2)$ tal que $x_1/(x_1.x_2 - 4) < 0$. En los puntos en que $x_1/(x_1.x_2 - 4) = 0$ (que son aquéllos en que $x_1 = 0$) lo más probable es que haya peligro, aunque podría no haberlo.

Por ejemplo, el cociente de polinomios $w(\bar{x}) = (x_1 - 5)/(x_2^6 + 4)$ es inofensivo en todo punto, pues su denominador no se anula en ningún punto; así, el trabajo con $h(\bar{x}) = \sqrt[6]{(x_1 - 5)/(x_2^6 + 4)}$ es inofensivo en los puntos tales que $w(\bar{x}) > 0$, es decir, $x_1 - 5 > 0$. El trabajo con "h" es peligroso si $x_1 - 5 < 0$. En los puntos en que $w(\bar{x}) = 0$ (son aquéllos en que $x_1 = 5$) lo más probable es que haya peligro, aunque podría no haberlo.

- El trabajo con $f(\bar{x}) = \sqrt[par]{u(\bar{x})}$ en el punto $\bar{x}_0$ puede ser inofensivo en lo referido al "límite" y la "continuidad", pero ser peligroso en lo referido a la "derivabilidad". Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para trabajos relacionados con la "derivabilidad".

Campos logarítmicos

Son de la forma $f(\bar{x}) = \log_k u(\bar{x})$, $k > 0$, $k \neq 1$. En lo referido a "límite" y "continuidad", son inofensivos en el punto $\bar{x}_0 \in \Re^n$ si "u" es inofensivo en $\bar{x}_0$ y $u(\bar{x}_0) > 0$. Son peligrosos en $\bar{x}_0 \in \Re^n$ si "u" es peligroso $\bar{x}_0$ o si $u(\bar{x}_0) \leq 0$, pues si $u(\bar{x}_0) \leq 0$ se viola la tercera Regla Sagrada:

$$\log_k (\text{número no positivo}) \notin \Re$$

Por ejemplo, el polinomio $u:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $u(x_1;x_2)=x_1-x_2-3$ es inofensivo en todo punto; así, el trabajo con $f(x_1;x_2)=\log_6(x_1-x_2-3)$ es inofensivo en todo punto $\bar{x}=(x_1;x_2)$ tal que $x_1-x_2-3>0$, y es peligroso en los puntos tales que $x_1-x_2-3\leq 0$.

Por ejemplo, el cociente de polinomios $v(\bar{x})=x_2/(x_1^2-4)$ sólo es peligroso en los puntos en que $x_1=2$ ó $x_1=-2$, pues en ellos se anula el denominador. Así, el trabajo con $g(\bar{x})=\log_9 x_2/(x_1^2-4)$ es peligroso en dichos puntos y en todos los puntos $\bar{x}=(x_1;x_2)$ tales que $v(\bar{x})\leq 0$.

Por ejemplo, el cociente de polinomios $w(\bar{x})=(5-x_2)/(x_1^6+4)$ es inofensivo en todo punto, pues su denominador no se anula en ningún punto. Así, el campo $h(\bar{x})=\mathrm{Ln}\,(5-x_2)/(x_1^6+4)$ es peligroso sólo si $w(\bar{x})\leq 0$; o sea, si $5-x_2\leq 0$.

- El trabajo con $f(\bar{x})=\log_k u(\bar{x})$ en el punto $\bar{x}_0$ puede ser inofensivo en lo referido al "límite" y la "continuidad", pero ser peligroso en lo referido a la "derivabilidad". Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para trabajos relacionados con la "derivabilidad".

Lo que debes saber sobre logaritmos

- Se dice que el número real "a" es el logaritmo en base "k" $(k>0, k\neq 1)$ del número real positivo "b" si $k^a=b$; es decir:

$$\log_k b=a \Leftrightarrow k^a=b$$

- Si la base "k" es el número 10 se dice que el logaritmo es **decimal**; si la base es el número irracional "e" $(e\cong 2'7182818)$ se dice que el logaritmo es **neperiano,** y se denota "Ln"; o sea: $\mathrm{Ln}\, b=a \Leftrightarrow e^a=b$
- ***Propiedades:***

$$\log_k 1=0 \ ; \ \log_k k=1 \ ; \ \log_k k^c=c \ ; \ \log_k b^c=c.\log_k b$$

$$\log_k (m.n)=(\log_k m)+(\log_k n) \ ; \ \log_k (m/n)=(\log_k m)-(\log_k n)$$

$$\text{Cambio de base: } \log_{k_1} m=\frac{\log_{k_2} m}{\log_{k_2} k_1}$$

$$\log_k 0^+ = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0<k<1 \\ -\infty & \text{si } k>1 \end{cases}$$

Al escribir 0^+ nos referimos a un número muy próximo a cero <u>pero positivo</u>; o sea, si un número positivo es enormemente próximo a 0, su logaritmo es bestialmente positivo si "k" es menor que 1, y bestialmente negativo si "k" es mayor que 1

Campos exponenciales

Son de la forma $f(\overline{x}) = k^{u(\overline{x})}$, siendo $k > 0$. En lo referido al "límite" y la "continuidad", son inofensivos o peligrosos en el punto $\overline{x}_0$ según que el campo "u" sea inofensivo o peligroso en dicho punto.

Por ejemplo, como el polinomio $u(\overline{x}) = x_1.x_2$ es inofensivo en todo punto, el trabajo con $f(\overline{x}) = 3^{x_1.x_2}$ es inofensivo en todo punto.

Por ejemplo, como el cociente de polinomios $v(\overline{x}) = 1/(x_1.x_2)$ sólo es peligroso sólo en los puntos $(x_1;x_2)$ en que $x_1.x_2 = 0$, el trabajo con $g(\overline{x}) = 3^{1/x_1.x_2}$ sólo es peligroso en dichos puntos.

- El trabajo con $f(\overline{x}) = k^{u(\overline{x})}$ en el punto $\overline{x}_0$ puede ser inofensivo en lo referido al "límite" y la "continuidad", pero ser peligroso en lo referido a la "derivabilidad". Por desgracia no es posible establecer un criterio general de peligrosidad para trabajos relacionados con la "derivabilidad".

El peligro de las sumas y restas

Si el campo escalar "f" es el resultado de sumar y restar otros campos, el trabajo con "f" en el punto $\overline{x}_0$ es inofensivo si todos los sumandos son inofensivos en dicho punto, y es peligroso si algún sumando es peligroso en $\overline{x}_0$.

Por ejemplo, siendo $f : \Re^2 \mapsto \Re$ tal que

$$f(x_1;x_2) = x_1^2 - \frac{4}{x_2 - \pi} + 5^{1/x_1} + \sqrt{x_1.x_2 + 3} + \sqrt[3]{1 - x_1^4} - \log_3 (x_2 + 5)$$

entonces, como

$$\begin{aligned}
&* \ u(x_1;x_2) = x_1^2 \equiv \text{polinomio} \Rightarrow \text{inofensivo en todo punto}\\
&* \ v(x_1;x_2) = 4/(x_2 - \pi) \equiv \text{cociente de polinomios} \Rightarrow \text{inofensivo si } x_2 \neq \pi\\
&* \ w(x_1;x_2) = 5^{1/x_1} \equiv 5^{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow \text{inofensivo si } x_1 \neq 0\\
&* \ h(x_1;x_2) = \sqrt{x_1.x_2 + 3} \equiv \sqrt[\text{par}]{\text{polinomio}} \Rightarrow \text{inofensivo si } x_1.x_2 + 3 > 0\\
&* \ g(x_1;x_2) = \sqrt[3]{1 - x_1^4} \equiv \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow \text{inofensivo en todo punto}\\
&* \ t(x_1;x_2) = \log_3 (x_1 + x_2) \equiv \log_3 (\text{polinomio}) \Rightarrow \text{inofensivo si } x_1 + x_2 > 0
\end{aligned}$$

resulta que, en lo referido al "límite" y la "continuidad", el trabajo con "f" será inofensivo en los puntos $\overline{x} = (x_1;x_2)$ tales que

$$x_1 \neq 0 \ ; \ x_2 \neq \pi \ ; \ x_1.x_2 + 3 > 0 \ ; \ x_1 + x_2 > 0$$

y será peligroso en los demás puntos de $\Re^2$.

El peligro del producto

Si el campo escalar "f" es el producto de otros campos, el trabajo con "f" en el punto $\overline{x}_0$ es inofensivo si todos los factores son inofensivos en dicho punto, y es peligroso si algún factor es peligroso en $\overline{x}_0$.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \frac{x_1}{3-x_2}.e^{x_1 x_2}.\log_6 (x_2 - 7)$, como:

* $u(\bar{x}) = x_1/(3-x_2) \equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensiva si $x_2 \neq 3$
* $v(\bar{x}) = e^{x_1.x_2} \equiv e^{polinomio} \Rightarrow$ inofensiva $\forall (x_1;x_2) \in \Re^2$
* $h(\bar{x}) = \log_6 (x_2 - 7) \equiv \log_6$ (polinomio) $\Rightarrow$ inofensiva si $x_2 - 7 > 0$

resulta que, en lo referido al "límite" y la "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo si $x_2 \neq 3$ y $x_2 - 7 > 0$, siendo peligroso en los demás puntos.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \frac{x_1}{4-x_2^2}.\sqrt[3]{\frac{1}{x_2 - 1}}.9^{1/x_1}$, como:

* $u(\bar{x}) = x_1/(4-x_2^2) \equiv$ cociente de polinomios $\Rightarrow$ inofensivo si $x_2 \neq \pm 2$
* $v(\bar{x}) = \sqrt[3]{1/(x_2 - 1)} \equiv \sqrt[impar]{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensivo si $x_2 \neq 1$
* $h(\bar{x}) = 9^{1/x_1} \equiv 9^{\text{cociente de polinomios}} \Rightarrow$ inofensivo si $x_1 \neq 0$

en lo referido al "límite" y la "continuidad", el trabajo con "f" será peligroso sólo si $x_2 = \pm 2$, $x_2 = 1$ ó $x_1 = 0$, siendo inofensivo en los demás puntos.

El peligro de la división

Si $f: \Re^n \mapsto \Re$ es cociente de los campos "u" y "v" (o sea, $f(\bar{x}) = u(\bar{x})/v(\bar{x})$), el trabajo con "f" es inofensivo en el punto $\bar{x}_0$ si $u(\bar{x})$ y $v(\bar{x})$ son inofensivos en $\bar{x}_0$ y el denominador $v(\bar{x})$ no se anula en $\bar{x}_0$. Es peligroso si $u(\bar{x})$ o $v(\bar{x})$ son peligrosos en $\bar{x}_0$, o si el denominador $v(\bar{x})$ se anula en $\bar{x}_0$ (violación de la primera Regla Sagrada).

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \frac{x_1^2 - 1 + \log_5 (4 - x_2)}{x_1^2 - 9}$, como:

* $u(\bar{x}) = x_1^2 - 1 + \log_5 (4 - x_2)$ es suma del inofensivo polinomio $x_1^2 - 1$ y de $\log_5 (4 - x_2)$, que es peligroso sólo si $4 - x_2 \leq 0$). Así, $u(\bar{x})$ es peligroso sólo si $4 - x_2 \leq 0$.
* $v(\bar{x}) = x_1^2 - 9 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensivo en todo punto.

en lo referido al "límite" y la "continuidad", el trabajo con $f(\bar{x}) = u(\bar{x})/v(\bar{x})$ es peligroso en el punto $(x_1;x_2)$ si $4 - x_2 \leq 0$ o si $x_1 = \pm 3$ (puntos que anulan el denominador: $x_1^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 3$).

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \frac{x_1^2 - 1}{\log_5 (4 - x_1.x_2)}$, como:

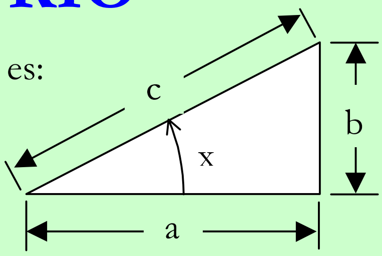
* $u(\bar{x}) = x_1^2 - 1 \equiv$ polinomio $\Rightarrow$ inofensivo en todo punto.
* $v(\bar{x}) = \log_5 (4 - x_1.x_2) \Rightarrow$ peligroso sólo si $4 - x_1.x_2 \leq 0$.

en lo referido al "límite" y la "continuidad", el trabajo con $f(\bar{x}) = u(\bar{x})/v(\bar{x})$ es peligroso en el punto $(x_1;x_2)$ si $4 - x_1.x_2 \leq 0$ o si $x_1.x_2 = 3$ (puntos que anulan el denominador: $\log_5 (4 - x_1.x_2) = 0 \Rightarrow 4 - x_1.x_2 = 1 \Rightarrow x_1.x_2 = 3$).

RECORDATORIO

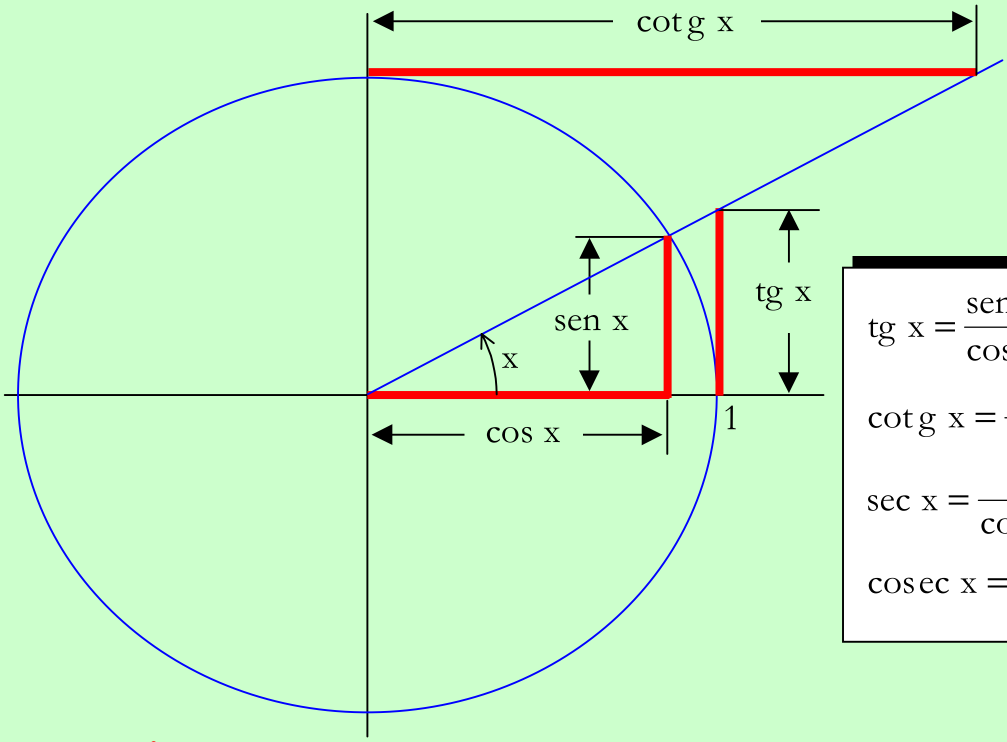
- En un triángulo rectángulo, para el ángulo "x" es:

$$\text{sen } x = b/c \;\; ; \;\; \text{cosec } x = 1/\text{sen } x$$
$$\cos x = a/c \;\; ; \;\; \sec x = 1/\cos x$$
$$\text{tg } x = b/a \;\; ; \;\; \text{cotg } x = 1/\text{tg } x$$



EL CIRCULO GONIOMÉTRICO

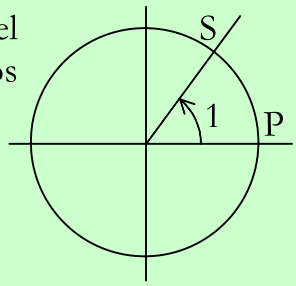
- En un circulo de radio 1, para el ángulo "x", es:



$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$
$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Los ángulos siempre se miden en radianes:

sea cual sea el radio de la circunferencia, un radián es el ángulo tal que la longitud del arco que une los puntos "P" y "S" coincide con el radio de la circunferencia.



La circunferencia, con 360 grados, tiene $2.\pi$ radianes; por tanto, expresado en grados, un radian equivale a $360/(2.\pi) \cong 57'29578$ grados.

Grados	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3.\pi/2$	$2.\pi$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

Si el campo escalar "f" es de la forma $f(\bar{x}) = \text{sen } u(\bar{x})$ ó $f(x) = \cos u(\bar{x})$, en lo referido al "límite" y la "continuidad", el trabajo con "f" es inofensivo o peligroso en el punto $\bar{x}_0$ según que el campo escalar "u" sea inofensivo o peligroso en dicho punto. Para las restantes funciones trigonométricas basta tener en cuenta los peligros inherentes a toda división, y saber que

$$\text{sen } u(\bar{x}) = 0 \Rightarrow u(\bar{x}) = k.\pi$$

$$\cos u(\bar{x}) = 0 \Rightarrow u(\bar{x}) = (2.k+1).\frac{\pi}{2}$$

donde "k" es un número entero cualquiera.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \text{sen } (1 + x_1.x_2)$, el campo "f" es inofensivo en todo punto, pues el polinomio $u(\bar{x}) = 1 + x_1.x_2$ es inofensivo en todo punto.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \cos (x_1 - x_2^3)$, el campo "f" es inofensivo en todo punto, pues el polinomio $x_1 - x_2^3$ es inofensivo en todo punto.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \text{sen } (\text{Ln } x_1.x_2)$, el campo "f" sólo es peligroso si $x_1.x_2 \leq 0$, pues $u(\bar{x}) = \text{Ln } x_1.x_2$ sólo es peligroso si $x_1.x_2 \leq 0$.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \cos 3^{1/(x_1 - x_2)}$, el campo "f" sólo es peligroso si $x_1 - x_2 = 0$, pues $u(\bar{x}) = 3^{1/(x_1 - x_2)}$ sólo es peligroso si $x_1 - x_2 = 0$.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \text{tg } (x_1 - x_2) = (\text{sen } (x_1 - x_2))/(\cos (x_1 - x_2))$, como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos $\bar{x} = (x_1; x_2)$ que anulen al denominador:

$$\cos (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = (2.k+1).\pi/2$$

donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

Por ejemplo, siendo $f(\bar{x}) = \text{ctg } (x_1 - x_2) = (\cos (x_1 - x_2))/(\text{sen } (x_1 - x_2))$, como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos $\bar{x} = (x_1; x_2)$ que anulen al denominador:

$$\text{sen } (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = k.\pi$$

donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

Por ejemplo, si $f(\bar{x}) = \sec (x_1 + x_2) = 1/\cos (x_1 + x_2)$, como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos $\bar{x} = (x_1; x_2)$ que anulen al denominador:

$$\cos (x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = (2.k+1).\pi/2$$

donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

Por ejemplo, si $f(\bar{x}) = \text{cosec } (x_1.x_2) = 1/\text{sen } (x_1.x_2)$, como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el trabajo con "f" sólo es peligroso en los puntos $\bar{x} = (x_1; x_2)$ que anulen al denominador:

$$\text{sen } (x_1.x_2) = 0 \Rightarrow x_1.x_2 = k.\pi$$

donde "k" puede tomar cualquier valor entero.

1.13 OTRAS NOTACIONES

A veces se está trabajando con un campo $f:\Re^n \mapsto \Re$ y para abreviar se denota "y" al número real que "f" asocia a $\bar{x}$. ***Por ejemplo,*** en vez de escribir

$$f(x_1;x_2) = 3.x_1^2.x_2 \;;\; f(x_1;x_2) = x_1.\text{Ln}\, x_2$$

se escribe $$y = 3.x_1^2.x_2 \;;\; y = x_1.\text{Ln}\, x_2$$

Esta notación la usaremos raramente, porque con ella es más fácil que se te despiste lo esencial; y lo esencial ahora es asimilar que tras la notación "f(x)" se esconden 5 protagonistas (el conjunto inicial $\Re^n$, el conjunto final $\Re$, la correspondencia "f" que asocia elementos de $\Re^n$ con elementos de $\Re$, el punto $\bar{x} \in \Re^n$ y el número $f(\bar{x}) \in \Re$ que "f" asocia a $\bar{x} \in \Re^n$), **y tu cerebro debe ser capaz de estar pendiente de los cinco a la vez.**

1.14 CAMPOS UNIFORMES

Se dice que un campo escalar "f" es **uniforme** si cada punto del conjunto inicial que tiene imagen en el conjunto final tiene una única imagen. ***Por ejemplo,*** el campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que $f(x_1;x_2) = 1 + x_1.x_2$ es uniforme, pues cada punto $\bar{x} = (x_1;x_2) \in \Re^2$ que tiene imagen en $\Re$ tiene una única imagen. No es uniforme el campo escalar "g" tal que $(g(x_1;x_2))^2 = 1 + x_1.x_2$, pues

$$(g(x_1;x_2))^2 = 1 + x_1.x_2 \Rightarrow g(x_1;x_2) = \pm\sqrt{1 + x_1.x_2}$$

lo que indica que cada punto $\bar{x} = (x_1;x_2) \in \Re^2$ que tiene imagen en el conjunto final $\Re$ tiene dos imágenes: $g(7;2) = \pm\sqrt{1 + 7.2} = \pm\sqrt{15}$

1.15 CAMPOS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

Se dice que un campo "f" es **algebraico** si las operaciones que deben realizar-se para calcular el número real $f(\bar{x})$ son las llamadas algebraicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente constante y radicación de índice constante. Se dice "f" es **trascendente** si no es algebraico.

Por ejemplo, son algebraicos los siguientes campos escalares

$$f(x_1;x_2) = x_1^3 + x_2 \;;\; f(x) = \frac{x}{x-1} \;;\; f(x_1;x_2;x_3) = \sqrt[5]{x_1/(1 + x_2.x_3)}$$

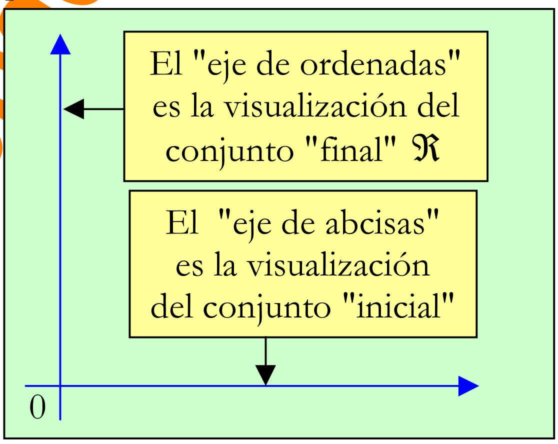
pues en los tres casos sucede que las operaciones que deben realizarse para calcular el número real $f(\bar{x})$ son las algebraicas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente constante y radicación de índice constante. Son trascendentes los siguientes campos

$$f(z;t) = 2^{z+t} \;;\; f(x) = \log_6 (1 + x) \;;\; f(u;v) = (u.v;u/v;\text{sen}\, u)$$

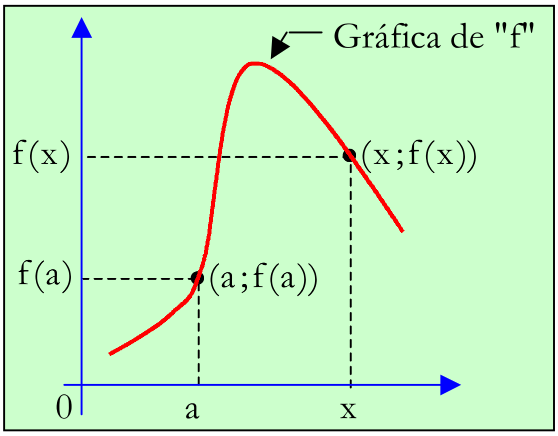
¡El evangelio según San Mateo!: el tiempo que dediques a estudiar Matemáticas es el mejor empleado, pues estudiando Matemáticas desarrollarás al máximo tu <u>capacidad de abstracción</u> y tu <u>facultad de razonamiento</u> .... y entendiendo de "números" te será muy fácil entender de cualquier materia que se exprese mediante números

1.16 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Como la función $f:\Re \mapsto \Re$ es un criterio que asocia números reales con números reales, en la visualización de "f" tendrá protagonismo estelar la visualización del conjunto $\Re$ de los números reales, que desempeña dos papeles a la vez, pues $\Re$ es a la vez el conjunto "inicial" de "f" y el conjunto "final" de "f". Llamaremos **eje de abcisas** a la recta elegida para visualizar el conjunto "inicial" $\Re$, llamando **eje de ordenadas** a la recta elegida para visualizar el conjunto "final" $\Re$. Por comodidad, ambos ejes se toman perpendiculares, de modo que su punto de intersección sea el correspondiente al número cero en cada eje.



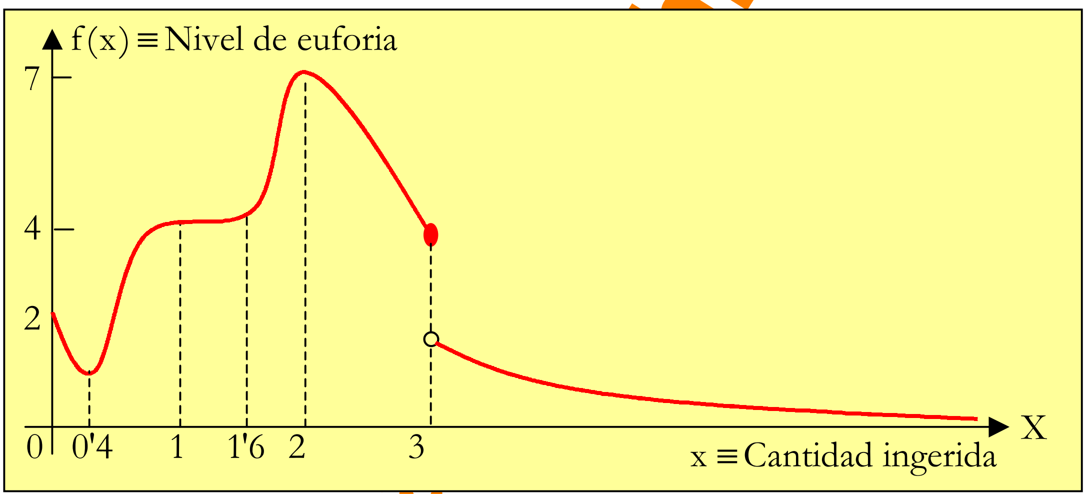
La representación gráfica de una función real de variable real es una curva plana. En efecto, siendo "x" un número real del conjunto "inicial" y "f(x)" el número real del conjunto "final" que la función $f:\Re \mapsto \Re$ asocia a "x", es claro que los números "x" y "f(x)" determinan inequívocamente un punto del plano: el punto de coordenadas $(x;f(x))$. Así, si asignásemos a "x" los infinitos valores que puede tomar y posicionásemos en el plano los infinitos puntos $(x;f(x))$ que se van obteniendo, al final nuestros ojos verían una curva plana.



- ***Pregunta:*** ¿por qué es importante representar curvas?
- ***Respuesta:*** porque la curva representativa de la función $f:\Re \mapsto \Re$ nos permite tener una visión global del **fenómeno** gobernado por "f".

- ***Pregunta:*** ¿qué es eso del **fenómeno** gobernado por "f"?
- ***Respuesta:*** el Cálculo Diferencial nació ligado a la Física que preocupaba a los humanos de principios del siglo XVII, pues fueron los grandes físicos de la época los que lo "inventaron" para hincarle el diente a **fenómenos** como el del movimiento de los planetas o la transmisión del calor ..... pero desde entonces ha llovido mucho, y para contestar la pregunta planteada podemos poner ejemplos de fenómenos que nada tienen que ver con la Física.

Por ejemplo, piensa en el fenómeno de la ingesta de cerveza y su influencia en tu nivel de euforia; en concreto, considera que el número real "x" expresa la cantidad de cerveza que bebes un día de juerga y que $f:\Re \mapsto \Re$ es la función que determina o gobierna el nivel "$f(x)$" de tu euforia cuando la cantidad ingerida de cerveza es "x". Así las cosas, considera que la gráfica de "f" es la de la siguiente figura.



A la vista de la gráfica de la función "f" podemos hacernos una idea global del fenómeno:

Cuando no bebes $(x=0)$ tu nivel de euforia es 2. Los primeros tragos te deprimen un poco, pues tu nivel de euforia va disminuyendo hasta que la cantidad ingerida es 0'4, pero a partir de ahí la cosa cambia, pues el nivel de euforia empieza aumentar hasta que alcanza una zona de "meseta" entorno al nivel de euforia 4. La "meseta" se mantiene hasta que la cantidad ingerida llega a 1'6, que marca el inicio de una subida de euforia que alcanza su máximo cuando la cantidad ingerida es 2. A partir de entonces anda con ojo, porque tu euforia comienza a disminuir si sigues bebiendo, y con la gota que colme los 3 litros tu euforia se desplomará muy bruscamente, lo que puede producirte mareos y desagradables vómitos. Si te empecinas y sigues bebiendo, tu euforia seguirá disminuyendo, aproximándose al nivel cero, que es el de los fósiles del pleistoceno superior.

1.17 LAS RECTAS Y LAS PARÁBOLAS

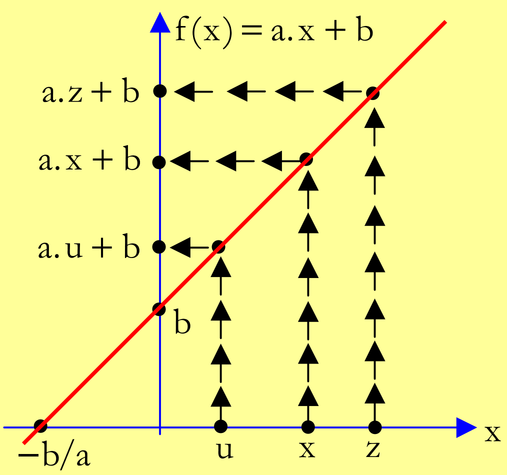
Las rectas y parábolas son las "curvas" más famosas; las encontrarás hasta en la sopa

La gráfica de un polinomio de grado no superior a uno es una recta (no perpendicular al eje de abcisas). **De otro modo:** toda recta no perpendicular al eje de abcisas es la gráfica de una función $f:\mathfrak{R}\mapsto\mathfrak{R}$ tal que $f(x)=a.x+b$, donde "a" y "b" son constantes.

Sea cual sea el valor de "a", sucede que $f(0)=a.0+b=b$, por lo que la recta "corta" al eje de ordenadas en el punto "b"; de "b" se dice que es la **ordenada de la recta en el origen.** La recta corta al eje de abcisas en el punto "x" tal que $f(x)=0$:

$$f(x)=a.x+b=0\Rightarrow x=-b/a$$

Del número $-b/a$ se dice que es la **abcisa de la recta en el origen.**



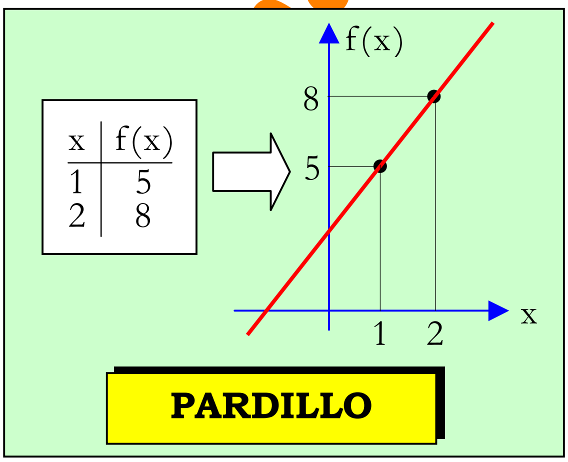
Para dibujar una recta basta "posicionar" dos puntos de ella.

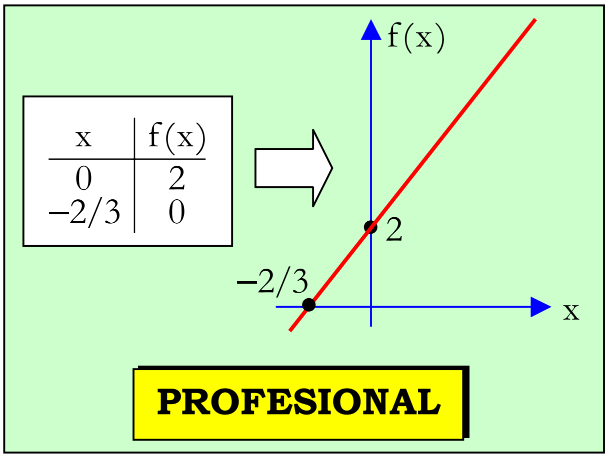
Por ejemplo, para dibujar la recta $f(x)=2+3.x$, los pardillos posicionan dos puntos cualquiera de ella:

$$\begin{cases} \text{si } x=1\Rightarrow f(1)=2+3.1=5\Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (1;5) \\ \text{si } x=2\Rightarrow f(2)=2+3.2=8\Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (2;8) \end{cases}$$

Pero los que no se chupan el dedo dibujan la recta calculando su abcisa y su ordenada en el origen, pues así tardan menos:

$$\begin{cases} \text{si } x=0\Rightarrow f(0)=2+3.0=2\Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (0;2) \\ \text{si } f(x)=2+3.x=0\Rightarrow x=-2/3\Rightarrow \text{la recta pasa por el punto } (-2/3;0) \end{cases}$$

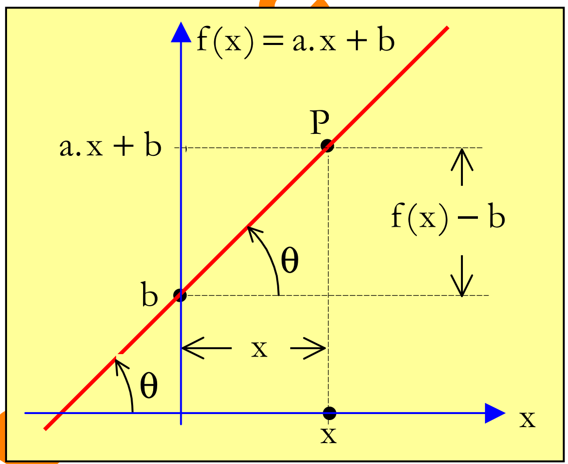




Si una función "f" es un polinomio de grado uno, también se dice que "f" es una función "lineal"

Como en el lenguaje matemático **lineal es sinónimo de proporcional,** sin duda te preguntas dónde está la "proporcionalidad" en esta historia.

Fíjate: si $P = (x; f(x))$ es un punto genérico de una recta, como $f(x) = a.x + b$, sucede que $f(x) - b = a.x$; o sea, la diferencia $f(x) - b$ entre la ordenada "$f(x)$" del punto "P" y la ordenada "b" de la recta en el origen es proporcional a la abcisa "x" de "P". Si miras la figura comprobarás que la constante de proporcionalidad (o sea, "a") coincide con la tangente del ángulo "θ" que la recta forma con la dirección positiva del eje de abcisas:

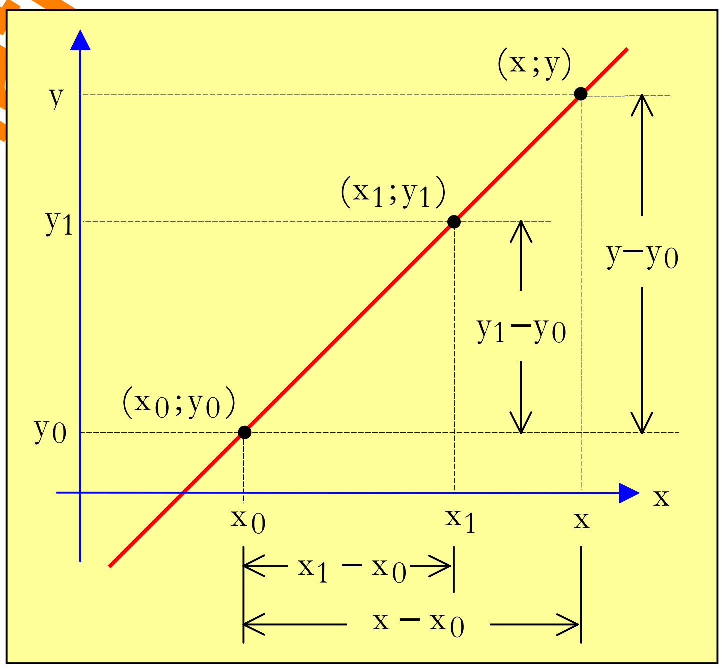


$$f(x) - b = a.x \Rightarrow \frac{f(x) - b}{x} = a = \operatorname{tg} \theta$$

De "a" se dice que es la **pendiente** de la recta. **Observa:** si $a = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow$ la recta es paralela al eje de abcisas (o también: $a = 0 \Rightarrow f(x) = b \equiv \text{constante}$).

Recta que pasa por dos puntos conocidos

Si $(x; y)$ son las coordenadas de un punto genérico de la recta que pasa por los puntos $(x_0; y_0)$ y $(x_1; y_1)$, de la figura, por semejanza de triángulos, se deduce que:



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Por ejemplo, para la recta que pasa por los puntos (2;3) y (5;–6), es:

$$\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y - 3}{-6 - 3} \Rightarrow y = 9 - 3.x$$

Así, la expresión matemática de la función lineal $f: \Re \mapsto \Re$ cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos (2;3) y (5;–6) es $f(x) = 9 - 3.x$.

Recta que pasa por un punto conocido y tiene pendiente conocida

Si $(x;f(x))$ son las coordenadas de un punto genérico de la recta que pasa por el punto conocido $(m;n)$ y tiene pendiente conocida "a", la expresión matemática de la función lineal $f:\Re \mapsto \Re$ cuya gráfica es dicha recta es $f(x)=a.x+b$, y "b" se determina al exigir la recta pase por $(m;n)$; o sea, al exigir que $f(m)=n$:

$$f(m)=n \Rightarrow a.m+b=n \Rightarrow b=n-a.m \Rightarrow f(x)=a.x+n-a.m \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{sustituimos "b" por "}n-a.m\text{" en } f(x)=a.x+b}$$

$$\Rightarrow f(x)=n+a.(x-m)$$

Por ejemplo, la expresión matemática de la función lineal $f:\Re \mapsto \Re$ que pasa por el punto $(6;-4)$ con pendiente 3 es $f(x)=-4+3.(x-6)=3.x-22$.

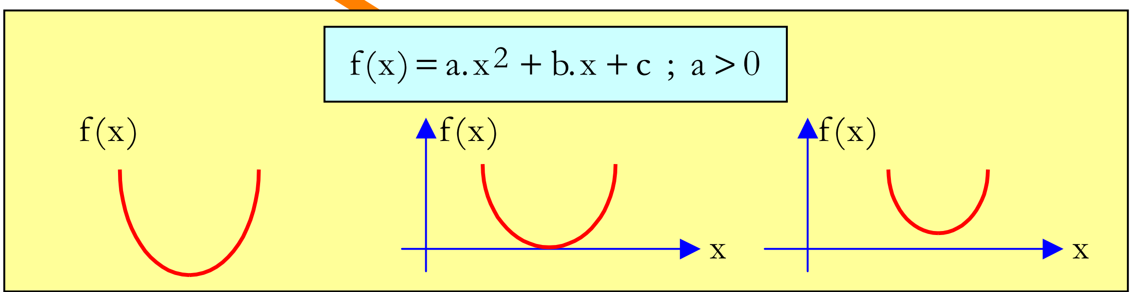
Por ejemplo, la expresión matemática de la función lineal $g:\Re \mapsto \Re$ que pasa por el punto $(-5;7)$ con pendiente -4 es $g(x)=7-4.(x-(-5))=-4.x-13$.

La gráfica de un polinomio de grado 2 es una parábola.

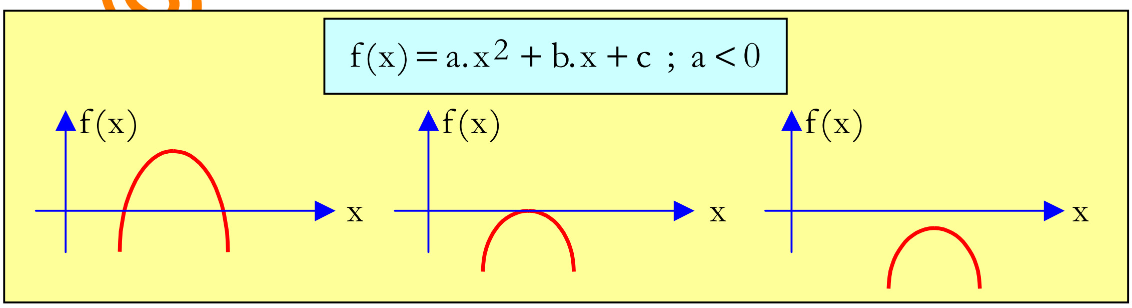
O sea, es una parábola la gráfica de toda función $f:\Re \mapsto \Re$ cuya expresión matemática sea $f(x)=a.x^2+b.x+c$, siendo "a", "b" y "c" constantes y $a\neq 0$. La parábola tiene sus **"cuernos" hacia arriba o hacia abajo según que "a" sea positivo o negativo** ..... y las soluciones de $a.x^2+b.x+c=0$ nos dirán si la parábola y el eje de abcisas se "tocan" o no:

1) Si la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$ **tiene dos soluciones reales y distintas** $x=x_0$ y $x=x_1$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.
2) Si la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$ tiene **una raíz real doble** $x=x_0$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.
3) Si la ecuación $a.x^2+b.x+c=0$ **carece de raíces reales,** la parábola no "toca" al eje de abcisas.

$f(x)=a.x^2+b.x+c \; ; \; a>0$

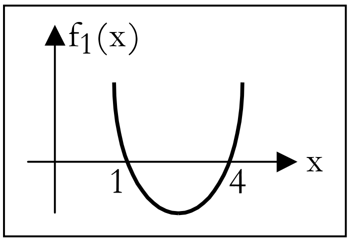


$f(x)=a.x^2+b.x+c \; ; \; a<0$

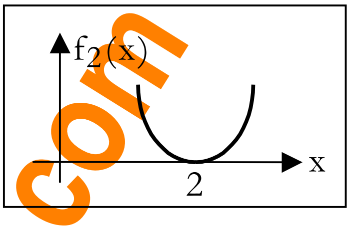


Por ejemplo:

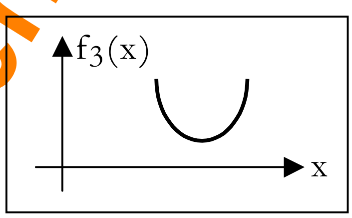
1) La gráfica de $f_1:\Re \mapsto \Re$ tal que $f_1(x) = x^2 - 5.x + 4$ es una parábola con "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo); como las soluciones de $x^2 - 5.x + 4 = 0$ son reales y distintas $(x = 1, x = 4)$, la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.



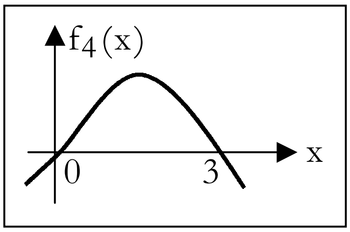
2) La gráfica de $f_2:\Re \mapsto \Re$ tal que $f_2(x) = x^2 - 4.x + 4$ es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo); como la ecuación $x^2 - 4.x + 4 = 0$ tiene una raíz real doble $x = 2$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.



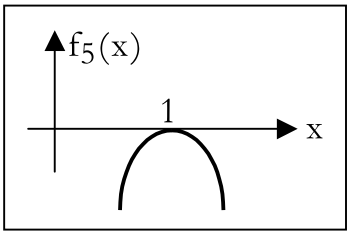
3) La gráfica de $f_3:\Re \mapsto \Re$ tal que $f_3(x) = x^2 + x + 5$ es una parábola con los "cuernos" hacia arriba (pues el coeficiente de x^2 es positivo); como la ecuación $x^2 + x + 5 = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



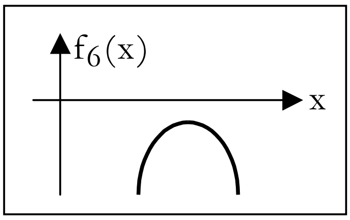
4) La gráfica de $f_4:\Re \mapsto \Re$ tal que $f_4(x) = -x^2 + 3.x$ es una parábola con los "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo); como las soluciones de $-x^2 + 3.x = 0$ son reales y distintas $(x = 0$ y $x = 3)$ la parábola corta al eje de abcisas en esos puntos.



5) La gráfica de la función $f_5:\Re \mapsto \Re$ definida como $f_5(x) = -x^2 + 2.x - 1$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo (el coeficiente de x^2 es negativo); como $-x^2 + 2.x - 1 = 0$ tiene una raíz real doble $x = 1$, la parábola es tangente al eje de abcisas en ese punto.



6) La gráfica de la función $f_6:\Re \mapsto \Re$ definida como $f_6(x) = -x^2 + x - 7$ es una parábola con "cuernos" hacia abajo (pues el coeficiente de x^2 es negativo); como la ecuación $-x^2 + x - 7 = 0$ no tiene raíces reales, la parábola no "toca" al eje de abcisas.



Si la parábola no toca al eje de abcisas (ejemplos 3 y 6) nos quedamos con el **culo al aire.** Para lidiar tal situación debes saber que el punto en que la parábola $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ presenta su máximo (mínimo) es $x = -b/2.a$.

Por ejemplo: la parábola $f_3(x) = x^2 + x + 5$ presenta su mínimo en el punto $x = -1/2$, y la parábola $f_6(x) = -x^2 + x - 7$ presenta su máximo en el punto $x = 1/2$.

1.18 ECUACIONES DE OTRAS CURVAS PLANAS FAMOSAS

Además de con rectas y parábolas, debes familiarizarte con las ecuaciones de la circunferencia, la hipérbola equilátera y la elipse. Por comodidad al hablar de estas curvas, siendo $f:\Re \mapsto \Re$, denotaremos "y" al número real $f(x) \in \Re_{\text{final}}$ que "f" tiene a bien asociar a $x \in \Re_{\text{inicial}}$.

La circunferencia

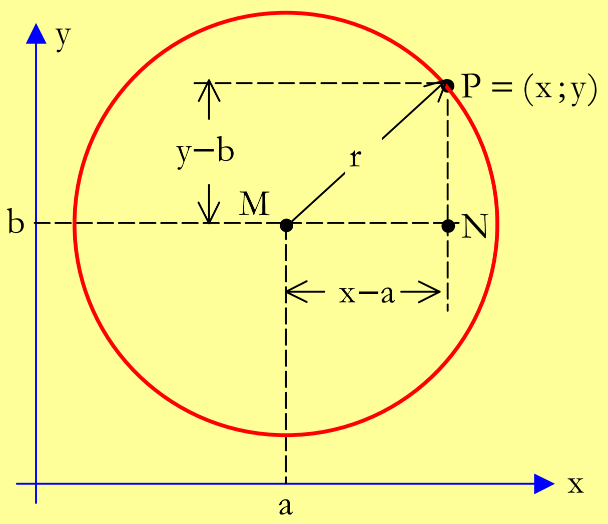
Siendo "x" e "y" las respectivas abcisa y ordenada de un punto genérico "P" de la circunferencia de centro en el punto $M = (a;b)$ y radio "r", se verifica que:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Sin más que aplicar el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de vértices "M", "N" y "P"

Unos cardan la lana y otros se llevan la fama

El Teorema de Pitágoras no es de Pitágoras, se conocía y usaba muchos años antes de que éste naciera. No consta que Pitágoras fuera un choricete que reclamara para sí la paternidad de la criatura.



Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(2;-3)$ y radio 5 es $(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 5^2$.

Al revés: la ecuación $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 67$ es la de la circunferencia que tiene su centro en el punto $(-4;2)$ y radio $\sqrt{67}$.

Observa: al desarrollar la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, resulta

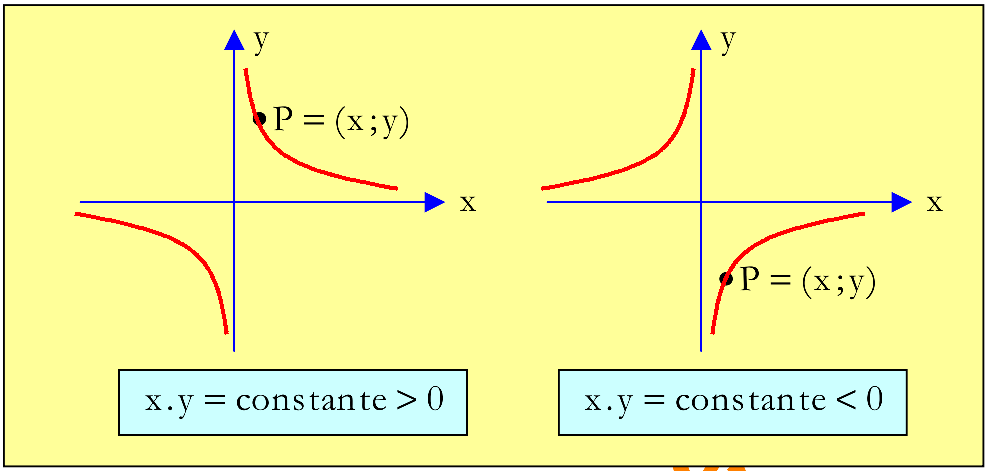
$$x^2 + y^2 - 2.a.x - 2.b.y + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Así, si al doblar la esquina te encuentras la ecuación $x^2 + y^2 - 8.x - 6.y + 9 = 0$, puedes apostar la vida a que es la circunferencia cuyo centro tiene abcisa 4 (la mitad del coeficiente de "x" cambiada de signo) y ordenada 3 (la mitad del coeficiente de "y" cambiada de signo); además, como ha de ser $4^2 + 3^2 - r^2 = 9 \equiv$ término independiente, el radio es 4 ($4^2 + 3^2 - r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$).

Recuerda: $2.\pi.r$ es la longitud de una circunferencia de radio "r", y $\pi.r^2$ es el área que encierra dicha circunferencia.

La hipérbola equilátera

Siendo "x" e "y" las respectivas abcisa y ordenada de un punto genérico "P" de una hipérbola equilátera, se verifica que $x.y = \text{constante}$.



Para **dibujar una hipérbola** equilátera dada basta posicionar unos pocos puntos de una de sus dos "ramas" y unirlos a mano alzada de modo que quede razonablemente parecido a las figuras anteriores; después se dibuja la "rama" simétrica respecto al origen de coordenadas.

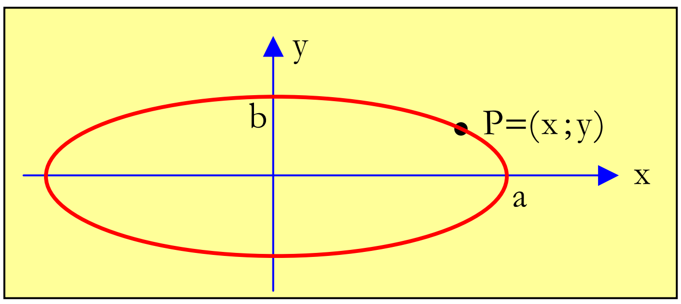
Por ejemplo, siendo $x.y = 16$, se tiene que:

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{|l|} x = 1 \Rightarrow y = 16 \\ x = 2 \Rightarrow y = 8 \\ x = 4 \Rightarrow y = 4 \\ x = 8 \Rightarrow y = 2 \\ x = 16 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.}_{\text{rama en primer cuadrante}} \Rightarrow \underbrace{\left.\begin{array}{|l|} x = -1 \Rightarrow y = -16 \\ x = -2 \Rightarrow y = -8 \\ x = -4 \Rightarrow y = -4 \\ x = -8 \Rightarrow y = -2 \\ x = -16 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right\}}_{\text{rama en tercer cuadrante}}$$

La elipse

Siendo "x" e "y" las respectivas abcisa y ordenada de un punto genérico "P" de la elipse de centro en el origen de coordenadas y semiejes "a" y "b", se verifica que

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$$

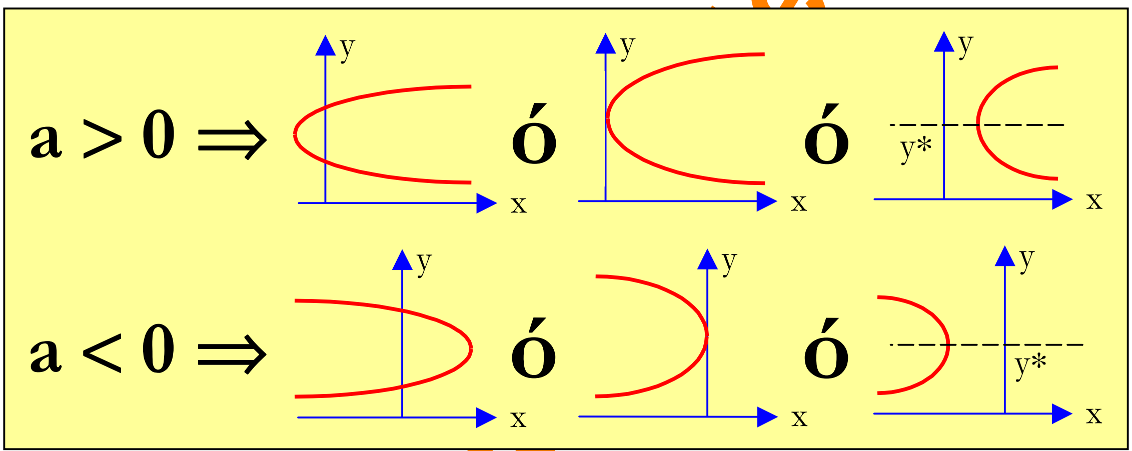


Parábolas de eje horizontal

La ecuación $x = a.y^2 + b.y + c$ (siendo "a", "b" y "c" constantes y $a \neq 0$) es la de una parábola de eje horizontal, que tiene sus "cuernos" hacia la derecha o hacia la izquierda según que $a > 0$ ó $a < 0$.

Las soluciones de $a.y^2 + b.y + c = 0$ nos dirán si la parábola y el eje de ordenadas se "tocan" o no; en concreto:

1) Si la ecuación $a.y^2 + b.y + c = 0$ tiene dos soluciones reales distintas $y = y_0$ e $y = y_1$, la parábola corta al eje de ordenadas en esos puntos.
2) Si la ecuación $a.y^2 + b.y + c = 0$ tiene una raíz real doble $y = y_0$, la parábola es tangente al eje de ordenadas en ese punto.
3) Si la ecuación $a.y^2 + b.y + c = 0$ carece de raíces reales, la parábola no "toca" al eje de ordenadas.

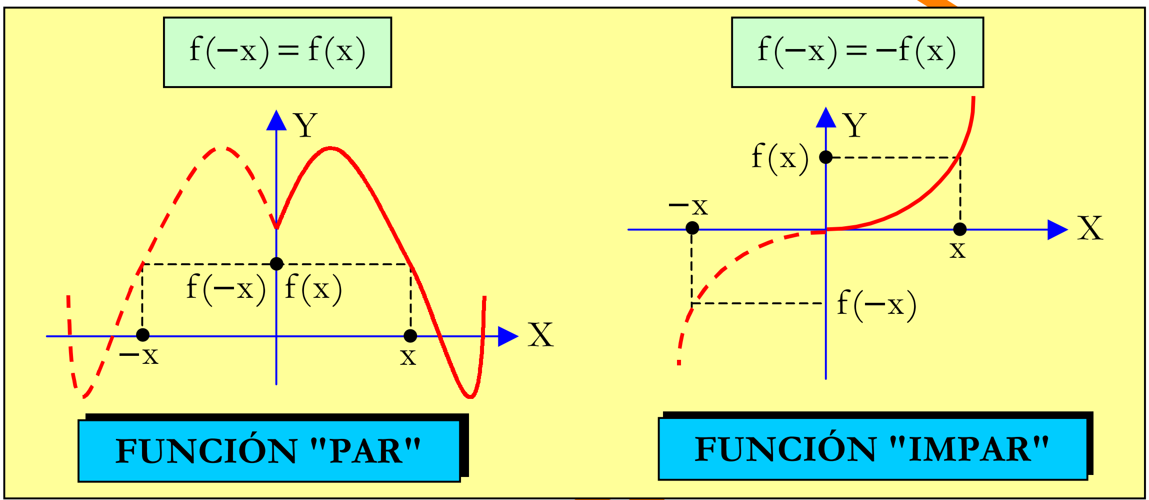


Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 5.y + 4$ tiene los cuernos hacia la derecha y corta el eje de ordenadas en los puntos $y = 1$ e $y = 4$, que son las soluciones de la ecuación $y^2 - 5.y + 4 = 0$. La parábola $x = y^2 - 4.y + 4$ tiene los cuernos hacia la derecha y es tangente al eje de ordenadas en el punto $y = 2$, que es la única solución de la ecuación $y^2 - 4.y + 4 = 0$. La parábola $x = -y^2 + 3.y$ tiene los cuernos hacia la izquierda y corta el eje de ordenadas en los puntos $y = 0$ e $y = 3$, que son las soluciones de $-y^2 + 3.y = 0$. La parábola $x = -y^2 + 2.y - 1$ tiene los cuernos hacia la izquierda y es tangente al eje de ordenadas en el punto $y = 1$, que es la única solución de la ecuación $-y^2 + 2.y - 1 = 0$.

Si la parábola **no toca** al eje de ordenadas te quedarás con el **culo al aire,** salvo que sepas que el eje de la parábola $x = a.y^2 + b.y + c$ es $y^* = -b/2.a$ (ver figuras). Así, el eje de la parábola $x = y^2 + y + 5$ (cuernos hacia la derecha; no "toca" al eje de ordenadas, pues $y^2 + y + 5 = 0$ carece de soluciones reales) es la recta $y^* = -1/2$, y el eje de la parábola $x = -y^2 + y - 7$ (cuernos hacia la izquierda; no "toca" al eje de ordenadas) es la recta $y^* = 1/2$.

1.19 SIMETRÍAS DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

- Se dice que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es **par** si $f(-x)=f(x)$, lo que en términos geométricos significa que **la gráfica de "f" es simétrica respecto del eje de ordenadas.**
- Se dice que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es **impar** si $f(-x)=-f(x)$, lo que en términos geométricos significa que **la gráfica de "f" es simétrica respecto al origen de coordenadas.**



- El que una función "f" sea "par" o "impar" es un **estupendo chollo,** pues en tal caso sólo nos preocupará dibujar su gráfica para valores positivos de "x", ya que lo que suceda para valores negativos de "x" lo deducimos por simetría.

Por ejemplo, son **pares** las siguientes funciones

$$f_1(x)=\frac{x^2}{1+x^6}\ ;\ f_2(x)=\frac{\text{sen }x^8}{\sqrt{1-x^2-x^6}}\ ;\ f_3(x)=x^4.e^{x^2}\ ;\ f_4(x)=\text{Ln }(1+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "−x" resulta:

$$f_1(-x)=\frac{(-x)^2}{1+(-x)^6}=\frac{x^2}{1+x^6}=f_1(x)$$

$$f_2(-x)=\frac{\text{sen }(-x)^8}{\sqrt{1-(-x)^2-(-x)^6}}=\frac{\text{sen }x^8}{\sqrt{1-x^2-x^6}}=f_2(x)$$

$$f_3(-x)=(-x)^4.e^{(-x)^2}=x^4.e^{x^2}=f_3(x)$$

$$f_4(-x)=\text{Ln }(1+(-x^2))=\text{Ln }(1+x^2)=f_4(x)$$

Por ejemplo, son **impares** las siguientes funciones

$$f_5(x)=\frac{x^7}{8-x^4}\ ;\ f_6(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ f_7(x)=x^3.e^{x^2}\ ;\ f_8(x)=x^9.\text{Ln }(1+x^2)$$

pues al sustituir "x" por "−x" resulta:

$$f_5(-x)=\frac{(-x)^7}{8-(-x)^4}=-\frac{x^7}{8-x^4}=-f_5(x)$$

$$f_6(-x)=\frac{(-x)^3}{\sqrt{1-(-x)^2}}=-\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}=-f_6(x)$$

$$f_7(-x)=(-x)^3.e^{(-x)^2}=-x^3.e^{x^2}=-f_7(x)$$

$$f_8(-x)=(-x)^9.\text{Ln}\,(1+(-x^2))=-x^9.\text{Ln}\,(1+x^2)=-f_8(x)$$

Por ejemplo, no son pares ni impares las funciones

$$g_1(x)=\frac{1}{x^2+x}\ ;\ g_2(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ g_3(x)=x^4.e^x\ ;\ g_4(x)=\text{Ln}\,(1+x+x^2)$$

pues sustituyendo "x" por "$-x$", resulta:

$$g_1(-x)=\frac{1}{(-x)^2+(-x)}=\frac{1}{x^2-x}\neq\begin{cases}g_1(x)\\-g_1(x)\end{cases}$$

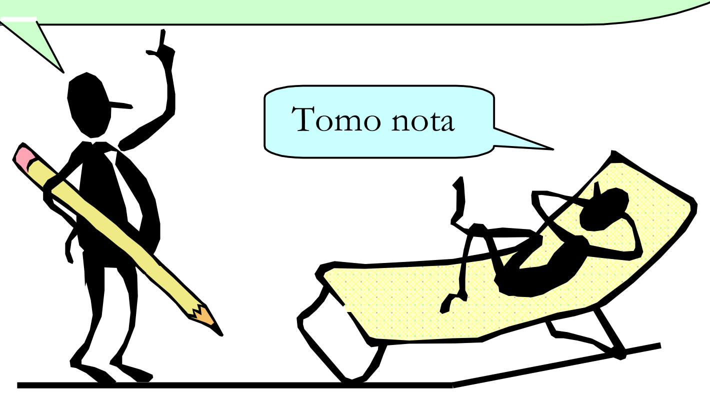
$$g_2(-x)=\frac{\sqrt{1+(-x)}}{\sqrt{1-(-x)^2}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\neq\begin{cases}g_2(x)\\-g_2(x)\end{cases}$$

$$g_3(-x)=(-x)^4.e^{-x}=x^4.e^{-x}\neq\begin{cases}g_3(x)\\-g_3(x)\end{cases}$$

$$g_4(-x)=\text{Ln}\,(1+(-x)+(-x)^2)=\text{Ln}\,(1-x+x^2)\neq\begin{cases}g_4(x)\\-g_4(x)\end{cases}$$

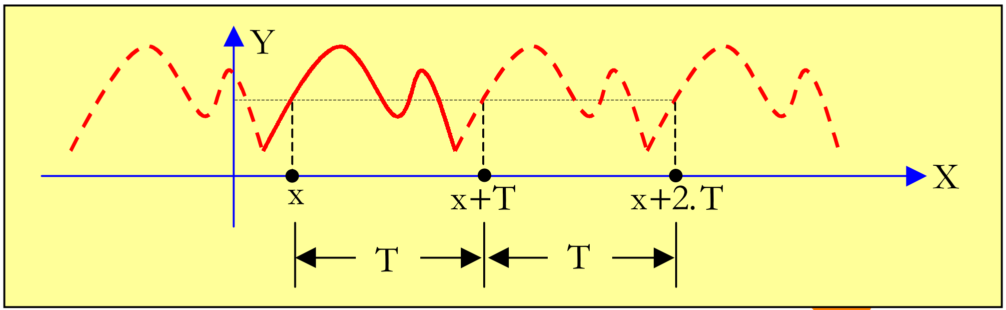
Observa: si el punto $a\in\Re$ no tiene imagen según la función $f:\Re\mapsto\Re$ y el punto $-a\in\Re$ (simétrico de "a" respecto al punto $x=0$) sí tiene imagen según "f", no hay que andar sustituyendo "x" por "$-x$" para analizar las posibles simetrías de "f", pues puedes apostar tranquilamente la vida a que "f" no es "par" ni es "impar".

Por ejemplo, si $f(x)=1/(x-4)$, como el punto $x=4$ carece de imagen según "f" (pues $f(4)=1/(4-4)=1/0\notin\Re$) y el punto $x=-4$ sí tiene imagen según "f" (es $f(-4)=1/(-4-4)=-1/8$), podemos garantizar que "f" no es par ni impar, pues para que "f" fuera par o impar sería necesario (no suficiente) que el punto $x=-4$ no tuviera imagen



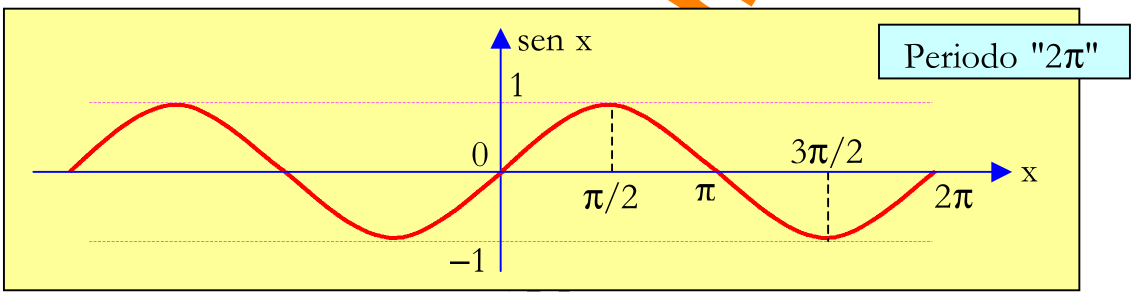
1.20 FUNCIONES PERIÓDICAS

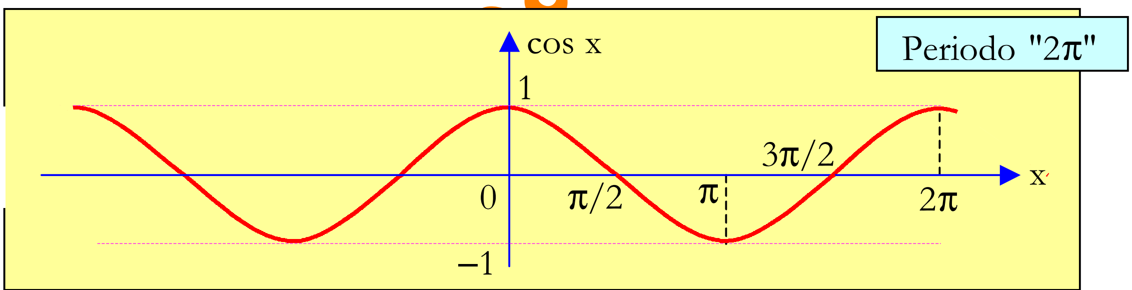
- Se dice que la función $f:\Re \mapsto \Re$ es **periódica** (o "cíclica") y que su **periodo** es "T" si "T" es el menor número positivo tal que $f(x+T)=f(x)$.



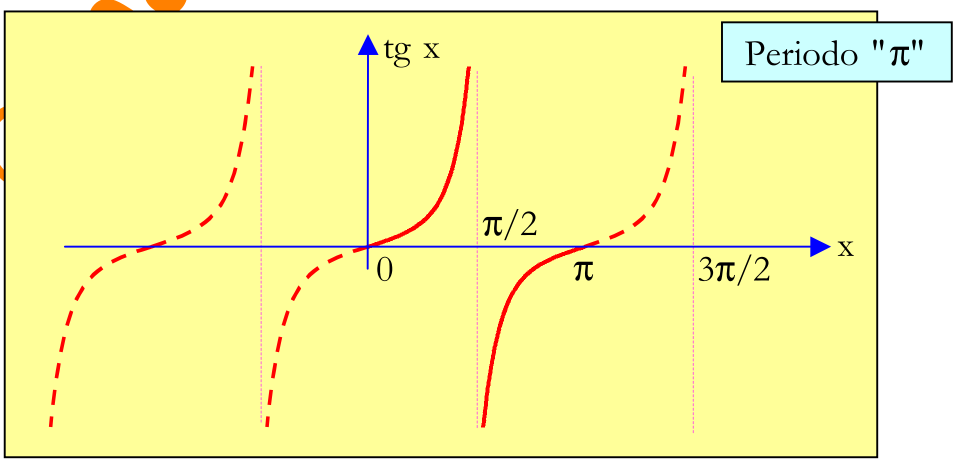
- El que una función "f" sea periódica de periodo "T" es un **estupendo chollo,** pues en tal caso sólo debemos preocuparnos por dibujar su gráfica en el intervalo $[a;a+T]$, siendo "a" un punto cualquiera.
- Las más famosas funciones periódicas son $f(x)=\text{sen } x$ y $f(x)=\cos x$, que tienen periodo "2π", pues para todo valor de "x" sucede que:

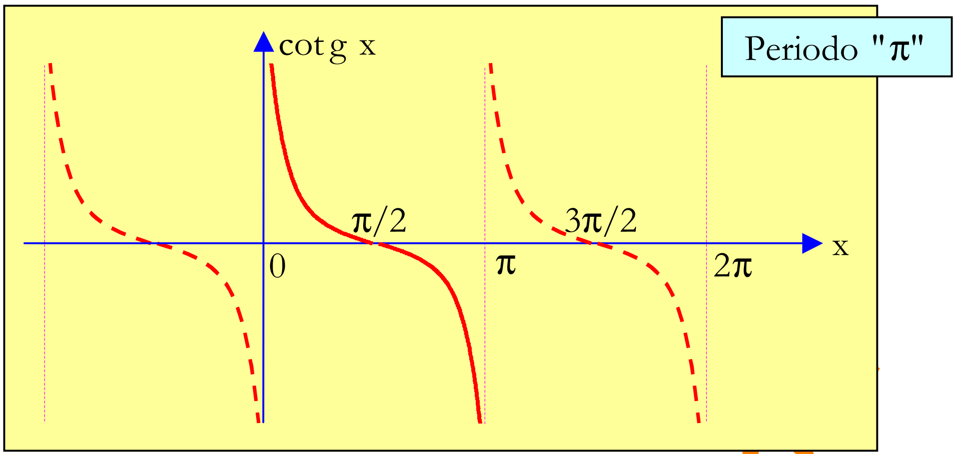
$$\text{sen } x = \text{sen } (x+2\pi) \; ; \; \cos x = \cos (x+2\pi)$$

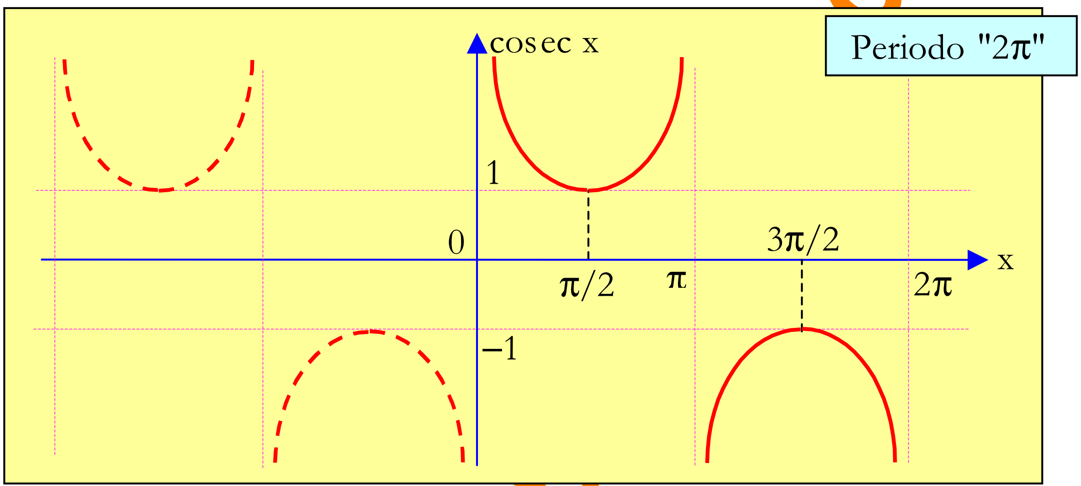


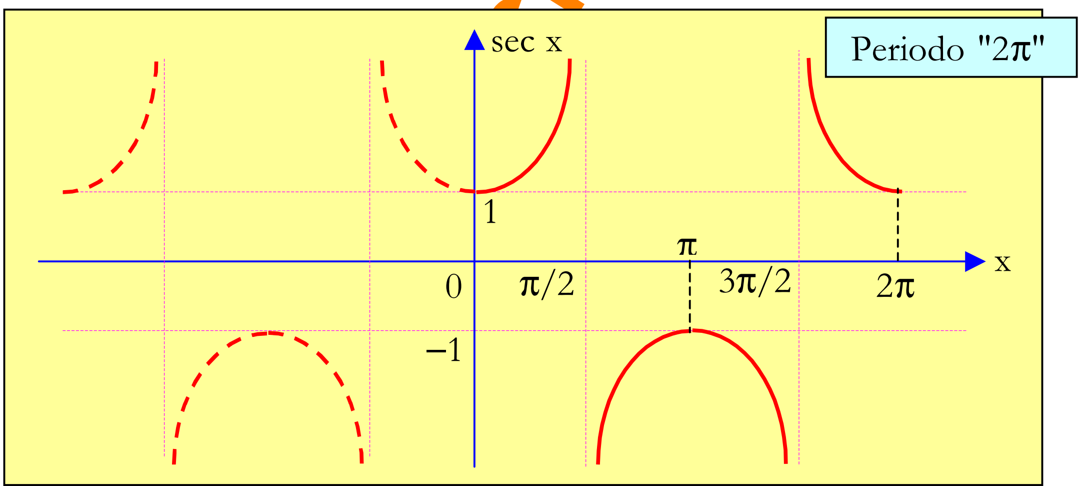


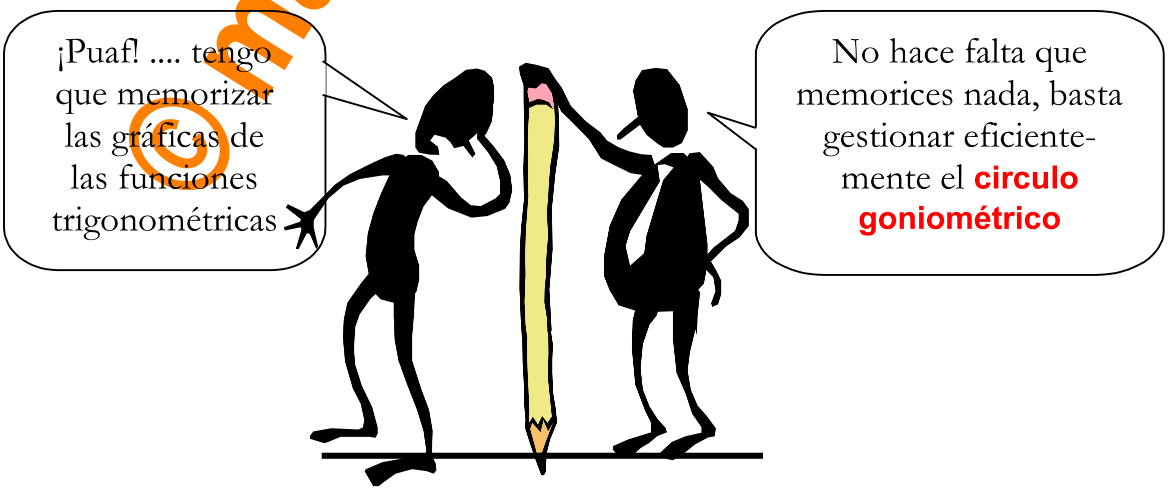
- Las funciones $f(x)=\text{tg } x$ y $f(x)=\text{cotg } x$ son periódicas de periodo "π", y las funciones $f(x)=\sec x$ y $f(x)=\text{cosec } x$ son periódicas de periodo "2π".




cotg x
Periodo "π"
π/2
3π/2
x
0
π
2π


cosec x
Periodo "2π"
1
0
3π/2
x
π/2
π
2π
−1

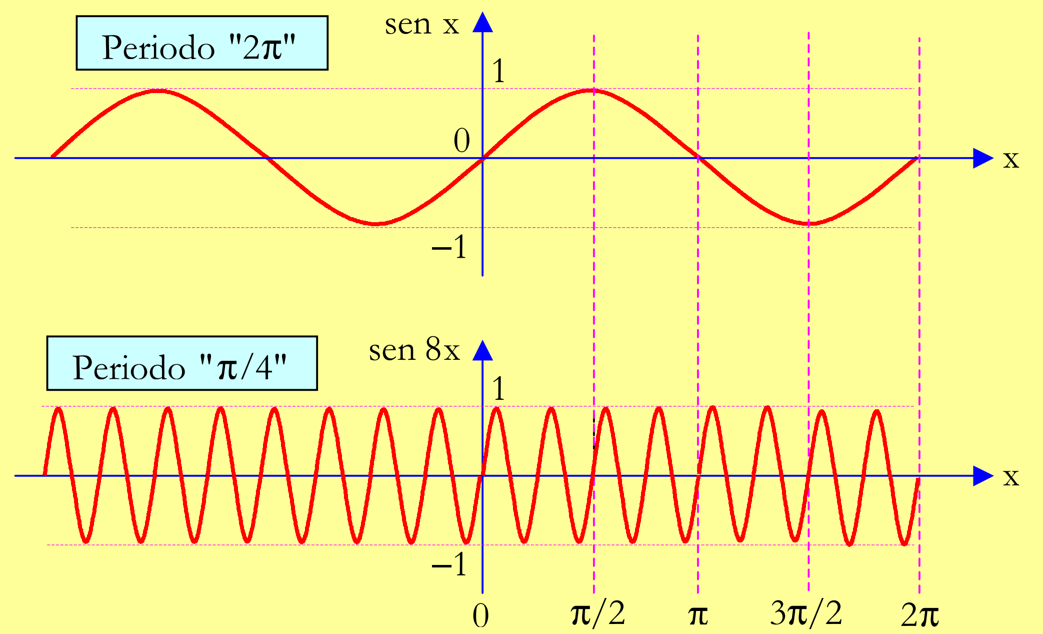

sec x
Periodo "2π"
1
π
x
0
π/2
3π/2
2π
−1


¡Puaf! .... tengo que memorizar las gráficas de las funciones trigonométricas
No hace falta que memorices nada, basta gestionar eficientemente el circulo goniométrico

Por ejemplo, la función $g(x) = \operatorname{sen} 8.x$ es periódica de periodo $\pi/4$, pues al exigir que se satisfaga la condición $g(x+T) = g(x)$, resulta:

$$\operatorname{sen} 8.(x+T) = \operatorname{sen} 8.x \Rightarrow 8.(x+T) = 8.x + 2.\pi \Rightarrow T = \pi/4$$

pues el "seno" es una función periódica de periodo 2π



En el intervalo $[0;2\pi]$ la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ hace un "ciclo", y la función $g(x) = \operatorname{sen} 8.x$ hace ocho ciclos en ese intervalo.

La inversa del periodo se llama **frecuencia**, y expresa el número de ciclos que se producen por cada unidad de la variable "x". Así, si "x" mide el tiempo en segundos, el que la frecuencia de $g(x) = \operatorname{sen} 8.x$ sea $4/\pi \cong 1'2732395$ indica que en un segundo se producen $1'2732395$ ciclos.

Por ejemplo, la función $h(x) = \operatorname{tg} 5.x$ es periódica de periodo $\pi/5$, pues al exigir que se satisfaga la condición $h(x+T) = h(x)$, resulta:

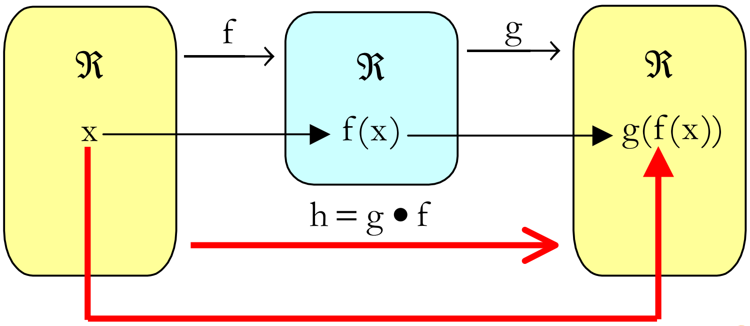
$$\operatorname{tg} 5.(x+T) = \operatorname{tg} 5.x \Rightarrow 5.(x+T) = 5.x + \pi \Rightarrow T = \pi/5$$

pues la "tangente" es una función periódica de periodo π

1.21 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Aunque ya hemos trabajado con muchas funciones "compuestas" conviene hablar expresamente de ello.

Se dice que la función $h: \Re \mapsto \Re$ es la **compuesta** de $f: \Re \mapsto \Re$ y $g: \Re \mapsto \Re$ (se denota $h = g \bullet f$) si $h(x) = g(f(x))$; es decir, la imagen de $x \in \Re$ según "h" es la imagen según "g" de la imagen de "x" según "f".



Por ejemplo, si $f: \Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = 7 + x^2 + e^x$ y $g: \Re \mapsto \Re$ es tal que $g(y) = \text{sen } y$, la función $h_1 = g \bullet f$ es tal que:

$\boxed{\text{es } f(x) = 7 + x^2 + e^x}$

$$h_1(x) = g(f(x)) = f(7 + x^2 + e^x) = \text{sen } (7 + x^2 + e^x)$$

$\boxed{\text{la función "g" establece que g(Pepe) = sen (Pepe)}}$

La función $h_2 = f \bullet g$ es tal que:

$\boxed{\text{pues } g(y) = \text{sen } y}$

$$h_2(y) = f(g(y)) = f(\text{sen } y) = 7 + (\text{sen } y)^2 + e^{\text{sen } y}$$

$\boxed{\text{la función "f" establece que } f(\text{Paco}) = 7 + (\text{Paco})^2 + e^{\text{Paco}}}$

Por ejemplo, si $f: \Re \mapsto \Re$ es tal que $f(x) = \sqrt{1 - x}$ y la función $g: \Re \mapsto \Re$ es tal que $g(y) = \log_7 (y^2 - 9)$, la función $h_1 = g \bullet f$ es tal que:

$\boxed{\text{pues } f(x) = \sqrt{1 - x}}$

$$h_1(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1 - x}) = \log_7 ((\sqrt{1 - x})^2 - 9)$$

$\boxed{\text{la función "g" establece que } g(\text{Pepe}) = \log_7 ((\text{Pepe})^2 - 9)}$

La función $h_2 = f \bullet g$ es tal que:

$\boxed{\text{pues } g(y) = \log_7 (y^2 - 9)}$

$$h_2(y) = f(g(y)) = f(\log_7 (y^2 - 9)) = \sqrt{1 - \log_7 (y^2 - 9)}$$

$\boxed{\text{la función "f" establece que } f(\text{Paco}) = \sqrt{1 - \text{Paco}}}$

Por ejemplo, si la función $u: \Re \mapsto \Re$ es tal que $u(z) = 1 - z^2 + \sqrt{z}$ y la función $v: \Re \mapsto \Re$ es tal que $v(t) = \sqrt{t}$, la función $h_1 = v \bullet u$ es tal que:

$\boxed{u(z) = 1 - z^2 + \sqrt{z}}$

$$h_1(z) = v(u(z)) = v(1 - z^2 + \sqrt{z}) = \sqrt{1 - z^2 + \sqrt{z}}$$

$\boxed{\text{la función "v" establece que } v(\text{Pepe}) = \sqrt{\text{Pepe}}}$

La función $h_2 = u \bullet v$ es tal que:

$$\boxed{\text{pues } v(t) = \sqrt{t}}$$

$$h_2(t) = u(v(t)) = u(\sqrt{t}) = 1 - (\sqrt{t})^2 + \sqrt{\sqrt{t}}$$

$$\boxed{\text{la función "u" establece que } u(\text{Paco}) = 1 - (\text{Paco})^2 + \sqrt{\text{Paco}}}$$

Por ejemplo, si la función $u: \Re \mapsto \Re$ es tal que $u(\lambda) = 1 - \lambda^3$ y $v: \Re \mapsto \Re$ es tal que $v(\theta) = 1/\theta$, la función $h_1 = v \bullet u$ es tal que:

$$\boxed{u(\lambda) = 1 - \lambda^3}$$

$$h_1(\lambda) = v(u(z)) = v(1 - \lambda^3) = 1/(1 - \lambda^3)$$

$$\boxed{\text{la función "v" establece que } v(\text{Pepe}) = 1/\text{Pepe}}$$

La función $h_2 = u \bullet v$ es tal que:

$$\boxed{v(\theta) = 1/\theta}$$

$$h_2(\theta) = u(v(\theta)) = u(1/\theta) = 1 - (1/\theta)^3$$

$$\boxed{\text{la función "u" establece que } u(\text{Paco}) = 1 - (\text{Paco})^3}$$

Por ejemplo, si la función $\lambda: \Re \mapsto \Re$ es tal que $\lambda(z) = 1 + \sqrt{z}$ y $\theta: \Re \mapsto \Re$ es tal que $\theta(t) = 1/t$, la función $h_1 = \theta \bullet \lambda$ es tal que:

$$\boxed{\lambda(z) = 1 + \sqrt{z}}$$

$$h_1(z) = \theta(\lambda(z)) = \theta(1 + \sqrt{z}) = 1/(1 + \sqrt{z})$$

$$\boxed{\text{la función "}\theta\text{" establece que } \theta(\text{Pepe}) = 1/\text{Pepe}}$$

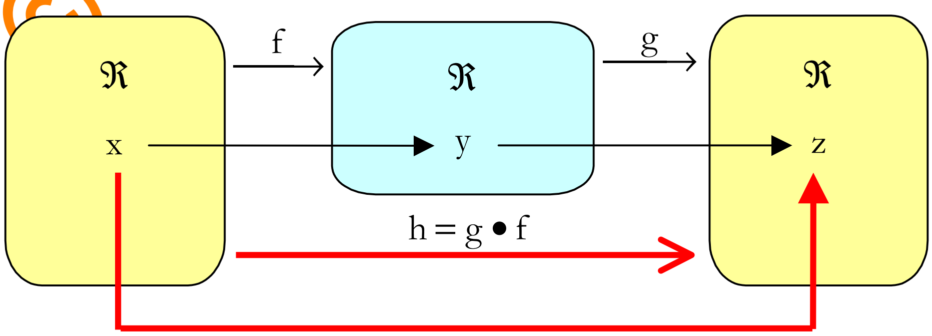
La función $h_2 = \lambda \bullet \theta$ es tal que:

$$\boxed{\theta(t) = 1/t}$$

$$h_2(t) = \lambda(\theta(t)) = \lambda(1/t) = 1 + \sqrt{1/t}$$

$$\boxed{\text{la función "}\lambda\text{" establece que } \lambda(\text{Paco}) = 1 + \sqrt{\text{Paco}}}$$

Entenderás la **utilidad de la composición de funciones en la vida cotidiana** si miras el siguiente esquema



y sintiendo como si el negocio fuera tuyo, piensas que, por ejemplo, las variables "x", "y" y "z" expresan lo siguiente:

$$x \equiv \text{cantidad de capital que utiliza Revilla S.A. para producir chorizo}$$
$$y \equiv \text{producción de chorizo de Revilla S.A}$$
$$z \equiv \text{beneficio de Revilla S.A}$$

Estamos ante dos **fenómenos encadenados**: el fenómeno consistente en producir chorizo a partir de capital, y el fenómeno consistente en obtener beneficios a partir de la producción de chorizo. Cada uno de los dos fenómenos está gobernado por una "ley": la ley "f" determina la producción "y" $(y = f(x))$ en función de la cantidad "x" empleada de capital, y la ley "g" determina el beneficio "z" en función de la producción "y" $(z = g(y))$. En este contexto, cabe decir que **la ley "compuesta"** $h = g \bullet f$ **"conecta" el inicio y el final del proceso**, pues expresa el beneficio "z" en función de la cantidad "x" empleada de capital.

Se pueden "encadenar" más de dos funciones

Por ejemplo, si las funciones "u", "v" y "w" son tales que

$$u(x) = 2.x - 1 \;\; ; \;\; v(z) = 5^{\,z} \;\; ; \;\; w(\lambda) = 1/(7+\lambda)$$

entonces:

1) La función $h_1 = w \bullet v \bullet u$ es tal que:

$$\boxed{u(x) = 2.x - 1} \qquad \boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$$

$$h_1(x) = w(v(u(x))) = w(v(2.x-1)) = w(5^{2.x-1}) = \frac{1}{7+5^{2.x-1}}$$

$$\boxed{w(\text{Pío}) = \frac{1}{7+(\text{Pío})}}$$

2) La función $h_2 = w \bullet u \bullet v$ es tal que:

$$\boxed{v(z) = 5^z}$$

$$h_2(z) = w(u(v(z))) = w(u(5^z)) = w(2.5^z - 1) = \frac{1}{7+(2.5^z-1)}$$

$$\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1} \qquad \boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7+\text{Pío})}$$

3) La función $h_3 = v \bullet u \bullet w$ es tal que:

$$\boxed{w(\lambda) = 1/(7+\lambda)} \qquad \boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$$

$$h_3(\lambda) = v(u(w(\lambda))) = v(u(\frac{1}{7+\lambda})) = v(\frac{2}{7+\lambda} - 1) =$$

$$= 5^{(2/(7+\lambda))-1}$$

$$\boxed{\text{pues es } v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$$

4) La función $h_4 = v \bullet w \bullet u$ es tal que:

$\boxed{u(x) = 2.x - 1}$ $\boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7 + \text{Pío})}$

$$h_4(x) = v(w(u(x))) = v(w(2.x - 1)) = v\left(\frac{1}{7 + (2.x - 1)}\right) = v\left(\frac{1}{6 + 2.x}\right) =$$

$$= 5^{1/(6+2.x)}$$

$\boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$

$$\boxed{x \xrightarrow{u} 2.x - 1 \xrightarrow{w} \frac{1}{6 + 2.x} \xrightarrow{v} 5^{1/(6+2.x)}}$$

5) La función $h_5 = u \bullet v \bullet w$ es tal que:

$\boxed{w(\lambda) = 1/(7 + \lambda)}$ $\boxed{v(\text{Pepe}) = 5^{\text{Pepe}}}$

$$h_5(\lambda) = u(v(w(\lambda))) = u\left(v\left(\frac{1}{7 + \lambda}\right)\right) = u(5^{1/(7+\lambda)}) =$$

$$= 2.5^{1/(7+\lambda)} - 1$$

$\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$

$$\boxed{\lambda \xrightarrow{w} \frac{1}{7 + \lambda} \xrightarrow{v} 5^{1/(7+\lambda)} \xrightarrow{u} 2.5^{1/(7+\lambda)} - 1}$$

6) La función $h_6 = u \bullet w \bullet v$ es tal que:

$\boxed{v(z) = 5^z}$

$$h_6(z) = u(w(v(z))) = u(w(5^z)) = u\left(\frac{1}{7 + 5^z}\right) = 2.\frac{1}{7 + 5^z} - 1$$

$\boxed{w(\text{Pío}) = 1/(7 + \text{Pío})}$ $\boxed{u(\text{Paco}) = 2.(\text{Paco}) - 1}$

$$\boxed{z \xrightarrow{v} 5^z \xrightarrow{w} \frac{1}{7 + 5^z} \xrightarrow{u} 2.\frac{1}{7 + 5^z} - 1}$$

1.22 INVERSA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

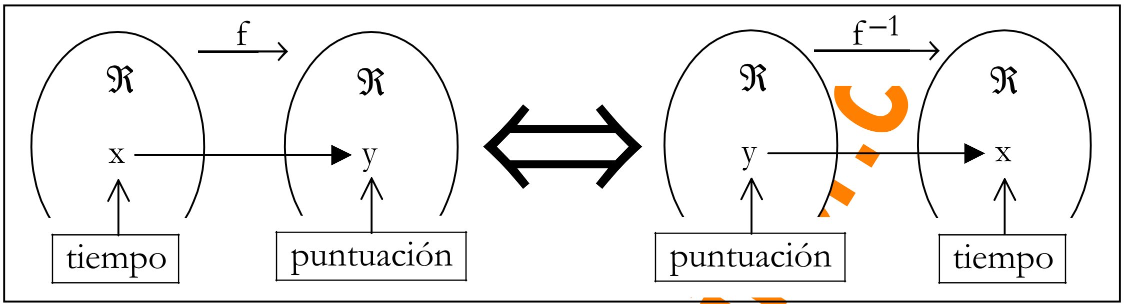
Lo mejor es un ejemplo: considera que "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y que "f" es la función que al tiempo "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes; o sea, $y = f(x)$:

$$\underbrace{\text{tiempo de estudio "x"}}_{\substack{\text{variable "independiente",} \\ \text{toma el valor que queramos}}} \xrightarrow{f} \underbrace{\text{puntuación "y"}}_{\substack{\text{variable "dependiente",} \\ \text{su valor depende del de "x"}}}$$

- La función **inversa o recíproca** de "f" se denota f^{-1}, y es la función que permite analizar el "fenómeno" dando la vuelta a la tortilla (lo que a veces es muy útil); o sea, f^{-1} es la función que a la puntuación "y" le asocia el tiempo de estudio "x".

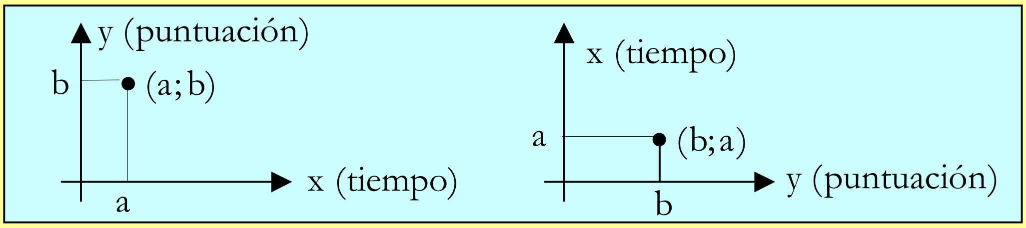
$$\underbrace{\text{puntuación "y"}}_{\substack{\text{variable "independiente",}\\ \text{toma el valor que queramos}}} \xrightarrow{f^{-1}} \underbrace{\text{tiempo de estudio "x"}}_{\substack{\text{variable "dependiente",}\\ \text{su valor depende del de "y"}}}$$

- ***Requeteobvio:*** la inversa o recíproca de f^{-1} es "f".



- **¡Ojo!:** el conjunto inicial (final) de "f" es el final (inicial) de f^{-1}.

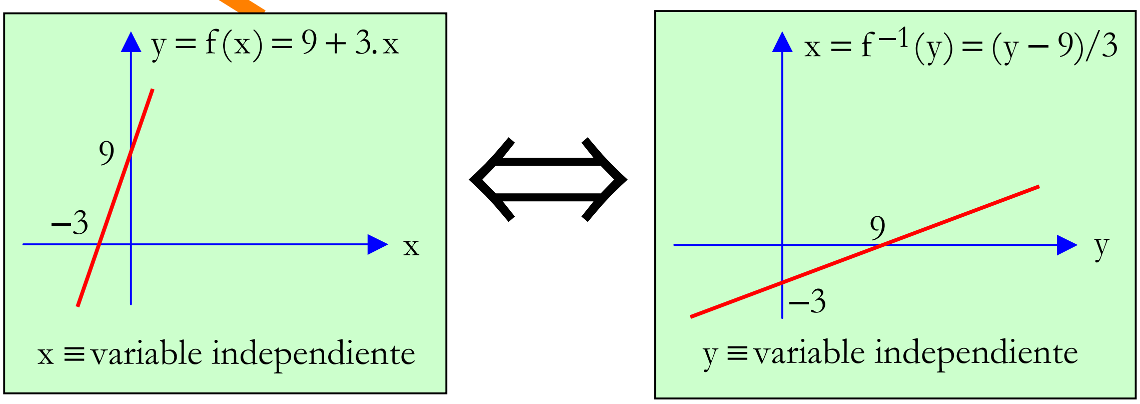
Si $f(a)=b$ (o sea, la gráfica de "f" pasa por el punto $(a;b)$), es $f^{-1}(b)=a$; o sea, la gráfica de la función f^{-1} pasa por el punto $(b;a)$.



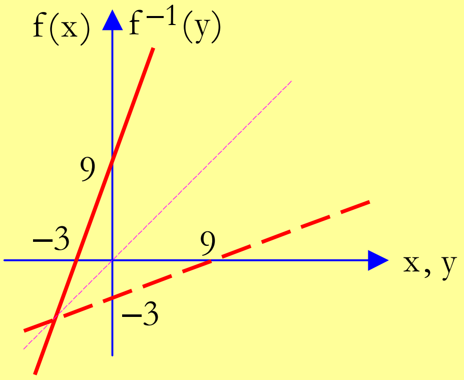
Los puntos $(a;b)$ y $(b;a)$ son simétricos respecto de la bisectriz del primer cuadrante del plano, pues el punto medio del segmento que los une es el $((a+b)/2;(b+a)/2)$, que está en dicha bisectriz, por tener las dos coordenadas iguales). Por tanto, la gráfica de f^{-1} es simétrica de la gráfica de "f" respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Por ejemplo, si $y=f(x)=9+3.x$, es $x=f^{-1}(y)=(y-9)/3$

$\boxed{\text{despejamos "x" en } y=9+3.x}$



Como estaba previsto, al "superponer" las figuras anteriores vemos que las gráficas de las funciones "f" y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante



Por ejemplo, si $y = f(x) = e^{x-2}$, es $x = f^{-1}(y) = 2 + \text{Ln}\, y$

a partir de $y = e^{x-2}$ despejamos "x":
$y = e^{x-2} \Rightarrow \text{Ln}\, y = \text{Ln}\, e^{x-2} \Rightarrow \text{Ln}\, y = x - 2 \Rightarrow x = 2 + \text{Ln}\, y$

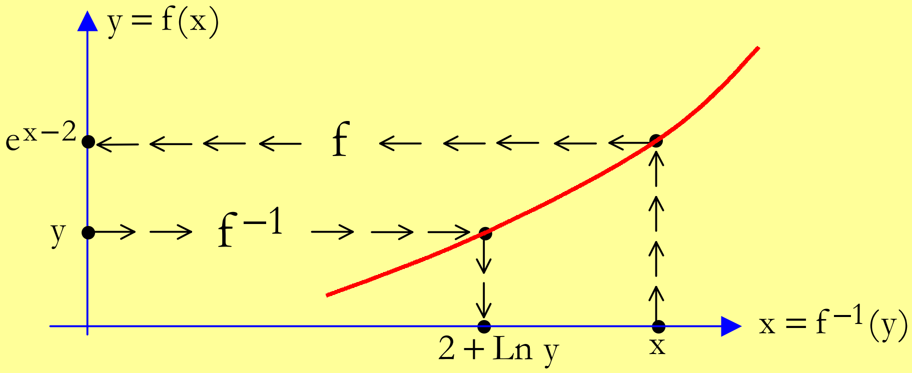
El "fenómeno" es el que es, pero hay dos formas de "mirarlo" ..... y como para gustos están los colores, tú lo "miras" como más te guste:

A "x" horas de estudio les corresponde una nota e^{x-2}

O vuelves la tortilla:

A la nota "y" le corresponden $2+\text{Ln}\, y$ horas de estudio

En el primer caso la variable "independiente" es el tiempo de estudio "x", y en el segundo caso la "independiente" es la nota "y" del examen .... ¿Te enteras de algo?



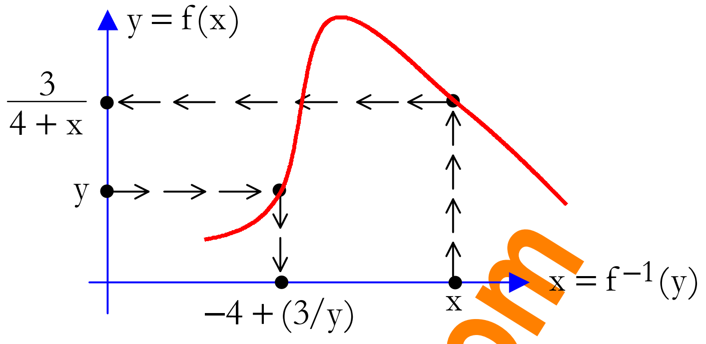
No hace falta andar cambiando los ejes según cuál sea la variable que elijamos como "independiente": si "arrancas" en el punto "x" del eje de abcisas ($\Leftrightarrow$ tomas "x" como independiente), la curva te "lleva" al punto e^{x-2} del eje de ordenadas. Y si "arrancas" del punto "y" del eje de ordenadas ($\Leftrightarrow$ tomas "y" como independiente), la curva te "lleva" al punto $2 + \text{Ln}\, y$ del eje de abcisas.

Por ejemplo, siendo $y = f(x) = \dfrac{3}{4+x}$, es $x = f^{-1}(y) = -4 + \dfrac{3}{y}$

Despejamos "x":

$$y = \frac{3}{4+x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{4+x}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -4 + \frac{3}{y}$$



Por ejemplo, si $v = f(u) = \log_7 (u-3)$, es $u = f^{-1}(v) = 3 + 7^v$

a partir de $v = \log_7 (u-3)$ despejamos "u":
$v = \log_7 (u-3) \Rightarrow u - 3 = 7^v \Rightarrow u = 3 + 7^v$

¡Ojo con la notación!: volvemos al ejemplo en que "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y "f" es la función que a "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en él. Hemos visto que, por ejemplo:

$$y = f(x) = 3/(4+x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y)$$

Hay quien siempre llama "x" a la variable independiente; o sea, puedes encontrar quien diga que la inversa o recíproca de la función "f" tal que $f(x) = 3/(4+x)$ es la función $f^{-1}: \mathfrak{R} \mapsto \mathfrak{R}$ tal que $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$ .... lo que genera confusión entre los principiantes, pues no se dan cuenta de que la "x" que aparece en $f(x) = 3/(4+x)$ nada tiene que ver con la "x" que aparece en $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$:

- El número "x" que aparece en $f(x) = 3/(4+x)$ expresa el tiempo que estudias, y el número $f(x)$ expresa la correspondiente nota del examen.
- El número "x" que aparece en $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$ expresa la nota del examen, y el número $f^{-1}(x)$ expresa el correspondiente tiempo de estudio.

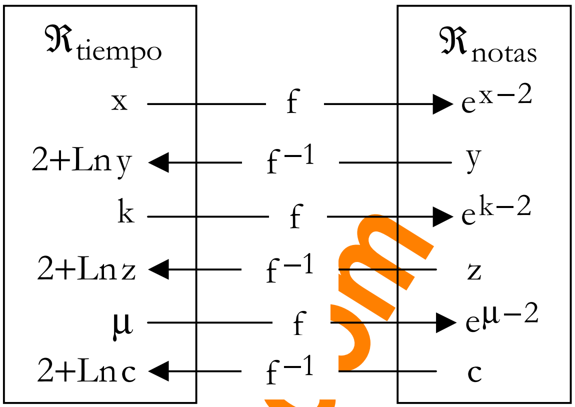
Habría menos lío si se dijera que la función inversa de la $f: \mathfrak{R}_{\text{tiempo}} \mapsto \mathfrak{R}_{\text{notas}}$ tal que $f(x) = 3/(4+x)$ es la $f^{-1}: \mathfrak{R}_{\text{notas}} \mapsto \mathfrak{R}_{\text{tiempo}}$ tal que $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, pues así entenderían que la "x" que aparece en $f(x)$ es un elemento del conjunto $\mathfrak{R}_{\text{tiempo}}$, y la "x" que aparece en $f^{-1}(x)$ es un elemento del conjunto $\mathfrak{R}_{\text{notas}}$.

Como los profesionales tienen perfectamente claro que el conjunto inicial (final) de "f" es el final (inicial) de f^{-1}, no se lían si oyen decir que la "inversa" de $f(x) = 3/(4+x)$ es $f^{-1}(x) = -4 + (3/x)$, que es lo mismo que decir:

$$f^{-1}(w) = -4 + (3/w) \;;\; f^{-1}(z) = -4 + (3/z) \;;\; \boxed{f^{-1}(y) = -4 + (3/y)}$$

$$f^{-1}(\lambda) = -4 + (3/\lambda) \;;\; f^{-1}(\theta) = -4 + (3/\theta) \;;\; f^{-1}(\eta) = -4 + (3/\eta)$$

Observa: siendo $f^{-1}:\Re_{notas} \mapsto \Re_{tiempo}$ la "inversa" de $f:\Re_{tiempo} \mapsto \Re_{notas}$, al hablar de $f^{-1}(w)$ estamos llamando "w" a un elemento genérico del conjunto inicial de f^{-1} (que es el final de "f"), y al hablar de $f^{-1}(z)$ estamos llamando "z" a un elemento genérico del conjunto inicial de f^{-1} (que es el final de "f"), y al hablar de ...... lo importante no es el símbolo empleado para referirnos a un elemento genérico del conjunto inicial de f^{-1}, lo importante es tener muy claro que tal conjunto es $\Re_{notas}$.

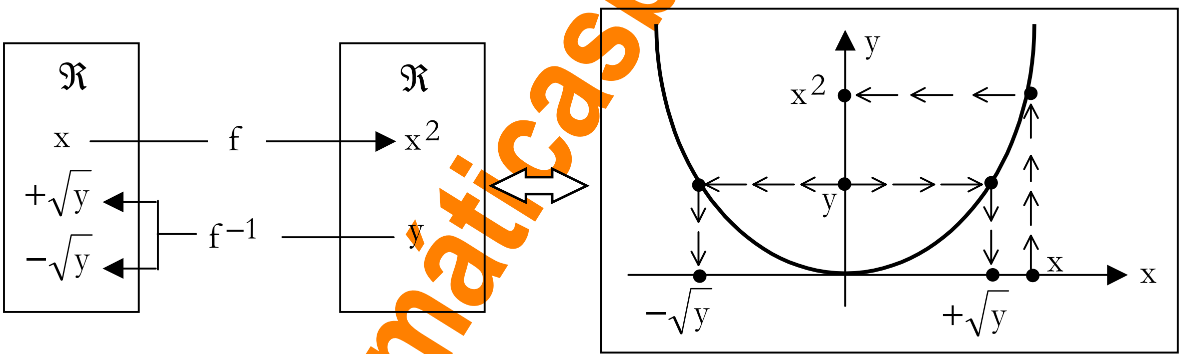


Recuerda: l@s principiantes deben leer $f^{-1}(\text{Paco})$ como:

Imagen de "Paco" según f^{-1}

A veces una función es uniforme, pero su función "inversa" no lo es.

Por ejemplo, es uniforme la función "f" tal que $y = f(x) = x^2$, pero no es uniforme su inversa, que es la f^{-1} tal que $x = f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$



Hay funciones que carecen de función "inversa". ***Por ejemplo,*** la función $f:\Re \mapsto \Re$ tal que $y = f(x) = 1$ carece de "inversa".

Hay funciones cuya inversa no se puede "explicitar": si "x" es el tiempo que dedicas a estudiar un examen y "f" es la función que al tiempo "x" le asocia la puntuación "y" que obtienes en él (o sea, $y = f(x)$), siendo $y = f(x) = 3/(4+x)$, sucede que la función f^{-1} puede explicitarse, lo que quiere decir que a partir de la igualdad $y = 3/(4+x)$ es posible despejar la variable "x":

$$y = f(x) = 3/(4+x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y)$$

Sin embargo, si $y = g(x) = x + 1 + \text{Ln } x$, la función g^{-1} no puede explicitarse, pues a partir de $y = x + 1 + \text{Ln } x$ es imposible despejar la variable "x":

$$y = g(x) = x + 1 + \text{Ln } x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = ?$$

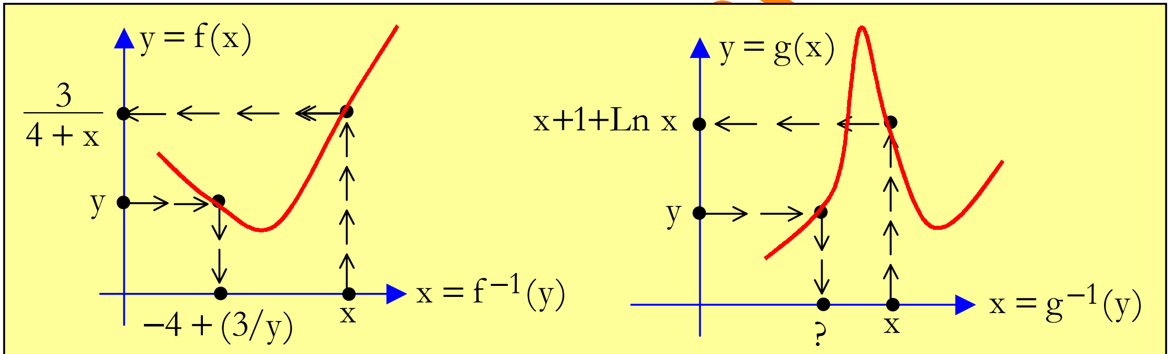
ni los japoneses son capaces de despejar "x"

El que suceda tan desagradable contingencia no significa que en el estudio del "fenómeno" no pueda volverse la tortilla y considerar que la variable independiente es "y" y la dependiente es "x". La diferencia entre f^{-1} y g^{-1} es que f^{-1} nos da expresamente (explícitamente) el valor de "x" que corresponde al valor elegido de la variable independiente "y":

$$x = f^{-1}(y) = -4 + (3/y) \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(1) = -4 + (3/1) \\ f^{-1}(2) = -4 + (3/2) \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

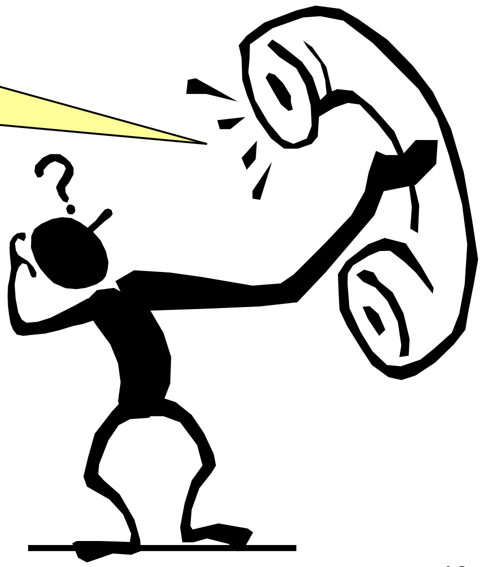
Pero debemos resolver una ecuación (cosa no siempre fácil) para determinar el valor de "x" que g^{-1} asocia al valor elegido de "y".

Por ejemplo, para calcular $g^{-1}(2)$ hay que resolver la ecuación $2 = x+1+\text{Ln } x$, que es fácil, su solución es $x = 1$, por lo que $g^{-1}(2) = 1$. Sin embargo, para determinar $g^{-1}(7)$ debemos resolver la ecuación $7 = x + 1 + \text{Ln } x$, lo que no es tan fácil.



La función inversa de "f" **puede explicitarse,** pues es posible despejar "x" en función de "y". La función inversa de "g" **no puede explicitarse,** pues no es posible despejar "x" en función de "y"; por tanto, deberemos resolver la ecuación $x + 1 + \text{Ln } x = y$ para averiguar el valor de "x" que corresponde a cada valor dado de "y"

Obvio: si la variable "p" expresa el precio de un bien y la variable "q" expresa la cantidad demandada de él, ambas variables están relacionadas ...... y unas veces se toma como independiente "p" (por ejemplo, te dicen que $q = h(p) = 3/(4 + p)$) y otras veces toman como independiente "q", diciendo que $p = g(q) = -4 + (3/q)$. Obviamente, **las funciones "h" y "g" son recíprocas una de otra**



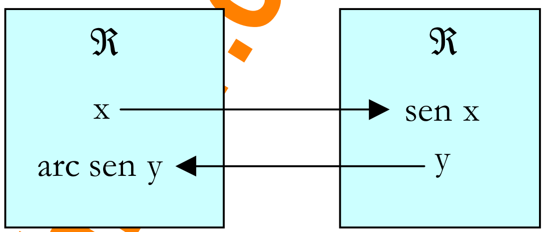
1.23 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas son las inversas o recíprocas de las funciones trigonométricas (recuerda que los ángulos siempre se miden en radianes, jamás en grados).

La función "arco seno"

La inversa de la función "seno" se llama **arco seno**, y se denota **arc sen**.

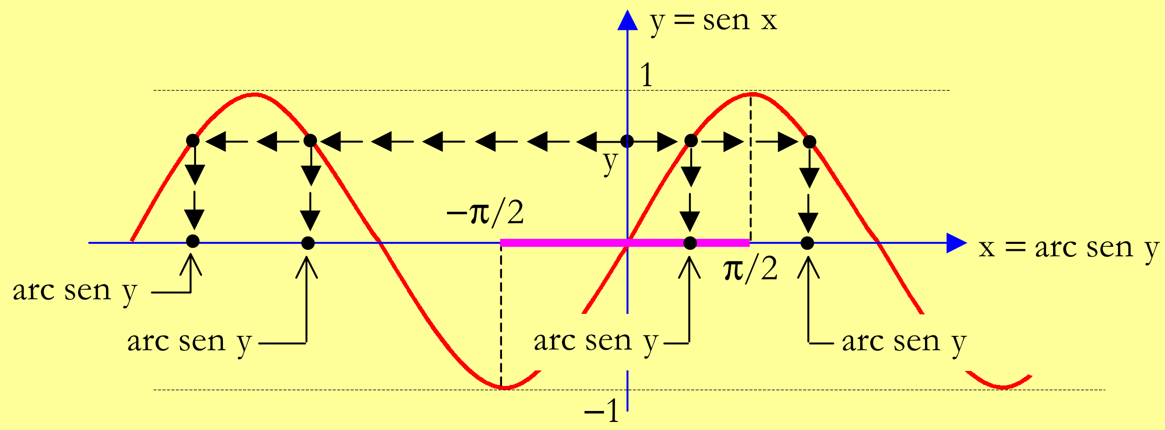
Por ejemplo, como imagen de $\pi/6$ según la función "seno" es el número $1/2$ (o sea, $\text{sen}\ \pi/6 = 1/2$), la imagen del número $1/2$ según la función "arco seno" es el número $\pi/6$, y se escribe $\text{arc sen}\ 1/2 = \pi/6$ (se lee: el arco cuyo seno es $1/2$ es $\pi/6$ radianes):



$$\pi/6 \xrightarrow{\text{sen}} 1/2 \;\Leftrightarrow\; 1/2 \xrightarrow{\text{arc sen}} \pi/6$$

o sea:

$$\text{sen}\ \pi/6 = 1/2 \;\Leftrightarrow\; \text{arc sen}\ 1/2 = \pi/6$$



La función "seno" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco seno" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$, diciendo que es el **valor principal** del "arco seno". Del intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$ se dice que es el "principal" o "fundamental" de la función "arco seno".

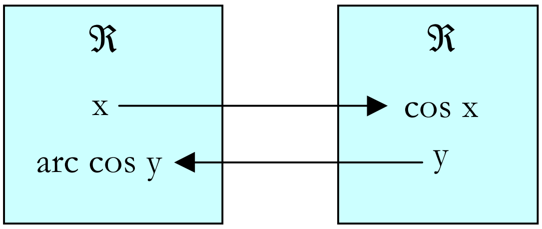
Por ejemplo, el seno de $\pi/6, 5.\pi/6, 13.\pi/6, -7.\pi/6$ y $-11.\pi/6$ es $1/2$; por tanto:

$$\text{arc sen}\ 1/2 = \pi/6 \;;\; \text{arc sen}\ 1/2 = 5.\pi/6 \;;\; \text{arc sen}\ 1/2 = 13.\pi/6$$
$$\text{arc sen}\ 1/2 = -7.\pi/6 \;;\; \text{arc sen}\ 1/2 = -11.\pi/6$$

y el valor principal de $\text{arc sen}\ 1/2$ es $\pi/6$, pues $\pi/6$ es el único ángulo del intervalo $[-\pi/2;\pi/2]$ cuyo seno es $1/2$.

La función "arco coseno"

La inversa de la función "coseno" se llama **arco coseno**, y se denota **arc cos**.



Por ejemplo, como imagen de $\pi/3$ según la función "coseno" es el número $1/2$ (o sea, $\cos \pi/3 = 1/2$), la imagen del número $1/2$ según la función "arco coseno" es el número $\pi/3$, y se escribe

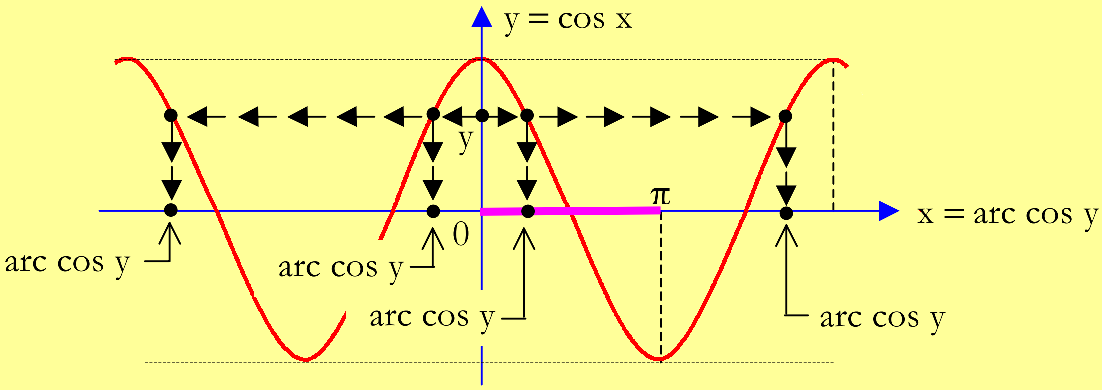
$$\text{arc cos } 1/2 = \pi/3$$

que se lee: el arco cuyo coseno es $1/2$ es $\pi/3$ radianes:

$$\pi/3 \xrightarrow{\cos} 1/2 \;\Leftrightarrow\; 1/2 \xrightarrow{\text{arc cos}} \pi/3$$

o sea:

$$\cos \pi/3 = 1/2 \;\Leftrightarrow\; \text{arc cos } 1/2 = \pi/3$$



La función "coseno" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco coseno" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[0;\pi]$, diciendo que es el **valor principal** del "arco coseno".
Del intervalo $[0;\pi]$ se dice que es el "principal" (o fundamental) de la función "arco coseno".

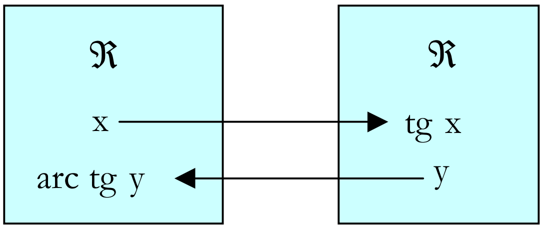
Por ejemplo, el coseno de $\pi/3, 7.\pi/3, 13.\pi/3, -\pi/3$ y $-5.\pi/3$ es $1/2$; por tanto:

$$\text{arc cos } 1/2 = \pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = 7.\pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = 13.\pi/3$$
$$\text{arc cos } 1/2 = -\pi/3 \;;\; \text{arc cos } 1/2 = -5.\pi/3$$

y el valor principal de arc cos $1/2$ es $\pi/3$, pues $\pi/3$ es el único ángulo del intervalo $[0;\pi]$ cuyo coseno es $1/2$.

La función "arco tangente"

La inversa de la función "tangente" se llama **arco tangente**, y se denota **arc tg**.



Por ejemplo, como imagen de $\pi/4$ según la función "tangente" es el número 1 (o sea, $\text{tg } \pi/4 = 1$), entonces la imagen del número 1 según la función "arco tangente" es el número $\pi/4$, y se escribe

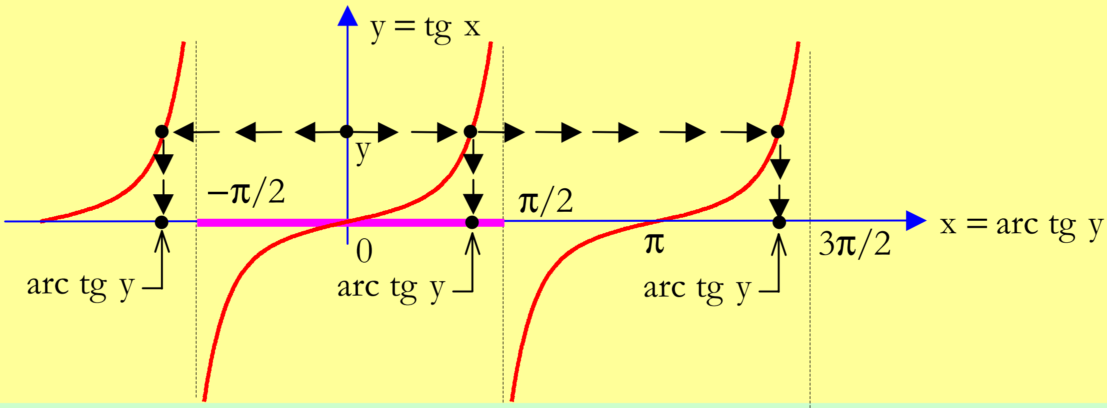
$$\text{arc tg } 1 = \pi/4$$

que se lee: el arco cuyo tangente es 1 es $\pi/4$ radianes:

$$\pi/4 \xrightarrow{\text{tg}} 1 \Leftrightarrow 1 \xrightarrow{\text{arc tg}} \pi/4$$

o sea:

$$\text{tg } \pi/4 = 1 \Leftrightarrow \text{arc tg } 1 = \pi/4$$



La función "tangente" es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, pero la función "arco tangente" no es uniforme, pues a cada valor de la variable independiente le corresponden infinitos valores de la variable dependiente; entre estos infinitos valores elegiremos siempre el único que está en el intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$, diciendo que es el **valor principal** del "arco tangente".

Del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ se dice que es el "principal" (o fundamental) de la función "arco tangente".

Por ejemplo, la tangente de $\pi/4, 5.\pi/4,\ 9.\pi/4,\ -3.\pi/4$ y $-7.\pi/4$ es 1; por tanto:

$$\text{arc tg } 1 = \pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = 5.\pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = 9.\pi/4$$
$$\text{arc tg } 1 = -3.\pi/4 \;;\; \text{arc tg } 1 = -7.\pi/4$$

y el valor principal de $\text{arc tg } 1$ es $\pi/4$, pues $\pi/4$ es el único ángulo del intervalo $[-\pi/2; \pi/2]$ cuyo tangente es 1.

La "inversas" de las funciones "cotangente", "secante" y "cosecante" son las funciones llamadas "arco cotangente" (se denota "arc cotg"), "arco secante" (se denota "arc sec") y "arco cosecante" (se denota "arc cosec"):

$$y = \operatorname{cotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,cotg} y$$
$$y = \sec x \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,sec} y$$
$$y = \operatorname{cosec} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,cosec} y$$

Observa: es $\operatorname{arc\,cotg} y = \operatorname{arc\,tg} 1/y$, pues si la cotangente de un ángulo es "y", su tangente es 1/y. Es $\operatorname{arc\,sec} y = \operatorname{arc\,cos} 1/y$, pues si la secante de un ángulo es "y", su coseno es 1/y. Es $\operatorname{arc\,cosec} y = \operatorname{arc\,sen} 1/y$, pues si la cosecante de un ángulo es "y", su seno es 1/y.

1.24 LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se llaman **hiperbólicas** las siguientes funciones:

* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \equiv$ seno hiperbólico de "x" $\equiv \operatorname{sh} x$
* $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \equiv$ coseno hiperbólico de "x" $\equiv \operatorname{ch} x$
* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \equiv$ tangente hiperbólica de "x" $\equiv \operatorname{th} x$
* $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \equiv$ cotangente hiperbólica de "x" $\equiv \operatorname{coth} x$
* $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \equiv$ secante hiperbólica de "x" $\equiv \operatorname{sech} x$
* $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} \equiv$ cosecante hiperbólica de "x" $\equiv \operatorname{cosech} x$

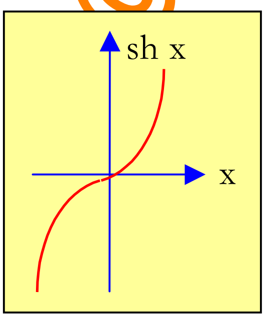
Así, si nos dicen que $f(x) = \operatorname{sh} x^2$ y que $g(x) = \operatorname{ch} 1/x$, nos dicen que

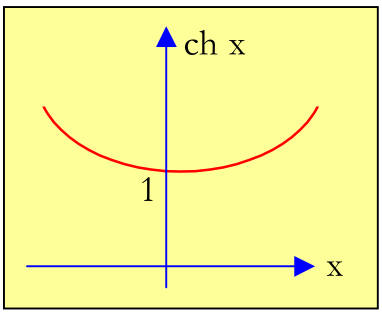
$$f(x) = \frac{e^{x^2} - e^{x^2}}{2} \; ; \; g(x) = \frac{e^{1/x} + e^{-1/x}}{2}$$

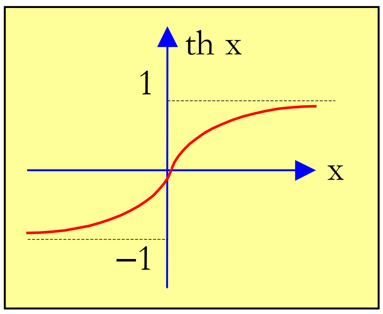
La función $f(x) = \operatorname{ch} x$ es "par" (su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas), pues $f(-x) = \operatorname{ch}(-x) = (e^{-x} + e^{-(-x)})/2 = (e^x + e^{-x})/2 = \operatorname{ch} x = f(x)$

La gráfica de $f(x) = \operatorname{ch} x$ se llama **catenaria**, y es la forma que toma un cable suspendido por sus extremos bajo la acción de la gravedad.

La función $f(x) = \operatorname{sh} x$ es "impar" (es simétrica respecto al origen de coordenadas), pues $f(-x) = \operatorname{sh}(-x) = (e^{-x} - e^{-(-x)})/2 = -(e^x - e^{-x})/2 = -\operatorname{sh} x = -f(x)$

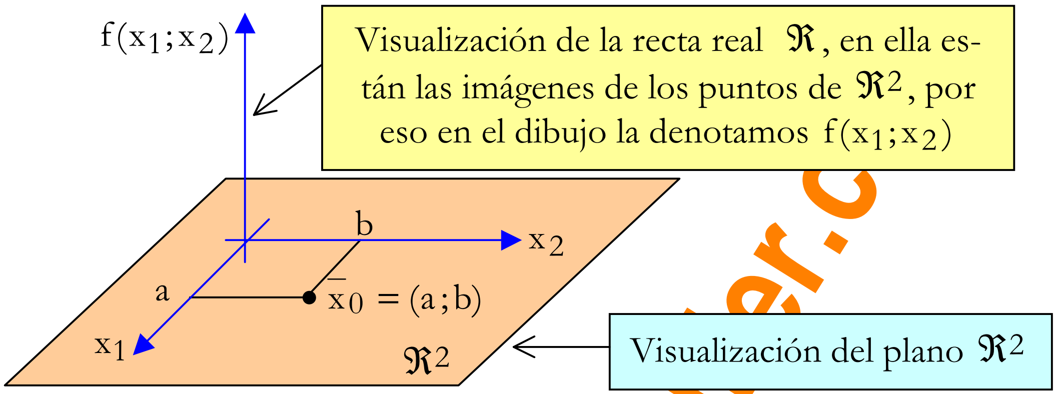






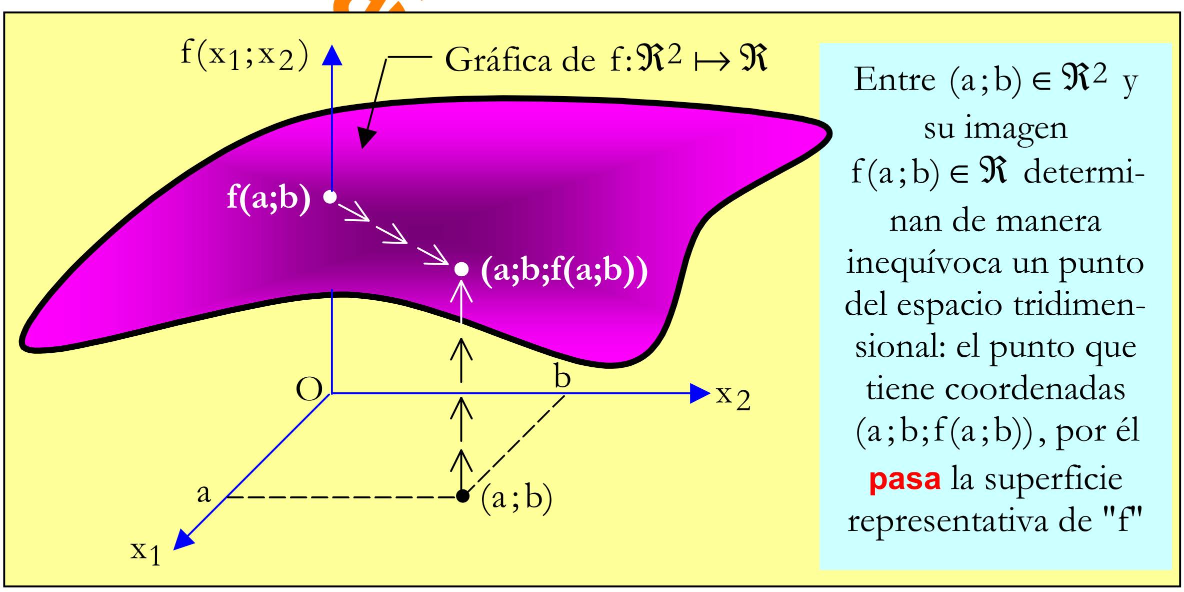
1.25 GRÁFICA DE UN CAMPO ESCALAR

Como una función $f:\Re^2 \mapsto \Re$ es un criterio que asocia puntos del plano $\Re^2$ con puntos de la recta real $\Re$, para visualizar la gráfica de "f" hay que visualizar previamente $\Re^2$ y $\Re$; por comodidad, la recta $\Re$ se toma perpendicular al plano $\Re^2$ de modo que el punto de intersección de ambos **(el origen de coordenadas)** sea el que corresponde al punto $(0;0) \in \Re^2$ y al punto $0 \in \Re$.



La gráfica de una función de dos variables es una superficie del universo tridimensional que percibimos con los sentidos

En efecto, si $(a;b)$ es un punto de $\Re^2$ y $f(a;b)$ es el punto de la recta real que la función "f" asocia a $(a;b)$, es claro que entre $(a;b) \in \Re^2$ y $f(a;b) \in \Re$ determinan de manera inequívoca un punto del espacio tridimensional: el punto que tiene coordenadas $(a;b;f(a;b))$. Así, si hiciéramos lo mismo con todos los puntos de $\Re^2$ y fuéramos posicionando en el espacio tridimensional los infinitos puntos $(x_1;x_2;f(x_1;x_2))$ que se van obteniendo, al final nuestros ojos verían una hermosa superficie.



Si la función $f:\Re^2 \mapsto \Re$ es "lineal", o sea, si $f(x_1;x_2) = a.x_1 + b.x_2 + c$, siendo constantes "a", "b" y "c", la superficie representativa de "f" es un plano.

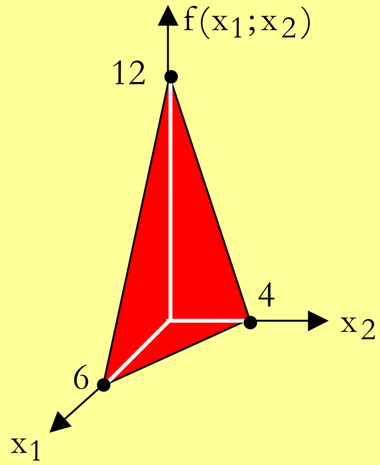
Para dibujar el plano representativo de una función lineal $f:\Re^2 \mapsto \Re$ basta posicionar tres puntos (no alineados) de él.

Por ejemplo, siendo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que

$$f(x_1;x_2) = 12 - 2.x_1 - 3.x_2$$

entonces:

- si $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow f(x_1;x_2) = 12$
- si $x_2 = f(x_1;x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 6$
- si $x_1 = f(x_1;x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 4$



Tres puntos no alineados del espacio tridimensional siempre definen un plano. La expresión matemática del campo lineal $f:\Re^2 \mapsto \Re$ que tiene por gráfica al plano que pasa por tres puntos (no alineados) conocidos

$$(a_1;b_1;f(a_1;b_1))\ ;\ (a_2;b_2;f(a_2;b_2))\ ;\ (a_3;b_3;f(a_3;b_3))$$

es:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & f(x_1;x_2) & 1 \\ a_1 & b_1 & f(a_1;b_1) & 1 \\ a_2 & b_2 & f(a_2;b_2) & 1 \\ a_3 & b_3 & f(a_3;b_3) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por ejemplo, si los puntos son $(2;0;1)$, $(0;0;0)$ y $(1;2;0)$, es:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & f(x_1;x_2) & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

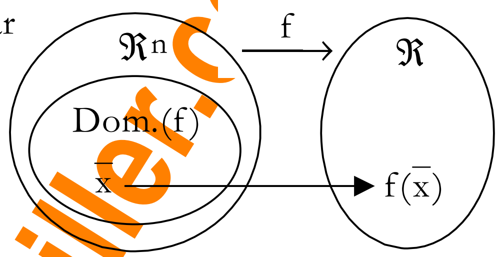
$$\Rightarrow -2.x_1 + x_2 + 4.f(x_1;x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1;x_2) = \frac{1}{2}.x_1 - \frac{1}{4}.x_2$$

La visualización de la gráfica de una función real de tres o más variables reales es imposible incluso para los japoneses más listos, pues es imposible dibujar con más de 3 ejes. Piensa que para visualizar la gráfica de un campo $f:\Re^3 \mapsto \Re$ harían falta 4 ejes en total: tres ejes para visualizar el conjunto $\Re^3$, y otro más para visualizar el conjunto final $\Re$. A esa gráfica que no puede verse con los ojos se le llama **hipersuperficie** representativa de $f:\Re^3 \mapsto \Re$.

1.26 DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UN CAMPO ESCALAR

El **dominio de definición** del campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ se denota Dom.(f), y es el subconjunto de $\Re^n$ formado por los puntos $\bar{x}$ tales que $f(\bar{x}) \in \Re$:



$$\text{Dom.}(f) = \left\{ \bar{x} \in \Re^n \;/\; f(\bar{x}) \in \Re \right\}$$

Siendo $\bar{x}_0 \in \Re^n$, si $f(\bar{x}_0) \in \Re$ se dice que "f" está definido en el punto $\bar{x}_0$, y si $f(\bar{x}_0) \notin \Re$ se dice que "f" no está definido en dicho punto.

De Perogrullo

El campo escalar "f" no está definido en el punto "Pepe" si al calcular f(Pepe) se viola alguna de las Reglas Sagradas del Cálculo

- ***Por ejemplo,*** el campo "f" tal que $f(x_1;x_2) = x_1/(x_1.x_2 - 4)$ está definido en el punto $(2;3)$, pues $f(2;3) = 2/(2.3-4) \in \Re$; pero "f" no está definido en el punto $(2;2)$, pues en este punto se viola la primera Regla Sagrada del Cálculo: $f(2;2) = 2/(2.2-4) = 2/0 \notin \Re$.
- ***Por ejemplo,*** el campo "f" tal que $f(z;t) = \sqrt[5]{z-3.t}$ está definido en el punto $(6;1)$, pues $f(6;1) = \sqrt[5]{6-3} \in \Re$. Observa que "f" está definido en todo punto de $\Re^2$, pues $\forall\ (z;t) \in \Re^2$ sucede que $f(z;t) = \sqrt[5]{z-3.t} \in \Re$.
- ***Por ejemplo,*** si $f(u;v) = \sqrt[4]{u-v}$, el campo "f" está definido en los pun-tos $(3;1)$ y $(-2;-7)$, pues
$$f(3;3) = \sqrt[4]{3-3} = \sqrt[4]{0} \in \Re \;;\; f(-2;-7) = \sqrt[4]{(-2)-(-7)} = \sqrt[4]{5} \in \Re$$
Pero "f" no está definido en el punto $(1;3)$, pues en él se viola la segunda Regla Sagrada del Cálculo: $f(1;3) = \sqrt[4]{1-3} = \sqrt[4]{-2} \notin \Re$.

- ***Por ejemplo,*** siendo $f(a;b) = \text{Ln}\,(8 + a.b)$, el campo "f" está definido en el punto $(3;4)$, pues $f(3;4) = \text{Ln}\,(8 + 3.4) = \text{Ln}\,20 \in \Re$; pero no está definido en $(2;-4)$ y $(-3;5)$, pues en ambos se viola la tercera Regla Sagrada del Cálculo:

$$f(2;-4) = \text{Ln}\,(8 + 2.(-4)) = \text{Ln}\,0 \notin \Re$$
$$f(-3;5) = \text{Ln}\,(8 + (-3).5) = \text{Ln}\,-7 \notin \Re$$

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Para no hacer el ridículo a la hora de determinar el **dominio de definición** de una función o campo escalar $f: \Re^n \mapsto \Re$, debes saber que:

01) Si $f(\overline{x}) = \text{polinomio} \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re, \forall\, \overline{x} \in \Re^n$

02) Si $f(\overline{x}) = u(\overline{x}) \pm v(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$ y $v(\overline{x}) \in \Re$

03) Si $f(\overline{x}) = u(\overline{x}).v(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$ y $v(\overline{x}) \in \Re$

04) Si $f(\overline{x}) = u(\overline{x})/v(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$, $v(\overline{x}) \in \Re$ y $v(\overline{x}) \neq 0$

Si $f(\overline{x}) =$ cociente de polinomios, entonces $f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $v(\overline{x}) \neq 0$.

05) Si $f(\overline{x}) = k^{u(\overline{x})}\ (k > 0) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$

06) Si $f(\overline{x}) = \sqrt[\text{impar}]{u(\overline{x})} \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$

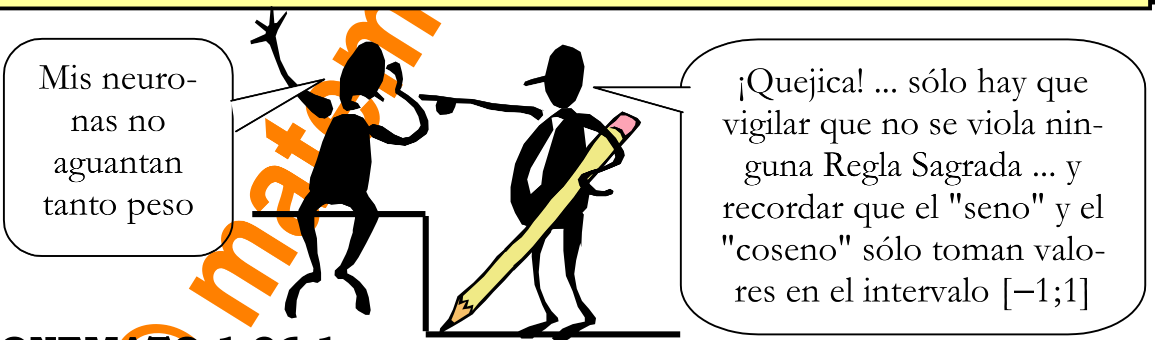
07) Si $f(\overline{x}) = \sqrt[\text{par}]{u(\overline{x})} \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$ y $u(\overline{x}) \geq 0$

08) Si $f(\overline{x}) = \log_k u(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$ y $u(\overline{x}) > 0$

09) Si $f(\overline{x}) = \text{sen}\, u(\overline{x})$ ó $f(\overline{x}) = \cos u(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$

10) Si $f(\overline{x}) = |u(\overline{x})| \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$

11) Si $f(\overline{x}) = \text{arc sen}\, u(\overline{x})$ ó $f(\overline{x}) = \text{arc cos}\, u(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x}) \in \Re$ sólo si $u(\overline{x}) \in \Re$ y $|u(\overline{x})| \leq 1$, pues el "seno" y el "coseno" sólo toman valores en $[-1;1]$.



FONEMATO 1.26.1

Determínese el dominio de definición de los siguientes campos escalares

$$1)\ f_1(\overline{x}) = 4/(3 - x_1.x_2)\ ;\ 2)\ f_2(\overline{x}) = 5^{1/x_1.x_2}\ ;\ 3)\ f_3(\overline{x}) = e^{x_1.x_2}$$

$$4)\ f_4(\overline{x}) = \sqrt[3]{x_1/(x_2 - 7)}\ ;\ 5)\ f_5(\overline{x}) = \log_3 (x_1 - x_2)\ ;\ 6)\ f_6(\overline{x}) = \log_7 (x_1^2 + x_2^2)$$

$$7)\ f_7(\overline{x}) = f_1(\overline{x}) + f_2(\overline{x}) - f_3(\overline{x}) - f_4(\overline{x}) - f_5(\overline{x}) - f_6(\overline{x})$$

$$8)\ f_8(\overline{x}) = f_1(\overline{x}).f_2(\overline{x}).f_3(\overline{x}).f_4(\overline{x}).f_5(\overline{x}).f_6(\overline{x})$$

SOLUCIÓN

1) El cociente de polinomios $f_1(\bar{x}) = 4/(3 - x_1.x_2)$ está definido en todo punto que no anule su denominador; por tanto:

$$\text{Dom.} f_1 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ 3 - x_1.x_2 \neq 0 \right\}$$

2) El campo exponencial $f_2(\bar{x}) = 5^{1/x_1.x_2}$ no está definido en los puntos en que $x_1.x_2 = 0$, pues es esos puntos se anula el denominador del exponente:

$$\text{Dom.} f_2 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1.x_2 \neq 0 \right\}$$

3) El campo exponencial $f_3(\bar{x}) = e^{x_1.x_2}$ está definido en todo punto, pues el exponente, que es un polinomio, está definido en todo punto:

$$\text{Dom.} f_3 = \Re^2$$

4) El campo $f_4(\bar{x}) = \sqrt[3]{x_1/(x_2 - 7)} \equiv \sqrt[\text{impar}]{v(\bar{x})}$ no está definido en los puntos en que $x_2 = 7$, pues en esos puntos se anula el denominador de $x_1/(x_2 - 7)$:

$$\text{Dom.} f_4 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ x_2 \neq 7 \right\}$$

5) El polinomio $u(\bar{x}) = x_1 - x_2$ está definido en todo punto, y toma valores positivos sólo si $x_1 - x_2 > 0$; por tanto, el campo $f_5(\bar{x}) = \log_3 u(\bar{x})$ sólo está definido si $x_1 - x_2 > 0$:

$$\text{Dom.} f_5 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1 - x_2 > 0 \right\}$$

6) El polinomio $k(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2$ está definido en todo punto, y toma valores positivos excepto en el punto $(0;0)$; por tanto, ese punto es el único en que el campo $f_6(\bar{x}) = \log_7 k(\bar{x})$ no está definido:

$$\text{Dom.} f_6 = \Re^2 - \{(0;0)\}$$

7) Como el campo escalar f_7 es suma de otros, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos sumandos; o sea, es el subconjunto de $\Re^2$ formado por los puntos $\bar{x} = (x_1; x_2)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$3 - x_1.x_2 \neq 0 \ ; \ x_1.x_2 \neq 0 \ ; \ x_2 \neq 6 \ ; \ x_1 > x_2 \ ; \ (x_1; x_2) \neq (0;0)$$

Podemos eliminar la condición $(x_1; x_2) \neq (0;0)$, pues se satisface siempre que se satisfaga la condición $x_1.x_2 \neq 0$; en consecuencia:

$$\text{Dom.} f_7 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ 3 - x_1.x_2 \neq 0, \ x_1.x_2 \neq 0, \ x_2 \neq 6, \ x_1 > x_2 \right\}$$

8) Como el campo escalar f_8 es producto de otros, su dominio de definición es la intersección de los dominios de definición de los distintos factores; o sea, f_8 tiene el mismo dominio de definición que f_7.

FONEMATO 1.26.2

Determínese el dominio de definición de los siguientes campos escalares

$$1)\ f_1(\bar{x}) = x_2/(x_1^2-9)\ ;\ 2)\ f_2(\bar{x}) = \sqrt[5]{x_1/(6-x_2)}$$

$$3)\ f_3(\bar{x}) = \sqrt[4]{1/(7-x_1.x_2)}\ ;\ 4)\ f_4(\bar{x}) = \sqrt[4]{x_1/(4+x_2^6)}$$

$$5)\ f_5(\bar{x}) = \log_2(1-x_1.x_2)\ ;\ 6)\ f_6(\bar{x}) = \text{sen}\,(x_1.x_2)\ ;\ 7)\ f_7(\bar{x}) = \cos\,(x_1/x_2)$$

SOLUCIÓN

1) El cociente de polinomios $f_1(\bar{x}) = x_1/(x_1^2-9)$ está definido en todo punto que no anule su denominador x_1^2-9:

$$\text{Dom.} f_1 = \left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1 \neq \pm 3\right\}$$

2) Siendo $f_2(\bar{x}) = \sqrt[5]{x_1/(6-x_2)} \equiv \sqrt[\text{impar}]{h(\bar{x})}$, el campo f_2 está definido en los mismos puntos que el campo "h", y por ser éste un cociente de polinomios, está definido excepto en los puntos que anulan su denominador; por tanto:

$$\text{Dom.} f_2 = \left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_2 \neq 6\right\}$$

3) Como el cociente $1/(7-x_1.x_2)$ está definido sólo si $7-x_1.x_2 \neq 0$ y toma valores no negativos sólo si $7-x_1.x_2 > 0$, el campo $f_3(\bar{x}) = \sqrt[\text{par}]{1/(7-x_1.x_2)}$ sólo está definido si $7-x_1.x_2 > 0$:

$$\text{Dom.} f_3 = \left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ 7-x_1.x_2 > 0\right\}$$

4) El cociente $x_1/(4+x_2^6)$ está definido en todo punto (pues su denominador no se anula en ningún punto) y toma valores no negativos sólo si $x_1 \geq 0$; por tanto, el campo $f_4(\bar{x}) = \sqrt[\text{par}]{x_1/(4+x_2^6)}$ está definido sólo si $x_1 \geq 0$:

$$\text{Dom.} f_4 = \left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1 \geq 0\right\}$$

5) El polinomio $u(\bar{x}) = 1-x_1.x_2$ está definido en todo punto, y toma valores positivos sólo si $1-x_1.x_2 > 0$; por tanto, el campo $f_5(\bar{x}) = \log_2 u(\bar{x})$ sólo está definido si $1-x_1.x_2 > 0$:

$$\text{Dom.} f_5 = \left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ 1-x_1.x_2 > 0\right\}$$

6) El polinomio $t(\bar{x}) = x_1.x_2$ está definido en todo punto, y eso mismo le pasa al campo $f_6(\bar{x}) = \text{sen}\ t(\bar{x})$:

$$\text{Dom.} f_6 = \Re^2$$

7) El cociente de polinomios $v(\bar{x}) = x_1/x_2$ está definido siempre que $x_1 \neq 0$, y eso mismo le pasa al campo $f_7(\bar{x}) = \cos v(\bar{x})$.

$$\text{Dom.} f_7 = \left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_2 \neq 0\right\}$$

FONEMATO 1.26.3

Determínese el dominio de definición de los siguientes campos escalares

$$1)\ f_1(\bar{x}) = (x_2-1)/(4+x_1^8)\ ;\ 2)\ f_2(\bar{x}) = (x_1-x_2)^{5/3}\ ;\ 3)\ f_3(\bar{x}) = (x_1-x_2)^{5/2}$$

$$4)\ f_4(\bar{x}) = \frac{x_1.x_2^2}{\mathrm{Ln}\,(x_1.x_2-3)}\ ;\ 5)\ f_5(\bar{x}) = \frac{\mathrm{Ln}\,(9-x_1)}{x_2-5}$$

$$6)\ f_6(\bar{x}) = \frac{x_1+x_2}{3+e^{x_1+x_2}}\ ;\ 7)\ f_7(\bar{x}) = \frac{x_1+x_2}{3-e^{x_1+x_2}}$$

SOLUCIÓN

1) El cociente de polinomios $f_1(\bar{x}) = (x_2-1)/(4+x_1^8)$ está definido en todo punto, pues su denominador no se anula en ningún punto.

2) Como el polinomio $(x_1-x_2)^5$ está definido en todo punto, lo mismo le pasa al campo $f_2(\bar{x}) = (x_1-x_2)^{5/3} = \sqrt[\text{impar}]{(x_1-x_2)^5}$.

3) El polinomio $(x_1-x_2)^5$ está definido en todo punto, y toma valores no negativos sólo si $x_1-x_2 \geq 0$; por tanto, el campo $f_3(\bar{x}) = \sqrt[\text{par}]{(x_1-x_2)^5}$ sólo está definido si $x_1-x_2 \geq 0$. O sea: $\mathrm{Dom}.f_3 = \{(x_1;x_2) \in \Re^2 \ /\ x_1 \geq x_2\}$.

4) Es $f_4(\bar{x}) = \dfrac{x_1.x_2^2}{\mathrm{Ln}\,(x_1.x_2-3)} \equiv \dfrac{m(\bar{x})}{n(\bar{x})} \in \Re$ sólo si $m(\bar{x}) \in \Re$, $n(\bar{x}) \in \Re$ y $n(\bar{x}) \neq 0$.

Siendo $m(\bar{x}) = x_1.x_2^2$ un polinomio, está definido en todo punto; y siendo $x_1.x_2-3$ un polinomio, es $n(\bar{x}) = \mathrm{Ln}\,(x_1.x_2-3) \in \Re$ sólo si $x_1.x_2-3 > 0$. Determinemos en qué puntos se anula $n(\bar{x}) = \mathrm{Ln}\,(x_1.x_2-3)$:

$$\mathrm{Ln}\,(x_1.x_2-3) = 0 \Rightarrow x_1.x_2-3 = 1 \Rightarrow x_1.x_2 = 4$$

En definitiva: $\mathrm{Dom}.f_4 = \{(x_1;x_2) \in \Re^2 \ /\ x_1.x_2 > 3,\ x_1.x_2 \neq 4\}$.

5) Es $f_5(\bar{x}) = \dfrac{\mathrm{Ln}\,(9-x_1)}{x_2-5} \equiv \dfrac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} \in \Re$ sólo si $u(\bar{x}) \in \Re$, $v(\bar{x}) \in \Re$ y $v(\bar{x}) \neq 0$.

Es $u(\bar{x}) = \mathrm{Ln}\,(9-x_1) \in \Re$ sólo si $9-x_1 > 0$, y el polinomio $v(\bar{x}) = x_2-5$ sólo se anula si $x_2 = 5$; así: $\mathrm{Dom}.f_5 = \{(x_1;x_2) \in \Re^2 \ /\ x_1 < 9,\ x_2 \neq 5\}$.

6) El campo f_6 está definido en todo punto, pues el numerador x_1+x_2 y el denominador $3+e^{x_1+x_2}$ están definidos en todo punto, y el denominador no se anula en ningún punto (como $e^{x_1+x_2}$ sólo toma valores positivos, lo mismo le pasa a $3+e^{x_1+x_2}$).

7) El numerador x_1+x_2 y el denominador $3-e^{x_1+x_2}$ están definidos en todo punto, y el denominador sólo se anula si $x_1+x_2 = \mathrm{Ln}\ 3$; por tanto, el campo f_7 está definido excepto si $x_1+x_2 = \mathrm{Ln}\ 3$.

FONEMATO 1.26.4

Determínese el dominio de definición de los siguientes campos escalares

$$1)\ f_1(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^{-7/5}\ ;\ 2)\ f_2(\bar{x}) = (x_1.x_2 - 2)^{-9/4}$$

$$3)\ f_3(\bar{x}) = \frac{x_1 + 4}{1 - 6^{x_1 + x_2}}\ ;\ 4)\ f_4(\bar{x}) = \frac{\text{Ln}\ (2 - x_1)}{\text{sen}\ (1 + x_1.x_2)}$$

$$5)\ f_5(\bar{x}) = \frac{\text{Ln}\ (1 + x_1^2)}{\cos\ (1 + x_1.x_2)}\ ;\ 6)\ f_6(\bar{x}) = \frac{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}{7 + x_1^4 + x_2^4}$$

SOLUCIÓN

1) Como $f_1(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^{-7/5} = \sqrt[5]{1/(x_1 - x_2)^7} \equiv \sqrt[\text{impar}]{h(\bar{x})}$, el campo f_1 está en los mismos puntos que el cociente de polinomios $h(\bar{x}) = 1/(x_1 - x_2)^7$; es decir, sólo está definido si $(x_1 - x_2)^7 \neq 0$, lo que sucede sólo si $x_1 - x_2 \neq 0$.

2) El cociente de polinomios $1/(x_1.x_2 - 2)^9$ está definido sólo si $x_1.x_2 - 2 \neq 0$, y toma valores no negativos sólo si $x_1.x_2 - 2 > 0$; en consecuencia, el campo $f_2(\bar{x}) = \sqrt[\text{par}]{1/(x_1.x_2 - 2)^9}$ sólo está definido si $x_1.x_2 - 2 > 0$.

3) El numerador $x_1 + x_2 - 4$ y el denominador $1 - 6^{x_1 + x_2}$ están definidos en todo punto, y el denominador sólo se anula si $x_1 + x_2 = \log_6 1 = 0$; por tanto, el campo f_3 está definido excepto si $x_1 + x_2 = 0$.

4) Es $f_4(\bar{x}) = \dfrac{\text{Ln}\ (2 - x_1)}{\text{sen}\ (1 + x_1.x_2)} \equiv \dfrac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} \in \Re$ sólo si $u(\bar{x}) \in \Re$, $v(\bar{x}) \in \Re$ y $v(\bar{x}) \neq 0$.

Es $u(\bar{x}) = \text{Ln}\ (2 - x_1) \in \Re$ sólo si $2 - x_1 > 0$.
El denominador $v(\bar{x}) = \text{sen}\ (1 + x_1.x_2) \equiv \text{sen}\ (\text{polinomio})$ está definido en todo punto, y $v(\bar{x}) = \text{sen}\ (1 + x_1.x_2) \neq 0$ siempre que $1 + x_1.x_2 \neq k.\pi$, siendo "k" un entero cualquiera.

5) Es $f_5(\bar{x}) = \dfrac{\text{Ln}\ (1 + x_1^2)}{\cos\ (1 + x_1.x_2)} \equiv \dfrac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} \in \Re$ sólo si $u(\bar{x}) \in \Re$, $v(\bar{x}) \in \Re$ y $v(\bar{x}) \neq 0$.

El numerador $u(\bar{x}) = \text{Ln}\ (1 + x_1^2)$ está definido en todo punto, pues el polinomio $1 + x_1^2$ sólo toma valores positivos.
El denominador $v(\bar{x}) = \cos\ (1 + x_1.x_2) \equiv \cos\ (\text{polinomio})$ está definido en todo punto, y $v(\bar{x}) = \cos\ (1 + x_1.x_2) \neq 0$ si $1 + x_1.x_2 \neq (2.k + 1).\pi/2$, siendo "k" un entero cualquiera.

6) El campo f_6 está definido en todo punto, pues el numerador $\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$ está definido en todo punto (ya que el polinomio $1 + x_1^2 + x_2^2$ no toma valores negativos), lo mismo que el polinomio del denominador, y éste no se anula en ningún punto.

FONEMATO 1.26.5

Determínese el dominio de definición de los siguientes campos escalares

$$1)\ f_1(\bar{x}) = \frac{x_2+3}{7+\log_5(x_1-x_2)}\ ;\ 2)\ f_2(\bar{x}) = \frac{\mathrm{Ln}\,(x_1-x_2)}{\cos\,(x_1+x_2)}$$

$$3)\ f_3(\bar{x}) = \left|\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right|\ ;\ 4)\ f_4(\bar{x}) = \mathrm{arcsen}\,(x_1-x_2-3)$$

SOLUCIÓN

1) $f_1(\bar{x}) = \dfrac{x_2+3}{7+\log_5(x_1-x_2)} \equiv \dfrac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} \in \Re$ sólo si $u(\bar{x}) \in \Re$, $v(\bar{x}) \in \Re$ y $v(\bar{x}) \neq 0$.

El polinomio $u(\bar{x}) = x_2+3$ está definido en todo punto.

Siendo $v(\bar{x}) = 7+\log_5(x_1-x_2)$, es $v(\bar{x}) \in \Re$ sólo si $\log_5(x_1-x_2) \in \Re$, lo que sucede sólo si $x_1-x_2>0$. Además $v(\bar{x})$ sólo se anula si $x_1-x_2 = 5^{-7}$:

$$n(\bar{x}) = 7+\log_5(x_1-x_2) = 0 \Rightarrow \log_5(x_1-x_2) = -7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1-x_2 = 5^{-7}$$

En definitiva:

$$\mathrm{Dom.}f_1 = \left\{(x_1;x_2) \in \Re^2\ /\ x_1-x_2>0,\ x_1-x_2 \neq 5^{-7}\right\}.$$

2) $f_2(\bar{x}) = \dfrac{\mathrm{Ln}\,(x_1-x_2)}{\cos\,(x_1+x_2)} \equiv \dfrac{u(\bar{x})}{v(\bar{x})} \in \Re$ sólo si $u(\bar{x}) \in \Re$, $v(\bar{x}) \in \Re$ y $v(\bar{x}) \neq 0$.

Es $u(\bar{x}) = \mathrm{Ln}\,(x_1-x_2) \in \Re$ sólo si $x_1-x_2>0$.

El denominador $v(\bar{x}) = \cos\,(x_1+x_2) \equiv \cos$ (polinomio) está definido en todo punto, y $v(\bar{x}) = \cos\,(x_1+x_2) \neq 0$ si $x_1+x_2 \neq (2.k+1).\pi/2$, siendo "k" un entero cualquiera.

3) Siendo $f_3(\bar{x}) = |h(\bar{x})|$, el campo f_3 está definido en los mismos puntos que el campo "h"; y siendo $h(\bar{x}) = (x_1+x_2)/(x_1-x_2)$ un cociente de polinomios, únicamente no está definido "h" en los puntos en que $x_1-x_2=0$, pues en ellos se anula el denominador.

4) Es $f_4(\bar{x}) = \mathrm{arcsen}\ p(\bar{x}) \in \Re$ sólo si $p(\bar{x}) \in \Re$ y $|p(\bar{x})| \leq 1$.

El polinomio $p(\bar{x}) = x_1-x_2-3$ está definido en todo punto, y sucede que $|p(\bar{x})| \leq 1$ sólo si $2 \leq x_1-x_2 \leq 4$:

$$|x_1-x_2-3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x_1-x_2-3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x_1-x_2 \leq 4$$

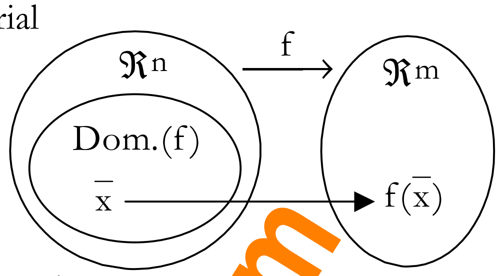
Por tanto:

$$\mathrm{Dom.}f_4 = \left\{(x_1;x_2) \in \Re^2\ /\ 2 \leq x_1-x_2 \leq 4\right\}$$

1.27 DOMINIO DE DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

El **dominio de definición** del campo vectorial $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ se denota Dom.(f), y es el subconjunto de $\Re^n$ formado por los puntos $\overline{x}$ tales que $f(\overline{x}) \in \Re^m$:

$$\text{Dom.}(f) = \left\{ \overline{x} \in \Re^n \ / \ f(\overline{x}) \in \Re^m \right\}$$



Siendo $\overline{x}_0 \in \Re^n$, si $f(\overline{x}_0) \in \Re^m$ se dice que "f" está definido en el punto $\overline{x}_0$, y si $f(\overline{x}_0) \notin \Re^m$ se dice que "f" no está definido en dicho punto.

De Perogrullo

El campo vectorial "f" está definido en el punto "Pepe" sólo si todos los campos escalares que forman "f" están definidos en "Pepe"

- ***Por ejemplo,*** el campo vectorial $f:\Re^2 \mapsto \Re^4$ tal que

$$f(\overline{x}) = (4/(3 - x_1.x_2^3); 5^{1/(x_1 - x_2)}; e^{\sqrt{x_1 + x_2}}; \text{Ln}\,(x_1 + x_2))$$

está formado por los siguientes cuatro campos escalares

$$f_1:\Re^2 \mapsto \Re \ / \ f_1(\overline{x}) = 4/(3 - x_1.x_2^3)$$
$$f_2:\Re^2 \mapsto \Re \ / \ f_2(\overline{x}) = 5^{1/(x_1 - x_2)}$$
$$f_3:\Re^2 \mapsto \Re \ / \ f_3(\overline{x}) = e^{\sqrt{x_1 + x_2}}$$
$$f_4:\Re^2 \mapsto \Re \ / \ f_4(\overline{x}) = \text{Ln}\,(x_1 + x_2)$$

Así, el dominio de definición de "f" es la intersección de los correspondientes dominios de definición de los campos escalares f_1, f_2, f_3 y f_4. Como:

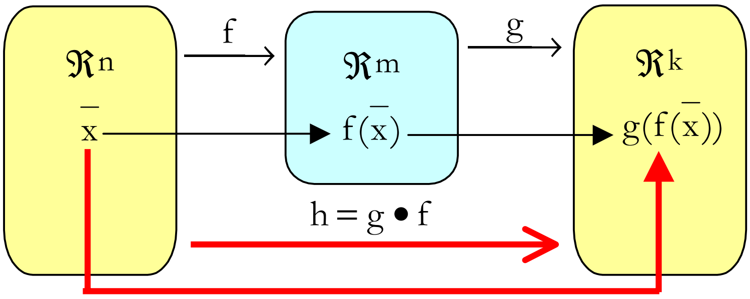
$$\text{Dom. } f_1 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ 3 - x_1.x_2^3 \neq 0 \right\}$$
$$\text{Dom. } f_2 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1 - x_2 \neq 0 \right\}$$
$$\text{Dom. } f_3 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1 + x_2 \geq 0 \right\}$$
$$\text{Dom. } f_4 = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1 + x_2 > 0 \right\}$$

resulta ser:

$$\text{Dom. } f = \left\{ (x_1; x_2) \in \Re^2 \ / \ 3 - x_1.x_2^3 \neq 0, \ x_1 - x_2 \neq 0, \ x_1 + x_2 > 0 \right\}$$

1.28 COMPOSICIÓN DE CAMPOS

Aunque ya hemos trabajado con campos "compuestos", hablamos expresamente de ellos: se dice que el campo $h:\Re^n \mapsto \Re^k$ es el **compuesto** de los campos $f:\Re^n \mapsto \Re^m$ y $g:\Re^m \mapsto \Re^k$, y se denota $h = g \bullet f$, si $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$; es decir, la imagen de $\bar{x} \in \Re^n$ según "h" es la imagen según "g" de la imagen de $\bar{x}$ según "f".



Obvio: el campo $h = g \bullet f$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^n$ que pertenezcan al dominio de definición de "f" y sean tales que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$

FONEMATO 1.28.1

Sean $f:\Re^2 \mapsto \Re^3$ y $g:\Re^3 \mapsto \Re^4$ tales que:

$$f(\bar{x}) = (x_1.x_2^2 \,;\, x_1^3 + x_2 \,;\, x_1 - x_2) \;;\; g(\bar{y}) = (\text{sen } y_1 \,;\, y_2 + y_3 \,;\, y_1^2 \,;\, 3)$$

Determínense $h = g \bullet f$ y $u = f \bullet g$ y sus respectivos dominios de definición.

SOLUCIÓN

- Para el campo vectorial $h = g \bullet f : \Re^2 \mapsto \Re^4$, es:

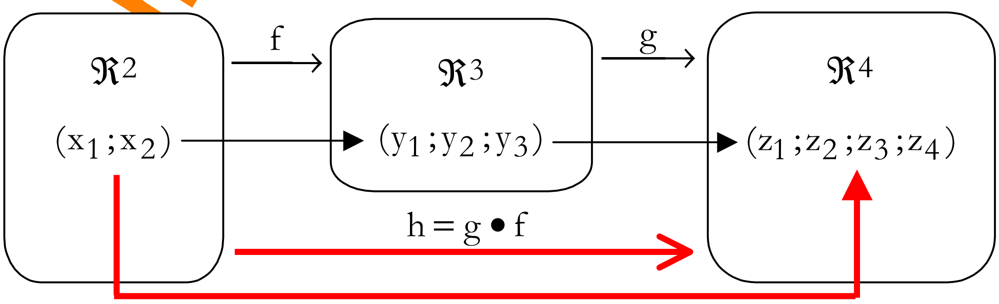
$$\boxed{\text{pues } f(\bar{x}) = (x_1.x_2^2 \,;\, x_1^3 + x_2 \,;\, x_1 - x_2)}$$

$$h(\bar{x}) = g(f(\bar{x})) = g(x_1.x_2^2 \,;\, x_1^3 + x_2 \,;\, x_1 - x_2) =$$

$$= (\text{sen } x_1.x_2^2 \,;\, x_1^3 + x_1 \,;\, (x_1.x_2^2)^2 \,;\, 3)$$

$$\boxed{\text{pues } g(\text{Pepe}; \text{Juan}; \text{Pío}) = (\text{sen Pepe}; \text{Juan} + \text{Pío}; \text{Pepe}^2 ; 3)}$$

El campo $h = g \bullet f$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^2$ que pertenecen al dominio de definición de "f" y son tales que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$ ..... y **sucede lo mejor que podía pasar:** como "f" está definido en todo punto de $\Re^2$ y "g" está definido en todo punto de $\Re^3$, el campo compuesto $h = g \bullet f$ está definido en todo punto de $\Re^2$.



- Carece de sentido hablar del campo $u = f \bullet g$, pues el conjunto $\Re^4$, final de "g", no coincide con el inicial de "f", que es $\Re^2$.

FONEMATO 1.28.2

Sean $f:\Re^3 \mapsto \Re^2$, $g:\Re^3 \mapsto \Re^4$ y $u:\Re^2 \mapsto \Re^3$ tales que

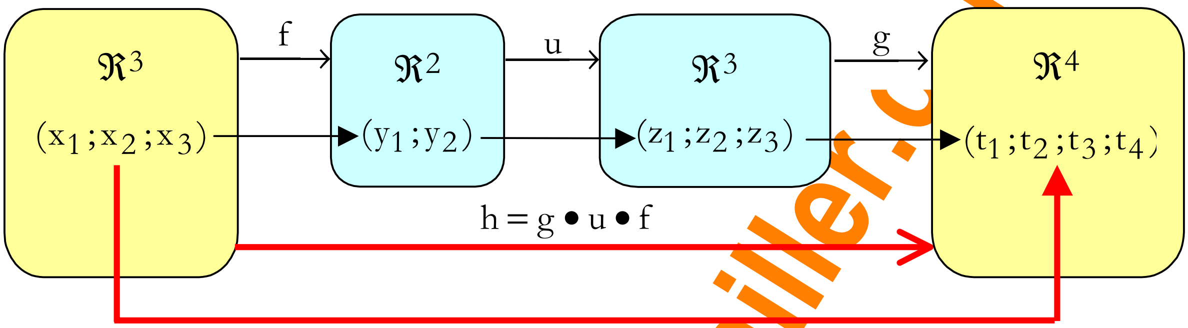
$$f(\bar{x}) = (x_1.x_2^2 \; ; \; x_1^3 + x_3) \; ; \; g(\bar{y}) = (y_3^2 \; ; \; y_2 + y_3 \; ; \; y_1^2 \; ; \; 3)$$

$$u(\bar{z}) = (z_1 + 2.z_2 \; ; \; z_1^3 + z_2 \; ; \; 6)$$

Determínese $h = g \bullet u \bullet f$ y su dominio de definición.

SOLUCIÓN

Ahora "encadenamos" tres campos.



Para el campo vectorial $h = g \bullet u \bullet f$, es:

$\boxed{\text{pues } f(\bar{x}) = (x_1.x_2^2 \; ; \; x_1^3 + x_3)}$

$$h(\bar{x}) = g\big(u(f(\bar{x}))\big) = g\big(u(x_1.x_2^2 \; ; \; x_1^3 + x_3)\big) =$$

$\boxed{\text{pues } u(\text{Pepe} \; ; \; \text{Juan}) = (\text{Pepe} + 2.\,\text{Juan} \; ; \; \text{Pepe}^3 + \text{Juan} \; ; \; 6)}$

$$= g\big(x_1.x_2^2 + 2.(x_1^3 + x_3) \; ; \; (x_1.x_2^2)^3 + x_1^3 + x_3 \; ; \; 6\big) =$$

$\boxed{\text{pues } g(\text{Pío} \; ; \; \text{Luís} \; ; \; \text{Pax}) = (\text{Pax}^3 \; ; \; \text{Luís} + \text{Pax} \; ; \; \text{Pío}^2 \; ; \; 3)}$

$$= (6^3 \; ; \; (x_1.x_2^2)^3 + x_1^3 + x_3 + 6 \; ; \; (x_1.x_2^2 + 2.(x_1^3 + x_3))^2 \; ; \; 3)$$

El campo $h = g \bullet u \bullet f$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^3$ que pertenecen a Dom.f y son tales que $f(\bar{x}) \in$ Dom. u y $u(f(\bar{x})) \in$ Dom. g .... y **sucede lo mejor que podía pasar:**

1) El campo "f" está definido en todo punto de $\Re^3$
2) El campo "u" está definido en todo punto de $\Re^2$
3) El campo "g" está definido en todo punto de $\Re^3$

Así, el campo vectorial $h = g \bullet u \bullet f$ está definido en todo punto de $\Re^3$.

LEY DE MURPHY

Si algo puede ir mal, irá mal

FONEMATO 1.28.3

Determínese el dominio de definición de $h = g \bullet f$, siendo

$$f:\Re^3 \mapsto \Re^2 \;/\; f(\bar{x}) = (x_1/x_2^2 \;;\; x_1^3 + \text{Ln}\, x_3)$$
$$g:\Re^2 \mapsto \Re^4 \;/\; g(\bar{y}) = (y_2^2 \;;\; y_1 + y_2 \;;\; y_1^2 \;;\; 3)$$

SOLUCIÓN

El campo vectorial $h = g \bullet f : \Re^3 \mapsto \Re^4$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^3$ que pertenecen al dominio de definición de "f" y son tales que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$ .... y de nuevo tenemos la suerte de cara, pues siendo

$$\text{Dom.} f = \left\{(x_1;x_2;x_3) \in \Re^3 \;/\; x_2 \neq 0,\; x_3 > 0\right\} \;;\; \text{Dom.} g = \Re^2$$

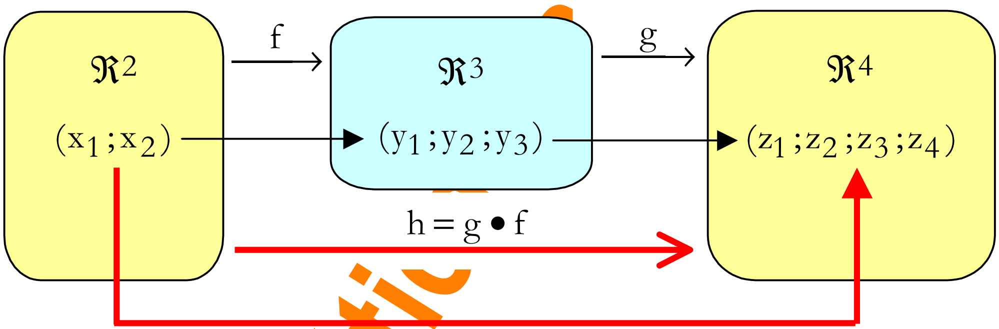
resulta obvio que el dominio de definición de $h = g \bullet f$ coincide con el de "f".

FONEMATO 1.28.4

Determínese el dominio de definición de $h = g \bullet f$, siendo

$$f:\Re^2 \mapsto \Re^3 \;/\; f(\bar{x}) = (x_1 + x_2^2 \;;\; x_1^3 + x_2 \;;\; x_1 + x_2)$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re^4 \;/\; g(\bar{y}) = (1/y_1 \;;\; \sqrt{1 - y_2} \;;\; y_1^2.\text{Ln}\, y_3 \;;\; y_1^2)$$

SOLUCIÓN



El campo vectorial $h = g \bullet f : \Re^2 \mapsto \Re^4$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^2$ que pertenecen al dominio de definición de "f" y son tales que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$.

Es:

$$\text{Dom.} f = \Re^2 \;;\; \text{Dom.} g = \left\{(y_1;y_2;y_3) \in \Re^3 \;/\; y_1 \neq 0,\; y_2 \leq 1,\; y_3 > 0\right\}$$

Por tanto, siendo

$$f(\bar{x}) = (\underbrace{x_1 + x_2^2}_{y_1} \;;\; \underbrace{x_1^3 + x_2}_{y_2} \;;\; \underbrace{x_1 + x_2}_{y_3})$$

sucede que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$ sólo si el punto $\bar{x} = (x_1;x_2) \in \Re^2$ es tal que

$$\underbrace{x_1 + x_2^2}_{y_1} \neq 0 \;;\; \underbrace{x_1^3 + x_2}_{y_2} \leq 1 \;;\; \underbrace{x_1 + x_2}_{y_3} > 0$$

O sea:

$$\text{Dom.} h = \left\{\; (x_1;x_2) \in \Re^2 \;/\; x_1 + x_2^2 \neq 0,\; x_1^3 + x_2 \leq 1,\; x_1 + x_2 > 0 \;\right\}$$

FONEMATO 1.28.5

Determínese el dominio de definición de $h_1 = g \bullet f$ y de $h_2 = f \bullet g$, siendo

$$f:\Re^2 \mapsto \Re^3 \ / \ f(\bar{x}) = (\text{Ln}\ x_1 \ ; \ x_1^3/(x_2-7) \ ; \ x_1+x_2)$$
$$g:\Re^3 \mapsto \Re^2 \ / \ g(\bar{y}) = (1/y_2 \ ; \ \sqrt{y_2-y_1})$$

SOLUCIÓN

- El campo $h_1 = g \bullet f:\Re^2 \mapsto \Re^2$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^2$ que pertenecen al dominio de definición de "f" y son tales que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$. Es:

$$\text{Dom.} f = \{(x_1;x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1 > 0, \ x_2 \neq 7\}$$
$$\text{Dom.} g = \{(y_1;y_2;y_3) \in \Re^3 \ / \ y_2 \neq 0, \ y_2 - y_1 \geq 0\}$$

Por tanto, siendo

$$f(\bar{x}) = (\underbrace{\text{Ln}\ x_1}_{y_1} \ ; \ \underbrace{x_1^3/(x_2-7)}_{y_2} \ ; \ \underbrace{x_1+x_2}_{y_3})$$

sucede que $f(\bar{x}) \in \text{Dom. } g$ sólo si el punto $\bar{x} = (x_1;x_2) \in \Re^2$ es tal que

$$\underbrace{\frac{x_1^3}{x_2-7}}_{y_2} \neq 0 \ ; \ \underbrace{\frac{x_1^3}{x_2-7} - \text{Ln}\ x_1}_{y_2-y_1} \geq 0$$

En definitiva, el campo vectorial $h_1 = g \bullet f:\Re^2 \mapsto \Re^2$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} = (x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que:

$$x_1 > 0 \ ; \ x_2 \neq 7 \ ; \ \frac{x_1^3}{x_2-7} \neq 0 \ ; \ \frac{x_1^3}{x_2-7} - \text{Ln}\ x_1 \geq 0$$

que son los puntos $\bar{x} = (x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que

$$x_1 > 0 \ ; \ x_2 \neq 7 \ ; \ \frac{x_1^3}{x_2-7} - \text{Ln}\ x_1 \geq 0$$

- El campo $h_2 = f \bullet g:\Re^3 \mapsto \Re^3$ sólo está definido en los puntos $\bar{y} \in \Re^3$ que pertenecen al dominio de definición de "g" y son tales que $g(\bar{y}) \in \text{Dom. } f$. Es:

$$\text{Dom.} g = \{(y_1;y_2;y_3) \in \Re^3 \ / \ y_2 \neq 0, \ y_2 - y_1 \geq 0\}$$
$$\text{Dom.} f = \{(x_1;x_2) \in \Re^2 \ / \ x_1 > 0, \ x_2 \neq 7\}$$

Por tanto, siendo

$$g(\bar{y}) = (\underbrace{1/y_2}_{x_1} \ ; \ \underbrace{\sqrt{y_2-y_1}}_{x_2})$$

sucede que $g(\bar{y}) \in \text{Dom. } f$ sólo si el punto $\bar{y} = (y_1;y_2;y_3) \in \Re^3$ es tal que

$$\underbrace{1/y_2}_{x_1} > 0 \ ; \ \underbrace{\sqrt{y_2-y_1}}_{x_2} \neq 7$$

En definitiva, el campo vectorial $h_2 = f \bullet g : \Re^3 \mapsto \Re^3$ sólo está definido en los puntos $\bar{y} = (y_1 ; y_2 ; y_3) \in \Re^3$ tales que:

$$y_2 \neq 0 \;;\; y_2 - y_1 \geq 0 \;;\; 1/y_2 > 0 \;;\; \sqrt{y_2 - y_1} \neq 7$$

que son los puntos $\bar{y} = (y_1 ; y_2 ; y_3) \in \Re^3$ tales que

$$y_2 - y_1 \geq 0 \;;\; y_2 > 0 \;;\; y_2 - y_1 \neq 49$$

FONEMATO 1.28.6

Determínese el dominio de definición de $h = g \bullet f$, siendo

$$f : \Re^2 \mapsto \Re^3 \;/\; f(\bar{x}) = (\mathrm{Ln}\,(x_1 - x_2) \,;\, 2 - \sqrt{x_1} \,;\, 1/x_2)$$
$$g : \Re^3 \mapsto \Re^2 \;/\; g(\bar{y}) = (y_1 + \mathrm{arcsen}\; y_2 \,;\, \mathrm{cotg}\; y_3)$$

SOLUCIÓN

El campo vectorial $h = g \bullet f : \Re^2 \mapsto \Re^2$ sólo está definido en los puntos $\bar{x} \in \Re^2$ que pertenecen al dominio de definición de "f" y son tales que $f(\bar{x}) \in \mathrm{Dom.}\, g$.

Es:

$$\mathrm{Dom.} f = \{(x_1 ; x_2) \in \Re^2 \;/\; x_1 - x_2 > 0,\; x_1 \geq 0,\; x_2 \neq 0\}$$

siendo "k" un número entero.

Es:

$$\mathrm{Dom.} g = \{(y_1 ; y_2 ; y_3) \in \Re^3 \;/\; |y_2| \leq 1,\; y_3 \neq k.\pi\}$$

Por tanto, como

$$f(\bar{x}) = (\underbrace{\mathrm{Ln}\,(x_1 - x_2)}_{y_1} \,;\, \underbrace{2 - \sqrt{x_1}}_{y_2} \,;\, \underbrace{1/x_2}_{y_3})$$

sucede que $f(\bar{x}) \in \mathrm{Dom.}\, g$ sólo si el punto $\bar{x} = (x_1 ; x_2) \in \Re^2$ es tal que

$$\underbrace{\left|2 - \sqrt{x_1}\right|}_{|y_2|} \leq 1 \;;\; \underbrace{1/x_2}_{y_3} \neq k.\pi$$

En consecuencia, el campo vectorial $h = g \bullet f : \Re^2 \mapsto \Re^2$ sólo está definido en los puntos $(x_1 ; x_2) \in \Re^2$ tales que

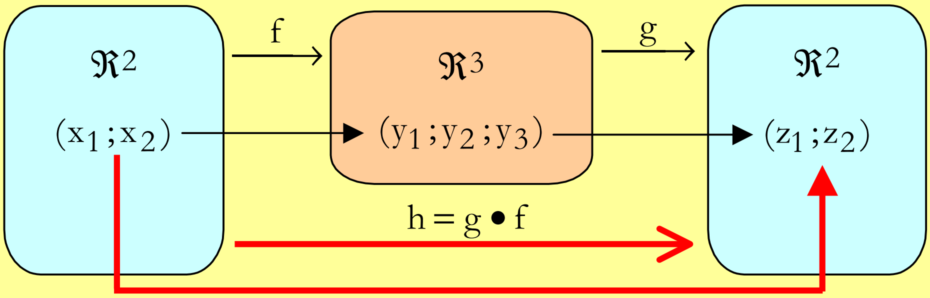
$$x_1 - x_2 > 0 \;;\; x_1 \geq 0 \;;\; x_2 \neq 0,\; \left|2 - \sqrt{x_1}\right| \leq 1 \;;\; 1/x_2 \neq k.\pi$$

Utilidad de la composición de campos

Piensa que las variables x_1 y x_2 expresan respectivamente las cantidades de capital y trabajo empleadas por una empresa, y que las variables y_1, y_2 e y_3 expresan las respectivas cantidades de tomate, pera y melón que produce la empresa cuando utiliza x_1 unidades de capital y x_2 unidades de trabajo, siendo

$$y_1 = \mathrm{Ln}\,(x_1 - x_2),\ y_2 = 2 - \sqrt{x_1},\ y_3 = 1/x_2$$

Además, considera que las variables z_1 y z_2 expresan respectivamente el ingreso y el coste de la empresa si las producciones de tomate, pera y melón son y_1, y_2 e y_3, siendo $z_1 = y_1 + \mathrm{arcsen}\ y_2$, $z_2 = \mathrm{cotg}\ y_3$. Así, el campo compuesto $h = g \bullet f : \Re^2 \mapsto \Re^2$ determina el ingreso y el coste de la empresa cuando las respectivas cantidades de capital y trabajo empleadas son x_1 y x_2.



FONEMATO 1.28.7

Determínese el dominio de definición de $h = g \bullet f$, siendo

$$f(u;v;w) = (u.v/(2-w)\ ;\ 5 - e^{1/u})\ \ ;\ \ g(z;t) = (z + \arccos\ t\ ;\ t/z)$$

SOLUCIÓN

El campo $h = g \bullet f : \Re^3 \mapsto \Re^2$ sólo está definido en los puntos $(u;v;w) \in \Re^3$ que pertenecen a Dom.f y son tales que $f(u;v;w) \in \mathrm{Dom.}\ g$.

Es:

$$\mathrm{Dom.f} = \{(u;v;w) \in \Re^3\ /\ u \neq 0,\ w \neq 2\}$$
$$\mathrm{Dom.g} = \{(z;t) \in \Re^2\ /\ z \neq 0,\ |t| \leq 1\}$$

y como

$$f(u;v;w) = (\underbrace{u.v/(2-w)}_{z}\ ;\ \underbrace{5 - e^{1/u}}_{t})$$

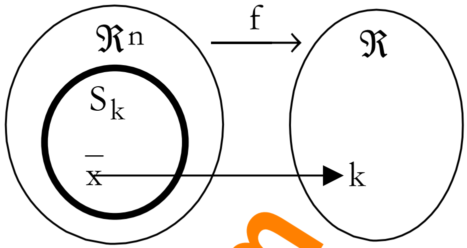
sucede que $f(u;v;w) \in \mathrm{Dom.}\ g$ sólo si el punto $(u;v;w) \in \Re^3$ es tal que

$$\underbrace{u.v/(2-w)}_{z} \neq 0\ \ ;\ \ \underbrace{\left|5 - e^{1/u}\right|}_{|t|} \leq 1$$

Así, el campo vectorial $h = g \bullet f : \Re^3 \mapsto \Re^2$ sólo está definido en los puntos $(u;v;w) \in \Re^3$ tales que $u \neq 0$, $w \neq 2$, $u.v/(2-w) \neq 0$ y $\left|5 - e^{1/u}\right| \leq 1$.

1.29 CONJUNTOS DE NIVEL DE UN CAMPO ESCALAR

Siendo $k \in \Re$ y $f:\Re^n \mapsto \Re$ un campo escalar, el **conjunto de nivel "k"** de "f" es el conjunto $S_k = \{\bar{x} \in \Re^n \,/\, f(\bar{x}) = k\}$ formado por los puntos de $\Re^n$ en que "f" toma el valor "k".



Así, siendo $f:\Re^4 \mapsto \Re$ tal que $f(\bar{x}) = x_1.x_2^{45} + \mathrm{Ln}\,(x_3 - \sqrt{1 - \mathrm{arcsen}\, x_4})$, es:

$$S_k = \{\bar{x} \in \Re^4 \,/\, x_1.x_2^{45} + \mathrm{Ln}\,(x_3 - \sqrt{1 - \mathrm{arcsen}\, x_4}) = k\}$$

En términos geométricos, si la función o campo escalar "f" es de dos variables, el conjunto S_k es una curva del plano $\Re^2$, y de ella se dice que es la **curva de nivel "k"** del campo "f" .... además, **si el campo escalar "f" tiene utilidad para analizar "fenómenos" de la vida real, sus curvas de nivel suelen tener nombre propio:**

- Si $f(\bar{x})$ expresa la presión en el punto $(x_1;x_2) \in \Re^2$, las curvas de nivel de "f" se llaman isobaras.
- Si $f(\bar{x})$ expresa la temperatura en el punto $(x_1;x_2) \in \Re^2$, las curvas de nivel de "f" se llaman **isotermas.**
- Si $f(\bar{x})$ expresa la entropía en el punto $(x_1;x_2) \in \Re^2$, las curvas de nivel de "f" se llaman **isentrópicas.**
- Si x_1 y x_2 expresan las respectivas cantidades de capital y trabajo que emplea una empresa y $f(x_1;x_2) \in \Re$ expresa la producción de acero de la empresa cuando utiliza dichos inputs, las curvas de nivel de "f" se llaman **isocuantas.**
- Si x_1 y x_2 expresan las respectivas cantidades de cerveza y vino que ingieres una noche de farra y $f(x_1;x_2) \in \Re$ expresa tu nivel de "felicidad" o "utilidad" al ingerir tales cantidades de alcohol, las curvas de nivel de "f" se llaman **curvas de indiferencia.**

Mi función de utilidad "f" es tal que $f(2;5) = f(7;3) = 19$ .... por eso me da igual beber 2 cervezas y 5 vinos que beber 7 cervezas y 3 vinos; en ambos casos me cojo un pedo de nivel 19, pues en ambos casos el valor de mi felicidad o utilidad es 19. Es decir, los puntos $(2;5)$ y $(7;3)$ están en la misma curva de indiferencia (la de nivel 19).

FONEMATO 1.29.1

Dibújese el "mapa" de curvas de nivel de los siguientes campos escalares:

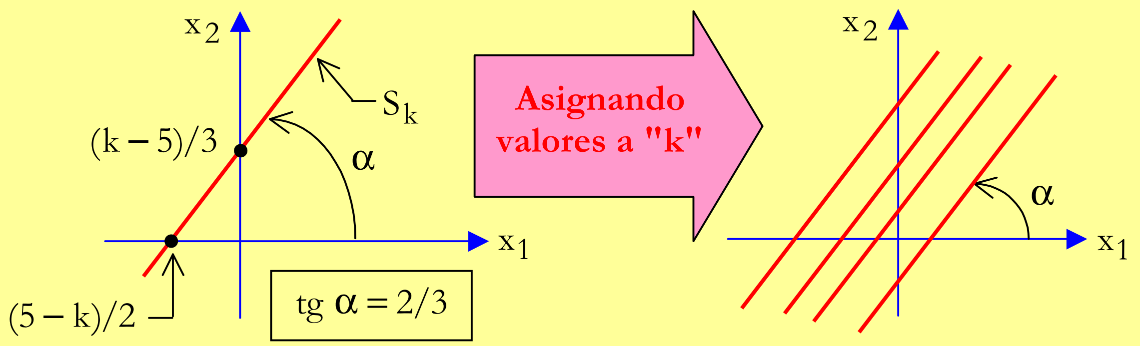
$$1)\ f(x_1;x_2)=-2.x_1+3.x_2+5\ ;\ 2)\ f(x_1;x_2)=2.x_1+3.x_2+5$$

SOLUCIÓN

Siendo $S_k=\{\bar{x}\in\Re^2\ /\ f(\bar{x})=k\}$, se tiene que:

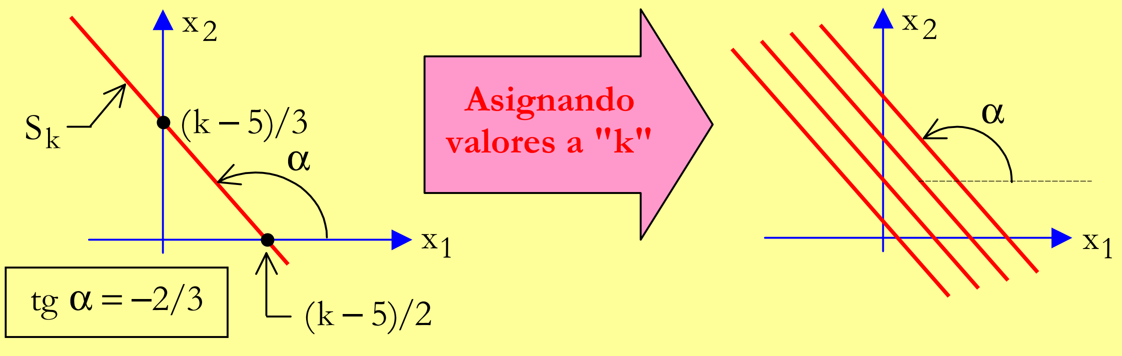
1) Es $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -2.x_1+3.x_2+5=k\}$, que es una **familia** de infinitas rectas paralelas (una para cada valor asignado a "k") con pendiente $2/3$.

Recuerda: la pendiente de la recta $a.x_1+b.x_2+c=0$ es $-a/b$.



La ordenada de la recta $-2.x_1+3.x_2+5=k$ cuando $x_1=0$ es $(k-5)/3$. La abcisa cuando $x_2=0$ es $(5-k)/2$, y dicha abcisa es menor cuanto mayor sea "k". ***Por ejemplo,*** la recta de nivel $k=7$ está a la izquierda de la de nivel $k=5$.

2) Es $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ 2.x_1+3.x_2+5=k\}$, que es una **familia** de infinitas rectas paralelas (una para cada valor asignado a "k") con pendiente $-2/3$.



La ordenada de la recta $2.x_1+3.x_2+5=k$ cuando $x_1=0$ es $(k-5)/3$. La abcisa cuando $x_2=0$ es $(k-5)/2$, y dicha abcisa es mayor cuanto mayor sea "k". ***Por ejemplo,*** la recta de nivel $k=7$ está a la derecha de la de nivel $k=5$.

FONEMATO 1.29.2

Dibújese el "mapa" de curvas de nivel de los siguientes campos escalares:

$$1)\ f(x_1;x_2)=\text{Ln}\,(-3.x_1+4.x_2)\ ;\ 2)\ f(x_1;x_2)=e^{3.x_1+4.x_2}$$

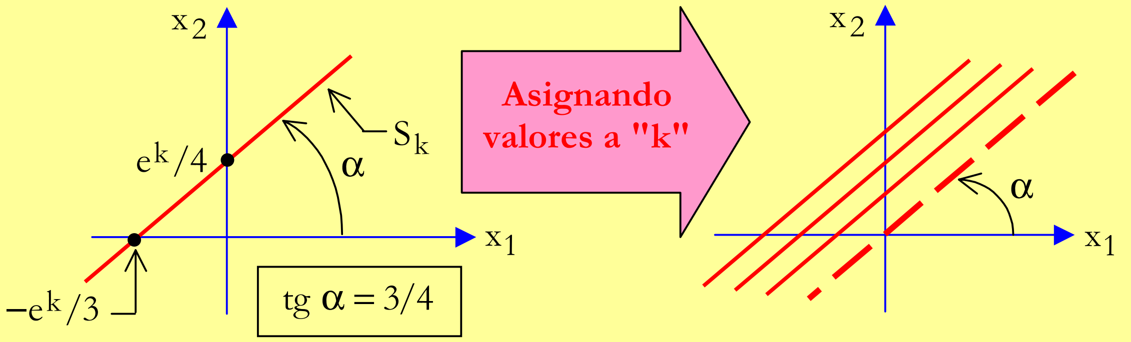
SOLUCIÓN

Siendo $S_k=\{\bar{x}\in\Re^2\ /\ f(\bar{x})=k\}$, se tiene que:

1) Es

$$S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ \text{Ln}\,(-3.x_1+4.x_2)=k\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -3.x_1+4.x_2=e^k\}$$

que es una **familia** de infinitas rectas paralelas (una para cada valor de "k") con pendiente $3/4$. La ordenada de la recta $-3.x_1+4.x_2=e^k$ si $x_1=0$ es $e^k/4$. La abcisa si $x_2=0$ es $-e^k/3$, que es tanto menor cuanto mayor sea "k". ***Por ejemplo,*** la recta de nivel $k=9$ está a la izquierda de la de nivel $k=7$.



Observa: las rectas de nivel están a la izquierda de la dibujada con trazo discontinuo grueso, que es la $-3.x_1+4.x_2=0$, que se obtendría si $k=-\infty$:

$$k=-\infty\Rightarrow -3.x_1+4.x_2=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

2) Es

$$S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ e^{3.x_1+4.x_2}=k\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ 3.x_1+4.x_2=\text{Ln}\,k\}$$

que es una **familia** de infinitas rectas paralelas (una para cada valor de "k") con pendiente $-3/4$. La ordenada de la recta $3.x_1+4.x_2=\text{Ln}\,k$ si $x_1=0$ es $(\text{Ln}\,k)/4$. La abcisa si $x_2=0$ es $(\text{Ln}\,k)/3$, que es mayor cuanto mayor sea "k". ***Por ejemplo,*** la recta de nivel 9 está a la derecha de la de nivel 7.

Observa: la expresión $3.x_1+4.x_2=\text{Ln}\,k$ carece de sentido si $k\le 0$ (pues en tal caso sucede que $\text{Ln}\,k\notin\Re$) .... y eso significa que no hay ningún punto $(x_1;x_2)\in\Re^2$ cuya imagen según "f" sea negativa, lo que es obvio, pues todo el mundo sabe que:

$$0<(\text{número positivo})^{\text{cualquier número}}$$

FONEMATO 1.29.3

Dibújese el "mapa" de curvas de nivel de los siguientes campos escalares:

$$1)\ f(x_1;x_2)=\text{sen}\,(-x_1+x_2)\ ;\ 2)\ f(x_1;x_2)=\cos\,(-x_1+x_2)$$
$$3)\ f(x_1;x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$$

SOLUCIÓN

Siendo $S_k=\{\bar{x}\in\Re^2\ /\ f(\bar{x})=k\}$, se tiene que:

1) Es

$$S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ \text{sen}\,(-x_1+x_2)=k\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\text{arcsen}\ k\}$$

que es una **familia** de infinitas rectas paralelas (una para cada valor de "k") con pendiente 1.

Por ejemplo:

Si $k=0$, es:

$$S_0=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\text{arcsen}\ 0\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=0\}$$

Si $k=1/2$, es:

$$S_{1/2}=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\text{arcsen}\ (1/2)\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\pi/6\}$$

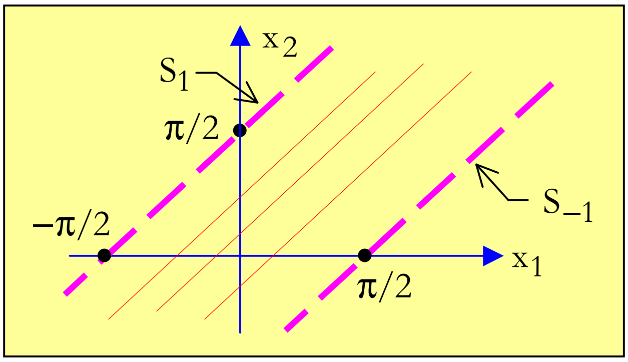
Si $k=1$, es:

$$S_1=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\text{arcsen}\ 1\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\pi/2\}$$

Si $k=-1$, es:

$$S_{-1}=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=\text{arcsen}\ (-1)\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ -x_1+x_2=-\pi/2\}$$

Observa: carece de sentido elegir "k" de modo que $|k|>1$, pues el seno sólo toma valores comprendidos entre -1 y 1. Por tanto, todas las rectas de la familia están entre las correspondientes a $k=-1$ y $k=1$.



2) Siendo $f(x_1;x_2)=\cos(-x_1+x_2)$, es:

$$S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; \cos(x_1+x_2)=k\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\arccos k\}$$

que es una **familia** de infinitas rectas paralelas (una para cada valor de "k") con pendiente -1. ***Por ejemplo:***

Si $k=0$, es:

$$S_0=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\arccos 0\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\pi/2\}$$

Si $k=1/2$, es:

$$S_{1/2}=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\arccos(1/2)\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\pi/3\}$$

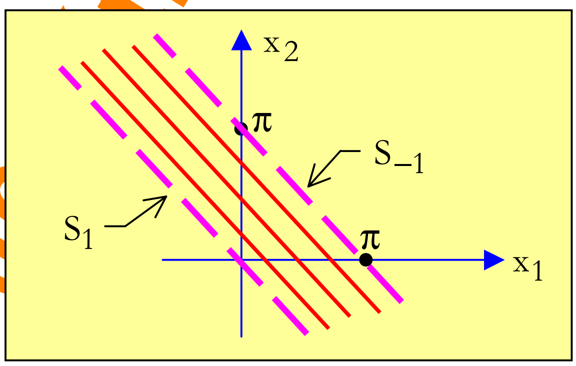
Si $k=1$, es:

$$S_1=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\arccos 1\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=0\}$$

Si $k=-1$, es:

$$S_{-1}=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\arccos(-1)\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; x_1+x_2=\pi\}$$

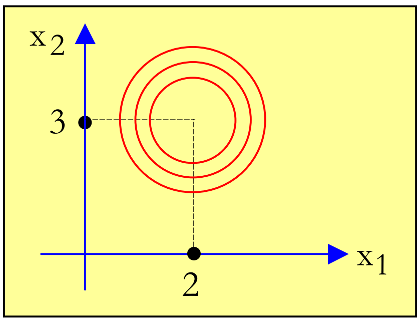
Observa: carece de sentido elegir "k" de modo que $|k|>1$, pues el coseno sólo toma valores comprendidos entre -1 y 1. Por tanto, todas las rectas de la familia están entre las correspondientes a $k=-1$ y $k=1$.



3) Si $f(x_1;x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$, es:

$$S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \;/\; (x_1-2)^2+(x_2-3)^2=k\}$$

que es una **familia** de circunferencias (una para cada valor que asignemos a "k"), todas con centro en el punto (2;3), y la S_k con radio $\sqrt{k}$.



FONEMATO 1.29.4

Dibújese el "mapa" de curvas de nivel de los siguientes campos escalares:

$$1)\ f(x_1;x_2)=e^{x_1 . x_2}\ \ ;\ 2)\ f(x_1;x_2)=x_2/x_1$$
$$3)\ f(x_1;x_2)=(x_1-2)/(x_2-3)$$

SOLUCIÓN

Siendo $S_k=\{\bar{x}\in\Re^2\ /\ f(\bar{x})=k\}$, se tiene que:

1) $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ e^{x_1 . x_2}=k\}=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1.x_2=\text{Ln}\ k\}$, que es una **familia** de infinitas hipérbolas equiláteras, una para cada valor positivo que asignemos a "k" $(k\neq 1)$.

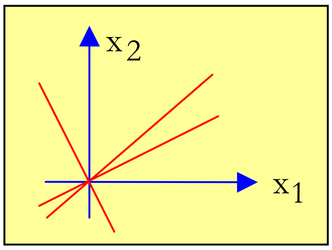
Para $k=1$, resulta:

$$S_1=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1.x_2=\text{Ln}\ 1=0\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1=0 \text{ ó } x_2=0\}$$

O sea, el conjunto de nivel 1 del campo escalar "f" tal que $f(x_1;x_2)=e^{x_1 . x_2}$ lo forman los dos ejes de coordenadas.

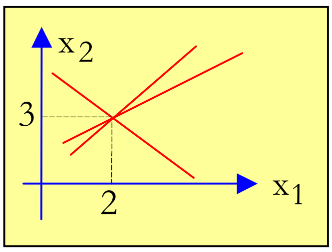
Si $k>1$ es $\text{Ln}\ k>0$; por tanto, la hipérbola $x_1.x_2=\text{Ln}\ k$ está en los cuadrantes primero y tercero. Si $0<k<1$ es $\text{Ln}\ k<0$; por tanto, la hipérbola $x_1.x_2=\text{Ln}\ k$ está en los cuadrantes segundo y cuarto. Es absurdo plantearse asignar a "k" valores negativos, pues $0<(\text{número positivo})^{\text{cualquier número}}$.

2) $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_2/x_1=k\}=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_2=k.x_1\}$, que es la **familia** que forman las rectas que pasan por $(0;0)$, salvo el eje de ordenadas, cuya ecuación $x_1=0$ no puede obtenerse al asignar a "k" un valor concreto. Observa que



$$\text{Dom. } f=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1\neq 0\}$$

3) Es $$S_k=\left\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ \frac{x_1-2}{x_2-3}=k\right\}=$$
$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_1-k.x_2+3.k-2=0\}$$



que es la **familia** que forman las rectas que pasan por el punto $(2;3)$, pues para todo "k", al hacer $x_1=2$ en $x_1-k.x_2+3.k-2=0$ resulta $x_2=3$. La recta $x_2=3$ (paralela al eje de abcisas), no pertenece a la familia, pues no puede obtenerse al asignar a "k" un valor concreto en $x_1-k.x_2+3.k-2=0$.

Observa que "f" no está definida en los puntos de la recta $x_2=3$:

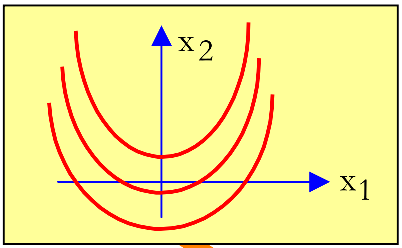
$$\text{Dom. } f=\{(x_1;x_2)\in\Re^2\ /\ x_2\neq 3\}$$

FONEMATO 1.29.5

Dibújese el "mapa" de curvas de nivel de los siguientes campos escalares:

1) $f(x_1;x_2)=x_1^2-x_2$; 2) $f(x_1;x_2)=x_2^2+x_1$; 3) $f(x_1;x_2)=9.x_1^2+4.x_2^2$

SOLUCIÓN



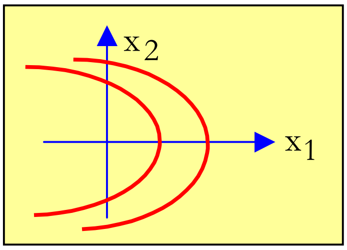
1) Es $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,/\, x_1^2-x_2=k\}=$

$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,/\, x_2=x_1^2-k\}$$

que es una **familia** de infinitas parábolas de eje vertical con los cuernos hacia arriba. Si $k\geq 0$ la parábola que resulta corta al eje de abcisas en los puntos $x_1=\pm\sqrt{k}$ (pues $x_1^2-k=0\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{k}$). Si $k<0$ la parábola correspondiente no tiene contacto con dicho eje, pues si $k<0$ es $x_1=\pm\sqrt{k}\notin\Re$.

2) Es $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,/\, x_2^2+x_1=k\}=$

$$=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,/\, x_1=-x_2^2+k\}$$



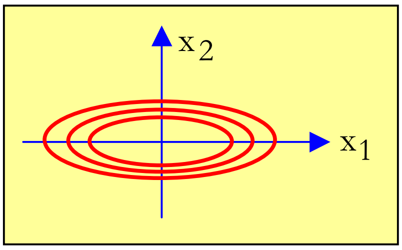
que es una **familia** de infinitas parábolas de eje horizontal con los cuernos hacia la izquierda. Si $k\geq 0$ la parábola corta al eje de ordenadas en los puntos $x_2=\pm\sqrt{k}$ (pues $-x_2^2+k=0\Rightarrow x_2=\pm\sqrt{k}$).

Si $k<0$ la parábola no tiene contacto con ese eje, pues si $k<0$ sucede que $x_2=\pm\sqrt{k}\notin\Re$.

3) Es $S_k=\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,/\, 9.x_1^2+4.x_2^2=k\}=$

$$=\left\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,\Big/\, \frac{x_1^2}{1/9}+\frac{x_2^2}{1/4}=k\right\}=$$

$$=\left\{(x_1;x_2)\in\Re^2 \,\Big/\, \frac{x_1^2}{k/9}+\frac{x_2^2}{k/4}=1\right\}$$



que es una **familia** de infinitas elipses.

Si $k>0$, los semiejes de la elipse correspondiente son $\sqrt{k/9}$ y $\sqrt{k/4}$. Si $k=0$ es $S_0=\{(0;0)\}$.

Observa: si el campo escalar $f:\Re^n\mapsto\Re$ es uniforme (o sea, cada punto del dominio de definición de "f" tiene una única imagen) y los números reales k_1 y k_2 son distintos, los conjuntos de nivel S_{k_1} y S_{k_2} no tienen puntos comunes, pues siendo "f" uniforme y $k_1\neq k_2$, no puede existir ningún punto $\overline{x}\in$ Dom. f tal que $f(\overline{x})=k_1$ $(\Rightarrow \overline{x}\in S_{k_1})$ y $f(\overline{x})=k_2$ $(\Rightarrow \overline{x}\in S_{k_2})$.

Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	teta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ypsilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Aunque gracias a la rana Gustavo todos tenemos clara la noción de proximidad (todos entendemos lo que quiere decirse al afirmar que París está más próxima a Londres que Sidney), **antes de empezar a marear las perdices del "límite", la "continuidad" y la "derivabilidad" de un campo escalar en un punto, debemos dotarnos de una herramienta que permita evaluar la proximidad entre puntos de $\Re^n$, dicha herramienta la llamaremos distancia euclídea**

1.30 NORMA, DISTANCIA

Norma

Siendo $g: \Re^n \mapsto \Re^+ \cup \{0\}$ una aplicación que a cada punto $\bar{x} \in \Re^n$ le asocia un número real no negativo que denotamos $g(\bar{x})$, diremos que "g" es **una norma** si satisface las siguientes cuatro exigencias:

$$1)\ g(\bar{x}) > 0 \Leftrightarrow \bar{x} \neq \bar{0}$$
$$2)\ g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$$
$$3)\ g(\bar{x} + \bar{y}) \leq g(\bar{x}) + g(\bar{y}),\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \Re^n$$
$$4)\ g(\alpha \bullet \bar{x}) = |\alpha|.g(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \Re^n,\ \forall \alpha \in \Re$$

Si "g" es una norma, del número real no negativo $g(\bar{x})$ que "g" asocia a $\bar{x} \in \Re^n$ se dice que es la norma de $\bar{x}$. Es habitual denotar $\|\bar{x}\|$ al número $g(\bar{x})$; así, las anteriores cuatro exigencias se expresan de la siguiente forma:

$$1^*)\ \|\bar{x}\| > 0 \Leftrightarrow \bar{x} \neq \bar{0}$$
$$2^*)\ \|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$$
$$3^*)\ \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|,\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \Re^n$$
$$4^*)\ \|\alpha \bullet \bar{x}\| = |\alpha|.\|\bar{x}\|,\ \forall \bar{x} \in \Re^n,\ \forall \alpha \in \Re$$

Distancia

Si $d: \Re^n \times \Re^n \mapsto \Re^+ \cup \{0\}$ es una aplicación que a cada par $(\bar{x}; \bar{y}) \in \Re^n \times \Re^n$ de puntos de $\Re^n$ le asocia un número real <u>no negativo</u> (observa que el conjunto "final" de "d" es $\Re^+ \cup \{0\}$) que denotamos $d(\bar{x}; \bar{y})$, diremos que "d" es **una distancia** sólo si satisface las siguientes tres exigencias:

$$5)\ d(\bar{x}; \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$
$$6)\ d(\bar{x}; \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x}),\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \Re^n$$
$$7)\ d(\bar{x}; \bar{y}) \leq d(\bar{x}; \bar{z}) + d(\bar{z}; \bar{y}),\ \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Re^n$$

Si la aplicación $d: \Re^n \times \Re^n \mapsto \Re^+ \cup \{0\}$ es una distancia, del número real no negativo $d(\bar{x}; \bar{y})$ que "d" asocia a $(\bar{x}; \bar{y}) \in \Re^n \times \Re^n$ se dice que es **la distancia** entre los puntos $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Toda norma induce un distancia

Si $g:\Re^n \mapsto \Re^+ \cup \{0\}$ es una norma, la aplicación $d:\Re^n \times \Re^n \mapsto \Re^+ \cup \{0\}$ tal que $d(\bar{x};\bar{y}) = g(\bar{x}-\bar{y}) \equiv \|\bar{x}-\bar{y}\|$ es una distancia, pues satisface las exigencias 5), 6) y 7).

En efecto:

5) $$d(\bar{x};\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = 0 \underset{\boxed{\text{debido a } 2^*)}}{\Leftrightarrow} \bar{x}-\bar{y} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

6) $$d(\bar{x};\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|(-1)\bullet(\bar{y}-\bar{x})\| \underset{\boxed{\text{debido a } 4^*)}}{=} |-1|.\|\bar{y}-\bar{x}\| = d(\bar{y};\bar{x})$$

7) $$d(\bar{x};\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|(\bar{x}-\bar{z})+(\bar{z}-\bar{y})\| \underset{\boxed{\text{debido a } 3^*)}}{\le} \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\| = d(\bar{x};\bar{z}) + d(\bar{z};\bar{y})$$

Norma euclídea, distancia euclídea

Se llama **norma euclídea** a la definida como

$$\|\bar{x}\| \underset{\boxed{\text{si } \bar{x} = (x_1;\ldots;x_n)}}{=} +\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

La distancia euclídea *(la que usaremos siempre)* **es la distancia que induce la norma euclídea;** por tanto, la distancia euclídea entre los puntos $\bar{x} = (x_1;\ldots;x_n) \in \Re^n$ e $\bar{y} = (y_1;\ldots;y_n) \in \Re^n$ es:

$$d(\bar{x};\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| \underset{\boxed{\text{pues } \bar{x}-\bar{y} = (x_1-y_1;\ \ldots\ ;x_n-y_n)}}{=} +\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

Por ejemplo, la distancia euclídea entre los puntos $\bar{x} = (3;-4)$ e $\bar{y} = (-2;5)$ es

$$d(\bar{x};\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = +\sqrt{(3-(-2))^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{126}$$

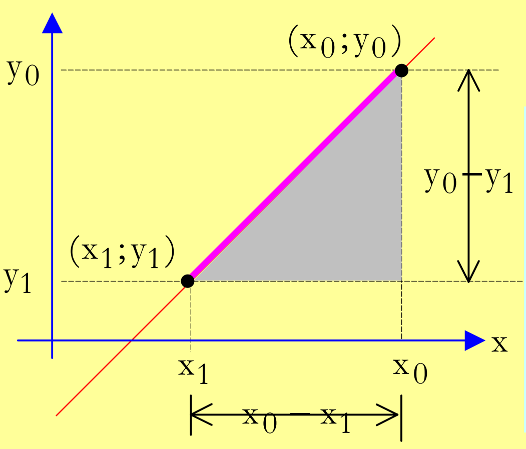
Por ejemplo, entre los puntos $\bar{x} = (2;-5;3)$ e $\bar{y} = (-1;7;6)$, la distancia euclídea es

$$d(\bar{x};\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = +\sqrt{(2-(-1))^2 + (-5-7)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{162}$$

Por ejemplo, la distancia euclídea entre los puntos $x = -4$ e $y = 2$ es

$$d(x;y) = \|x-y\| = +\sqrt{(-4-2)^2} = 6 \equiv |x-y|$$

que es la distancia que en su momento establecimos en $\Re$.



Distancia euclídea

La distancia euclídea "d" entre los puntos $(x_0;y_0)$ y $(x_1;y_1)$ de $\Re^2$ es

$$d=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}$$

que, según Pitágoras, es la hipotenusa de triángulo rectángulo de la figura.

Que quede claro: pueden establecerse o definirse infinidad de criterios distintos para evaluar la proximidad entre dos puntos "Pepe" y "Juan" ..... y el criterio establecido por la llamada distancia euclídea, si bien es el más famoso, no deja de ser uno más.

Distancia de Manhattan

Aunque menos famosa que la euclídea, también es **una distancia** la aplicación $d:\Re^2\times\Re^2\mapsto\Re^+\cup\{0\}$ que al par de puntos $\bar{a}=(x_0;y_0)$ y $\bar{b}=(x_1;y_1)$ les asocia el número real no negativo $d(\bar{a};\bar{b})=|x_0-x_1|+|y_0-y_1|$, pues sucede que:

$$5)\ d(\bar{a};\bar{b})=0\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{b}$$
$$6)\ d(\bar{a};\bar{b})=d(\bar{b},\bar{a}),\ \forall\,\bar{a},\bar{b}\in\Re^2$$
$$7)\ d(\bar{a};\bar{b})\le d(\bar{a};\bar{c})+d(\bar{c};\bar{b}),\ \forall\,\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\Re^2$$

En efecto:

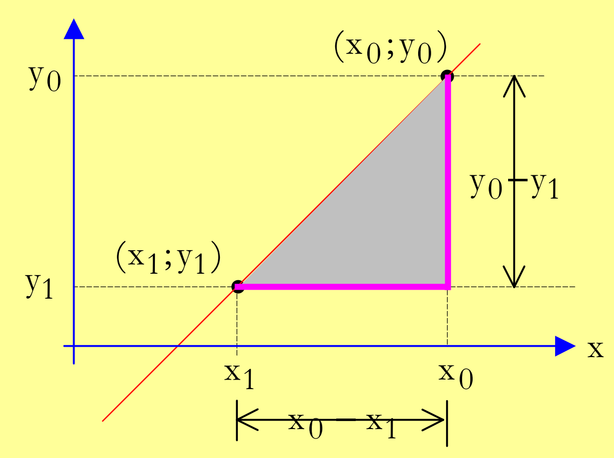
5) Si $\bar{a}=\bar{b}$ es obvio que $d(\bar{a};\bar{b})=0$; además:

$$d(\bar{a};\bar{b})=0\Rightarrow|x_0-x_1|+|y_0-y_1|=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}|x_0-x_1|=0\\|y_0-y_1|=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_0=x_1\\y_0=y_1\end{Bmatrix}\Rightarrow\bar{a}=\bar{b}$$

6) Es $d(\bar{a};\bar{b})=|x_0-x_1|+|y_0-y_1|=|x_1-x_0|+|y_1-y_0|=d(\bar{b};\bar{a})$.

7) Siendo $\bar{c}=(x_2;y_2)$, es:

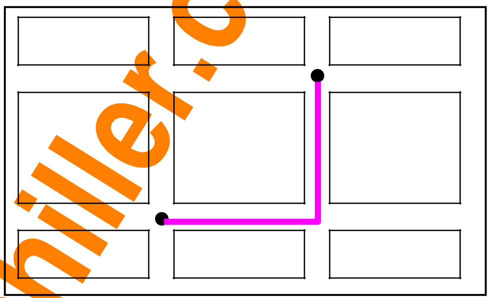
$$d(\bar{a};\bar{b})=|x_0-x_1|+|y_0-y_1|=$$
$$=|(x_0-x_2)+(x_2-x_1)|+|(y_0-y_2)+(y_2-y_1)|\le$$
$$\boxed{|\text{Pepe}+\text{Juan}|\le|\text{Pepe}|+|\text{Juan}|}$$
$$\le|x_0-x_2|+|x_2-x_1|+|y_0-y_2|+|y_2-y_1|=$$
$$=\underbrace{(|x_0-x_2|+|y_0-y_2|)}_{d(\bar{a};\bar{c})}+\underbrace{(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|)}_{d(\bar{c};\bar{b})}=d(\bar{a};\bar{c})+d(\bar{c};\bar{b})$$



Distancia de Manhattan

La distancia de Manhattan entre los puntos $(x_0;y_0)$ y $(x_1;y_1)$ es la suma de los catetos del triángulo rectángulo de la figura.

Aunque la distancia de Manhattan pueda parecer una greguería matemática, no hay tal ..... piensa en la distancia que deberías recorrer si estás en la esquina de una manzana de Manhattan y quieres pedirle una autógrafo al Conejo de la Suerte, que casualmente se encuentra en la esquina opuesta de esa manzana.



1.31 BOLAS DE CENTRO EN UN PUNTO

Siendo $\overline{x}_0=(x_1^0;\ldots;x_n^0)$ un punto de $\Re^n$ y "r" un número real positivo, la **bola abierta** de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r" se denota $B(\overline{x}_0;r)$, y es el subconjunto de $\Re^n$ formado por los puntos $\overline{x}=(x_1;\ldots;x_n)$ cuya **distancia** a $\overline{x}_0$ es inferior a "r":

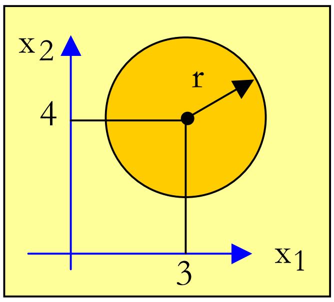
$$B(\overline{x}_0;r)=\left\{\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Re^n\ /\ d(\overline{x};\overline{x}_0)<r\right\}=$$
$$=\left\{\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Re^n\ /\ +\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2}<r\right\}$$

La **bola cerrada** de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r" se denota $\overline{B}(\overline{x}_0;r)$, y es el subconjunto de $\Re^n$ que forman los puntos $\overline{x}=(x_1;\ldots;x_n)$ cuya **distancia** a $\overline{x}_0$ no es superior a "r":

$$\overline{B}(\overline{x}_0;r)=\left\{\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Re^n\ /\ d(\overline{x};\overline{x}_0)\le r\right\}=$$
$$=\left\{\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Re^n\ /\ +\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+\ldots+(x_n-x_n^0)^2}\le r\right\}$$

Ejemplos: la bola abierta de centro en $\overline{x}_0=(3;4)\in\Re^2$ y radio "r" la forman los puntos $\overline{x}=(x_1;x_2)\in\Re^2$ tales que

$$+\sqrt{(x_1-3)^2+(x_2-4)^2}<r$$



que son los puntos interiores a la circunferencia de centro en $\overline{x}_0=(3;4)$ y radio "r". La bola cerrada de centro en $\overline{x}_0=(3;4)\in\Re^2$ y radio "r" está formada por los puntos anteriores y los de dicha circunferencia. La bola abierta de centro en el $\bar{x}_0 = (1;3;2) \in \Re^3$ y radio "r" la forman los puntos $\bar{x} = (x_1;x_2;x_3) \in \Re^3$ tales que

$$+\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-3)^2+(x_3-2)^2} < r$$

que son los puntos interiores a la esfera de centro en el punto $\bar{x}_0 = (1;3;2)$ y radio "r". La bola cerrada de centro en $\bar{x}_0 = (1;3;2) \in \Re^3$ y radio "r" está formada por los puntos anteriores y los que están en la citada esfera. La bola abierta de centro en $x_0 = 5 \in \Re$ y radio "r" la forman los puntos $x \in \Re$ tales que

$$+\sqrt{(x-5)^2} \equiv |x-5| < r$$

que son los puntos del intervalo $(5-r;5+r)$:

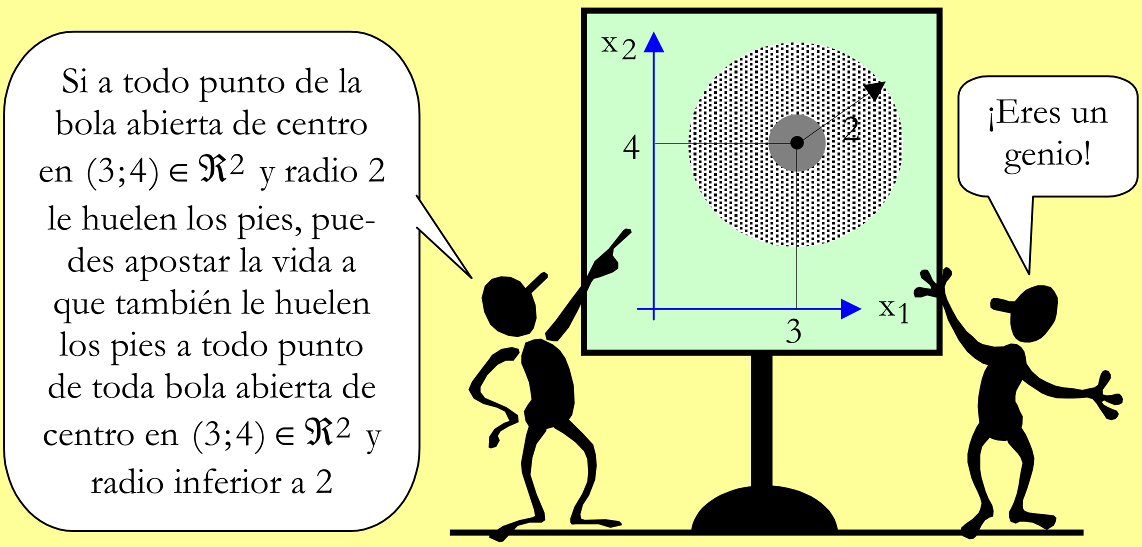
$$|x-5| < r \Rightarrow -r < x-5 < r \Rightarrow 5-r < x < 5+r \Rightarrow x \in (5-r;5+r)$$

La bola cerrada de centro en $x_0 = 5 \in \Re$ y radio "r" la forman los puntos $x \in \Re$ tales que $+\sqrt{(x-5)^2} \equiv |x-5| \le r$, que son los puntos del intervalo $[5-r;5+r]$:

$$|x-5| \le r \Rightarrow -r \le x-5 \le r \Rightarrow 5-r \le x \le 5+r \Rightarrow x \in [5-r;5+r]$$

Obviedad trascendental

Si una propiedad "P" se verifica en todo punto de la bola abierta de centro en el punto "Pepe" y radio "r", la propiedad "P" también se verifica en todo punto de toda bola abierta de centro en "Pepe" y radio r* inferior a "r".



1.32 CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DE UN PUNTO RESPECTO A UN CONJUNTO

Sea "S" un subconjunto de $\Re^n$ y "Pepe" un punto de $\Re^n$.

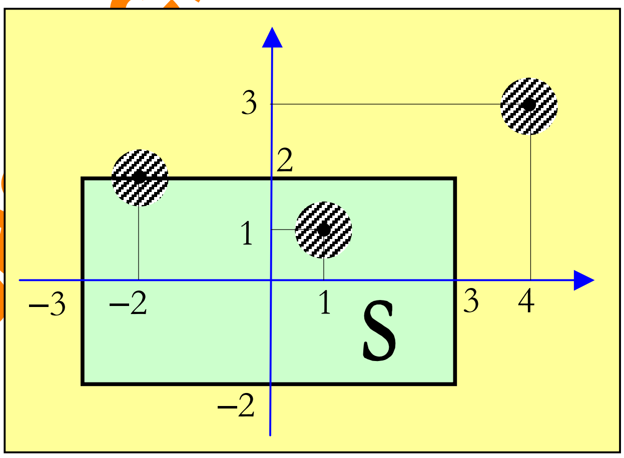
Como no hay más cera que la que arde, **hay una bola abierta de centro en "Pepe" que no contiene ningún punto de "S", o toda bola abierta de centro en "Pepe" contiene algún punto de "S"** ..... y para distinguir una situación de otra se han inventado los conceptos de **punto exterior y punto adherente a un conjunto.**

Punto exterior a un conjunto

Se dice que $\bar{x}_0 \in \Re^n$ es **punto exterior** al conjunto "S" si existe una bola abierta de centro en $\bar{x}_0$ que no contiene ningún punto de "S"; es decir, existe $B(\bar{x}_0;r)$ tal que $B(\bar{x}_0;r) \cap S = \varnothing$.

Se llama **exterior del conjunto "S"** al conjunto que forman los puntos exteriores a "S", y se denota Ext.(S).

Por ejemplo, siendo "S" el conjunto que forman los puntos $(x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que $|x_1| \leq 3$ y $|x_2| \leq 2$, el punto $(4;3)$ es exterior a "S", pues existe una bola abierta de centro en $(4;3)$ que no contiene ningún punto de "S". El punto $(1;1)$ no es exterior a "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;1)$ contiene puntos de "S", y lo mismo pasa con el punto $(-2;2)$.



Observa: si $\bar{x}_0 \in S \Rightarrow$ en toda bola abierta de centro en $\bar{x}_0$ hay al menos un punto de "S" (el propio $\bar{x}_0$) $\Rightarrow$ ninguna bola abierta de centro en $\bar{x}_0$ carece de puntos de "S" $\Rightarrow \bar{x}_0$ no es exterior a "S".

Punto adherente a un conjunto

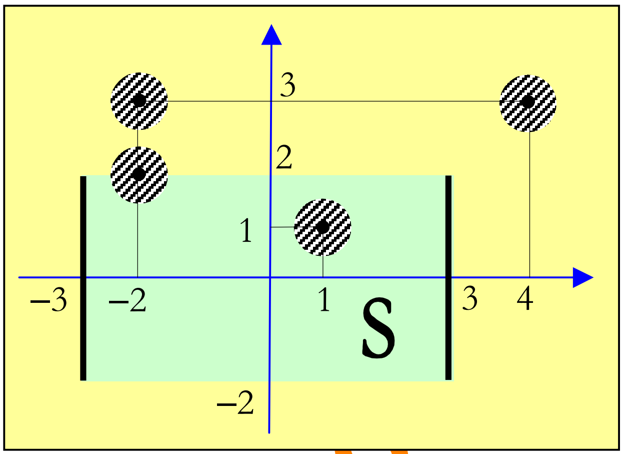
Se dice que $\bar{x}_0 \in \Re^n$ es **punto adherente** al conjunto "S" si toda bola abierta de centro en $\bar{x}_0$ contiene algún punto de "S"; es decir, para toda bola $B(\bar{x}_0;r)$ sucede que $B(\bar{x}_0;r) \cap S \neq \varnothing$.

Se llama **adherencia del conjunto "S"** al conjunto que forman los puntos adherentes a "S", y se denota Adh.(S) ó [S].

Por ejemplo, siendo "S" el conjunto que forman los puntos $(x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que $|x_1| \leq 3$ y $|x_2| < 2$, y además el punto $(4;3)$, es evidente que:

a) El punto $(1;1) \in S$ es adherente a "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;1)$ contiene algún punto del conjunto "S".

b) El punto $(-2;2) \notin S$ es adherente a "S", pues toda bola abierta de centro en $(-2;2)$ tiene algún punto de "S".



c) El punto $(4;3) \in S$ es adherente a "S", pues toda bola abierta de centro en $(4;3)$ tiene algún punto de "S", pues contiene al propio $(4;3)$.

d) El punto $(-2;3) \notin S$ no es adherente a "S", pues hay una bola abierta de centro en $(-2;3)$ que no contiene ningún punto de "S".

Observa: el punto $(-2;3) \notin S$ es exterior a "S", pero no así punto $(4;3) \in S$.

Observa: si $\overline{x}_0 \in S \Rightarrow$ en toda bola abierta $B(\overline{x}_0;r)$ de centro en $\overline{x}_0$ hay al menos un punto de "S" (el propio $\overline{x}_0$) $\Rightarrow B(\overline{x}_0;r) \cap S \neq \varnothing \Rightarrow \overline{x}_0$ es adherente a "S". De otro modo: $\forall\ S \subset \Re^n$ sucede que $S \subseteq \text{Adh.}(S)$.

Observa: si toda bola abierta de centro en el punto $\overline{x}_0 \in \Re^n$ contiene algún punto del conjunto $S \subset \Re^n$ (es decir, $\overline{x}_0 \in \Re^n$ es punto adherente al conjunto $S \subset \Re^n$), como no hay más cera que la que arde, **por fuerza sucede una de las siguientes dos opciones:**

a) Hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que contiene un único punto de "S". En tal caso, dicho punto único es el propio $\overline{x}_0$, pues si fuera el $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_0$, tomando $0 < r < d(\overline{x}_0;\overline{x}_1)$, en la bola $B(\overline{x}_0;r)$ no habría ningún punto de "S", por lo que $\overline{x}_0$ no sería punto adherente a "S".

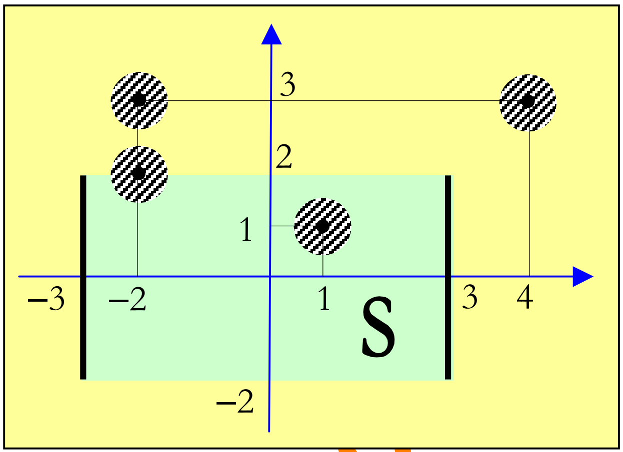
b) Toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ contiene más de un punto de "S". En tal caso, toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ contiene infinitos puntos de "S", pues si contuviera un número finito de puntos $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m$, sin más que tomar $r > 0$ inferior a la menor de las distancias de $\overline{x}_0$ a los puntos $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m$, sucedería que en la bola $B(\overline{x}_0;r)$ no habría puntos de "S", por lo que $\overline{x}_0$ no sería punto adherente a "S".

Para distinguir una situación de otra se han inventado los conceptos de **punto aislado y punto de acumulación.**

Punto aislado de un conjunto

Se dice que $\overline{x}_0 \in \Re^n$ es **punto aislado** del conjunto "S" si hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ tal que $\overline{x}_0$ es el único punto de "S" que hay en esa bola; es decir, existe $B(\overline{x}_0;r)$ tal que $B(\overline{x}_0;r) \cap S = \{\overline{x}_0\}$. ***Por ejemplo,*** siendo "S" el conjunto que forman los puntos $(x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que $|x_1| \leq 3$ y $|x_2| < 2$, y además el punto $(4;3)$, es evidente que:

1) El punto $(1;1) \in S$ no es aislado de "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;1)$ contiene algún punto de "S" distinto del propio $(1;1)$.



2) El punto $(-2;2) \notin S$ no es aislado de "S", pues toda bola abierta de centro en $(-2;2)$ contiene más de un punto de "S".

3) Como $(-2;3) \notin S$ no es adherente a "S", no es punto aislado de "S".

4) El punto $(4;3) \in S$ es aislado de "S", pues existe una bola abierta de centro en $(4;3)$ en la que $(4;3)$ es el único punto de "S".

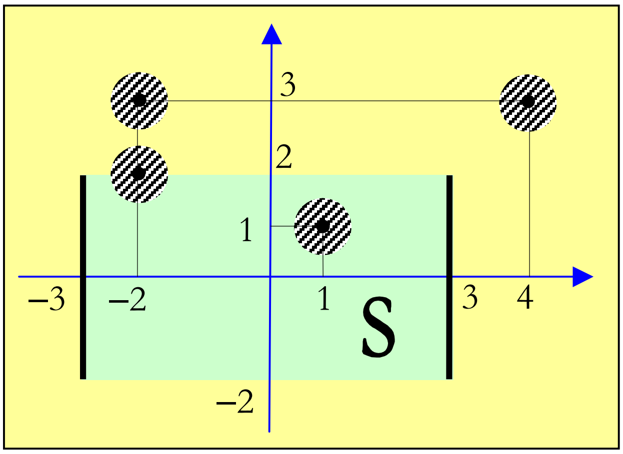
Observa: si $\overline{x}_0$ es exterior a "S" $\Rightarrow$ hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que no contiene ningún elemento de "S" $\Rightarrow$ no hay ninguna bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ y tal que $\overline{x}_0$ sea el único punto de "S" en esa bola $\Rightarrow$ $\overline{x}_0$ no es punto aislado de "S".

Punto de acumulación de un conjunto

Se dice que $\overline{x}_0 \in \Re^n$ es **punto de acumulación** del conjunto "S" si toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ contiene infinidad de puntos de "S". Se llama **acumulación de "S"** al conjunto que forman los puntos de acumulación de "S"; se denota Ac.(S).

Por ejemplo, siendo "S" el conjunto que forman los puntos $(x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que $|x_1| \le 3$ y $|x_2| < 2$, y además el punto $(4;3)$, es evidente que:

1) El punto $(4;3) \in S$ no es de acumulación de "S", pues hay una bola abierta de centro en $(4;3)$ que no contiene infinitos puntos de "S".



2) El punto $(-2;2) \notin S$ es de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en $(-2;2)$ tiene infinidad de puntos de "S".

3) El punto $(1;1) \in S$ es de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;1)$ contiene infinidad de puntos de "S".

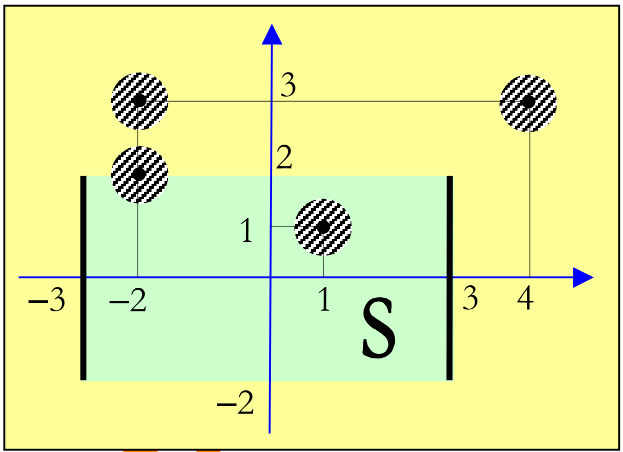
4) Como $(-2;3) \notin S$ no es adherente a "S", no es punto de acumulación de "S".

Observa: si $\overline{x}_0$ es exterior a "S" $\Rightarrow$ hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que no contiene ningún punto de "S" $\Rightarrow$ no todas las bolas abiertas de centro en $\overline{x}_0$ contienen infinitos puntos de "S" $\Rightarrow$ $\overline{x}_0$ no es punto de acumulación de "S".

Punto interior a un conjunto

Se dice que $\overline{x}_0 \in \Re^n$ es **punto interior** al conjunto "S" si existe una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que está contenida es "S"; o sea, existe $B(\overline{x}_0;r)$ tal que $B(\overline{x}_0;r) \subset S$. Se llama **interior de "S"** al conjunto que forman los puntos interiores a "S", y se denota Int.(S).

Por ejemplo, siendo "S" el conjunto que forman los puntos $(x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que $|x_1| \leq 3$ y $|x_2| < 2$, y además el punto $(4;3)$, es evidente que:



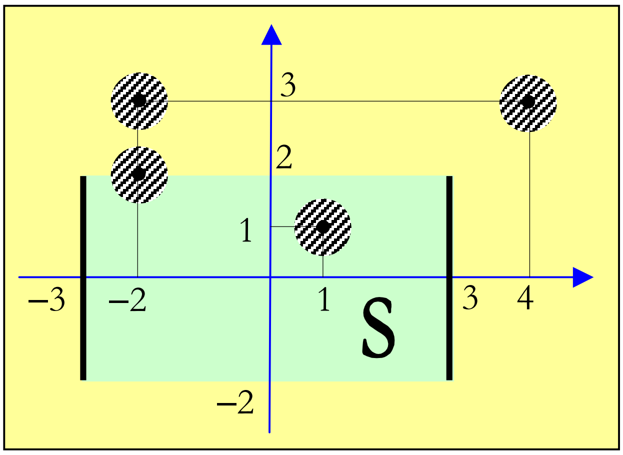
1) El punto $(4;3) \in S$ no es interior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en $(4;3)$ está contenida en "S".
2) El punto $(-2;2) \notin S$ no es interior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en $(-2;2)$ está contenida en "S".
3) El punto $(1;1) \in S$ es interior a "S", pues hay una bola abierta de centro en $(1;1)$ que está contenida en "S".
4) El punto $(-2;3) \notin S$ no es interior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en $(-2;3)$ está contenida en "S".

Observa: si $\overline{x}_0$ es interior a "S" $\Rightarrow$ hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que está contenida en "S" $\Rightarrow$ el centro $\overline{x}_0$ de la bola pertenece a "S". De otro modo: todo conjunto "S" verifica que Int.(S) $\subseteq$ S.

Punto frontera de un conjunto

Se dice que $\overline{x}_0 \in \Re^n$ es **punto frontera** del conjunto "S" si toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ tiene elementos de "S" y elementos que no son de "S".

Se llama **frontera de "S"** al conjunto que forman los puntos frontera de "S", y se denota Fr.(S). ***Por ejemplo,*** siendo "S" el conjunto que forman los puntos $(x_1;x_2) \in \Re^2$ tales que $|x_1| \leq 3$ y $|x_2| < 2$, y además el punto $(4;3)$, es evidente que:



1) El punto $(4;3) \in S$ es frontera de "S", pues toda bola abierta de centro en $(4;3)$ contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".
2) El punto $(-2;2) \notin S$ es frontera de "S", pues toda bola abierta de centro en $(-2;2)$ tiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

3) El punto $(1;1) \in S$ no es frontera de "S", pues hay una bola abierta de centro en $(1;1)$ que sólo contiene puntos de "S".

4) El punto $(-2;3) \notin S$ no es frontera de "S", pues hay una bola abierta de centro en $(-2;3)$ que no contiene puntos de "S".

Observa: si $\overline{x}_0$ es exterior a "S" $\Rightarrow$ hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que no contiene puntos de "S" $\Rightarrow$ no toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S" $\Rightarrow \overline{x}_0$ no es punto frontera de "S".

Observa: si $\overline{x}_0$ es punto aislado de "S" $\Rightarrow$ hay una bola $B(\overline{x}_0;r)$ tal que $\overline{x}_0$ es el único punto de "S" que hay en dicha bola $\Rightarrow$ tanto si $r^* > r$ como si $0 < r^* < r$, en la bola $B(\overline{x}_0;r^*)$ hay puntos de "S" y puntos que no son de "S" $\Rightarrow \overline{x}_0$ es punto frontera de "S".

Observa: si $\overline{x}_0$ es interior a "S" $\Rightarrow$ hay una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que está incluida en "S" $\Rightarrow$ no toda bola abierta de centro $\overline{x}_0$ contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S" $\Rightarrow \overline{x}_0$ no es punto frontera de "S".

1.33 CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DE UN CONJUNTO

- Se dice que $S \subset \Re^n$ es **abierto** si $\text{Int.}(S) = S$. Tal es el caso de

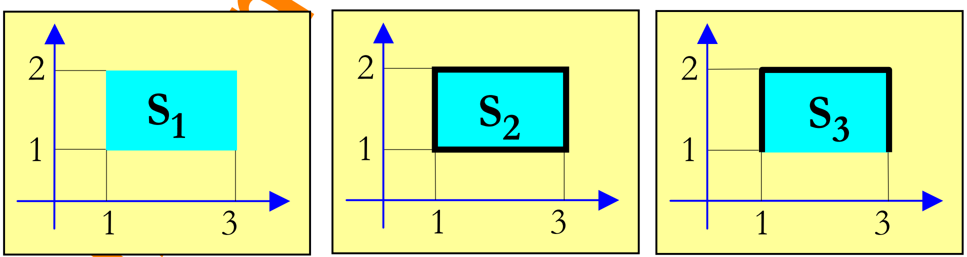
$$S_1 = \left\{(x_1;x_2) \in \Re^2 \,/\, 1 < x_1 < 3\,,\, 1 < x_2 < 2\right\} \subset \Re^2$$

- Se dice que $S \subset \Re^n$ es **cerrado** si $\text{Adh.}(S) = S$. Tal es el caso de

$$S_2 = \left\{(x_1;x_2) \in \Re^2 \,/\, 1 \le x_1 \le 3\,,\, 1 \le x_2 \le 2\right\} \subset \Re^2$$

Ojo!: igual que hay vino que no es blanco ni es tinto, hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados. Tal es el caso de

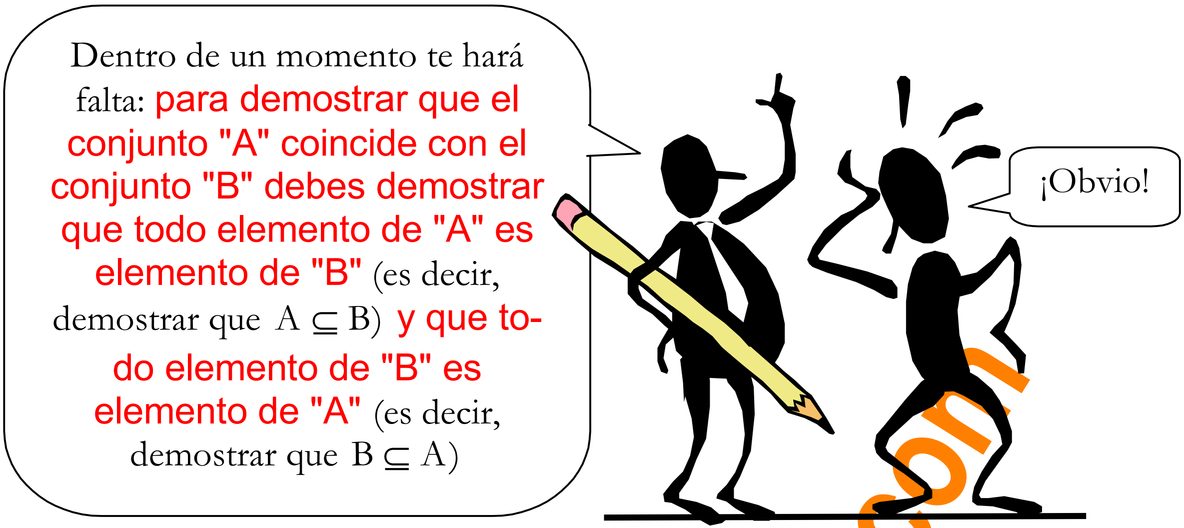
$$S_3 = \left\{(x_1;x_2) \in \Re^2 \,/\, 1 \le x_1 \le 3\,,\, 1 < x_2 \le 2\right\} \subset \Re^2$$



Observa:

El conjunto vacío $\varnothing$ es abierto, pues $\text{Int.}(\varnothing) = \varnothing$; y también es cerrado, pues $\text{Adh.}(\varnothing) = \varnothing$. El conjunto $\Re^n$ es abierto, pues $\text{Int.}(\Re^n) = \Re^n$; y también es cerrado, pues $\text{Adh.}(\Re^n) = \Re^n$.

- Se dice que "S" es un **conjunto acotado** si hay una bola abierta de radio finito que lo contiene; es decir, existe $B(\overline{x}_0;r)$ tal que $S \subset B(\overline{x}_0;r)$.
- Se dice que "S" es un **conjunto compacto** si es cerrado y acotado.



PROPIEDADES

1) El complementario de un abierto es un cerrado.

Sea $S \subset \Re^n$ un abierto y $S^c = \{\overline{x} \in \Re^n \,/\, \overline{x} \notin S\}$ el complementario de "S". Demostraremos que S^c es cerrado demostrando que $S^c = \text{Adh.}(S^c)$, y como S^c (al igual que todo subconjunto de $\Re^n$) verifica que $S^c \subseteq \text{Adh.}(S^c)$, para demostrar que $S^c = \text{Adh.}(S^c)$ basta demostrar que $\text{Adh.}(S^c) \subseteq S^c$; es decir, basta demostrar que si $\overline{x}_0 \in \text{Adh.}(S^c)$ entonces $\overline{x}_0 \in S^c$. Veamos:

Si $\overline{x}_0 \in \text{Adh.}(S^c)$, toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ contiene algún punto de S^c. En consecuencia, **por reducción al absurdo,** si $\overline{x}_0 \notin S^c$ entonces $\overline{x}_0 \in S$, y como "S" es abierto, existe una bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ que está incluida en "S", por lo que en esa bola no hay ningún punto de S^c, lo que es absurdo, pues $\overline{x}_0 \in \text{Adh.}(S^c)$. Como no puede ser $\overline{x}_0 \notin S^c$, es $\overline{x}_0 \in S^c$; por tanto: $\text{Adh.}(S^c) \subseteq S^c$.

2) El complementario de un cerrado es un abierto.

Sea $S \subset \Re^n$ un cerrado y $S^c = \{\overline{x} \in \Re^n \,/\, \overline{x} \notin S\}$ el complementario de "S". Para demostrar que S^c es abierto debemos demostrar que $S^c = \text{Int.}(S^c)$, y como S^c (al igual que todo subconjunto de $\Re^n$) verifica que $\text{Int.}(S^c) \subseteq S^c$, para demostrar que $S^c = \text{Int.}(S^c)$ basta demostrar que $S^c \subseteq \text{Int.}(S^c)$; es decir, basta demostrar que si $\overline{x}_0 \in S^c$ entonces $\overline{x}_0 \in \text{Int.}(S^c)$.

Por reducción al absurdo: siendo $\overline{x}_0 \in S^c$, si $\overline{x}_0 \notin \text{Int.}(S^c)$, en toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ hay puntos que no pertenecen a S^c; es decir, en toda bola abierta de centro en $\overline{x}_0$ hay puntos del conjunto "S", por lo que $\overline{x}_0 \in \text{Adh.}(S)$, y como por ser cerrado "S" sucede que $S = \text{Adh.}(S)$, resulta que $\overline{x}_0 \in S$, lo que es absurdo, pues $\overline{x}_0 \in S^c$.

Por tanto, si no puede ser $\overline{x}_0 \notin \text{Int.}(S^c)$, es $\overline{x}_0 \in \text{Int.}(S^c)$; así: $S^c \subseteq \text{Int.}(S^c)$.

3) *La intersección de un número finito de abiertos es un abierto.*

Sean $S_1, \dots, S_m$ subconjuntos abiertos de $\Re^n$ y "S" su intersección:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m = \bigcap_{k=1}^{k=m} S_k$$

Para demostrar que "S" es abierto debemos demostrar que $S = \text{Int.}(S)$, y como "S" (al igual que todo subconjunto de $\Re^n$) verifica que $\text{Int.}(S) \subseteq S$, para demostrar que $S = \text{Int.}(S)$ basta demostrar que $S \subseteq \text{Int.}(S)$; es decir, basta demostrar que si $\bar{x}_0 \in S$ entonces $\bar{x}_0 \in \text{Int.}(S)$. En efecto, si $\bar{x}_0 \in S$ entonces $\bar{x}_0$ pertenece a cada uno de los conjuntos $S_1, \dots, S_m$ cuya intersección es "S", y como S_k es abierto $(k = 1, \dots, m)$, hay una bola abierta $B(\bar{x}_0 ; r_k)$ que está contenida en S_k. Así, si $r = \text{mín.}\{r_1, \dots, r_m\}$, la bola $B(\bar{x}_0 ; r)$ está contenida en cada uno de los conjuntos $S_1, \dots, S_m$; por tanto, está contenida en su intersección "S" y $\bar{x}_0 \in \text{Int.}(S)$.

4) *La unión de un número finito de cerrados es un cerrado.*

Sean $S_1, S_2, \dots, S_m$ subconjuntos cerrados de $\Re^n$ y "S" su unión:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m = \bigcup_{k=1}^{k=m} S_k$$

Para demostrar que "S" es cerrado debemos demostrar que $S = \text{Adh.}(S)$, y como "S" (al igual que todo subconjunto de $\Re^n$) verifica que $S \subseteq \text{Adh.}(S)$, para demostrar que $S = \text{Adh.}(S)$ basta demostrar que $\text{Adh.}(S) \subseteq S$; es decir, basta demostrar que si $\bar{x}_0 \in \text{Adh.}(S)$ entonces $\bar{x}_0 \in S$.

En efecto, sea $\bar{x}_0 \in \text{Adh.}(S)$; o sea, toda bola abierta de centro en $\bar{x}_0$ contiene algún punto de "S". **Por reducción al absurdo:**

$$\text{si } \bar{x}_0 \notin S \Rightarrow \bar{x}_0 \notin S_k \ (\forall k = 1,2, \dots, m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}_0 \in S_k^c \ (\forall k = 1,2, \dots, m) \Rightarrow \bar{x}_0 \in \bigcap_{k=1}^{k=m} S_k^c \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{como } S_k \ (\forall k = 1,2, \dots, m) \text{ es cerrado } \Rightarrow \\ \Rightarrow S_k^c \ (\forall k = 1,2, \dots, m) \text{ es abierto } \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{k=1}^{k=m} S_k^c \text{ es abierto} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \exists\, B(\bar{x}_0 ; r) \,/\, B(\bar{x}_0 ; r) \subset \bigcap_{k=1}^{k=m} S_k^c$$

Así, hay una bola abierta de centro en $\bar{x}_0$ que no contiene ningún punto de "S", lo que es absurdo, pues $\bar{x}_0 \in \text{Adh.}(S)$.

Por tanto, si no puede ser $\bar{x}_0 \notin S$, es $\bar{x}_0 \in S$.

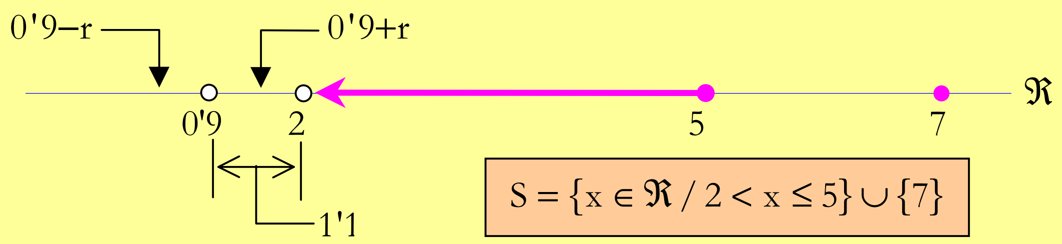
FONEMATO 1.33.1

Caracterícense topológicamente los puntos 0'9, 2, 3, 4, 4'73, 5, 6 y 7 respecto al conjunto

$$S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \leq 5\} \cup \{7\}$$

SOLUCIÓN

Caracterización topológica del punto 0'9 $\notin$ S

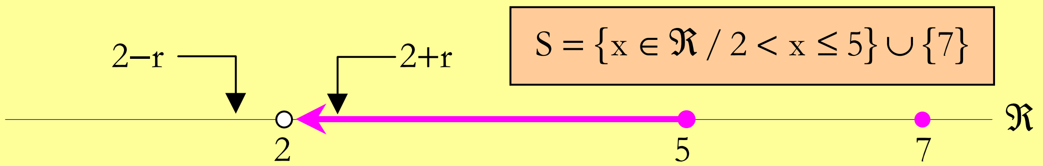


Es obvio que $0'9 \notin S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \leq 5\} \cup \{7\}$ y que la bola abierta $(0'9-r\,;0'9+r)$ de centro en 0'9 y radio "r" **muerde** o no al conjunto "S" según sea $r > 1'1$ ó $0 < r < 1'1$.

- El punto 0'9 es "exterior" a "S", pues hay bolas abiertas de centro en 0'9 que no contienen ningún punto de "S" (todas las bolas abiertas con centro en 0'9 y radio menor que 1'1).
- Como el punto 0'9 es exterior a "S", no es "adherente" a "S".
- El punto 0'9 no es "aislado" de "S", pues 0'9 no pertenece a "S".
- Como el punto 0'9 no es adherente a "S", no es de "acumulación" de "S".
- El punto 0'9 no es "interior" a "S", pues 0'9 no pertenece a "S".
- Como 0'9 es exterior a "S", no es punto "frontera" de "S".

Si "Pepe" es un punto exterior al conjunto "S", entonces "Pepe" no es punto adherente a "S", ni punto aislado de "S", ni punto de acumulación de "S", ni punto interior a "S", ni punto frontera de "S".

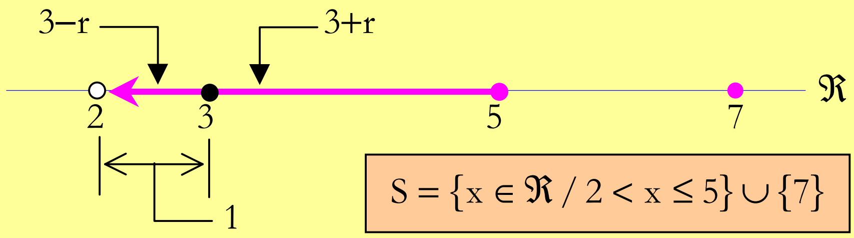
Caracterización topológica del punto 2 $\notin$ S



Es obvio que $2 \notin S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \leq 5\} \cup \{7\}$ y que toda bola abierta $(2-r\,;2+r)$ de centro en "2" **muerde** a "S"

- El punto "2" no es "exterior" a "S", pues no es posible encontrar una bola abierta de centro en "2" que no contenga ningún punto de "S".
- El punto "2" es "adherente" a "S", pues toda bola abierta de centro en "2" contiene algún punto de "S".
- El "2" no es punto "aislado" de "S", pues "2" no pertenece a "S".
- El "2" es punto de "acumulación" de "S", pues toda bola abierta de centro en "2" contiene infinitos puntos de "S".
- El "2" no es punto "interior" a "S", pues "2" no pertenece a "S".
- El "2" es punto "frontera" de "S", pues toda bola abierta con centro en "2" contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Caracterización topológica del punto $3 \in S$



Es obvio que $3 \in S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \le 5\} \cup \{7\}$ y que, si $0 < r < 1$, la bola abierta $(3-r\,;3+r)$ de centro en "3" y radio "r" sólo **muerde** a "S"

- El punto "3" no es "exterior" a "S", pues $3 \in S$.
- El punto "3" es "adherente" a "S", pues $3 \in S$.
- El "3" no es punto "aislado" de "S", pues no hay ninguna bola abierta de centro en "3" y tal que "3" sea el único punto de "S" en dicha bola.
- El "3" es punto de "acumulación" de "S", pues toda bola abierta de centro en "3" contiene infinitos puntos de "S".
- El "3" es punto "interior" a "S", pues hay bolas abiertas de centro en "3" que están incluidas en "S".
- Como "3" es interior a "S", no es punto "frontera" de "S".

Si el punto "Pepe" es interior al conjunto "S", entonces "Pepe" no es punto exterior a "S", es punto adherente a "S", no es punto aislado de "S", es punto de acumulación de "S", no es punto frontera de "S".

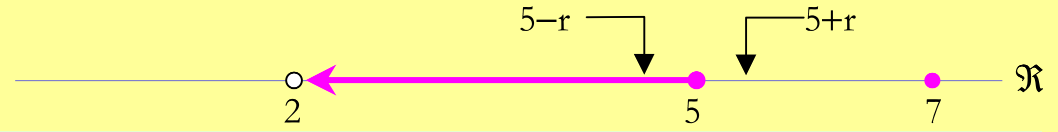
Caracterización topológica del punto $4 \in S$

Igual que para el punto "3", pues "4" también es interior al conjunto "S".

Caracterización topológica del punto $4'73 \in S$

Igual que para los puntos "3" y "4", pues 4'73 también es interior al conjunto "S".

Caracterización topológica del punto $5 \in S$



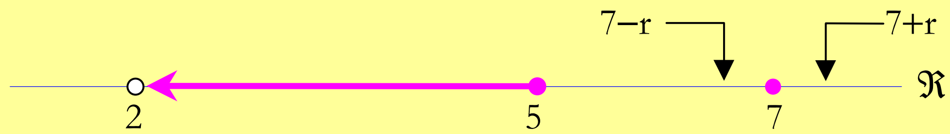
Es obvio que $5 \in S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \leq 5\} \cup \{7\}$ y que toda bola abierta $(5-r\,;5+r)$ de centro en "5" **muerde** a "S"

- El punto "5" no es "exterior" a "S", pues $5 \in S$.
- El punto "5" es "adherente" a "S", pues $5 \in S$.
- El "5" no es punto "aislado" de "S", pues no hay ninguna bola abierta de centro en "5" y tal que "5" sea el único punto de "S" en dicha bola.
- El "5" es punto de "acumulación" de "S", pues toda bola abierta de centro en "5" contiene infinitos puntos de "S".
- El "5" no es punto "interior" a "S", pues ninguna bola abierta de centro en "5" está incluida en "S".
- El "5" es punto "frontera" de "S", pues toda bola abierta con centro en "5" contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Caracterización topológica del punto $6 \notin S$

Lo mismo que para el punto 0'9, pues "6" también es exterior al conjunto "S".

Caracterización topológica del punto $7 \in S$



Es obvio que $7 \in S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \leq 5\} \cup \{7\}$ y que hay bolas abiertas $(7-r\,;7+r)$ de centro en "7" que sólo **muerden** a "S" en el punto "7"

- El punto "7" no es "exterior" a "S", pues $7 \in S$.
- El punto "7" es "adherente" a "S", pues $7 \in S$.
- El "7" es punto "aislado" de "S", pues hay bolas abiertas de centro en "7" en las que el único punto de "S" es "7".
- El "7" no es punto de "acumulación" de "S", pues hay bolas abiertas de centro en "7" que no contienen infinitos puntos de "S".
- Como el punto "7" es aislado de "S", no es "interior" a "S".
- El "7" es punto "frontera" de "S", pues toda bola abierta con centro en "7" contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Si el punto "Pepe" es aislado del conjunto "S", no es exterior a "S", es adherente a "S", no es de acumulación de "S", no es interior a "S", es frontera de "S".

Caracterización topológica del conjunto "S"

Siendo $S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \le 5\} \cup \{7\}$, es:

- $\text{Int.}(S) = \{x \in \Re \,/\, 2 < x < 5\} \ne S$, por lo que "S" no es abierto.
- $\text{Adh.}(S) = \{x \in \Re \,/\, 2 \le x \le 5\} \cup \{7\} \ne S$, por lo que "S" no es cerrado.
- $\text{Ac.}(S) = \{x \in \Re \,/\, 2 \le x \le 5\}$.
- $\text{Fr.}(S) = \{2\} \cup \{5\} \cup \{7\}$.
- El conjunto $S = \{x \in \Re \,/\, 2 < x \le 5\} \cup \{7\}$ es acotado, pues, por ejemplo, está contenido en la bola abierta de centro en el punto 234'69 y radio 4563745.
- El conjunto "S" sería compacto si fuera cerrado y acotado, pero como no es cerrado, no es compacto.

Observa:

- Si $S = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \cup \{c\}$, es:

  $* \ \text{Int.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es abierto
  $* \ \text{Adh.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} \cup \{c\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es cerrado
  $* \ \text{Ac.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\}$
  $* \ \text{Fr.}(S) = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

- Si $S = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} \cup \{c\}$, es:

  $* \ \text{Int.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es abierto
  $* \ \text{Adh.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} \cup \{c\} = S \Rightarrow$ "S" es cerrado
  $* \ \text{Ac.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\}$
  $* \ \text{Fr.}(S) = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

- Si $S = \{x \in \Re \,/\, a \le x < b\} \cup \{c\}$, es:

  $* \ \text{Int.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es abierto
  $* \ \text{Adh.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} \cup \{c\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es cerrado
  $* \ \text{Ac.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\}$
  $* \ \text{Fr.}(S) = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

- Si $S = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\}$, es:

  $* \ \text{Int.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} = S \Rightarrow$ "S" es abierto
  $* \ \text{Adh.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es cerrado
  $* \ \text{Ac.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\}$
  $* \ \text{Fr.}(S) = \{a\} \cup \{b\}$

- Si $S = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\}$, es:

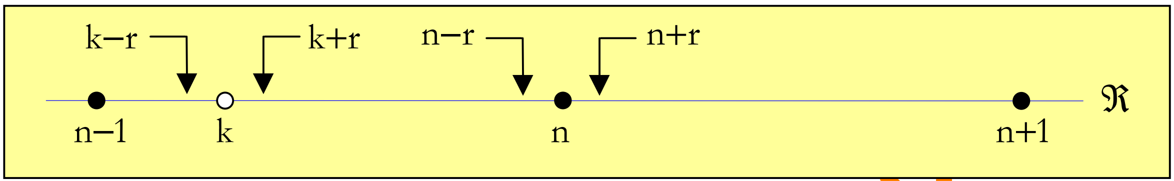
  $* \ \text{Int.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a < x < b\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es abierto
  $* \ \text{Adh.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\} = S \Rightarrow$ "S" es cerrado
  $* \ \text{Ac.}(S) = \{x \in \Re \,/\, a \le x \le b\}$
  $* \ \text{Fr.}(S) = \{a\} \cup \{b\}$

FONEMATO 1.33.2

Caracterícese topológicamente el conjunto de los números naturales, el de los números enteros, el de los números racionales y el de los números irracionales.

SOLUCIÓN

Caracterización topológica de los naturales



Sea "S" el conjunto de los números naturales y "n" un número natural:

- El punto "n" no es exterior, pues $n \in S$.
- El punto "n" es adherente, pues $n \in S$.
- El punto "n" es punto aislado de "S", pues hay bolas abiertas de centro en "n" en las que el único punto de "S" es "n".
- El punto "n" no es de acumulación, pues hay bolas abiertas de centro en "n" que no contienen infinitos puntos de "S".
- Como el punto "n" es aislado de "S", no es interior a "S".
- El punto "n" es frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "n" contiene puntos que pertenecen a "S" y puntos que no pertenecen a "S".

Si "k" no es un número natural:

- El punto "k" es exterior a "S", pues hay bolas abiertas de centro en "k" que no contienen ningún punto de "S".
- Como el punto "k" es exterior a "S", no es adherente a "S".
- El punto "k" no es punto aislado de "S", pues "k" no pertenece a "S".
- Como el punto "k" no es adherente a "S", no es de acumulación de "S".
- El punto "k" no es interior a "S", pues "k" no pertenece a "S".
- Como el punto "k" es exterior a "S", no es frontera de "S".

En definitiva, siendo "S" el conjunto de los números naturales, es:

- $\text{Int.}(S) = \varnothing \neq S$, por lo que "S" no es abierto.
- $\text{Adh.}(S) = S$, por lo que "S" es cerrado.
- $\text{Ac.}(S) = \varnothing$.
- $\text{Fr.}(S) = S$.

Caracterización topológica de los enteros

Igual que el conjunto de los números naturales.

Caracterización topológica de los racionales

Sea "S" el conjunto de los números racionales y "x" un número racional:

- El racional "x" no es exterior a "S", pues $x \in S$.
- El racional "x" es adherente a "S", pues $x \in S$.
- El racional "x" no es punto aislado de "S", pues toda bola abierta de centro en "x" contiene números racionales distintos de "x".
- El racional "x" es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en "x" contiene infinitos números racionales.
- El racional "x" no es punto interior a "S", pues como toda bola abierta de centro en "x" contiene números racionales y números irracionales, no hay ninguna bola abierta de centro en "x" que esté contenida en "S".
- El racional "x" es punto frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "x" contiene números racionales y números no racionales (irracionales).

Si "z" es un número irracional:

- El irracional "z" no es punto exterior a "S", pues toda bola abierta de centro en "z" contiene números racionales.
- Como el irracional "z" no es exterior a "S", es punto adherente a "S".
- El irracional "z" no es punto aislado de "S", pues "z" no pertenece a "S".
- El irracional "z" es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en "z" contiene infinitos números racionales.
- El irracional "z" no es punto interior a "S", pues como toda bola abierta de centro en "z" contiene números racionales y números irracionales, ninguna bola abierta de centro en "z" está contenida en "S".
- El irracional "z" es punto frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "z" contiene números racionales y números no racionales (irracionales).

En definitiva, siendo "S" el conjunto de los números racionales, es:

- $\text{Int.}(S) = \varnothing \neq S$, por lo que "S" no es abierto.
- $\text{Adh.}(S) = \Re \neq S$, por lo que "S" no es cerrado.
- $\text{Ac.}(S) = \Re$.
- $\text{Fr.}(S) = \Re$.

Caracterización topológica de los irracionales

Sea "S" el conjunto de los números irracionales y "x" un número irracional:

- El irracional "x" no es punto exterior a "S", pues toda bola abierta de centro en el irracional "x" contiene números racionales.
- Como el irracional "x" no es exterior a "S", es adherente a "S".
- El irracional "x" no es punto aislado de "S", pues toda bola abierta de centro en "x" contiene números irracionales distintos de "x".
- El irracional "x" es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en "x" contiene infinitos números irracionales.

- El irracional "x" no es punto interior a "S", pues como toda bola abierta de centro en "x" contiene números irracionales y números racionales, ninguna bola abierta de centro en "x" está contenida en "S".
- El irracional "x" es punto frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "x" contiene números irracionales y números no irracionales (racionales).

Si "z" es un número racional:

- El racional "z" no es punto exterior a "S", pues no pertenece a "S".
- Como el racional "z" no es exterior a "S", es punto adherente a "S".
- El racional "z" no es punto aislado de "S", pues "z" no pertenece a "S".
- El racional "z" es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en "z" contiene infinitos números irracionales.
- El racional "z" no es punto interior a "S", pues como toda bola abierta de centro en "z" contiene números racionales y números irracionales, ninguna bola abierta de centro en "z" está contenida en "S".
- El racional "z" es punto frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "z" contiene números irracionales y números no irracionales (racionales).

En definitiva, siendo "S" el conjunto de los números irracionales, es:

- $\text{Int.}(S) = \varnothing \neq S$, por lo que "S" no es abierto.
- $\text{Adh.}(S) = \Re \neq S$, por lo que "S" no es cerrado.
- $\text{Ac.}(S) = \Re$.
- $\text{Fr.}(S) = \Re$.

FONEMATO 1.33.3

Caracterícense topológicamente los puntos 5, 6 y 8 respecto a la siguiente sucesión de números reales:

$$S = \left\{ x_n \in \Re \,/\, x_n = 8 - \frac{4}{n},\ \ n = 1,2,3,\ldots\ldots \right\}$$

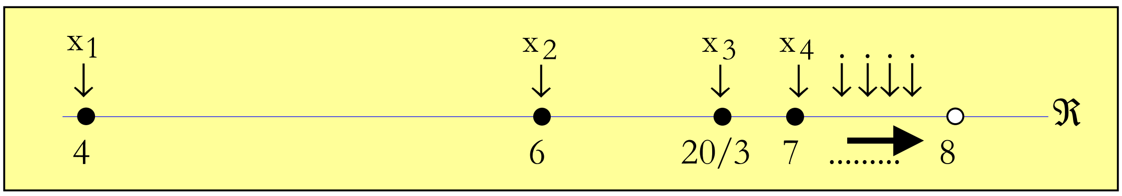
SOLUCIÓN

Al asignar a "n" los valores 1, 2, 3, ... vamos obteniendo los infinitos puntos (números reales) que forman el conjunto "S":

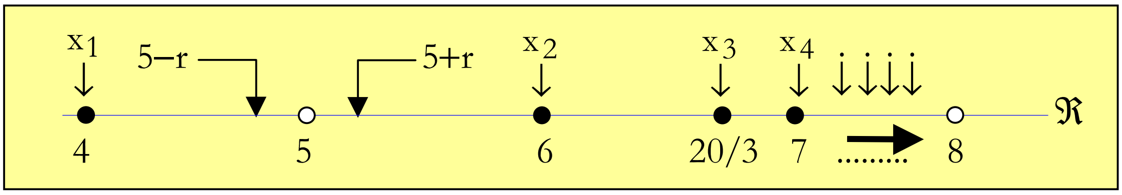
$$S = \left\{ 4,\ 6,\ \frac{20}{3},\ 7,\ \frac{36}{5},\ \frac{44}{6},\ \frac{52}{7},\ \ldots\ldots\ ,\ 8 - \frac{4}{n},\ \ldots\ldots \right\}$$

Es claro que si "n" **tiende** a infinito, el número real $4/n$ **tiende** a cero, por lo que el número real $8 - (4/n)$ **tiende** a 8 (con valores inferiores a 8, pues $4/n > 0$ para todo valor natural de "n").

Se dice que **el límite** de la sucesión "S" es el número 8 para expresar de modo rápido que el número $8 - (4/n)$ **tiende** a 8 si "n" **tiende** a infinito.



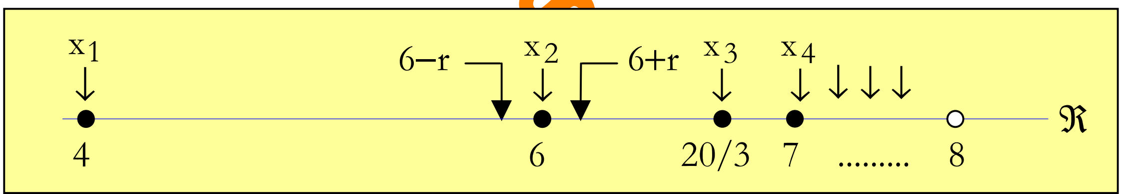
Caracterización topológica del punto $5 \notin S$



- El punto "5" es exterior a "S", pues hay bolas abiertas de centro en "5" que no contienen ningún punto de "S" (todas las bolas abiertas con centro en "5" y radio menor que 1).
- Como el punto "5" es exterior a "S", no es adherente a "S".
- El punto "5" no es punto aislado de "S", pues "5" no pertenece a "S".
- Como el punto "5" no es adherente a "S", no es de acumulación de "S".
- El punto "5" no es interior a "S", pues "5" no pertenece a "S".
- Como el punto "5" es exterior a "S", no es frontera de "S".

Lo indicado para el punto $5 \notin S$ también vale para todo punto que no pertenezca a la sucesión "S", excepto para el punto "8", que, por ser el límite de la sucesión "S", aunque no pertenezca a "S" (pues el número real $8-(4/n)$ no toma el valor "8" para ningún valor natural de "n"), tiene características distintas a los demás puntos que no pertenecen a "S".

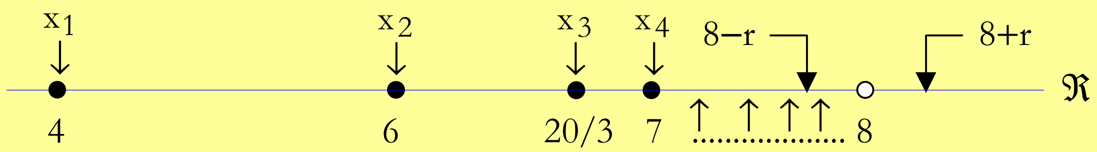
Caracterización topológica del punto $6 \in S$



- El punto "6" no es exterior a "S", pues $6 \in S$.
- El punto "6" es adherente a "S", pues $6 \in S$.
- El punto "6" es punto aislado de "S", pues hay bolas abiertas de centro en "6" en las que el único punto de "S" es "6".
- El punto "6" no es de acumulación de "S", pues hay bolas abiertas de centro en "6" que no contienen infinitos puntos de "S".
- Como el punto "6" es aislado de "S", no es interior a "S".
- El punto "6" es frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "6" contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Lo indicado para el punto $6 \in S$ también vale para cualquier otro punto que pertenezca a la sucesión "S", excepto para el límite "L" de la sucesión "S", en caso de que "L" pertenezca a "S".

Caracterización topológica del punto $8 \notin S$



El que la sucesión "S" tenga límite "8" significa que, sin más que elegir "n" lo bastante grande, el número real $|x_n - 8| = |(8-(4/n)-8| = 4/n$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera. Por tanto, toda bola abierta de centro en "8" contiene infinitos elementos de "S", pues contiene todos los elementos de la sucesión "S" **a partir de uno de ellos**

- El punto "8" no es exterior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en "8" carece de puntos de "S".
- El punto "8" es adherente a "S", pues toda bola abierta de centro en "8" contiene algún punto de "S".
- El punto "8" no es punto aislado de "S", pues toda bola abierta de centro en "8" contiene algún punto de "S" distinto de "8".
- El punto "8" es de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en "8" contiene infinitos puntos de "S".
- El punto "8" no es interior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en "8" está incluida en "S".
- El punto "8" es frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en "8" contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Lo indicado para el punto "8" vale para el límite "L" (finito) de cualquier sucesión de números reales.

Caracterización topológica del conjunto "S"

Siendo $S = \left\{ x_n \in \Re \,/\, x_n = 8 - \frac{4}{n},\ \ n = 1,2,3,\ldots\ldots \right\}$, se tiene que:

- $\text{Int.}(S) = \varnothing \neq S$, por lo que "S" no es abierto.
- $\text{Adh.}(S) = S \cup \{8\} \neq S$, por lo que "S" no es cerrado.
- $\text{Ac.}(S) = \{8\}$ y $\text{Fr.}(S) = S \cup \{8\}$.
- El conjunto "S" es acotado, pues, por ejemplo, está contenido en la bola abierta de centro en el punto 444'69 y radio 435563745.
- El conjunto "S" sería compacto si fuera cerrado y acotado, pero como no es cerrado, no es compacto.

Observa: si $S^* = \left\{ x_n \in \Re \,/\, x_n = 8 - \frac{4}{n},\ \ n = 1,2,3,\ldots\ldots \right\} \cup \{8\}$, es:

- $\text{Int.}(S^*) = \varnothing \neq S^*$, por lo que S^* no es abierto.
- $\text{Adh.}(S^*) = S^*$, por lo que S^* es cerrado.
- $\text{Ac.}(S^*) = \{8\}$ y $\text{Fr.}(S^*) = S^*$.

En general, siendo "S" una sucesión de números reales que tiene límite finito "L", es:

- $\text{Int.}(S) = \varnothing \neq S$, por lo que "S" no es abierto
- $\text{Adh.}(S) = S \cup \{L\}$; así si $\begin{cases} L \in S, \text{ es Adh.}(S) = S \Rightarrow \text{"S" es cerrado} \\ L \notin S, \text{ es Adh.}(S) \neq S \Rightarrow \text{"S" no es cerrado} \end{cases}$
- $\text{Ac.}(S) = \{L\}$
- $\text{Fr.}(S) = S \cup \{L\}$

Pero si la sucesión carece de límite finito, entonces:

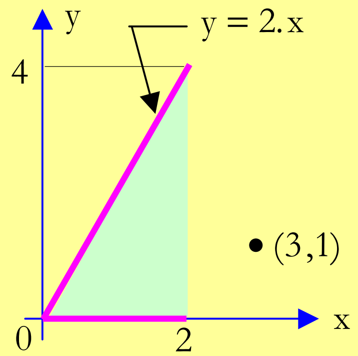
- $\text{Int.}(S) = \varnothing \neq S$, por lo que "S" no es abierto
- $\text{Adh.}(S) = S$, por lo que "S" es cerrado
- $\text{Ac.}(S) = \varnothing$
- $\text{Fr.}(S) = S$

FONEMATO 1.33.4

Caractéricense topológicamente los puntos $(0;2), (2;0), (1;1), (1;2)$ y $(3;1)$ con respecto al conjunto $S = \{(x;y) \in \Re^2 \,/\, y \leq 2.x,\ x < 2,\ y \geq 0\} \cup \{(3;1)\}$.

SOLUCIÓN

Para que todo resulte sencillo visualizamos el conjunto "S".

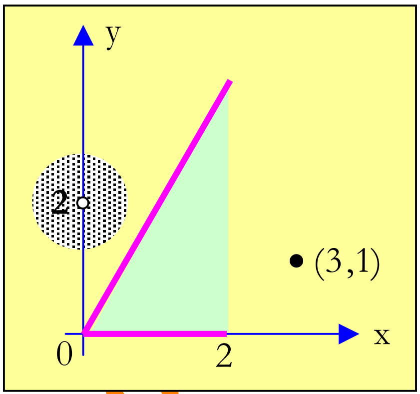


Además del punto $(3;1)$, forman "S" los puntos de $\Re^2$ tales que:

* Están en la recta $y = 2.x$ ó debajo de ella.
* Están a la izquierda de la recta $x = 2$.
* Están en el eje de abcisas o por encima de él.

Caracterización topológica del punto (0;2) $\notin$ S

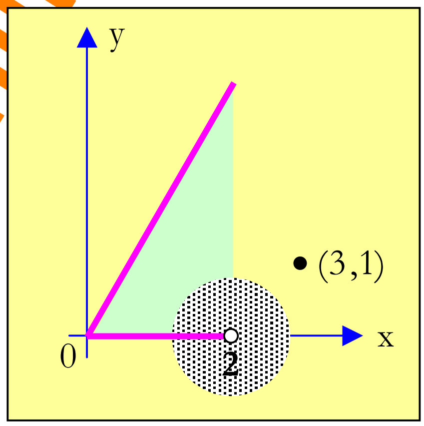
- El punto (0;2) es exterior a "S", pues hay bolas abiertas de centro en (0;2) que no contienen ningún punto de "S".



- Siendo (0;2) exterior a "S", no es adherente a al conjunto "S".
- El punto (0;2) no es aislado de "S", pues no pertenece a "S"
- Como (0;2) no es adherente a "S", no es punto de acumulación de "S".
- (0;2) no es interior a "S", pues $(0;2) \notin S$.
- Como (0;2) es exterior a "S", no es punto frontera de "S".

Caracterización topológica del punto (2;0) $\notin$ S

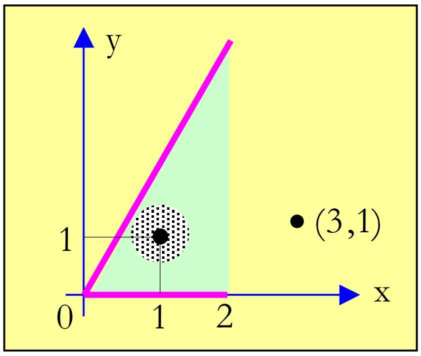
- El punto (2;0) no es exterior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en (2;0) carece de puntos de "S".



- El punto (2;0) es punto adherente a "S", pues toda bola abierta de centro en (2;0) contiene algún punto de "S".
- El punto (2;0) no es punto aislado del conjunto "S", pues no pertenece a "S".
- (2;0) es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en (2;0) contiene infinitos puntos de "S".
- (2;0) no es punto interior a "S", pues $(2;0) \notin S$.
- (2;0) es punto frontera de "S", pues toda bola abierta de centro en (2;0) contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Caracterización topológica del punto (1;1) $\in$ S

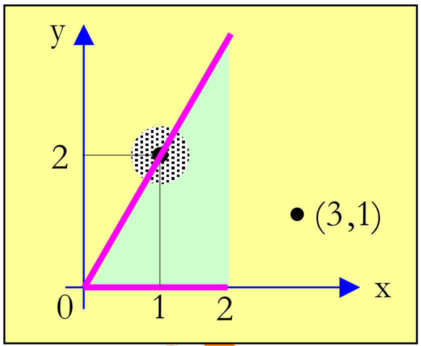
- (1;1) no es exterior a "S", pues $(1;1) \in S$.



- (1;1) es adherente a "S", pues $(1;1) \in S$.
- (1;1) no es punto aislado de "S", pues no hay ninguna bola abierta de centro en (1;1) tal que (1;1) sea el único punto de "S" en dicha bola.
- (1;1) es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en (1;1) contiene infinitos puntos de "S".
- (1;1) es punto interior a "S", pues hay bolas abiertas de centro en (1;1) que están contenidas en "S".
- Como el punto (1;1) es interior a "S", no es punto "frontera" de "S".

Caracterización topológica del punto (1;2) ∈ S

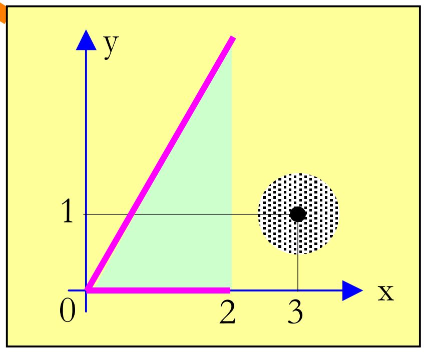
- $(1;2)$ no es exterior a "S", pues $(1;2) \in S$.
- $(1;2)$ es adherente a "S", pues $(1;2) \in S$.
- $(1;2)$ no es punto "aislado" de "S", pues no hay ninguna bola abierta de centro en $(1;2)$ tal que $(1;2)$ sea el único punto de "S" que hay en ella.
- $(1;2)$ es punto de acumulación de "S", pues toda bola abierta de centro en $(1;2)$ contiene infinitos puntos de "S".



- $(1;2)$ no es punto interior a "S", pues ninguna bola abierta de centro en $(1;2)$ está incluida en "S".
- $(1;2)$ es punto frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en $(1;2)$ contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Caracterización topológica del punto (3;1) ∈ S

- $(3;1)$ no es punto exterior a "S", pues $(3;1) \in S$.
- $(3;1)$ es punto adherente a "S", pues $(3;1) \in S$.
- $(3;1)$ es punto aislado de "S", pues hay bolas abiertas de centro en $(3;1)$ en las que el único punto de "S" es $(3;1)$.
- $(3;1)$ no es punto de acumulación de "S", pues hay bolas abiertas de centro en $(3;1)$ que no contienen infinitos puntos de "S".



- Como $(3;1)$ es aislado de "S", no es punto interior a "S".
- $(3;1)$ es punto frontera de "S", pues toda bola abierta con centro en $(3;1)$ contiene puntos de "S" y puntos que no son de "S".

Caracterización topológica del conjunto "S"

Siendo $S = \{(x;y) / y \le 2.x,\ x < 2,\ y \ge 0\} \cup \{(3;1)\}$, es:

- $\text{Int.}(S) = \{(x;y) / y > 2.x,\ x < 2,\ y > 0\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es abierto.
- $\text{Adh.}(S) = \{(x;y) / y \le 2.x,\ x \le 2,\ y \ge 0\} \cup \{(3;1)\} \ne S \Rightarrow$ "S" no es cerrado.
- $\text{Ac.}(S) = \{(x;y) / y \le 2.x,\ x \le 2,\ y \ge 0\}$.
- La frontera de "S" la forman el punto $(3;1)$ y los puntos $(x;y)$ situados en alguno de los lados del triángulo de vértices $(0;0)$, $(2;0)$ y $(2;4)$.
- "S" es acotado, pues, por ejemplo, está contenido en la bola abierta de centro en el punto $(32;98)$ y radio 43556377667654344.
- "S" sería compacto si fuese cerrado y acotado, pero al no ser cerrado no es compacto.

FONEMATO 1.33.5

Pruébese que $\text{Adh.}(S) = S \cup \text{Ac.}(S)$.

SOLUCIÓN

Probaremos que $\text{Adh.}(S) = S \cup \text{Ac.}(S)$ probando que

$$\begin{cases} 1)\ \text{Adh.}(S) \subseteq S \cup \text{Ac.}(S) \\ 2)\ S \cup \text{Ac.}(S) \subseteq \text{Adh.}(S) \end{cases}$$

Veamos:

1) Si $x \in \text{Adh.}(S)$ puede suceder que $x \in S$ o que $x \notin S$.
Obviamente, si $x \in S$ sucede que $x \in S \cup \text{Ac.}(S)$.
Si $x \notin S$, por ser $x \in \text{Adh.}(S)$, toda bola abierta $B(x;r)$ de centro en $x \notin S$ contiene algún punto de "S", es decir, $S \cap B(x;r) \neq \varnothing$. Como la intersección $S \cap B(x;r)$ tiene infinitos puntos (por reducción al absurdo: si $x \notin S$ y en $S \cap B(x;r)$ hubiera un número finito de puntos $x_1, \ldots\ldots, x_k$, sin más que elegir $r^* > 0$ inferior a la menor de las distancias de "x" a los puntos $x_1, \ldots\ldots, x_k$, sería $S \cap B(x;r^*) = \varnothing$; es decir, "x" no sería adherente a "S"), es $x \in \text{Ac.}(S)$, por lo que $x \in S \cup \text{Ac.}(S)$.
Así, si $x \in \text{Adh.}(S)$, tanto si $x \in S$ como si $x \notin S$, sucede que $x \in S \cup \text{Ac.}(S)$, lo que garantiza que $\text{Adh.}(S) \subseteq S \cup \text{Ac.}(S)$.

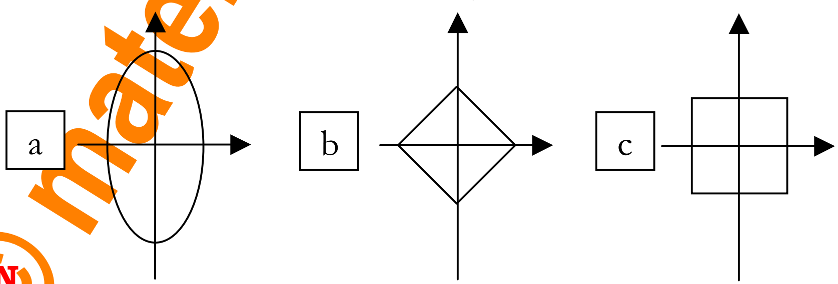
2) $$x \in S \cup \text{Ac.}(S) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in S \Rightarrow x \in \text{Adh.}(S) \\ \text{ó} \\ x \in \text{Ac.}(S) \Rightarrow x \in \text{Adh.}(S) \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \text{Adh.}(S) \Rightarrow$$

$\boxed{\text{pues todo punto de acumulación es de adherencia}}$

$$\Rightarrow S \cup \text{Ac.}(S) \subseteq \text{Adh.}(S)$$

FONEMATO 1.33.6

Si en $\Re^2$ tomamos como distancia la de Manhattan, ¿cuál de las siguientes regiones corresponde a la bola de centro en $(0;0)$ y radio "r"?

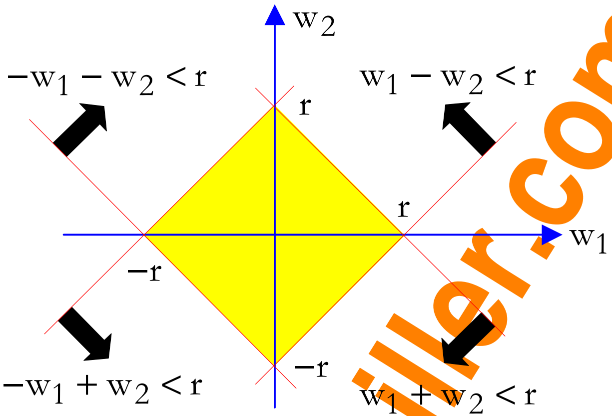


SOLUCIÓN

La distancia de Manhattan entre los puntos $\bar{x} = (x_1;x_2)$ e $\bar{y} = (y_1;y_2)$ es el número real no negativo $d(\bar{x};\bar{y}) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$.

Como la bola $B((0;0);r)$ de centro en el punto $(0;0)$ y radio "r" la forman los puntos $w = (w_1;w_2) \in \Re^2$ cuya distancia de Manhattan a $(0;0)$ es inferior a "r", resulta ser:

$$B((0;0);r)=\{w=(w_1;w_2)\in\Re^2\,/\,|w_1-0|+|w_2-0|<r\}=$$
$$=\{w=(w_1;w_2)\in\Re^2\,/\,|w_1|+|w_2|<r\}=$$
$$=\left\{w=(w_1;w_2)\in\Re^2\Big/\begin{array}{c} w_1+w_2<r \text{ si } w_1\ge 0 \text{ y } w_2\ge 0\\ w_1-w_2<r \text{ si } w_1\ge 0 \text{ y } w_2<0\\ -w_1+w_2<r \text{ si } w_1<0 \text{ y } w_2\ge 0\\ -w_1-w_2<r \text{ si } w_1<0 \text{ y } w_2<0\end{array}\right\}$$



1.34 ENTORNO DE UN PUNTO

Por primera vez en este libro encontramos la palabra **entorno**, y puedes comprobar que, entre otras acepciones, el diccionario de la Real Academia dice que **entorno** es **ambiente, lo que "rodea".**

En el Cálculo Diferencial de una variable que se estudia en el Bachillerato no se habla de "bolas", pero sí de "entornos" ...... **en Bachillerato llamábamos "entorno" a lo que ahora llamamos "bola abierta".**

Por ejemplo, en Bachillerato te dijeron (se supone) que, en el conjunto $\Re$, el entorno de centro en el punto "2" y radio $0'27$ es el subconjunto de $\Re$ formado por los puntos "x" cuya distancia al punto "2" es inferior a $0'27$ (o sea, lo que ahora hemos llamado bola abierta de centro en el punto "2" y radio $0'27$); es decir, el subconjunto que forman los puntos "x" tales que $|x-2|<0'27$, y como

$$|x-2|<0'27\Rightarrow -0'27<x-2<0'27\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0'27+2<x<0'27+2\Rightarrow 1'73<x<2'27$$

resultaba que el entorno de centro en el punto "2" y radio $0'27$ era el subconjunto de $\Re$ formado por los números mayores que $1'73$ y menores que $2'27$. Dicho subconjunto también lo llamábamos "intervalo abierto" $(1'73;2'27)$.

Si el profe que te explique el Cálculo Diferencial de varias variables "pasa" de lo "topológico", te dirá lo mismo que en el Bachillerato; o sea, te dirá que "entorno" es sinónimo de "bola abierta" ...... incluso puede que ni tan siquiera te hable de "bolas abiertas" y simplemente te diga que, en $\Re^n$, se llama entorno de centro en el punto $\bar{x}_0\in\Re^n$ y radio $r>0$ al subconjunto de $\Re^n$ que forman los puntos $\bar{x}\in\Re^n$ cuya distancia al punto $\bar{x}_0$ es inferior a "r".

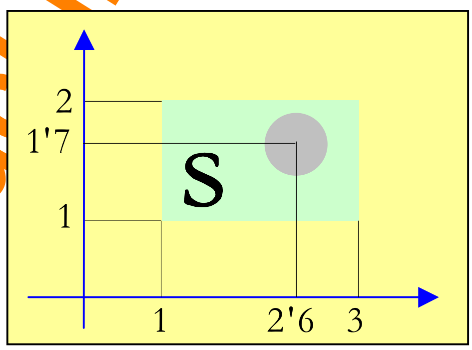
Si el profe "no pasa" de lo "topológico" cambiará el criterio del Bachillerato; es decir, considerará que "entorno" no es sinónimo de "bola abierta". En tal caso, después de decirte que la bola abierta de centro en el punto $\overline{x}_0 \in \Re^n$ y radio $r > 0$ es el subconjunto de $\Re^n$ que forman los puntos $\overline{x} \in \Re^n$ cuya distancia al punto $\overline{x}_0$ es inferior a "r", te dirá que el conjunto $S \subset \Re^n$ es un **entorno** del punto $\overline{x}_0 \in S$ si "S" es un "conjunto abierto" ..... y a continuación te hará ver que como toda bola abierta $B(\overline{x}_0;r) \subset S$ con centro en $\overline{x}_0$ es un "conjunto abierto", toda bola abierta $B(\overline{x}_0;r) \subset S$ con centro en $\overline{x}_0$ es un "entorno" de $\overline{x}_0$; pero no todo "entorno" de $\overline{x}_0$ es "bola abierta" <u>con centro</u> en $\overline{x}_0$.

Por ejemplo, siendo "abierto" el conjunto $S = \{x \in \Re \,/\, 1 < x < 5\} \equiv (1;5)$, como $2 \in S = (1;5)$, según la nueva definición de "entorno", el conjunto "S" es un entorno del punto "2"; pero "S" no es una bola abierta <u>con centro</u> en "2", pues "2" no equidista de los puntos "1" y "5".

Por ejemplo, el conjunto

$$S = \left\{(x_1;x_2) \in \Re^2 \,/\, 1 < x_1 < 3 \,, 1 < x_2 < 2\right\}$$

es abierto, y como $\overline{a} = (2'6;1'7) \in S$, resulta que, según la nueva definición de "entorno", el conjunto "S" es un entorno del punto $\overline{a}$ ..... pero "S" no es una "bola abierta" con centro en $\overline{a}$, pues no existe $r > 0$ tal que $B(\overline{a};r) = S$.

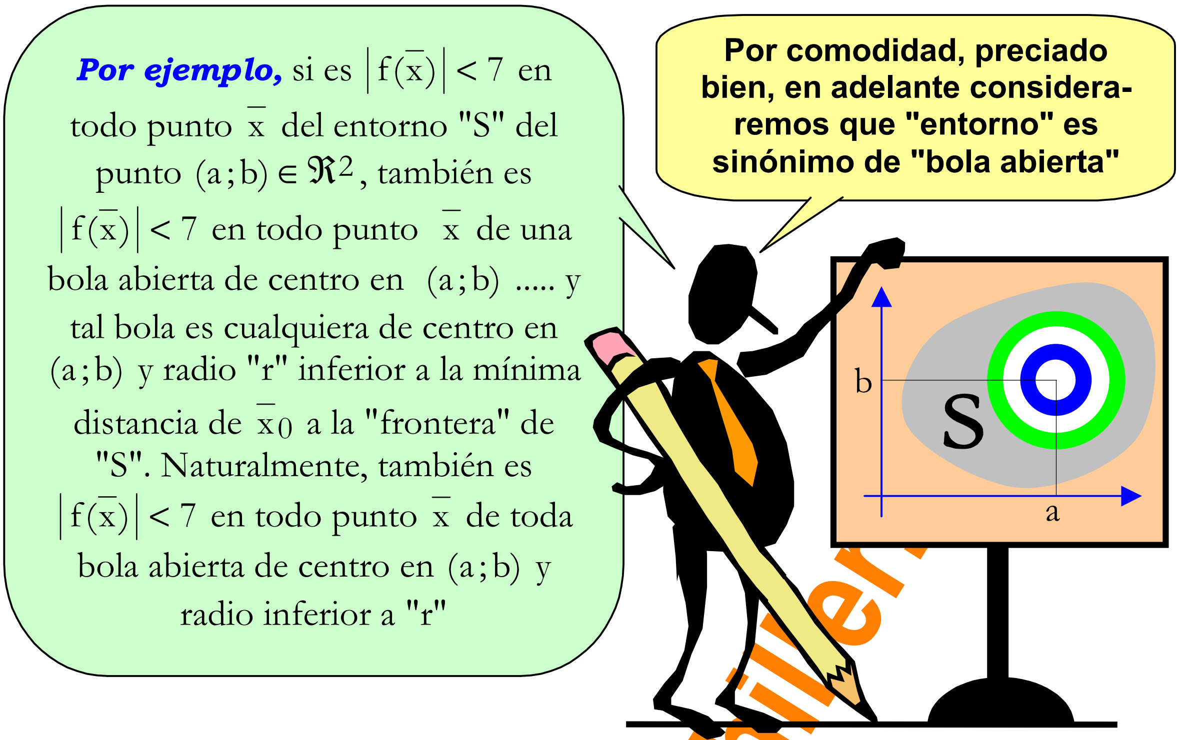


Pregunta:

¿En qué influye mantener el criterio del Bachillerato ("entorno" es sinónimo de "bola abierta") o cambiarlo, llamando bola abierta de centro en $\overline{x}_0 \in \Re^n$ y radio $r > 0$ al subconjunto de $\Re^n$ que forman los puntos cuya distancia a $\overline{x}_0$ es menor que "r", y llamando entorno de $\overline{x}_0$ a todo subconjunto <u>abierto</u> de $\Re^n$ que contenga a $\overline{x}_0$?

Respuesta:

El que "entorno" y "bola abierta" no se consideren sinónimos es irrelevante para lidiar la "sustancia" del límite, la continuidad y la derivabilidad de un campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ en un punto $\overline{x}_0 \in \Re^n$, pues **la sustancia tiene que ver con las propiedades de "f" en los puntos que "rodean" a $\overline{x}_0$**, y da igual que tales puntos sean los de un "entorno" de $\overline{x}_0$ (subconjunto <u>abierto</u> de $\Re^n$ que contiene a $\overline{x}_0$) o los de una "bola abierta" con centro en $\overline{x}_0$, pues es requeteobvio que **si un campo escalar "f" verifica una cierta propiedad en todo punto de un entorno "S" del punto "Pepe", el campo "f" también verifica esa propiedad en todo punto de toda bola abierta de centro en "Pepe" que esté contenida en "S".**

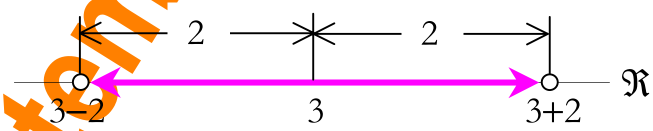


Entorno reducido de un punto

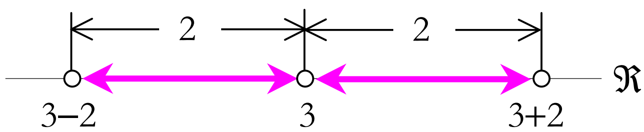
Si del entorno o bola abierta $B(\overline{x}_0;r) = \left\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n \;/\; d(\overline{x};\overline{x}_0) < r\right\}$ de centro en el punto $\overline{x}_0 = (x_1^0; \ldots; x_n^0) \in \Re^n$ y radio "r" eliminamos el propio punto $\overline{x}_0$ obtenemos el **entorno reducido** de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r", que denotamos $B^*(\overline{x}_0;r)$; es decir:

$$B^*(\overline{x}_0;r) = \left\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n \;/\; 0 < d(\overline{x};\overline{x}_0) < r\right\}$$

Por ejemplo, en el conjunto $\Re$, el entorno de centro en el punto "3" y radio 2 es el conjunto que forman los puntos "x" tales que $|x-3| < 2$, que son los puntos del intervalo $(3-2;3+2)$.

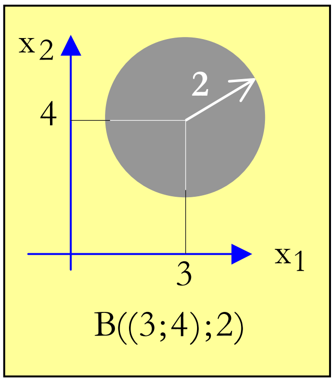


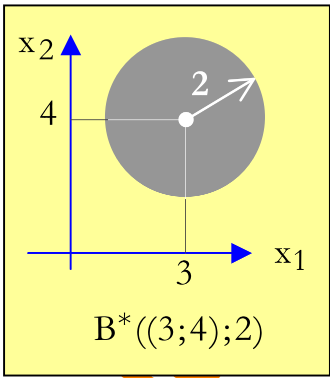
Si de dicho entorno de "3" eliminamos el propio punto "3", obtenemos el entorno "reducido" de centro en "3" y radio 2, que está formado por los puntos "x" tales que $0 < |x-3| < 2$; es decir, los "x" tales que $x \in (3-2;3) \cup (3;3+2)$.



Los puntos "x" tales que $x \in (3-2;3)$ forman un semientorno reducido izquierdo de "3", y los puntos "x" tales que $x \in (3;3+2)$ forman un semientorno reducido derecho de "3".

Por ejemplo, en el conjunto $\Re^2$, el entorno de centro en el punto $(3;4)$ y radio 2 lo forman los puntos $(x_1;x_2)$ tales que $\sqrt{(x_1-3)^2+(x_2-4)^2}<2$, que son los interiores a la circunferencia de centro en $(3;4)$ y radio 2. Si de este entorno de $(3;4)$ eliminamos el propio punto $(3;4)$ (es decir, el centro de la circunferencia) obtenemos el entorno "reducido" de centro en $(3;4)$ y radio 2.





No vale inventar propiedades inexistentes

La ignorancia es muy atrevida; por eso hay quien con la mayor desfachatez inventa propiedades inexistentes si sus neuronas se congelan por "algo" que deberían saber y no saben.

Ejemplos de propiedades inexistentes frecuentemente inventadas

$$|a+b|=|a|+|b|$$

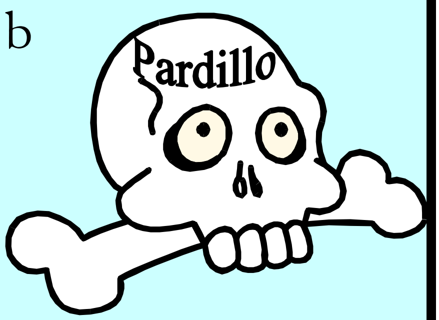
$$\operatorname{sen}(7.x)=7.\operatorname{sen} x$$

$$\cos(a+b)=\cos a+\cos b$$

$$\log_5(a+b)=\log_5 a+\log_5 b$$

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$



EJERCICIOS PARA QUE EL LECTOR TAMBIÉN HAGA ALGO

1) Eres eficiente repartidor de la empresa BFD (Basilio, Funciones a Domicilio) y debes determinar en qué puntos de $\Re^2$ es peligroso el trabajo con las siguientes funciones:

01) $f(x;y) = x^2 + 2.y - x.y^2$

02) $f(x;y) = x^3 + 2.x.y - x^2.y$

03) $f(x;y) = 7.y^5 + 2.y^9 - x^2.y$

04) $f(x;y) = \dfrac{5.x^3 - 3.x^9 + x.y^7}{x - y}$

05) $f(x;y) = \dfrac{5.y^5 - 3.x.y^9}{4 + 3.x - 7.y}$

06) $f(x;y) = \dfrac{5.x^7 - 3.x^3.y}{4 + 3.x}$

07) $f(x;y) = \dfrac{5.x^7 - 3.x^3.y}{x^2 + y^2}$

08) $f(x;y) = \dfrac{x^7 - y^3}{1 + x^2 + y^2}$

09) $f(x;y) = \dfrac{x^2 - y^5}{1 + x^2 - y^2}$

10) $f(x;y) = \dfrac{x + x.y}{x^4 + y^6}$

11) $f(x;y) = \dfrac{x^2 - y^5}{1 + x^4 + y^6}$

12) $f(x;y) = 3^{x+y}$

13) $f(x;y) = 4^{x.y}$

14) $f(x;y) = 4^{x/(1-y)}$

15) $f(x;y) = 4^{x/(1+y^8)}$

16) $f(x;y) = 4^{y/(x+y)}$

17) $f(x;y) = \dfrac{x^2 - y^5}{1 + e^{x.y}}$

18) $f(x;y) = \dfrac{x^2 - y^5}{1 - e^{x.y}}$

19) $f(x;y) = \text{Ln }(1 + x - y)$

20) $f(x;y) = \text{Ln }(4 + x^2 + y^6)$

21) $f(x;y) = \text{Ln } \dfrac{1 + x^6 + y^4}{x - y}$

22) $f(x;y) = \dfrac{\text{Ln }(x - 1)}{\text{Ln }(y + 2)}$

23) $f(x;y) = (1 + x - y)^{3/5}$

24) $f(x;y) = (2 + x.y)^{1/3}$

25) $f(x;y) = (1 - x.y^2)^{2/7}$

26) $f(x;y) = \left(\dfrac{1 + x - y}{x - 2}\right)^{2/9}$

27) $f(x;y) = \dfrac{y}{x} + (x - y)^{4/9}$

28) $f(x;y) = \dfrac{e^{y/x}}{1 - x}.\sqrt{3 - y}$

29) $f(x;y) = \sqrt[6]{1 + x^2 + y^4} + e^{1/x}$

30) $f(x;y) = \sqrt[4]{\dfrac{1 + x^4}{1 - 2.x + y}} + \dfrac{2}{x}$

31) $f(x;y) = \dfrac{7 + \sqrt{x - y}}{1 - \text{Ln } x} + \dfrac{1}{y}$

32) $f(x;y) = x.y^2 + \sqrt{(x^2 + y)/y}$

33) $f(x;y) = \dfrac{\text{arc sen }(1 + x.y)}{x^4 + y^4}$

34) $f(x;y) = \text{arc cos }(x^2 + y^2)$

35) $f(x;y) = \text{sen } \dfrac{x + y}{1 - x}$

36) $f(x;y) = \cos \dfrac{x.y}{2 - y}$

37) $f(x;y) = \text{tg } \dfrac{x + y}{x - y}$

38) $f(x;y) = \text{sen } \sqrt{1 - x.y}$

39) $f(x;y)=\dfrac{\cos\ (\text{Ln}\ x.y)}{2+3^{1/y}}$ 40) $f(x;y)=\dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\text{sen}\ (x/y)}$

41) $f(x;y)=\dfrac{x.y^4}{1-\cos\ (x+y)}$ 42) $f(x;y)=x.\text{Ln}\ (1+y^2)$

43) $f(x;y)=y.5^{y/(1+x^2)}$ 44) $f(x;y)=2+\sqrt{-x}+\text{sen}\ \sqrt{y}$

2) Determínese el dominio de definición de las funciones del ejercicio anterior.

3) Determínese el dominio de definición de los siguientes campos escalares:

1) $f(x;y)=\dfrac{x^2-x.y}{1+x-y}+\text{Ln}\ (2-x)+\sqrt{3-y}+\sqrt[3]{4-x}$

2) $f(x;y)=\text{Ln}\ \left((16-x^2-y^2).(x^2+y^2-4)\right)$

3) $f(x;y)=\text{arc sen}\ (x+y)+\text{arc cos}\ (x-y)$

4) $f(x;z)=2^{x/z}+3^{z/x}$

5) $f(x;y)=\sqrt{6-2.x+3.y}+\sqrt{x^2+y^2-\sqrt{1+x^2+y^2}}$

6) $f(x;y)=\text{tg}\ (x-y)+\text{cotg}\ (x+y)$

4) Determínese el dominio de definición de los siguientes campos vectoriales:

1) $f(x;y)=(x^2.y\ ;\ x+y\ ;\ x-y^2\ ;\ x^3.y^2\ ;\ x^4-y\ ;\ x.y^2)$

2) $f(x;y)=(x^2/(x+y)\ ;\ x-y\ ;\ x.y^2)$

3) $f(u;v;w)=(e^{u.v}\ ;\ \text{Ln}\ (u+w)\ ;\ \sqrt[3]{w-v})$

4) $f(x)=(x^2/(1-x)\ ;\ 3.x\ ;\ e^x\ ;\ \text{arc sen}\ x)$

5) $f(z;t)=(\sqrt{z-t}\ ;\ \sqrt[3]{z-t})$

6) $f(\delta;\varepsilon)=(\varepsilon^2/(\delta-\varepsilon)\ ;\ \left|\delta^2/(1-e^{\varepsilon})\right|\ ;\ \text{arc cos}\ \delta.\varepsilon)$

7) $f(u;v)=(u/(v^2+u^2)\ ;\ v/(u^8+v^6)\ ;\ 1/(u^2+v^4))$

5) Determínense $h_1=g\bullet f$ y $h_2=f\bullet g$ y sus dominios de definición:

1) $f(x;y;z)=(x+y\ ;\ x.y.z)$; $g(x;y)=e^{x.y}$

2) $f(x;y;z)=(\text{Ln}\ (x.y.z)\ ;\ \text{tg}\ (x+y))$; $g(u;v)=(u/v\ ;\ \sqrt{u-v})$

3) $f(x;z)=(\sqrt{x}\ ;\ \sqrt{z}\ ;\ \sqrt{x-z})$; $g(u;v;w)=(u+v\ ;\ v-w)$

6) Dibújese el mapa de curvas de nivel de los siguientes campos escalares:

1) $f(x;y)=x^2-4.x-y$ 2) $f(x;y)=x/y$

3) $f(x;y)=2.x+3.y$ 4) $f(x;y)=\text{sen}\ (x-y)$

5) $f(x;y)=\text{Ln}\ (x+y)$ 6) $f(x;y)=\text{Ln}\ (x^2+y^2)$

7) $f(x;y)=\sqrt{x-y}$ 8) $f(x;y)=y^2+x$

Inteligencia, aunque me escueza, dame el nombre exacto de las cosas

SOLUCIONES

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

01) "f" es un polinomio $\Rightarrow$ es inofensiva en todo punto.

02) "f" es un polinomio $\Rightarrow$ es inofensiva en todo punto.

03) "f" es un polinomio $\Rightarrow$ es inofensiva en todo punto.

04) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ sólo es peligrosa si $(x;y)$ es tal que $x-y=0$.

05) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ sólo es peligrosa si $4+3.x-7.y=0$.

06) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ sólo es peligrosa si $(x;y)$ es tal que $4+3.x=0$.

07) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en el punto $(0;0)$, pues el denominador x^2+y^2 sólo se anula en dicho punto.

08) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ es inofensiva en todo punto, pues el denominador $1+x^2+y^2$ no se anula en ningún punto.

09) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ sólo es peligrosa si $1+x^2-y^2=0$.

10) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en el punto $(0;0)$, pues el denominador x^4+y^6 sólo se anula en dicho punto.

11) "f" es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos que anulan su denominador $\Rightarrow$ es inofensiva en todo punto, pues el denominador $1+x^4+y^6$ no se anula en ningún punto.

12) "f" es una función "exponencial" ($\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos en que el exponente sea peligroso) cuyo exponente es un inofensivo polinomio $\Rightarrow$ "f" no es peligrosa en ningún punto.

13) "f" es "exponencial" ($\Rightarrow$ sólo es peligrosa si lo es el exponente) cuyo exponente es un inofensivo polinomio $\Rightarrow$ "f" no es peligrosa en ningún punto.

14) "f" es "exponencial" " ($\Rightarrow$ sólo es peligrosa si lo es el exponente) cuyo exponente es cociente de polinomios $\Rightarrow$ "f" es peligrosa en los puntos $(x;y)$ tales que $1-y=0$, pues en ellos se anula el denominador del exponente.

15) "f" es "exponencial" ($\Rightarrow$ sólo es peligrosa si lo es el exponente) cuyo exponente es un cociente de polinomios $\Rightarrow$ "f" no es peligrosa en ningún punto, pues el denominador $1+y^8$ del exponente no se anula en ningún punto.

16) "f" es "exponencial" " ($\Rightarrow$ sólo es peligrosa si lo es el exponente) cuyo exponente es cociente de polinomios $\Rightarrow$ "f" es peligrosa en los puntos $(x;y)$ tales que $x + y = 0$, pues en ellos se anula el denominador del exponente.

17) "f" es un cociente $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos en que numerador o denominador sean peligrosos y en los puntos en que se anula el denominador.

La función "f" es inofensiva en todo punto, pues:

- El numerador es inofensivo en todo punto, por ser un polinomio.
- El denominador es inofensivo en todo punto, pues es suma de una inofensiva constante y de una exponencial $e^{x.y}$ que es inofensiva en todo punto, pues el exponente es un inofensivo polinomio.
- El denominador $1 + e^{x.y}$ no se anula en ningún punto de $\Re^2$, pues $1 + e^{x.y} > 0, \forall (x;y) \in \Re^2$.

No lo olvides: $(\text{número positivo})^{\text{cualquier número}} > 0$

18) "f" es un cociente $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos en que numerador o denominador sean peligrosos y en los puntos en que se anula el denominador.

- El numerador es inofensivo en todo punto, por ser un polinomio.
- El denominador es inofensivo en todo punto, pues es suma de una inofensiva constante y de una exponencial $-e^{x.y}$ que es inofensiva en todo punto, pues el exponente es un inofensivo polinomio.
- El denominador $1 - e^{x.y}$ se anula sólo si $e^{x.y} = 1$; o sea, si $x.y = 0$.

19) El logaritmo de un polinomio sólo es peligroso en los puntos en que el polinomio toma valores no positivos, lo que sucede si $1 + x - y \le 0$.

20) El logaritmo de un polinomio sólo es peligroso en los puntos en que el polinomio toma valores no positivos. Como en todo punto es $4 + x^2 + y^6 > 0$, la función "f" es inofensiva en todo punto.

21) El cociente de polinomios $(1 + x^6 + y^4)/(x - y)$ es peligroso en los puntos en que $x - y = 0$, pues en ellos se anula el denominador; además, "f" también es peligrosa si $(1 + x^6 + y^4)/(x - y) \le 0$, lo que sucede si $x - y < 0$, pues $1 + x^6 + y^4$ es positivo en todo punto.

22) "f" es un cociente $\Rightarrow$ sólo es peligrosa en los puntos en que numerador o denominador sean peligrosos y en los puntos que anulen al denominador.

- El numerador $\text{Ln}\,(x - 1)$ es peligroso si $x - 1 \le 0 \Rightarrow x \le 1$.
- El denominador $\text{Ln}\,(y + 2)$ es peligroso si $y + 2 \le 0 \Rightarrow y \le -2$.
- El denominador $\text{Ln}\,(y + 2)$ se anula sólo si $y + 2 = 1 \Rightarrow y = -1$.

23) Como $f(x;y) = \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ "f" es inofensiva en todo punto.

24) Como $f(x;y) = \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ "f" es inofensiva en todo punto.

25) Como $f(x;y) = \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}} \Rightarrow$ "f" es inofensiva en todo punto.

26) Como $f(x;y) = \sqrt[\text{impar}]{\text{cociente de de polinomios}} \Rightarrow$ "f" es peligrosa sólo en los puntos que anulan al denominador, que son los $(x;y)$ tales que $x = 2$.

27) Como "f" es una suma, es peligrosa en los puntos en que algún sumando sea peligroso.

- El sumando y/x sólo es peligroso si $x = 0$.
- El sumando $\sqrt[9]{(x-y)^4} \equiv \sqrt[\text{impar}]{\text{polinomio}}$ es inofensivo en todo punto.

28) El valor de $f(x;y)$ se obtiene multiplicando los factores $e^{y/x}$, $1/(x-1)$ y $\sqrt{3-y}$; por tanto, "f" es peligrosa en los puntos en que alguno de ellos sea peligroso. El factor $e^{y/x}$ es peligroso sólo si $x = 0$. El factor $1/(x-1)$ es peligroso sólo si $x = 1$. El factor $\sqrt{3-y}$ sólo es peligroso si $3 - y < 0$. Así, "f" es peligrosa si $x = 0$ ó $x = 1$ ó $3 - y < 0$.

29) Como "f" es una suma, es peligrosa en los puntos en que algún sumando sea peligroso.

- El sumando $e^{y/x}$ sólo es peligroso si $x = 0$.
- El sumando $\sqrt{1+x^2+y^2} \equiv \sqrt[\text{par}]{\text{polinomio}}$ es inofensivo en todo punto, pues $1 + x^2 + y^2 > 0$ en todo punto.

30) Como "f" es una suma, es peligrosa en los puntos en que algún sumando sea peligroso.

- El sumando $2/x$ sólo es peligroso si $x = 0$.
- El sumando $\sqrt{(1+x^4)/(1-2.x+y)} \equiv \sqrt[\text{par}]{\text{cociente de polinomios}}$ sólo es peligroso si $1 - 2.x + y \leq 0$, pues $1 + x^4$ es positivo en todo punto.

31) Como "f" es una suma, es peligrosa en los puntos en que algún sumando sea peligroso.

- El sumando $1/y$ sólo es peligroso si $y = 0$.
- El numerador $7 + 2^{\sqrt{x-y}}$ sólo es peligroso si $x - y < 0$; el denominador $1 - \text{Ln}\, x$ sólo es peligroso si $x \leq 0$. El cociente entre ambos es peligroso en los puntos que anulan al denominador: $1 - \text{Ln}\, x = 0 \;\Rightarrow\; x = e$

32) Como "f" es una suma, es peligrosa en los puntos en que algún sumando sea peligroso.

- El sumando $x^2.y$ es un polinomio $\Rightarrow$ es inofensivo en todo punto.
- El cociente de polinomios $(x^2 + y)/y$ sólo es peligroso si $y = 0$; y su raíz cuadrada es además peligrosa $(x^2 + y)/y < 0$.

33) El numerador, $\text{arc sen }(1+x.y) \equiv \text{arc sen polinomio}$, sólo es peligroso en los puntos en que $|1+x.y| > 1$, y el denominador es un inofensivo polinomio que sólo se anula en el punto $(0;0)$. Por tanto, el cociente de ambos sólo es peligroso en $(0;0)$ o si $|1+x.y| > 1$.

34) Siendo $\text{arc cos }(x^2+y^2) \equiv \text{arc cos polinomio}$, sólo hay peligro en los puntos en que $|x^2+y^2| > 1$.

35) Como el "seno" es inofensivo (lo mismo que el "coseno"), el trabajo con "f" sólo es peligroso si $1-x=0 \Rightarrow x=1$.

36) Como el "coseno" es inofensivo (lo mismo que el "seno"), el trabajo con "f" sólo es peligroso si $2-y=0 \Rightarrow y=2$.

37) El cociente $(x+y)/(x-y)$ sólo es peligroso si $x=y$; así, siendo

$$f(x;y) = \text{tg }\frac{x+y}{x-y} = \frac{\text{sen }\dfrac{x+y}{x-y}}{\cos \dfrac{x+y}{x-y}}$$

sólo hay peligro si $x=y$ o si se anula el denominador:

$$\cos \frac{x+y}{x-y} = 0 \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{\pi}{2} + k.\pi$$

siendo "k" un entero cualquiera.

38) $\sqrt{1-x.y}$ sólo es peligrosa si $1-x.y<0$ $\Rightarrow$ a su seno le pasa lo mismo.

39) El numerador $\text{Ln }x.y$ sólo es peligroso si $x.y \leq 0$. El denominador $2+3^{1/y}$ sólo es peligroso si $y=0$ y no se anula en ningún punto.

40) El numerador sólo es peligroso si $x<0$ (debido a $\sqrt{x}$) o si $y<0$ (debido a $\sqrt{y}$). El denominador $\text{sen }(x/y)$ sólo es peligroso si $y=0$ y se anula siempre que $x/y = k.\pi$, siendo "k" un entero cualquiera.

41) Como numerador y denominador son inofensivos en todo punto, el cociente entre ambos sólo es peligroso en los puntos que anulan al denominador:

$$1-\cos\ (x+y) = 0 \Rightarrow \cos\ (x+y) = 1 \Rightarrow x+y = 2.k.\pi$$

siendo "k" un entero cualquiera.

42) "f" es inofensiva en todo punto, pues el factor polinómico es inofensivo en todo punto, y el factor logarítmico también (pues el polinomio $1+y^2$ sólo toma valores positivos).

43) "f" es inofensiva en todo punto, pues el factor polinómico es inofensivo en todo punto, y el factor exponencial también (pues el denominador del exponente no se anula en ningún punto).

44) "f" sólo es peligrosa si $x>0$ (debido a $\sqrt{-x}$) o si $y<0$ (debido a $\sqrt{y}$).

SOLUCIÓN EJERCICIO 2

Para el campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$, es: $\text{Dom.f} = \left\{ \bar{x} \in \Re^n \,/\, f(\bar{x}) \in \Re \right\} \subseteq \Re^n$.

01) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues "f" es un polinomio.

02) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues "f" es un polinomio.

03) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues "f" es un polinomio.

04) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x - y \neq 0 \right\}$.

05) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, 4 + 3.x - 7.y \neq 0 \right\}$.

06) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, 4 + 3.x \neq 0 \right\}$.

07) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, (x;y) \neq (0;0) \right\}$.

08) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues $1 + x^2 + y^2 > 0$ en todo punto.

09) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, 1 + x^2 - y^2 \neq 0 \right\}$.

10) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, (x;y) \neq (0;0) \right\}$.

11) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues $1 + x^4 + y^6 \neq 0$ en todo punto.

12) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues el exponente es un polinomio.

13) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues el exponente es un polinomio.

14) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, 1 - y \neq 0 \right\}$.

15) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues $1 + y^2 \neq 0$ en todo punto.

16) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x + y \neq 0 \right\}$.

17) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues numerador y denominador están definidos en todo punto y el denominador no se anula en ningún punto.

18) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x.y \neq 0 \right\}$.

19) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, 1 + x - y \neq 0 \right\}$.

20) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues $4 + x^2 + y^6 \neq 0$ en todo punto.

21) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x - y > 0 \right\}$.

22) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \,/\, x - 1 > 0,\ y + 2 > 0,\ y \neq -1 \right\}$.

23) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues "f" es la raíz impar de un inofensivo polinomio.

24) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues "f" es la raíz impar de un inofensivo polinomio.

25) $\text{Dom.f} = \Re^2$, pues "f" es la raíz impar de un inofensivo polinomio.

26) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x - 2 \neq 0 \right\}$.

27) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x \neq 0 \right\}$.

28) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x \neq 0,\; 1 - x \neq 0,\; 3 - y \geq 0 \right\}$.

29) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x \neq 0 \right\}$.

30) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; 1 - 2.x + y > 0,\; x \neq 0 \right\}$.

31) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x - y \geq 0,\; x > 0,\; x \neq e,\; y \neq 0 \right\}$.

32) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; (x^2 + y)/y \geq 0,\; y \neq 0 \right\}$.

33) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; \left|1 + x.y\right| \leq 1,\; (x;y) \neq (0;0) \right\}$.

34) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; \left|x^2 + y^2\right| \leq 1 \right\}$.

35) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; 1 - x \neq 0 \right\}$.

36) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; 2 - y \neq 0 \right\}$.

37) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x - y \neq 0,\; \frac{x+y}{x-y} \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi \right\}$.

38) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; 1 - x.y \geq 0 \right\}$.

39) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x.y > 0 \right\}$.

40) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x \geq 0,\; y > 0,\; \frac{x}{y} \neq k.\pi \right\}$.

41) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x + y \neq 2.k.\pi \right\}$.

42) $\text{Dom.f} = \Re^2$.

43) $\text{Dom.f} = \Re^2$.

44) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; x \geq 0,\; y \geq 0 \right\}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 3

Para el campo escalar $f : \Re^n \mapsto \Re$, es: $\text{Dom.f} = \left\{ \bar{x} \in \Re^n \;/\; f(\bar{x}) \in \Re \right\} \subseteq \Re^n$.

01) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; 1 + x - y \neq 0,\; 2 - x > 0,\; 3 - y \geq 0 \right\}$.

02) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; (16 - x^2 - y^2).(x^2 + y^2 - 4) \neq 0 \right\}$.

03) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \;/\; \left|x + y\right| \leq 1,\; \left|x - y\right| \leq 1 \right\}$.

04) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;z) \in \Re^2 \ / \ z \neq 0, \ x \neq 0 \right\}$.

05) $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \ / \ 6 - 2.x + 3.y \geq 0 \right\}$.

06) Siendo $f(x;y) = \dfrac{\text{sen } (x-y)}{\cos \ (x-y)} + \dfrac{\cos \ (x+y)}{\text{sen } (x+y)}$, es:

$$\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \ / \cos \ (x-y) \neq 0, \text{sen } (x+y) \neq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ (x;y) \in \Re^2 \ / \ x - y \neq \frac{\pi}{2} + k_1.\pi, \ x + y \neq k_2.\pi \right\}$$

siendo k_1 y k_2 números enteros arbitrarios.

SOLUCIÓN EJERCICIO 4

Para el campo vectorial $f : \Re^n \mapsto \Re^m$, es:

$$\text{Dom.f} = \left\{ \bar{x} \in \Re^n \ / \ f(\bar{x}) \in \Re^m \right\} \subseteq \Re^n$$

El conjunto Dom.f es la intersección de los dominios de definición de los "m" campos escalares que forman "f".

1) El campo dado $f : \Re^2 \mapsto \Re^6$ está definido en todo punto de $\Re^2$, pues los 6 campos escalares que lo forman, por ser polinómicos, están definidos en todo punto $(x;y) \in \Re^2$.

2) Es $\text{Dom.f} = \left\{ (x;y) \in \Re^2 \ / \ x + y \neq 0 \right\}$, pues el primero de los 3 campos escalares que forman "f" sólo está definido si $x + y \neq 0$, y los demás campos que forman "f" están definidos en todo punto $(x;y) \in \Re^2$.

3) Es $\text{Dom.f} = \left\{ (u;v;w) \in \Re^3 \ / \ u + w > 0 \right\}$, pues el segundo de los 3 campos escalares que forman "f" sólo está definido si $u + w > 0$, y los demás campos que forman "f" están definidos en todo punto $(u;v;w) \in \Re^3$.

4) Es $\text{Dom.f} = \left\{ x \in \Re \ / -1 \leq x < 1 \right\}$, pues la primera de las 4 funciones de una variable que forman "f" está definida si $x \neq 1$, la cuarta de dichas funciones está definida si $|x| \leq 1$, y las demás funciones que forman "f" están definidas en todo punto $x \in \Re$.

5) $\text{Dom.f} = \left\{ (z;t) \in \Re^2 \ / \ z - t \geq 0 \right\}$, pues el 1º de los campos escalares que forman "f" está definido si $z - t \geq 0$, y el 2º está definido $\forall \ (z;t) \in \Re^2$.

6) Es: $\text{Dom.f} = \left\{ (\delta;\varepsilon) \in \Re^2 \ / \ \delta - \varepsilon \neq 0, \ \varepsilon \neq 0, |\delta.\varepsilon| \leq 1 \right\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1(\delta;\varepsilon) = \varepsilon^2/(\delta - \varepsilon) \in \Re \text{ sólo si } \delta - \varepsilon \neq 0 \\ f_2(\delta;\varepsilon) = \left| \delta^2/(1 - e^{\varepsilon}) \right| \in \Re \text{ sólo si } 1 - e^{\varepsilon} \neq 0 \Rightarrow \varepsilon \neq 0 \\ f_3(\delta;\varepsilon) = \text{arc cos } \delta.\varepsilon \in \Re \text{ sólo si } |\delta.\varepsilon| \leq 1 \end{array}}$$

7) Es $\text{Dom.f} = \Re^2 - \left\{ (0;0) \right\}$.

SOLUCIÓN EJERCICIO 5

1) No es serio escribir $(x;y;z)$ para referirse a un punto genérico de $\Re^3$ y en el mismo ejercicio escribir $(x;y)$ para referirse a un punto genérico de $\Re^2$; por eso cambiamos la notación (en $\Re^3$ o en $\Re^2$, donde más te guste). Por ejemplo, escribimos $g(u;v) = e^{u.v}$.

Como el campo vectorial "f" está definido en todo punto de $\Re^3$ (pues los dos campos escalares que forman "f" son polinómicos) y el campo escalar "g" está definido en todo punto de $\Re^2$ (pues "g" es polinómico), el campo compuesto $h_1 = g \bullet f : \Re^3 \mapsto \Re$, que es tal que $h_1(x;y;z) = g(f(x;y;z))$, está definido en todo punto de $\Re^3$, siendo:

$$\boxed{\text{pues } f(x;y;z) = (x+y\,;\,x.y.z)}$$

$$h_1(x;y;z) = g(f(x;y;z)) = g(x+y\,;\,x.y.z) = e^{(x+y).x.y.z}$$

$$\boxed{\text{pues } g(\text{Pepe};\text{Pío}) = e^{(\text{Pepe}).(\text{Pío})}}$$

Carece de sentido hablar de $h_2 = f \bullet g$, pues el conjunto "final" de "g" (es $\Re$) no coincide con el "inicial" de "f" (es $\Re^3$).

2) Siendo $f(x;y;z) = (\text{Ln }(x.y.z)\,;\,\text{tg }(x+y))$ y $g(u;v) = (u/v\,;\,\sqrt{u-v})$, el dominio D_1 de definición de "f" es:

$$D_1 = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x.y.z > 0,\ x+y \neq (2.k+1).\pi/2\right\}$$

siendo "k" un número entero cualquiera.

El dominio D_2 de definición de "g" es $D_2 = \left\{(u;v) \in \Re^2 \,/\, v \neq 0,\ u-v \geq 0\right\}$

- Para el campo $h_1 = g \bullet f : \Re^3 \mapsto \Re^2$, es:

$$h_1(x;y;z) = g(f(x;y;z)) = g(\text{Ln }(x.y.z)\,;\,\text{tg }(x+y)) =$$

$$\boxed{\text{pues } f(x;y;z) = (\text{Ln }(x.y.z)\,;\,\text{tg }(x+y))}$$

$$= \left(\frac{\text{Ln }(x.y.z)}{\text{tg }(x+y)}\,;\,\sqrt{(\text{Ln }(x.y.z)) - \text{tg }(x+y)}\right)$$

$$\boxed{\text{pues } g(\text{Pepe};\text{Pío}) = (\text{Pepe}/\text{Pío}\,;\,\sqrt{\text{Pepe}-\text{Pío}})}$$

- El dominio de definición de $h_1 = g \bullet f$ lo forman los puntos $(x;y;z)$ tales que:

$$(x;y;z) \in D_1 = \left\{(x;y;z) \in \Re^3 \,/\, x.y.z > 0,\ x+y \neq (2.k+1).\pi/2\right\}$$
$$f(x;y;z) \in D_2 = \left\{(u;v) \in \Re^2 \,/\, v \neq 0,\ u-v \geq 0\right\}$$

Como

$$f(x;y;z) = (\underbrace{\text{Ln }(x.y.z)}_{u}\,;\,\underbrace{\text{tg }(x+y)}_{v})$$

ocurrirá que $f(x;y;z) \in D_2 = \{(u;v) \in \Re^2 \ / \ v \neq 0,\ u - v \geq 0\}$ sólo si

$$\operatorname{tg}(x+y) \neq 0 \ ; \ \operatorname{Ln}(x.y.z) - \operatorname{tg}(x+y) \geq 0$$

Así, es: $\quad \operatorname{Dom.} h_1 = \left\{ (x;y;z) \in \Re^3 \middle/ \begin{array}{c} x.y.z > 0 \\ x + y \neq (2.k+1).\pi/2 \\ \operatorname{tg}(x+y) \neq 0 \\ \operatorname{Ln}(x.y.z) - \operatorname{tg}(x+y) \geq 0 \end{array} \right\}$

- Carece de sentido hablar de $h_2 = f \bullet g$, pues el conjunto "final" de "g" (es $\Re^2$) no coincide con el "inicial" de "f" (es $\Re^3$).

3) Siendo $f(x;z) = (\sqrt{x} \ ; \sqrt{z} \ ; \sqrt{x-z})$ y $g(u;v;w) = (u+v \ ; v-w)$, el dominio D_1 de definición de "f" es $D_1 = \{(x;z) \in \Re^2 \ / \ x \geq 0,\ z \geq 0,\ x - z \geq 0\}$, y el dominio D_2 de definición de "g" es $\Re^3$, pues los dos campos escalares que forman "g" son polinómicos.

- Para el campo $h_1 = g \bullet f : \Re^2 \mapsto \Re^2$, es:

$$h_1(x;z) = g(f(x;z)) \underset{\uparrow}{=} g(\sqrt{x} \ ; \sqrt{z} \ ; \sqrt{x-z}) =$$

$$\boxed{\text{pues } f(x;z) = (\sqrt{x} \ ; \sqrt{z} \ ; \sqrt{x-z})}$$

$$\underset{\uparrow}{=} (\sqrt{x} + \sqrt{z} \ ; \sqrt{z} - \sqrt{x-z})$$

$$\boxed{\text{pues } g(\text{Pepe};\text{Juan};\text{Pío}) = (\text{Pepe} + \text{Juan} \ ; \text{Juan} - \text{Pío})}$$

- El dominio de definición de $h_1 = g \bullet f$ es D_1, pues éste es el dominio de definición de "f" y el dominio de definición de "g" es $\Re^3$.
- Para el campo $h_2 = f \bullet g : \Re^3 \mapsto \Re^3$, es:

$$h_1(u;v;w) = f(g(u;v;w)) \underset{\uparrow}{=} f(u+v \ ; v-w) =$$

$$\boxed{\text{pues } g(u;v;w) = (u+v \ ; v-w)}$$

$$\underset{\uparrow}{=} (\sqrt{u+v} \ ; \sqrt{v-w} \ ; \sqrt{(u+v)-(v-w)}) = (\sqrt{u+v} \ ; \sqrt{v-w} \ ; \sqrt{u+w})$$

$$\boxed{\text{pues } f(\text{Pepe};\text{Pío}) = (\sqrt{\text{Pepe}} \ ; \sqrt{\text{Pío}} \ ; \sqrt{\text{Pepe} - \text{Pío}})}$$

SOLUCIÓN EJERCICIO 6

El conjunto S_k de nivel "k" del campo escalar $f : \Re^n \mapsto \Re$ es el definido como:

$$S_k = \{\bar{x} \in \Re^n \ / \ f(\bar{x}) = k\}$$

1) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x^2 - 4.x - y = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ y = x^2 - 4.x - k\}$

La curva $y = x^2 - 4.x - k$ es una parábola de eje vertical con los "cuernos" hacia arriba que tiene el mínimo en el punto $x = 2$ (pues $y' = 2.x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$) y corta al eje de abcisas en $x = 2 \pm \sqrt{4+k}$:

$$y = x^2 - 4.x - k = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4+k}$$

2) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x/y = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ y = x/k\} \equiv$ recta que pasa por el origen de coordenadas sea cual sea el valor de "k" y tiene pendiente $1/k$.

3) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ 2.x + 3.y = k\} \equiv$ recta de pendiente $-2/3$ y cuya ordenada en el origen es $k/3$.

4) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ \text{sen}\ (x - y) = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x - y = \text{arc sen}\ k\} \equiv$ recta de pendiente 1 y cuya ordenada en el origen es $-\text{arc sen}\ k$.

5) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ \text{Ln}\ (x+y) = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x+y = e^k\} \equiv$ recta con pendiente -1 y ordenada e^k en el origen.

6) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ \text{Ln}\ (x^2+y^2) = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x^2+y^2 = e^k\}$, que es una circunferencia de centro en $(0;0)$ y radio $\sqrt{e^k}$.

7) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ \sqrt{x - y} = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x - y = k^2\}$, que es una recta de pendiente 1 cuya ordenada en el origen es $-k^2$.

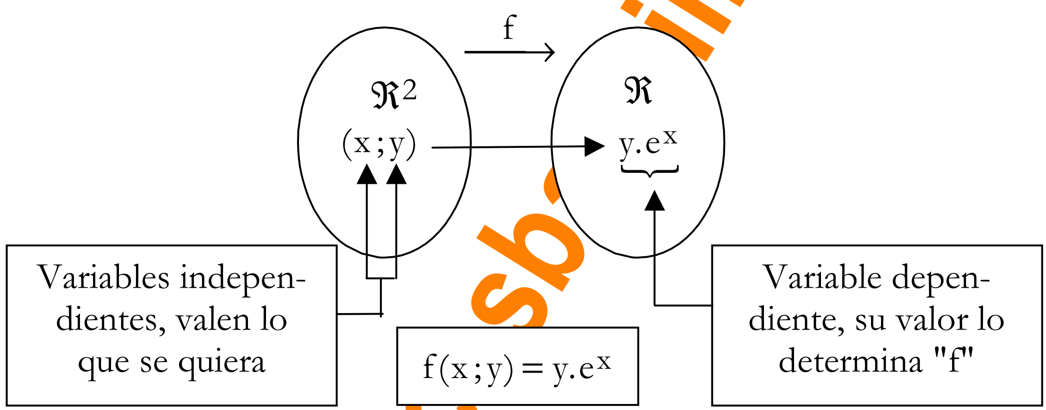
8) $S_k = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ y^2+x = k\} = \{(x;y) \in \Re^2 \ / \ x = -y^2+k\} \equiv$ parábola de eje horizontal con los "cuernos" hacia la izquierda, su eje es el de abcisas y corta al eje de ordenadas $y = \sqrt{k}$ e $y = -\sqrt{k}$.

En boca cerrada no entran moscas

Cuando "algo" no lo sepas, no debes decir la primera gilipollez que se te ocurra, pues la probabilidad de acertar es muy pequeña, y el ridículo que puedes hacer es espantoso ..... eres dueñ@ de lo que callas y prisioner@ de lo que dices

Latiguillo: párrafo corto o esquema que explica lo sustancial de los "asuntos" que tienen protagonismo relevante en un problema

- A la menor ocasión que tengas, indica que $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales.
- La primera vez que hables de los conjuntos $\Re$, $\Re^2$ y $\Re^3$, refiérete a ellos como **la recta real** $\Re$, **el plano** $\Re^2$, **el espacio tridimensional** $\Re^3$ ..... en el resto del examen, por economía, habla sólo de $\Re$, $\Re^2$ y $\Re^3$.
- No salgas del examen sin dejar escrito un **diagrama de Venn** que evidencie que tienes clara la **noción de correspondencia** entre conjuntos ..... y aprovecha para **explicar la diferencia entre una variable independiente y otra dependiente.**



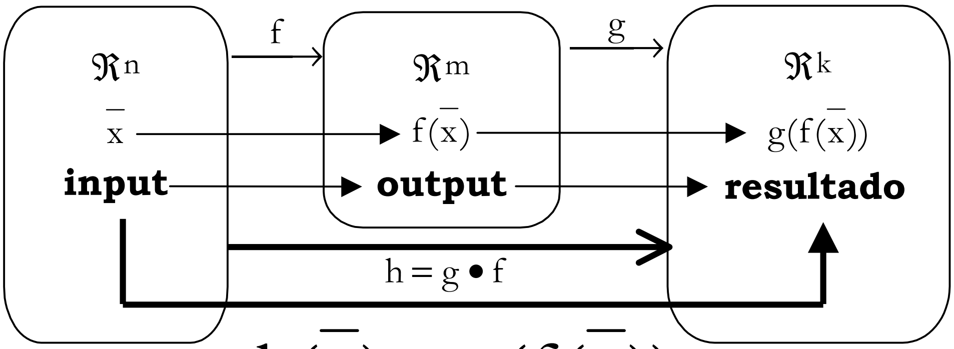
- No salgas del examen sin acreditar que diferencias una **función algebraica,** como $f(x;y) = (x + \sqrt[3]{x-y})/(x + \sqrt{y})$, de otra **trascendente**, como $g(x;y) = x^2 + y.e^x$ ó $g(x;y) = Log_3(x+y)$ ó $g(x;y) = sen\,(x-y)$.
- La primera vez que en examen te cruces con un **polinomio**, refiérete a él como **función racional entera,** y a un **cociente de polinomios**, llámalo **función racional fraccionaria.** Si te cruzas con una función como $f(x;y) = (x + \sqrt[3]{x-y})/(x + \sqrt{y})$, la llamarás **función irracional.**

Y la primera vez que me cruce con $f(u;v) = 2^{u.v}$, $g(z;t) = \log_3\,(z-t)$, $h(\alpha;\lambda) = sen\,\lambda/\alpha$ y $\theta(x;y) = arc\,sec\,(x.y)$ diré que "f" es **exponencial**, "g" es **logarítmica**, "h" es **trigonométrica o circular** y "θ" es **trigonométrica inversa** .... o sea, **hablar con propiedad**

En examen no importa lo que sabes, importa lo que parece que sabes

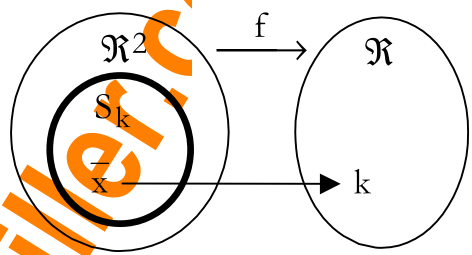
- Para indicar que la gráfica de una función $f:\Re \mapsto \Re$ es *simétrica respecto al eje de ordenadas* (o sea, $f(-x) = f(x)$), es más rápido y elegante decir que "f" es **par** ..... diciendo que "f" es **impar** si su gráfica es *simétrica respecto al origen de coordenadas* (o sea, $f(-x) = -f(x)$).
- No salgas del examen sin acreditar que sabes que **la gráfica de una función de dos variables es una superficie .... y la gráfica de una función de tres o más variables no puede visualizarse, pues no se puede dibujar con 4 o más ejes.**

- En examen **no hables expresamente de las Reglas Sagradas**, porque tu profesor te entenderá ..... pero acredita tu soltura con ellas a la menor ocasión: $f(x;y) = x/(x-y) \notin \Re$ si $x-y=0$, pues **no puede dividirse por 0;** $f(x;y) = \log_2(x.y) \notin \Re$ si $x.y \le 0$, pues **no es real el logaritmo de un número ≤ 0;** $f(x;y) = \sqrt[4]{x-y} \notin \Re$ si $x-y<0$, pues **no es real la raíz de índice par de un número < 0.**
- Si tienes que **componer funciones**, no olvides el correspondiente **diagrama de Venn** .... y aunque no te lo pidan, comenta telegráficamente la **conexión con los fenómenos de la vida real;** para ello basta que en el diagrama de Venn "metas" la "cadena" *input-output-resultado*.



$$h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$$

- Si tienes que calcular el **conjunto de nivel "k"** de un campo escalar $f:\Re^2 \mapsto \Re$, no olvides el correspondiente **diagrama de Venn:** $S_k = \{\bar{x} \in \Re^2 \ / \ f(\bar{x}) = k\}$ .... y aunque no te lo pidan, comenta brevemente la **conexión con los fenómenos de la vida real.** Por ejemplo, escribes: si "f" es la función de utilidad de un consumidor, S_k es la curva de indiferencia de nivel "k".



En el país de los ciegos, el tuerto es el rey

No puede darse valor a lo que vale menos que nada

Inteligencia, dame en nombre exacto de las cosas .... aunque me escueza

Pregunta: ¿en que diferencia un buen profe de Pedología Métrica Insesgada de otro malo?

Respuesta: el bueno considera que la Pedología Métrica Insesgada sólo es una excusa para que sus alumnos espabilen y desarrollen la disciplina mental y la capacidad de razonamiento, pues esos son los valores fundamentales de la educación científica; por ello, un buen profe jamás pone un examen que pueda aprobarse aplicando recetas como un autómata.