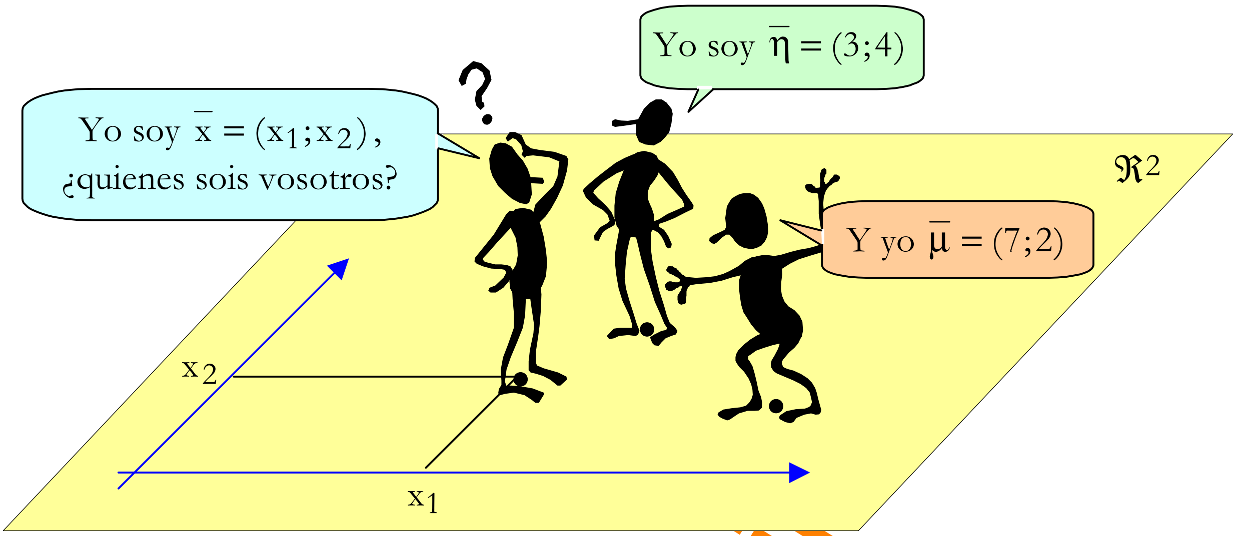
Tema 2

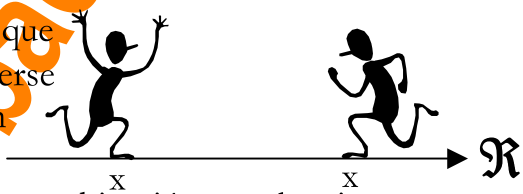
Límite y continuidad de campos

La continuidad da tranquilidad

2.1 LA MADRE DEL CORDERO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL DE VARIAS VARIABLES



Las tribulaciones y cuitas de los que viven en un universo multidimensional como $\Re^2$ son similares a las de los habitantes del universo unidimensional $\Re$; la diferencia sustancial radica en que los que viven en universos multidimensionales tienen mucha más libertad de movimiento que los habitantes de $\Re$, que sólo pueden moverse hacia la derecha o hacia la izquierda ...... sin embargo, los habitantes de $\Re^2$, tienen infinidad de opciones a la hora de cambiar su ubicación en el universo en que viven.



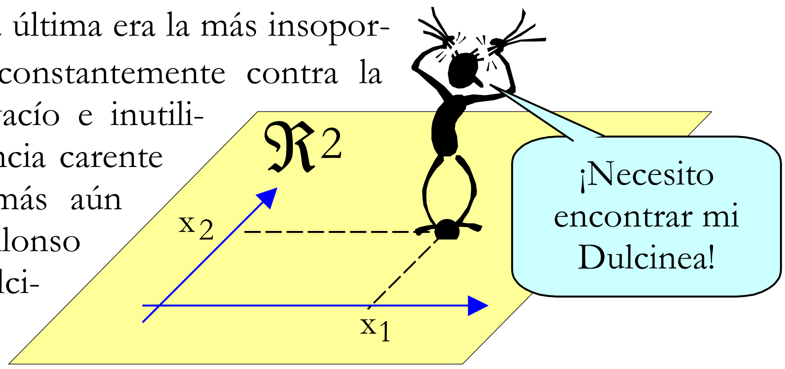
Al escribir $\bar{x} \to \bar{x}_0$ ($\bar{x}$ **tiende** a $\bar{x}_0$) queremos decir que $\bar{x}$ se **aproxima** a $\bar{x}_0$ de modo que la distancia $d(\bar{x};\bar{x}_0)$ entre ambos llega a ser tan **próxima a 0 como se quiera;** es decir, dicha distancia llega a ser inferior a una décima, y a un milésima (10^{-3}), y a una milmillonésima (10^{-9}), y a $10^{-1000000000000000000}$, y a todo número positivo que se fije de antemano ...... y la **trayectoria** que sigue que $\bar{x}$ para aproximarse a $\bar{x}_0$ puede ser cualquiera de las infinitas que hay.

El instante clave: en la vida de $\bar{x} = (x_1;x_2)$ también hay un mágico instante **Big-Bang** en que su existencia se revoluciona por completo, y **se produce cuando se define una función $f:\Re^2 \mapsto \Re$.**

Antes del Big-Bang la nada llenaba el alma de $\bar{x}$, su vida cotidiana era la de un habitante de un universo bidimensional, la absurda sinrazón que en todo ser racional produce el interminable deambular por un interminable plano, la sinrazón que se concreta en las famosas preguntas:

¿Quién soy? ¿De dónde procedo?
¿Qué sentido tiene mi vida?

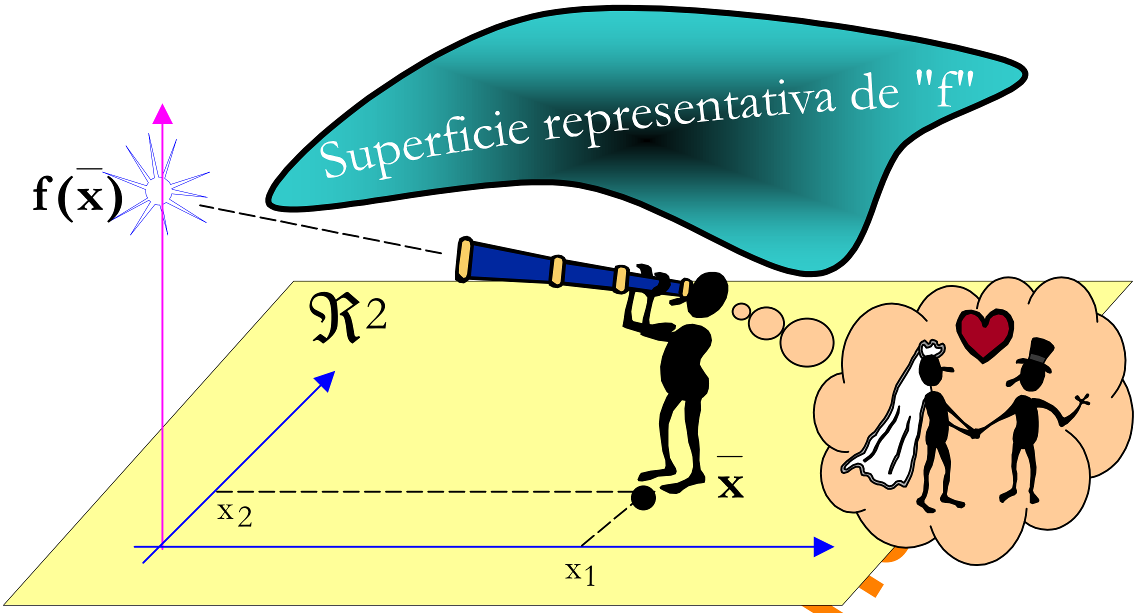
Y como les pasa a tantos, la última era la más insoportable ...... $\bar{x}$ se rebelaba constantemente contra la irrespirable sensación de vacío e inutilidad que envolvía su existencia carente de sentido alguno .... y más aún desde que oyó hablar de Alonso Quijano y de su amada Dulcinea ...... ¡Qué envidia!



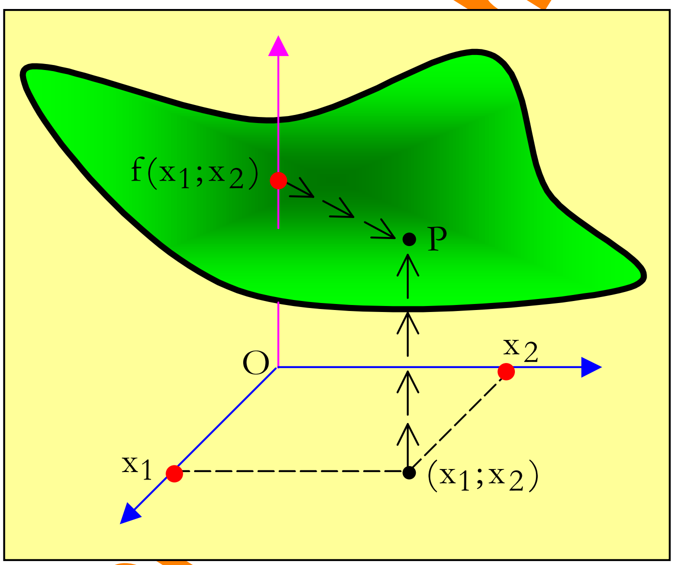
En este trance estaba $\bar{x}$ cuando se produjo el **Big-Bang,** divino instante que por arte de magia abrió ante $\bar{x}$ un paraíso de nuevas sensaciones y oníricas vivencias donde halló su Dulcinea.

Imagina la sorpresa de $\bar{x}$ cuando en el instante del **Big-Bang,** después de padecer la soledad interior desde el principio de los tiempos, ve aparecer una recta (el conjunto "final" $\Re$ del campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$) en la que parpadea una lucecita .... y como Moisés en los Diez Mandamientos, $\bar{x}$ escucha sobrecogido el tronar de **La Voz:**

En la siguiente escena vemos a $\bar{x}$ un instante después de enmudecer **La Voz**, está absorto en la contemplación de su anhelada Dulcinea "$f(\bar{x})$", y aunque no se le nota, como nos ocurriría a todos en su caso, está muy emocionado.



La emoción se hace indescriptible cuando $\bar{x} = (x_1 ; x_2) \in \Re^2$ descubre que entre él y su imagen $f(\bar{x}) \in \Re$ determinan un punto $P = (x_1 ; x_2 ; f(x_1 ; x_2)) \in \Re^3$ por el que **pasa** la superficie representativa de $f : \Re^2 \mapsto \Re$.



Tampoco puede describirse el gozo que inunda a $\bar{x}$ al descubrir que su imagen según "f" cambia de valor a medida que él se mueve por $\Re^2$; eso es lo que más le colma y satisface, salvo cuando la función "f" es de las llamadas "constantes", o sea, tal que "f" asigna el mismo número real a todos los elementos de $\Re^2$.

Tal es el júbilo de $\bar{x} \in \Re^2$ al percibir las modificaciones que sufre su imagen cuando él se mueve por $\Re^2$, que decide consagrar gozosamente su vida a la observación y análisis de $f(\bar{x}) \in \Re$ .... **y tú lo pasarás requetebomba con el Cálculo Diferencial de varias variables si eres capaz de meterte en la piel y el cerebro del punto $\bar{x} = (x_1 ; x_2) \in \Re^2$ para así sentirte alborozadamente cautivo de la observación y análisis de tu amada Dulcinea $f(\bar{x})$ .... ¡oh yeah! .... y entenderás que las primeras preguntas que se hace $\bar{x} = (x_1 ; x_2) \in \Re^2$ respecto de su Dulcinea $f(\bar{x})$ no tienen nada de genial, pues se le ocurren a cualquiera que tenga lleno de amor el corazón:**

$\boxed{01}$ ¿He tenido la suerte de que "f" me asigne imagen? ¿Existe $f(\bar{x})$?

<u>Comentario</u>

Ya sabemos que se puede contestar esta pregunta sin más que calcular el **dominio de definición** de "f": Dom. $f = \{\bar{x} \in \mathfrak{R}^2 \,/\, f(\bar{x}) \in \mathfrak{R}\}$

$\boxed{02}$ ¿A qué número se **aproxima** mi imagen según "f" cuando yo me **aproximo** al **punto** $\bar{x}_0 \in \mathfrak{R}^2$ por una **trayectoria** de aproximación "Pepa"?

<u>Comentario</u>

Si existe, de dicho número se dice que es el **límite** de "f" en el **punto** $\bar{x}_0 \in \mathfrak{R}^2$ según la **trayectoria** "Pepa".

$\boxed{03}$ ¿Coincide el límite de "f" en el punto $\bar{x}_0 \in \mathfrak{R}^2$ según la trayectoria "Pepa" con el límite de "f" en $\bar{x}_0$ según **cualquier otra trayectoria** de aproximación a dicho punto?

<u>Comentario</u>

Si el número real "L" al que se **aproxima** $f(\bar{x})$ cuando $\bar{x}$ se **aproxima** a $\bar{x}_0 \in \mathfrak{R}^2$ es el mismo sea cual sea la trayectoria de aproximación a $\bar{x}_0$, diremos que "f" tiene **límite** en el punto $\bar{x}_0$. En caso contrario diremos que "f" no tiene límite en el punto $\bar{x}_0$.

$\boxed{04}$ Si "f" tiene límite en el punto $\bar{x}_0$, ¿coincide con $f(\bar{x}_0)$?

<u>Comentario</u>

Si "f" tiene límite de "f" en el punto $\bar{x}_0$ y coincide con $f(\bar{x}_0)$, diremos que "f" es **continua** en el punto $\bar{x}_0$; diremos que "f" no es continua en $\bar{x}_0$ si "f" no tiene límite en $\bar{x}_0$, o, teniéndolo, no coincide con $f(\bar{x}_0)$.

La contraseña

Disfrutarás mucho más del Cálculo Diferencial si educas tu cerebro de modo que la expresión **sea $f: \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}$** se instale en él en calidad de contraseña que al ser leída u oída actúa **SIEMPRE** de mágico abracadabra que en un nanosegundo transmuta tu personalidad y te convierte en el punto $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$, el habitante del conjunto inicial $\mathfrak{R}^n$ que halló en el número real $f(\bar{x})$ la Dulcinea que da sentido a su vida .... y para $\bar{x}$ **no hay mayor disfrute** que observar y analizar cómo cambia el valor de $f(\bar{x})$ a medida que él se mueve por el universo en que vive.

Recuerda: siendo $\overline{x}_0 = (x_1^0; \ldots; x_n^0) \in \Re^n$ y "r" un número real positivo, el **entorno o bola abierta** de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r" es el subconjunto $B(\overline{x}_0; r)$ de $\Re^n$ formado por los puntos $\overline{x} = (x_1; \ldots; x_n)$ cuya distancia al punto $\overline{x}_0$ es inferior a "r":

$$B(\overline{x}_0; r) = \left\{ \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n \;/\; d(\overline{x}; \overline{x}_0) < r \right\}$$

siendo $d(\overline{x}; \overline{x}_0) = +\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} = \left\| \overline{x} - \overline{x}_0 \right\|$.

Si de dicho entorno de $\overline{x}_0$ **eliminamos** el propio $\overline{x}_0$, obtenemos el **entorno reducido** de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r", que denotamos $B^*(\overline{x}_0; r)$:

$$B^*(\overline{x}_0; r) = \left\{ \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n \;/\; 0 < d(\overline{x}; \overline{x}_0) < r \right\}$$

Si $\overline{x}_0 \in \Re^2$, el entorno $B(\overline{x}_0; r)$ lo forman los puntos interiores a la circunferencia de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r" ..... y el entorno reducido $B^*(\overline{x}_0; r)$ lo forman los puntos interiores a dicha circunferencia, salvo el centro $\overline{x}_0$.

2.2 PROPIEDADES "CERCA" DE UN PUNTO

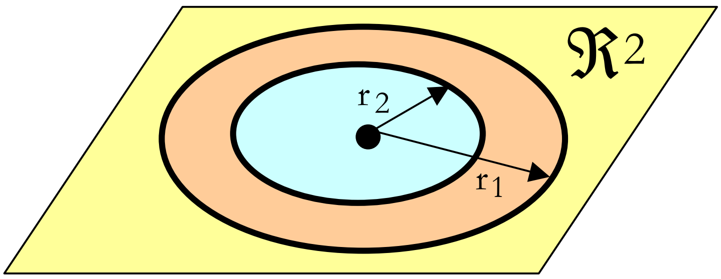
Sea $f: \Re^n \mapsto \Re$ y "D" su dominio de definición. Se dice que "f" satisface una cierta propiedad **cerca** del punto $\overline{x}_0 \in \Re^n$ si dicha propiedad se satisface en todo punto $\overline{x} \in D$ de un **entorno reducido** de $\overline{x}_0$.

¡Ojo!: el punto $\overline{x}_0$ puede no pertenecer a "D".

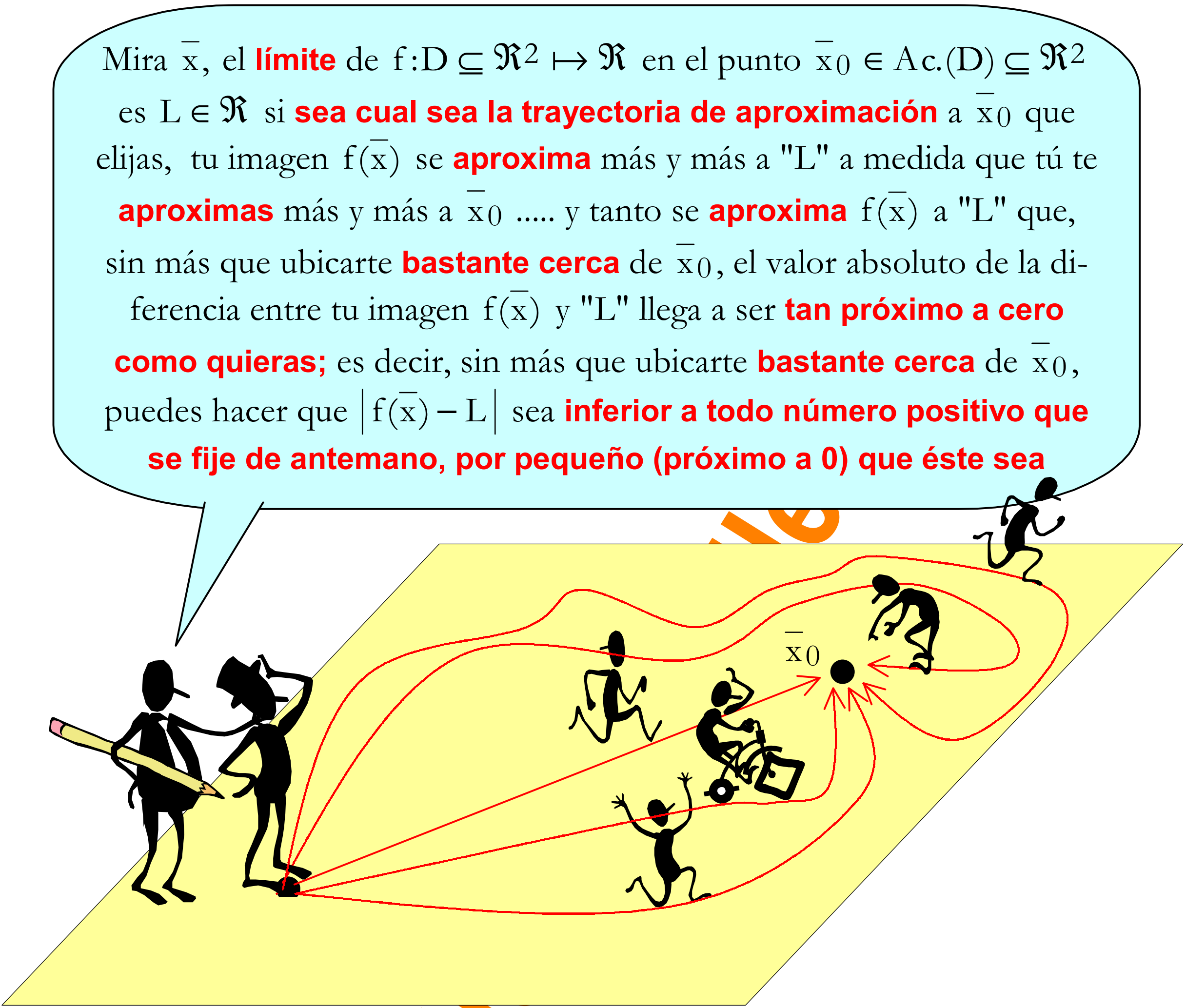
Así, al afirmar que **cerca** de $\overline{x}_0 = (9;5)$ es $3 < \left| f(\overline{x}) \right| < 8$, se afirma que es $3 < \left| f(\overline{x}) \right| < 8$ en todo punto $\overline{x} = (x_1; x_2) \in D$ de un entorno reducido de $\overline{x}_0$.

Obvio: si **cerca** de $\overline{x}_0$ se satisface cada una de las propiedades P y Q, puedes apostar la vida a que **cerca de** $\overline{x}_0$ se satisface la propiedad "P y Q": si cerca de $\overline{x}_0$ es $f(\overline{x}) > 2$ y cerca de $\overline{x}_0$ es $f(\overline{x}) < 5$, **cerca** de $\overline{x}_0$ es $f(\overline{x}) > 2$ y $f(\overline{x}) < 5$.

Obvio: si la función "f" verifica una cierta propiedad en todo punto $\overline{x} \in D$ de un entorno reducido de $\overline{x}_0$, esa propiedad también se verifica en todo punto $\overline{x}$ de cualquier entorno reducido de $\overline{x}_0$ que esté contenido en el primero. ***Por ejemplo,*** si todo punto $\overline{x} \in \Re^2$ del entorno reducido de centro en $\overline{x}_0 \in \Re^2$ y radio r_1 sucede que $\left| f(\overline{x}) - 7 \right| < 10^{-50}$, eso mismo pasa en todo punto $\overline{x} \in \Re^2$ de todo entorno reducido de centro en $\overline{x}_0 \in \Re^2$ y radio $r_2 < r_1$.



2.3 LÍMITE DE UN CAMPO ESCALAR EN UN PUNTO



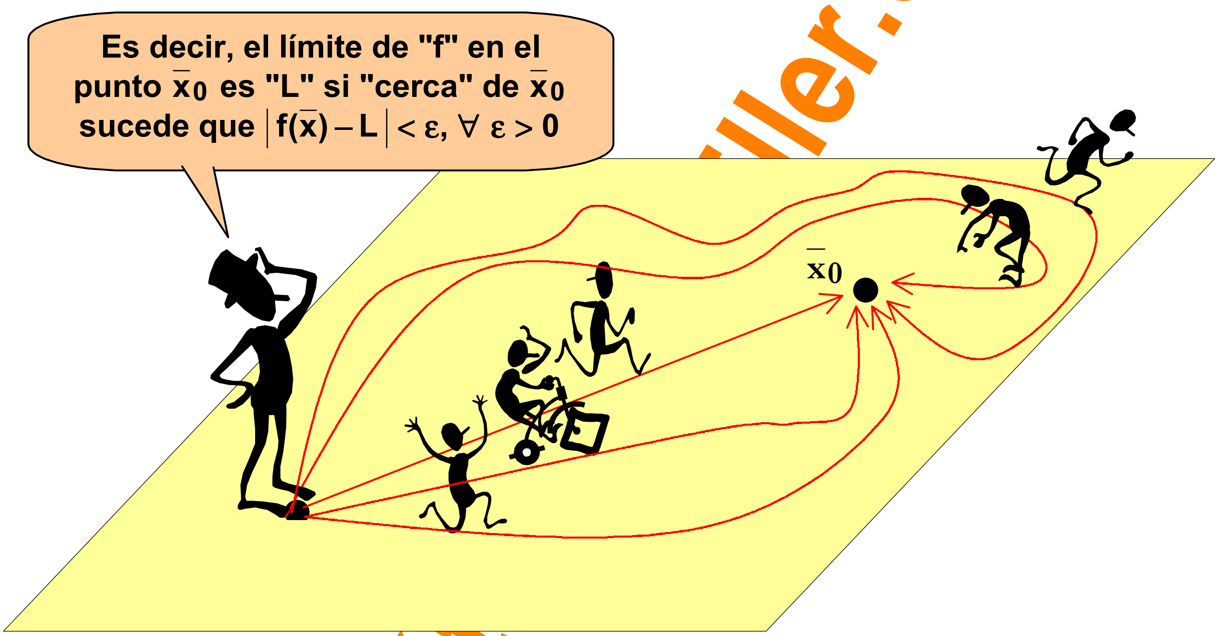
Recuerda: al trabajar con la función $f: \Re \mapsto \Re$ que al número real "x" le asocia el número real "$f(x)$", como "x" sólo puede **aproximarse** al punto $c \in \Re$ por la izquierda o por la derecha de éste, al afirmar que el límite de "f" en "c" es "L" se afirma que si "x" se **aproxima** a "c", el número real f(x)" se **aproxima** al número real "L" **independientemente** de la forma (izquierda/derecha) en que "x" se **aproxime** a "c".

Pues bien, **para un campo escalar** $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ que al punto $\overline{x} \in D$ le asocia el número real "$f(\overline{x})$" <u>la idea es la misma</u>: **al afirmar que el límite de "f" en el punto $\overline{x}_0 \in Ac.(D)$ es el número real "L", se está diciendo que si $\overline{x} \in D$ se aproxima a $\overline{x}_0$, el número real $f(\overline{x})$ se aproxima al número real "L", y eso con independencia de la forma (trayectoria o camino) que $\overline{x}$ elija para aproximarse a $\overline{x}_0$.**

El campo "f" carece de límite en el punto $\overline{x}_0$ si el número real al que se aproxima $f(\overline{x})$ cuando $\overline{x}$ se aproxima $\overline{x}_0$ depende de la trayectoria o camino de aproximación a $\overline{x}_0$ que se elija.

De otro modo: se dice que el límite del campo escalar $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ en el punto $\bar{x}_0 \in Ac.(D)$ es $L \in \Re$ si sea cual el número positivo ε que se elija, es posible encontrar otro número $r > 0$ tal que en todo punto $\bar{x} \in D$ del entorno reducido de centro en $\bar{x}_0$ y radio "r" (el sombreado en la figura, para el caso $n = 2$) sucede que $|f(\bar{x}) - L| < \varepsilon$:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0 \,/\, \underbrace{|f(\bar{x}) - L|}_{\text{distancia entre los puntos } f(\bar{x}) \text{ y } L \text{ de } \Re} < \varepsilon \text{ si } 0 < \underbrace{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}_{\text{distancia entre los puntos } \bar{x} \text{ y } \bar{x}_0 \text{ de } \Re^n} < r,\ \bar{x} \in D$$



Así, si el límite de $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ en el punto $\bar{x}_0 \in Ac.(D) \subseteq \Re^n$ es 147, eso significa que:

- Si se elige $\varepsilon = 10^{-100}$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $|f(\bar{x}) - 147| < 10^{-100}$.
- Si se elide $\varepsilon = 10^{-100000}$, **cerca** de $\bar{x}_0$ sucede que $|f(\bar{x}) - 147| < 10^{-100000}$.

..... y lo mismo con todo valor positivo que se elija para ε, por pequeño que sea.

¡Que quede requeteclaro!

Al hablar del **límite** de "f" en el punto $\bar{x}_0$ **importa un pito** si $\bar{x}_0$ tiene imagen según "f" o no ..... y ello es así porque en la definición de límite de "f" en $\bar{x}_0$ sólo intervienen los valores que toma "f" en puntos $\bar{x} \in \Re^n$ **próximos** a $\bar{x}_0$, y el valor que toma "f" en $\bar{x}_0$ **no pinta nada en la historia.**

Como veremos más adelante, para expresar de modo rápido que "f" tiene límite en el punto $\bar{x}_0$ y que da la casualidad de que dicho límite coincide con $f(\bar{x}_0)$, se dice que "f" es CONTINUA en $\bar{x}_0$

Recuerda las Reglas Sagradas (RS)

- **Prohibido dividir por cero.**
- **El logaritmo de un número no positivo no es un número real.**
- **Toda raíz de índice par de un número negativo no es un número real.**

2.5 CÁLCULO DE LÍMITES. EL "PASO AL LÍMITE"

Cabe distinguir dos tipos de límites:

- **INOFENSIVOS: si el campo escalar "f" es inofensivo en el punto "Pepe" (en "Pepe" no se viola ninguna Regla Sagrada), el campo "f" siempre tendrá límite en "Pepe" y coincidirá con f(Pepe).**
- **PELIGROSOS: si "f" es peligroso en el punto "Pepe" (en "Pepe" se viola alguna Regla Sagrada), el estudio del límite de "f" en "Pepe" puede ser muy complicado, y por desgracia no hay receta mágica que resuelva la papeleta en todos los casos.**

Ejemplos de límites inofensivos

✓ Si $f(x;y) = 2.x.y + 3$, es: $\lim\limits_{(x;y)\to(5;1)} f(x;y) = f(5;1) = 13$

$\boxed{\text{Si } f(x;y) = 2.x.y + 3, \text{ en el punto } (5;1) \text{ no se viola ninguna RS}}$

✓ Si $f(x;z) = 6^{(x+2)/(z+1)}$, es: $\lim\limits_{(x;z)\to(0;1)} f(x;z) = f(0;1) = 6$

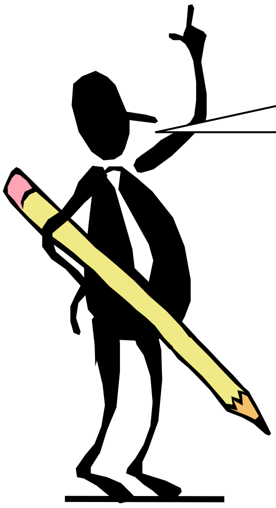
$\boxed{\text{Si } f(x;z) = 6^{(x+2)/(z+1)}, \text{ en el punto } (0;1) \text{ no se viola ninguna RS}}$

✓ Si $f(x;y) = \sqrt{3 - x.y}$, es: $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} f(x;y) = f(1;2) = \sqrt{1}$

$\boxed{\text{Si } f(x;y) = \sqrt{3 - x.y}, \text{ en el punto } (1;2) \text{ no se viola ninguna RS}}$

✓ Si $f(x;y) = \text{Ln}\,(1 - x.y)$ es: $\lim\limits_{(x;y)\to(-3;1)} f(x;y) = f(-3;1) = \text{Ln } 4$

$\boxed{\text{Si } f(x;y) = \text{Ln}\,(1 - x.y)\text{, en el punto } (-3;1) \text{ no no se viola ninguna RS}}$



Para ser eficiente cuando en el punto "Pepe" hay conflicto con alguna RS, debes dominar lo que llamaremos paso al límite y denotaremos "PL". El "PL" puedes emplearlo en todos los casos, incluso si en "Pepe" no hay conflicto con ninguna RS (en tan gozosa situación puedes apostar la vida a que el límite de "f" en "Pepe" coincide con f(Pepe), como ocurre en los siguientes ejemplos) **pero te interesa quedar bien.**

Recuerda: trabajando en $\Re^n$ $(n \geq 2)$, cuando escribimos $\overline{x} \to \overline{x}_0$ ($\overline{x}$ tiende a $\overline{x}_0$) queremos decir que $\overline{x}$ se **aproxima** a $\overline{x}_0$ de modo que la **distancia** $d(\overline{x};\overline{x}_0)$ entre ambos llega a ser **tan próxima a 0 como se quiera,** y la **trayectoria** que sigue que $\overline{x}$ para **aproximarse** a $\overline{x}_0$ es cualquiera de las infinitas que hay.

Ejemplos de "PL" (con límites inofensivos)

01) Si $f(x_1;x_2) = 7.x_1.x_2 + 5$, es $\lim\limits_{(x_1;\,x_2)\to(2;3)} f(x_1;x_2) = 47$

¡Qué potra!, el campo "f" es inofensivo en el punto (2;3)
"PL": si $(x_1;\,x_2) \to (2;3) \Rightarrow f(x_1;x_2) = 7.x_1.x_2 + 5 \to 7.2.3 + 5 = 47$

02) Si $f(x_1;x_2) = x_1.x_2^3 + 4$, es $\lim\limits_{(x_1;\,x_2)\to(2;3)} f(x_1;x_2) = 58$

¡Qué maravilla, el campo "f" es inofensivo en el punto (2;3)
"PL": si $(x_1;\,x_2) \to (2;3) \Rightarrow f(x_1;x_2) = x_1.x_2^3 + 4 \to 2.3^3 + 4 = 58$

03) Si $f(x_1;x_2) = x_1^4 - x_2^2$, es $\lim\limits_{(x_1;\,x_2)\to(2;3)} f(x_1;x_2) = 7$

¡Qué estupendo!, el campo "f" es inofensivo en el punto (2;3)
"PL": si $(x_1;\,x_2) \to (2;3) \Rightarrow f(x_1;x_2) = x_1^4 - x_2^2 \to 2^4 - 3^2 = 7$

04) Si $f(x_1;x_2) = (x_1 + 1)/(x_2 + 6)$, es $\lim\limits_{(x_1;\,x_2)\to(2;3)} f(x_1;x_2) = 3/9$

¡Qué chamba!, el campo "f" es inofensivo en el punto (2;3)
"PL": si $(x_1;\,x_2) \to (2;3) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 + 1 \to 3 \\ x_2 + 6 \to 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_1;x_2) = \dfrac{x_1 + 1}{x_2 + 6} \to \dfrac{3}{9}$

05) Si $f(u;v)=6^{(u+2)/(v+1)}$, es $\lim\limits_{(u;v)\to(0;1)} f(u;v)=6$

¡Qué bien!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;1)

$$\text{"PL": si } (u;v)\to(0;1)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} u+2\to 2\\ v+1\to 2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u;v)=6^{(u+2)/(v+1)}\to 6^{2/2}=6$$

06) Si $f(u;v)=u^2-\text{Ln}\,\dfrac{1-u}{7-v}$, es $\lim\limits_{(u;v)\to(0;1)} f(u;v)=-\text{Ln}\,\dfrac{1}{6}$

¡Qué suerte!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;1)

$$\text{"PL": si } (u;v)\to(0;1)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} u^2\to 0\\ 1-u\to 1\\ 7-v\to 6\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u;v)=u^2-\text{Ln}\,\frac{1-u}{7-v}\to 0-\text{Ln}\,\frac{1}{6}$$

07) Si $f(u;v)=\dfrac{u}{v}+\sqrt{\dfrac{9-u}{2-v}}$, es $\lim\limits_{(u;v)\to(0;1)} f(u;v)=3$

¡Qué guay!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;1)

$$\text{"PL": si } (u;v)\to(0;1)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} u/v\to 0/1=0\\ 9-u\to 9\\ 2-v\to 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(u;v)=\frac{u}{v}+\sqrt{\frac{9-u}{2-v}}\to 0+\sqrt{\frac{9}{1}}=3$$

08) Si $f(z;t)=\sqrt[5]{\dfrac{z+z^2}{4-t}}.e^{t-2}$, es $\lim\limits_{(z;t)\to(1;2)} f(z;t)=1$

¡Los dioses están con nosotros!, "f" es inofensivo en el punto (1;2)

$$\text{"PL": si } (z;t)\to(1;2)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} z+z^2\to 2\\ 4-t\to 2\\ e^{t-2}\to e^0=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z;t)=\sqrt[5]{\frac{z+z^2}{4-t}}.e^{t-2}\to\sqrt[5]{\frac{2}{2}}.1=1$$

09) Si $f(z;t)=\sqrt[4]{\dfrac{z^3+1}{t+5}}+t^2$, es $\lim\limits_{(z;t)\to(1;2)} f(z;t)=\sqrt[4]{\dfrac{2}{7}}+4$

¡De rechupete!, el campo "f" es inofensivo en el punto (1;2)

$$\text{"PL": si } (z;t)\to(1;2)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} z^3+1\to 2\\ t+5\to 7\\ t^2\to 4\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z;t)=\sqrt[4]{\frac{z^3+1}{t+5}}+t^2\to\sqrt[4]{\frac{2}{7}}+4$$

10) Si $f(z;t)=\sqrt{1+z}+\text{Ln}\,\dfrac{1+z^2}{3-t}$, es $\lim\limits_{(z;t)\to(1;2)} f(z;t)=\sqrt{2}+\text{Ln}\,2$

¡Wonderful!, el campo "f" es inofensivo en el punto (1;2)

$$\text{"PL": si } (z;t)\to(1;2)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+z}\to\sqrt{2}\\ 1+z^2\to 2\\ 3-t\to 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z;t)=\sqrt{1+z}+\text{Ln}\,\frac{1+z^2}{3-t}\to\sqrt{2}+\text{Ln}\,2$$

11) Si $f(\lambda;\theta)=e^{\lambda}.\dfrac{\theta+2}{\lambda+1}.\cos\,(1+\theta^3)$, es $\lim\limits_{(\lambda;\theta)\to(0;0)} f(\lambda;\theta)=2.\cos 1$

¡Requetewonderful!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;0)

$$\text{"PL": si } (\lambda;\theta)\to(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e^{\lambda}\to e^0=1\\ \left.\begin{array}{l}\lambda+2\to 2\\ \theta+1\to 1\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\lambda+1}{\theta+2}\to\dfrac{2}{1}=2\\ 1+\theta^3\to 1\Rightarrow\cos\,(1+\theta^3)\to\cos 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\lambda;\theta)=e^{\lambda}.\frac{\theta+2}{\lambda+1}.\cos\,(1+\theta^3)\to 1.2.\cos 1$$

12) Si $f(\lambda;\theta)=\text{Ln}\,\dfrac{\lambda^3+1}{2-\theta}$, es $\lim\limits_{(\lambda;\theta)\to(0;0)} f(\lambda;\theta)=\text{Ln}\,\dfrac{1}{2}$

¡Qué chorrada!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;0)

$$\text{"PL": si } (\lambda;\theta)\to(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda^3+1\to 1\\ 2-\theta\to 2\end{array}\right\}\Rightarrow f(\lambda;\theta)=\text{Ln}\,\frac{\lambda^3+1}{2-\theta}\to\text{Ln}\,\frac{1}{2}$$

13) Si $f(\lambda;\theta)=\dfrac{2-\lambda^2}{\theta+1}.2^{(\theta+3)/(1-\lambda)}.\sqrt[3]{\dfrac{8+\lambda}{1-\theta}}$, es $\lim\limits_{(\lambda;\theta)\to(0;0)} f(\lambda;\theta)=32$

¡Vaya gilipollez!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;0)

$$\text{"PL": si } (\lambda;\theta)\to(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}2-\lambda^2\to 2\\ \theta+1\to 1\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{2-\lambda^2}{\theta+1}\to\dfrac{2}{1}=2\\ \left.\begin{array}{l}\theta+3\to 3\\ 1-\lambda\to 1\end{array}\right\}\Rightarrow 2^{(\theta+3)/(1-\lambda)}\to 2^3=8\\ \left.\begin{array}{l}8+\lambda\to 8\\ 1-\theta\to 1\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{8+\lambda}{1-\theta}}\to\sqrt[3]{\dfrac{8}{1}}=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\lambda;\theta)=\frac{2-\lambda^2}{\theta+1}.2^{(\theta+3)/(1-\lambda)}.\sqrt[3]{\frac{8+\lambda}{1-\theta}}\to 2.8.2=32$$

14) Si $f(x;y)=(1+y^2)^{x+2}$, es $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=1$

¡Qué chuppy!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;0)

$$\text{"PL": si } (x;y)\to(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1+y^2\to 1\\ x+2\to 2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x;y)=(1+y^2)^{x+2}\to 1^2=1$$

15) Si $f(x;y)=\left|\dfrac{x^3-1}{1+2.y}\right|$, es $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=1$

¡Qué bola!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;0)

"PL": si $(x;y)\to(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^3-1\to -1\\ 1+2.y\to 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x;y)=\left|\dfrac{1-x^3}{1+2.y}\right|\to\left|-\dfrac{1}{1}\right|=1$

16) Si $f(x;y)=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}-8^{x/(1+y)}+\sqrt[5]{\dfrac{x+64}{y+2}}\Rightarrow\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=2$

¡Para niños de teta!, el campo "f" es inofensivo en el punto (0;0)

$$\text{"PL": si } (x;y)\to(0;0)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left.\begin{matrix}1-x^2\to 1\\ 1+y^2\to 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{1-x^2}{1+y^2}\to\dfrac{1}{1}=1\\ \left.\begin{matrix}x\to 0\\ 1+y\to 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 8^{x/(1+y)}\to 8^0=1\\ \left.\begin{matrix}x+64\to 54\\ y+2\to 2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sqrt[5]{\dfrac{x+64}{y+2}}\to\sqrt[5]{\dfrac{64}{2}}=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x;y)=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}-8^{x/(1+y)}+\sqrt[5]{\dfrac{x+64}{y+2}}\to 1-1+2=2$$

17) Si $f(x;y)=\dfrac{4+\operatorname{sen}(x-2)}{e^{x-2}+\cos(y-3)}$, es $\lim\limits_{(x;y)\to(2;3)} f(x;y)=2$

¡Qué fácil!, el campo "f" es inofensivo en el punto (2;3)

$$\text{"PL": si } (x;y)\to(2;3)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4+\operatorname{sen}(x-2)\to 4+\operatorname{sen}0=4\\ e^{x-2}\to e^{2-2}=1\\ \cos(y-3)\to\cos 0=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x;y)=\dfrac{4+\operatorname{sen}(x-2)}{e^{x-2}+\cos(y-3)}\to\dfrac{4}{1+1}=2$$

18) Si $f(x;y)=\dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x.y-1)}{\operatorname{arc\,sen}(x-1)+\operatorname{arc\,cos}(y-2)}\Rightarrow\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} f(x;y)=1$

¡Suicídate si lo fallas!, el campo "f" es inofensivo en el punto (1;2)

$$\text{"PL": si } (x;y)\to(1;2)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\operatorname{arc\,sen}(x.y-1)\to\operatorname{arc\,sen}1=\pi/2\\ \operatorname{arc\,sen}(x-1)\to\operatorname{arc\,sen}0=0\\ \operatorname{arc\,cos}(y-2)\to\operatorname{arc\,cos}0=\pi/2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x;y)=\dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x.y-1)}{\operatorname{arc\,sen}(x-1)+\operatorname{arc\,cos}(y-2)}\to\dfrac{\pi/2}{0+(\pi/2)}=1$$

La estupidez según Murphy

Nunca hay tiempo para hacerlo bien, pero siempre lo hay para hacerlo dos veces

Nadie confunde **aproximarse** a Burgos con **estar** en Burgos ...... y nadie debe confundir **aproximarse** al punto $\bar{x}_0$ con **estar** en el punto $\bar{x}_0$. Pues bien, confundirá estos dos conceptos todo el que, al hacer el "PL" para así calcular el límite de $f:D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ en el punto $\bar{x}_0 \in Ac:(D)$, sustituya $\bar{x}$ por $\bar{x}_0$ en la expresión matemática de $f(\bar{x})$, pues al hacer esto calculará la imagen de $\bar{x}_0$ según "f", y no el valor al que se **aproxima** la imagen de $\bar{x}$ según "f" cuando $\bar{x}$ se **aproxima** a $\bar{x}_0$. Recuerda: **a la hora de hablar del "límite" de "f" en el punto $\bar{x}_0$ importa un pito si $\bar{x}_0$ tiene imagen o no la tiene, eso es totalmente irrelevante.**

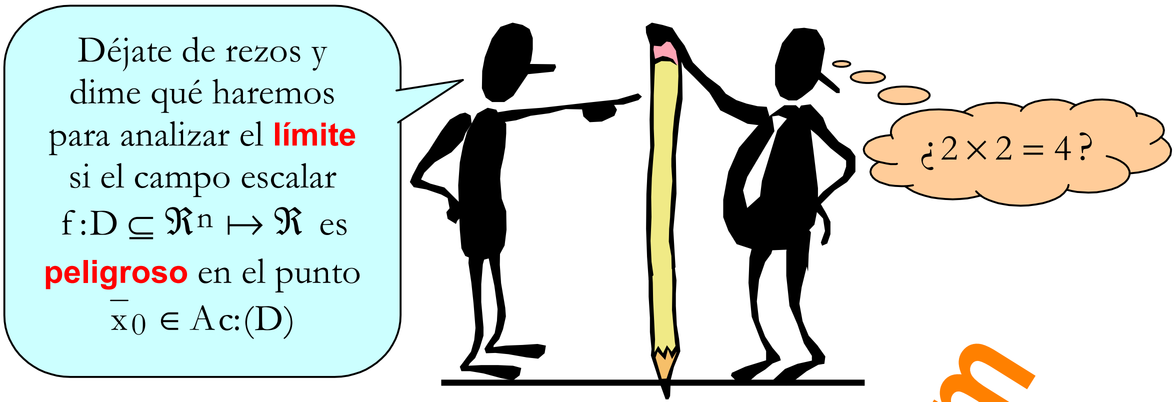
No obstante, como sabemos, si "f" es inofensiva en el punto $\bar{x}_0$, el límite de "f" en $\bar{x}_0$ siempre coincide con $f(\bar{x}_0)$; y este estupendo chollo permite que, al andar por casa, podamos calcular límites tontorrones a la velocidad de la luz, sin el coñazo de tener que hacer el "PL" (como en los ejemplos precedentes). Así:

$$\lim_{(x;y)\to(2;3)} \sqrt[5]{\frac{y+x^2}{3-x}}.e^{x-2} = f(2;3) = \sqrt[5]{\frac{3+2^2}{3-2}}.e^{2-2} = \sqrt[5]{7}$$

$$\boxed{\text{pues } f(x;y) = \sqrt[5]{\frac{y+x^2}{3-x}}.e^{x-2} \text{ es inofensiva en el punto } (2;3)}$$

En definitiva, grábalo en tu cerebro, para calcular el límite de $f:D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ en el punto $\bar{x}_0 \in Ac:(D)$, lo primero **SIEMPRE** es invertir unos milisegundos en analizar si "f" es **inofensiva o peligrosa** en dicho punto.

1) Si "f" es **inofensiva** en $\bar{x}_0$, **siempre existirá el límite** de "f" en $\bar{x}_0$ y coincidirá con $f(\bar{x}_0)$, lo que nos permite conocer **a priori** el resultado del "PL"; en este trance sólo escribiremos con detalle dicho "PL" si hay tiempo y nos interesa quedar bien con la persona que ha de leer lo que escribimos.
2) Si "f" es **peligrosa** en $f(\bar{x}_0)$, **reza todo lo que sepas,** porque el cálculo su límite en el punto $\bar{x}_0$ puede desbordarnos las neuronas.



Lidia de límites en situaciones peligrosas

Aunque un campo "f" sea peligroso en un punto, el estudio su límite en dicho punto puede ser una chorrada

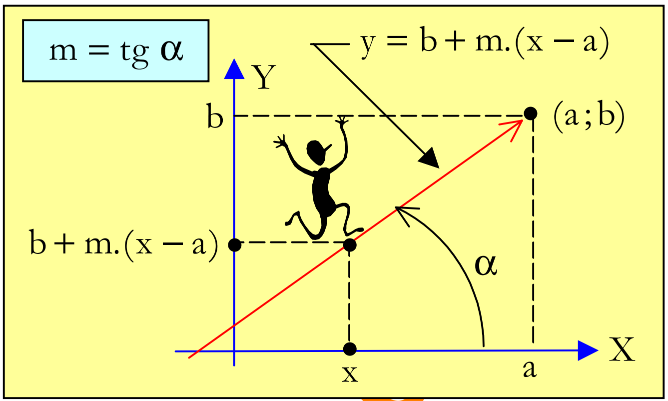
- ***Por ejemplo,***, el campo "f" tal que $f(x;y) = e^{x^2/(y-3)}$ es **peligroso** en el punto $\overline{u}_0 = (2;3)$, pues el denominador del exponente se anula en dicho punto. Es evidente que "f" carece de límite en $\overline{u}_0 = (2;3)$, pues si $y \to 3^+$ sucede que $x^2/(y-3) \to +\infty$ y $f(x;y) = e^{x^2/(y-3)} \to e^{+\infty} = +\infty$; pero si $y \to 3^-$ sucede que $x^2/(y-3) \to -\infty$ y $f(x;y) = e^{x^2/(y-3)} \to e^{-\infty} = e^{-\infty} = 0$.
- ***Por ejemplo,*** $f(x;y) = (1 + x.y)/(x^3 + y^3)$ es **peligroso** en $\overline{u}_0 = (0;0)$, pues el denominador se anula en dicho punto. Es obvio que "f" carece de límite en $\overline{u}_0 = (0;0)$: si "x" e "y" tienden a 0 con valores negativos ambos, entonces $f(x;y) = (1 + x.y)/(x^3 + y^3) \to 1/0^- = -\infty$; pero si "x" e "y" tienden a 0 con valores positivos ambos, entonces $f(x;y) = (1+x.y)/(x^3+y^3) \to 1/0^+ = +\infty$.

Podremos asegurar que un campo "f" carece de límite en un punto si encontramos trayectorias de aproximación a dicho punto que den límites distintos

Si el campo $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ es peligroso en el punto $\overline{u}_0 = (a;b) \in Ac.(D)$, haremos que el punto genérico $\overline{u} = (x;y) \in D$ se aproxime al punto $\overline{u}_0 = (a;b)$ siguiendo **trayectorias o caminos famosos** (rectas, parábolas) ..... **y ello con la inconfesable esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos, pues en tal caso "f" carecerá de límite en (a;b):** recuerda que el límite de "f" en un punto $\overline{u}_0$ es $L \in \Re$ sólo si sea cual sea la trayectoria de aproximación a $\overline{u}_0$ que elija $\overline{u} = (x;y) \in D$, el valor de $f(\overline{u})$ se aproxima a "L" tanto como se quiera; es decir, sin más que más que elegir $\overline{u} = (x;y)$ bastante próximo a $\overline{u}_0$, el valor absoluto de $f(\overline{u}) - L$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera.

Trayectorias rectilíneas

Nos **aproximamos** a $\bar{u}_0 = (a;b)$ siguiendo una trayectoria rectilínea genérica; es decir, una trayectoria tal que la relación entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella es $y = b + m.(x-a)$, siendo "m" la pendiente de la recta elegida. Mientras hacemos el calculote **rezaremos para que el límite según esa trayectoria dependa del valor de "m", pues en tal caso "f" carece de límite en (a;b),** ya que para distintos valores de "m" se obtendrán distintos límites.



Se lidia así:

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.(x-a)}} f(x;y) = \lim_{x\to a} f(x;b+m.(x-a)) = \lim_{x\to a} \theta(x) = ...$$

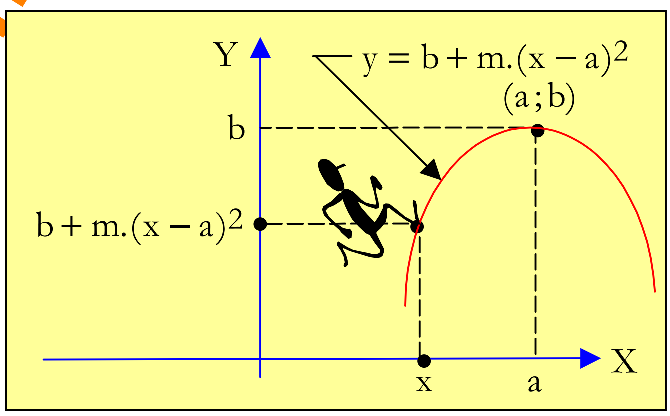
en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "y" por $b+m.(x-a)$;
o lo que es igual, sustituimos "$y-b$" por $m.(x-a)$, con lo que
obtendremos un "pedrusco" $\theta(x)$ cuyo valor sólo depende de "x"

Nos alegraremos mucho si el resultado depende de "m", porque en tal caso "f" carece de límite en el punto (a;b) .... y a otra cosa mariposa.

Por el contrario, si no depende de "m" (por ejemplo, el último límite es 14 para todo valor de "m") nos **cabrearemos** mucho, porque eso significa que **sea cual sea** la trayectoria **rectilínea** que $\bar{u} = (x;y)$ elija para aproximarse a $\bar{u}_0$, el número real $f(\bar{u})$, la Dulcinea de $\bar{u}$, se aproxima a 14 cuando $\bar{u}$ se aproxima a $\bar{u}_0$.

Trayectorias parabólicas (eje vertical)

Nos **aproximamos** a $\bar{u}_0 = (a;b)$ siguiendo una **parábola genérica de eje vertical que tenga su máximo** (mínimo) **en dicho punto;** es decir, tal que la relación entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella es $y = b + m.(x-a)^2$ .... y mientras hacemos los cálculos **rezamos para que el límite que resulte dependa del valor de "m" o no coincida con el obtenido con las trayectorias rectilíneas, porque en esos casos "f" carece de límite en el punto (a;b).**



Se lidia así:

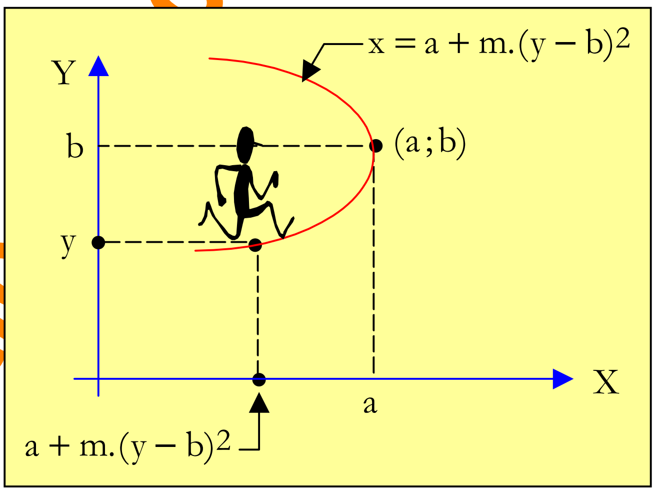
$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.(x-a)^2}} f(x;y) = \lim_{x\to a} f(x;b+m.(x-a)^2) = \lim_{x\to a} \gamma(x) = ...$$

en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "y" por $b+m.(x-a)^2$; o lo que es igual, sustituimos "$y-b$" por $m.(x-a)^2$, con lo que obtendremos un "pedrusco" $\gamma(x)$ cuyo valor sólo depende de "x"

Nos alegraremos mucho si el resultado depende de "m" o no coincide con el que de modo pertinaz obtuvimos con todas las trayectorias rectilíneas, porque "f" carecerá de límite en $\bar{u}_0 = (a;b)$, y a otra cosa mariposa. Por el contrario, si no depende de "m" y coincide con el que obtuvimos con todas las trayectorias rectilíneas (14), **nos cabrearemos mucho,** porque eso significa que **sea cual sea** la trayectoria **parabólica** del tipo indicado que $\bar{u} = (x;y)$ elija para aproximarse a $\bar{u}_0$, el número real $f(\bar{u})$, el amor de $\bar{u}$, se aproxima a 14 cuando $\bar{u}$ se aproxima a $\bar{u}_0$.

Trayectorias parabólicas (eje horizontal)

Nos **aproximamos** a $\bar{u}_0 = (a;b)$ siguiendo una **parábola genérica de eje horizontal** que girada 90 grados tenga su máximo/mínimo en dicho punto; es decir, tal que la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella son tales que $x = a+m.(y-b)^2$.



Mientras hacemos el calculote **rezamos para que resultado no coincida con el que de modo pertinaz hemos obtenido con todas las trayectorias rectilíneas y todas las parabólicas de eje vertical, o para que dependa del valor de "m", pues en ambos casos "f" carecerá de límite en el punto (a;b).**

Se lidia así:

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ x=a+m.(y-b)^2}} f(x;y) = \lim_{y\to b} f(a+m.(y-b)^2;y) = \lim_{y\to b} \eta(y) = ...$$

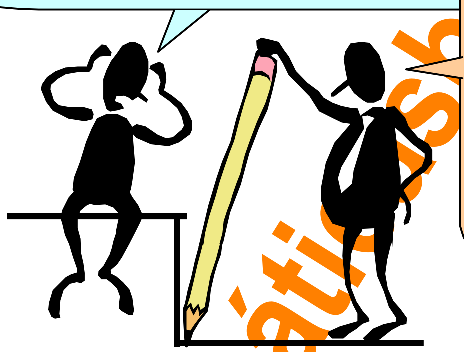
en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "x" por $a+m.(y-b)^2$; o lo que es igual, sustituimos "$x-a$" por $m.(y-b)^2$, con lo que obtendremos un "pedrusco" $\eta(y)$ cuyo valor sólo depende de "y"

Nos alegraremos mucho si el resultado depende de "m" o no coincide con el obtenido con todas las trayectorias rectilíneas y parabólicas anteriores, porque en esos casos "f" carece de límite en (a;b) y a otra cosa mariposa. Por el contrario, si no depende de "m" y coincide con el que obtuvimos con las precedentes trayectorias rectilíneas y parabólicas (14) **nos cabrearemos mucho,** pues eso significa que sea cual sea la trayectoria **parabólica** del tipo indicado que $\bar{u} = (x;y)$ elija para aproximarse a $\bar{u}_0$, el número real $f(\bar{u})$, la media naranja de $\bar{u}$, se aproxima a 14 si $\bar{u}$ se aproxima a $\bar{u}_0$.

Estoy supermosqueado, **este método de trabajo es una cutrez y no me gusta un pelo ....** porque si "f" tiene límite 14 en $\bar{u}_0$, será **imposible** encontrar trayectorias que den límite distinto de 14 ..... y así puedo pasarme 1000 años como un gilipollas "probando" con más y más trayectorias sin sacar nada en limpio, porque después de 1000 años trabajando:

1) **No podré decir que "f" carece de límite en (a;b),** pues todas las trayectorias probadas durante los 1000 años habrán dado como límite 14.
2) **No podré decir que el límite de "f" en (a;b) es 14,** pues entre las infinitas trayectorias que tras 1000 años aún no he "probado" podría haber trayectorias que den límite distinto de 14.

¡Vaya mierda!



Si te cansas de probar trayectorias sin sacar nada en limpio, recurre a la definición de límite ... pero no olvides seguir rezando

Otras trayectorias

Si con las trayectorias rectilíneas y parabólicas de aproximación a $\bar{u}_0 = (a;b)$ no sacas nada en limpio y decides seguir probando, puedes continuar lidiando así:

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.(x-a)^3}} f(x;y) = \lim_{x\to a} f(x;b+m.(x-a)^3) = \lim_{x\to a} \alpha_1(x) = ...$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.(x-a)^4}} f(x;y) = \lim_{x\to a} f(x;b+m.(x-a)^4) = \lim_{x\to a} \alpha_2(x) = ...$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.(x-a)^5}} f(x;y) = \lim_{x\to a} f(x;b+m.(x-a)^5) = \lim_{x\to a} \alpha_3(x) = ...$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.(x-a)^6}} f(x;y) = \lim_{x\to a} f(x;b+m.(x-a)^6) = \lim_{x\to a} \alpha_4(x) = ...$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ x=a+m.(y-b)^3}} f(x;y)=\lim_{y\to b} f(a+m.(y-b)^3;y)=\lim_{y\to b}\alpha_5(y)=.....$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ x=a+m.(y-b)^4}} f(x;y)=\lim_{y\to b} f(a+m.(y-b)^4;y)=\lim_{y\to b}\alpha_6(y)=.....$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ x=a+m.(y-b)^5}} f(x;y)=\lim_{y\to b} f(a+m.(y-b)^5;y)=\lim_{y\to b}\alpha_7(y)=.....$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ x=a+m.(y-b)^6}} f(x;y)=\lim_{y\to b} f(a+m.(y-b)^6;y)=\lim_{y\to b}\alpha_8(y)=.....$$

::

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ y=b+m.\mathrm{sen}\,(x-a)}} f(x;y)=\lim_{x\to a} f(x;b+m.\mathrm{sen}\,(x-a))=\lim_{x\to a}\alpha_9(x)=.....$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(a;b)\\ x=a+m.\mathrm{sen}\,(y-b)}} f(x;y)=\lim_{y\to b} f(a+m.\mathrm{sen}\,(y-b);y)=\lim_{y\to b}\alpha_{10}(x)=.....$$

::

Y sin con pertinaz cabezonería siempre obtenemos el mismo resultado (por ejemplo, 14), empezaremos a **sospechar** que 14 es el límite de "f" en $\overline{u}_0=(a;b)$, y nos morderemos los puños de rabia por el tiempo perdido con los cálculos, pues a pesar de la sospecha, como no hemos encontrado trayectorias que den límite distinto de 14, no podremos decir que "f" carece de límite en $\overline{u}_0=(a;b)$ ..... y tampoco podremos afirmar que 14 es el límite de "f" en $\overline{u}_0=(a;b)$, pues aún quedan infinitas trayectorias por "mirar".

En tan amargo trance, tras rezar con más ahínco que nunca para que los dioses se pongan de nuestra parte de una puñetera vez, **recurriremos a la definición de límite,** es decir, comprobaremos si **cerca** del punto $\overline{u}_0=(a;b)$ sucede que

$$\left|f(x;y)-14\right|<\varepsilon,\ \forall\,\varepsilon>0$$

FONEMATO 2.5.1

Analícese si tiene límite en el punto $\overline{u}_0=(2;3)$ el campo $f:\Re^2\mapsto\Re$ tal que

$$f(\overline{u})=\frac{2.x+5.y-19}{x-y+1}$$

SOLUCIÓN

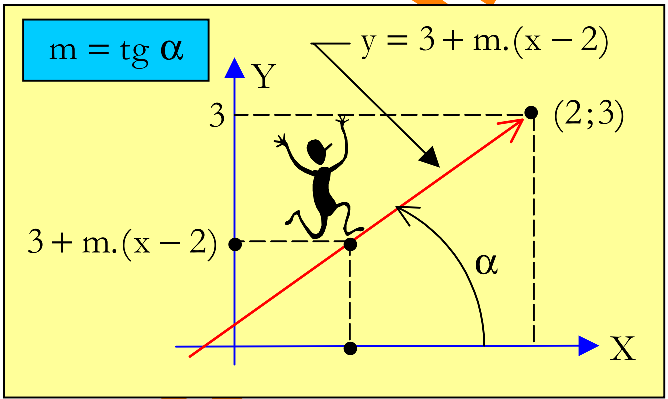
¡Qué faena!, nos piden el límite del campo "f" en un punto $\overline{u}_0=(2;3)$ en que "f" es peligroso, pues $\overline{u}_0=(2;3)$ anula al denominador.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, pues numerador y denominador **tienden** a 0 si $\overline{u}=(x;y)\to\overline{u}_0=(2;3)$. Haremos que el punto $\overline{u}=(x;y)$ se aproxime al punto $\overline{u}_0=(2;3)$ siguiendo trayectorias famosas, y ello con la inconfesable **esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos,** pues en tal caso "f" carecerá de límite en $\overline{u}_0=(2;3)$.

Recuerda: el límite de $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en un punto $\overline{u}_0 \in Ac.(D)$ es $L \in \Re$ sólo si sea cual sea la trayectoria de aproximación a $\overline{u}_0$ que $\overline{u} = (x;y)$ elija, sucede que $\left| f(\overline{u}) - L \right|$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera sin más que elegir $\overline{u} = (x;y) \in D$ bastante próximo a $\overline{u}_0$; es decir, **cerca** del punto $\overline{u}_0 = (2;3)$ se verifica que $\left| f(\overline{u}) - L \right| < \varepsilon,\ \forall\, \varepsilon > 0$.

Trayectorias rectilíneas

Nos aproximamos a $\overline{u}_0 = (2;3)$ siguiendo una trayectoria rectilínea genérica, una trayectoria tal que entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella hay una relación de la forma $y = 3 + m.(x-2)$, siendo "m" la pendiente de la recta elegida.



Mientras hacemos el calculote **rezamos** para que el resultado dependa del valor de "m", pues en tal caso "f" carecerá de límite en $\overline{u}_0 = (2;3)$, ya que para distintos valores de "m" se obtendrán distintos límites.

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(2;3)\\ y=3+m.(x-2)}} f(x;y) = \lim_{x\to 2} f(x;3+m.(x-2)) =$$

en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "y" por $3 + m.(x-2)$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2.x + 5.(3+m.(x-2)) - 19}{x - (3+m.(x-2)) + 1} = \lim_{x\to 2} \frac{2.x + 5.m.x - 10.m - 4}{x - m.x + 2.m - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2.(x-2) + 5.m.(x-2)}{(x-2) - m.(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2+5.m}{1-m} = \frac{2+5.m}{1-m}$$

dividimos numerador y denominador por $(x-2)$, lo que es lícito, pues $x - 2 \neq 0$, ya que "x" se "aproxima" a 2, pero no llega a ser 2

¡Qué potra!, el resultado obtenido depende de "m"; o sea, depende de cuál sea la recta elegida para la aproximación a $\overline{u}_0 = (2;3)$. Por tanto, el campo escalar "f" carece de límite en el punto $\overline{u}_0 = (2;3)$.

Por ejemplo, si $m = 7$ ($\Rightarrow (x;y)$ se aproxima al punto $\overline{u}_0 = (2;3)$ por la recta $y = 3 + 7.(x-2)$), el valor de $f(x;y)$ se aproxima a $(2+5.7)/(1-7) = -37/6$. Y si $m = 4$ ($\Rightarrow (x;y)$ se aproxima a $\overline{u}_0 = (2;3)$ por la recta $y = 3 + 4.(x-2)$), el valor de $f(x;y)$ se aproxima a $(2+5.5)/(1-4) = -27/3$.

Los dibujos grandes y detallados ponen de buen humor a todos los profesores

FONEMATO 2.5.2

Analícese si tiene límite en el punto $\bar{u}_0 = (0;0)$ el campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que

$$f(\bar{u}) = \frac{x.y}{x^2 + y^2}$$

SOLUCIÓN

¡Qué putada!, nos piden el límite de la función "f" en el punto $\bar{u}_0 = (0;0)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que "f" es peligroso, pues $\bar{u}_0 = (0;0)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador del cociente de polinomios $f(\bar{u})$. **Al hacer el PL no nos comemos una rosca,** pues el numerador y el denominador tienden a 0 si $\bar{u} = (x;y) \to \bar{u}_0 = (0;0)$.

Haremos que el punto $\bar{u} = (x;y)$ se aproxime al punto $(0;0)$ siguiendo trayectorias famosas, y ello con la **inconfesable esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos,** pues en tal caso "f" carecerá de límite en $(0;0)$.

Recuerda: el límite de $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en un punto $\bar{u}_0 \in Ac.(D)$ es $L \in \Re$ si sea cual sea la trayectoria de aproximación a $\bar{u}_0$ que elija $\bar{u} = (x;y) \in \Re^2$, sucede que $|f(\bar{u}) - L|$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera sin más que elegir $\bar{u} = (x;y) \in D$ lo bastante próximo a $\bar{u}_0$. Es decir, **cerca** de $\bar{u}_0$ sucede que:

$$|f(\bar{u}) - L| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Trayectorias rectilíneas

Nos aproximamos a $\bar{u}_0 = (0;0)$ siguiendo una trayectoria rectilínea genérica, una trayectoria tal que entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella existe la relación $y = 0 + m.(x - 0)$, siendo "m" la pendiente de la recta elegida.

Mientras hacemos el calculote **rezamos** para que el límite que resulte dependa del valor de "m", pues en tal caso "f" carecerá de límite en $\bar{u}_0 = (0;0)$, ya que para distintos valores de "m" se obtendrán distintos límites.

$$\lim_{\substack{(x;y) \to (0;0) \\ y = 0 + m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x \to 0} f(x;m.x) =$$

en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "y" por "m.x"

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x.(m.x)}{x^2 + (m.x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m.x^2}{x^2 + m^2.x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

dividimos numerador y denominador por x^2, lo que es lícito, pues $x^2 \neq 0$, ya que "x" se "aproxima" a 0, pero no llega a ser 0

¡Qué potra!: el resultado depende de "m"; o sea, depende de cuál sea la recta elegida para la aproximación a $\bar{u}_0 = (0;0)$. Por tanto, el campo escalar "f" carece de límite en $\bar{u}_0 = (0;0)$.

FONEMATO 2.5.3

Analícese si tiene límite en el punto $\bar{u}_0 = (2;3)$ el campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que

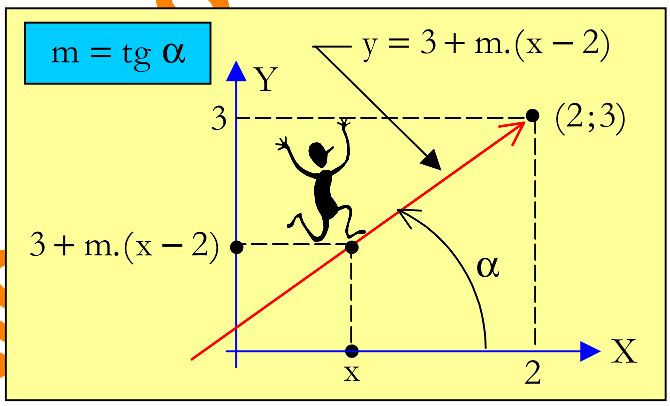
$$f(\bar{u}) = \frac{(x-2).(y-3)^2}{(x-2)^2 + (y-3)^4}$$

SOLUCIÓN

¡Qué mal rollo!, nos piden el límite de "f" en el punto $\bar{u}_0 = (2;3)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que dicha función es peligrosa, pues $\bar{u}_0 = (2;3)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador de $f(\bar{u})$. **Al hacer el PL no nos comemos un rosco,** ya que numerador y denominador **tienden** a 0 si $\bar{u} = (x;y) \to \bar{u}_0 = (2;3)$. Lidiaremos haciendo que $\bar{u} = (x;y)$ se aproxime al punto $(2;3)$ siguiendo trayectorias o caminos famosos, y ello con la inconfesable esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos, pues en tal caso "f" carecerá de límite en $(2;3)$.

Trayectorias rectilíneas

Nos aproximamos a $\bar{u}_0 = (2;3)$ siguiendo una trayectoria rectilínea genérica, una trayectoria tal que entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella existe la relación $y = 3 + m.(x-2)$, siendo "m" la pendiente de la recta. Mientras hacemos el calculote **rezamos** para que el resultado dependa del valor de "m", ya que en tal caso "f" carecerá de límite en $(2;3)$, pues para distintos valores de "m" se obtendrán distintos límites.



$$\lim_{\substack{(x;y)\to(2;3)\\ y=3+m.(x-2)}} f(x;y) = \lim_{x\to 2} f(x;3+m.(x-2)) =$$

en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "y" por $3+m.(x-2)$; o lo que es igual, sustituimos $y-3$ por $m.(x-2)$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{m^2.(x-2)^3}{(x-2)^2 + m^4.(x-2)^4} =$$

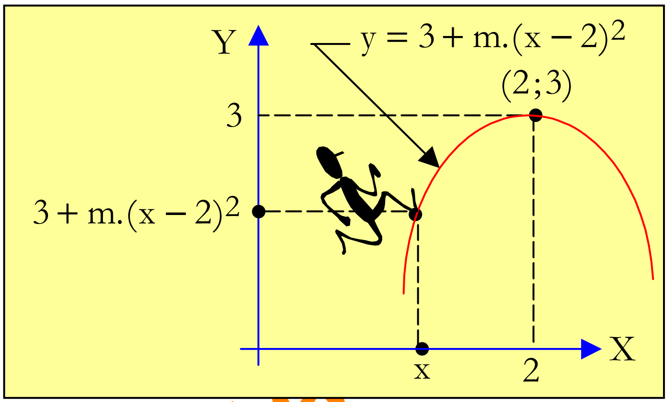
dividimos numerador y denominador por $(x-2)^2$, lo que es lícito, pues $(x-2)^2 \neq 0$, ya que "x" se "aproxima" a 2, pero no llega a ser 2

$$= \lim_{x\to 2} \frac{m^2.(x-2)}{1 + m^4.(x-2)^2} = \frac{0}{1+0} = 0,\ \forall\ m \in \Re$$

PL sencillito

El que el límite sea 0 para todo valor de "m" significa que sea cual sea la trayectoria rectilínea que $\overline{u}$ elija para aproximarse a $\overline{u}_0$, el número real $f(\overline{u})$, la Dulcinea de $\overline{u}$, se aproxima a 0 cuando $\overline{u}$ se aproxima a $\overline{u}_0$.

Trayectorias parabólicas de eje vertical



Nos aproximamos a $\overline{u}_0 = (2;3)$ siguiendo una parábola genérica de eje vertical que tenga su máximo (mínimo) en dicho punto, es decir, una trayectoria tal que entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella existe la relación $y = 3 + m.(x-2)^2$. Y **rezamos** para que el límite que resulte sea $\neq 0$ (pues 0 es el límite que hemos obtenido con las trayectorias rectilíneas) o dependa del valor de "m", pues en ambos casos "f" carecerá de límite en $\overline{u}_0 = (2;3)$.

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(2;3)\\ y=3+m.(x-2)^2}} f(x;y) = \lim_{x\to 2} f(x;3+m.(x-2)^2) =$$

$$\boxed{\text{en la expresión matemática de } f(x;y) \text{ sustituimos "y" por } 3+m.(x-2)^2\text{; o lo que es igual, sustituimos } y-3 \text{ por } m.(x-2)^2}$$

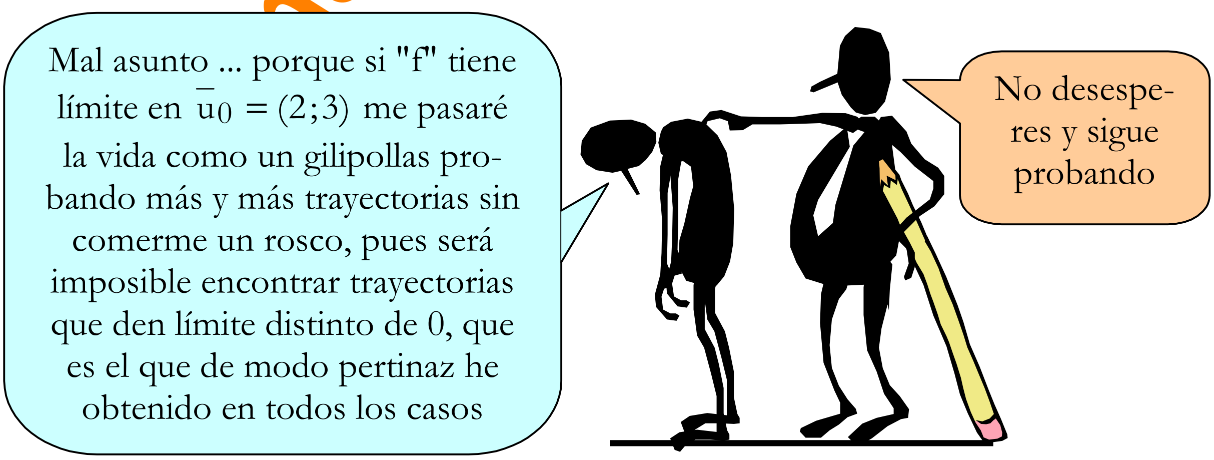
$$= \lim_{x\to 2} \frac{m^2.(x-2)^5}{(x-2)^2 + m^4.(x-2)^8} =$$

$$\boxed{\text{dividimos numerador y denominador por } (x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{m^2.(x-2)^3}{1+m^4.(x-2)^6} = \frac{0}{1+0} = 0,\ \forall\ m \in \Re$$

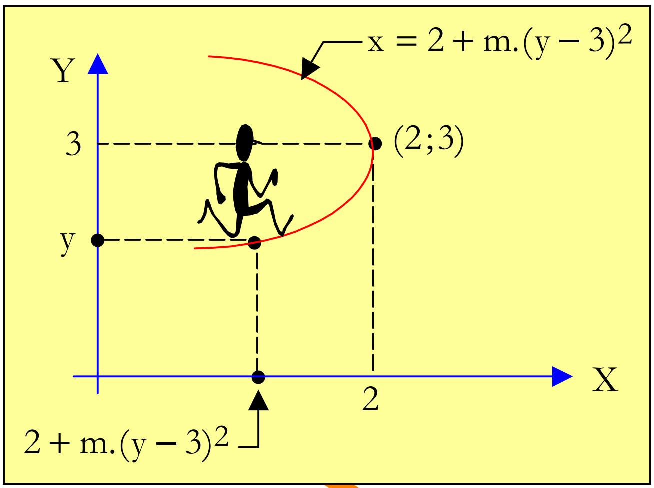
$$\boxed{\text{PL sencillito}}$$

El que el límite sea 0 para todo valor de "m" significa que sea cual sea la trayectoria parabólica que $\overline{u}$ elija para aproximarse a $\overline{u}_0$, el número real $f(\overline{u})$, la amadísima Dulcinea de $\overline{u}$, se aproxima a 0 cuando $\overline{u}$ se aproxima a $\overline{u}_0$.



Trayectorias parabólicas de eje horizontal

Nos aproximamos a $\overline{u}_0 = (2;3)$ siguiendo una parábola genérica de eje horizontal que girada 90 grados tenga su máximo/mínimo en dicho punto, es decir, tal que la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella están relacionadas mediante $x = 2 + m.(y-3)^2$.



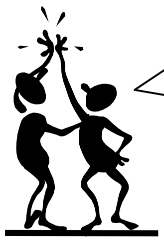
Y **rezamos** para que el límite que resulte sea distinto de 0 (pues 0 es el límite que de modo pertinaz hemos obtenido con todas las trayectorias rectilíneas y las parabólicas de eje vertical) o dependa del valor de "m", pues en ambos casos "f" carecerá de límite en $\overline{u}_0 = (2;3)$.

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(2;3)\\ x=2+m.(y-3)^2}} f(x;y) = \lim_{y\to 3} f(2+m.(y-3)^2;y) =$$

en la expresión matemática de f(x;y) sustituimos "x" por $2 + m.(y-3)^2$; o lo que es igual, sustituimos $x-2$ por $m.(y-3)^2$

$$= \lim_{y\to 3} \frac{m.(y-3)^4}{m.(y-3)^4 + (y-3)^4} = \lim_{y\to 3} \frac{m}{m^2+1} = \frac{m}{m^2+1}$$

dividimos numerador y denominador por $(y-3)^4$, lo que es lícito, pues $(y-3)^4 \neq 0$, ya que "y" se "aproxima" a 3, pero no llega a ser 3



¡Qué potra!, el resultado depende de "m", o sea, depende de cuál sea la parábola elegida para la aproximación a $\overline{u}_0 = (0;0)$; por tanto "f" carece de límite en $\overline{u}_0 = (0;0)$.

Isaac Newton, el de la manzana, descubridor de la ley de la gravitación universal y uno de los padres del Cálculo Infinitesimal

Si he conseguido ver más lejos es porque me he aupado en hombros de gigantes; no sé lo que pareceré a los ojos del mundo, pero a los míos es como si hubiese sido un muchacho que juega en la orilla del mar y se divierte de tanto en tanto encontrando un guijarro más pulido o una concha más hermosa, mientras el inmenso océano de la verdad se extiende inexplorado frente a mí.

Isaac Newton (1642-1727)

FONEMATO 2.5.4

Estúdiese el límite en el punto $(0;0)$ del campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que:

$$1)\ f(x;y)=\frac{x^2.y}{x^4+y^2}\ ;\ 2)\ f(x;y)=\frac{\text{sen}\,(x+y)}{y}\ ;\ 3)\ f(x;y)=\frac{1-\cos\,2.y}{1-\cos\,3.x}$$

$$4)\ f(x;y)=\frac{e^{2.y}-1}{1-e^{3.x}}\ ;\ 5)\ f(x;y)=\frac{\text{Ln}\,(1+3.y)}{\text{Ln}\,(1-2.x)}$$

SOLUCIÓN

1) **¡Qué putada!,** hay que estudiar el límite de "f" en el punto $\bar{u}_0=(0;0)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que "f" es peligrosa, pues $(0;0)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador de $f(x;y)$.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, ya que el numerador y el denominador **tienden** a 0 si $\bar{u}=(x;y)\to\bar{u}_0=(0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x)=$$

$\boxed{\text{en la expresión matemática de } f(x;y) \text{ sustituimos "y" por "m.x"}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.(m.x)}{x^4+(m.x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m.x^3}{x^4+m^2.x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{m.x}{x^2+m^2}\underset{\boxed{\text{si } m\neq 0}}{=}\frac{0}{0+m^2}=0,\ \forall\ m\neq 0$$

Si $m=0$ ($\Rightarrow y=0.x=0\Rightarrow$ la trayectoria de aproximación a $(0;0)$ es el eje de abcisas), resulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x;0.x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.(0.x)}{x^4+(0.x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4}=\lim_{x\to 0} 0=0$$

Trayectorias parabólicas de eje vertical

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)^2}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x^2)=$$

$\boxed{\text{en la expresión matemática de } f(x;y) \text{ sustituimos "y" por } m.x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2.(m.x^2)}{x^4+(m.x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m.x^4}{x^4+m^2.x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto $(0;0)$

2) **¡Qué faena!,** la función "f" tal que $f(x;y) = (\text{sen}(x+y))/y$ es peligrosa en el punto (0;0), pues en dicho punto se anula el denominador. **Al hacer el PL no nos comemos una rosca,** pues el numerador y el denominador **tienden** a 0 si $(x;y) \to (0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

en la expresión matemática de f(x;y) sustituimos "y" por "m.x"

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x+m.x)}{m.x} = (0/0) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+m).\cos(x+m.x)}{m} = \frac{1+m}{m} \Rightarrow$$

Aplicamos la regla de L'Hospital: $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = (0/0) = \lim_{x\to a} \frac{p'(x)}{q'(x)}$

$$p(x) = \text{sen}(x+m.x) \Rightarrow p'(x) = (1+m).\cos(x+m.x)$$
$$q(x) = m.x \Rightarrow q'(x) = m$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

3) **¡Mal fario!,** siendo $f(x;y) = (1-\cos 2.y)/(1-\cos 3.x)$, la función "f" es peligrosa en el punto (0;0), pues en dicho punto se anula el denominador. **Al hacer el PL no nos comemos una rosca,** ya que el numerador y el denominador **tienden** a 0 si $(x;y) \to (0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

en la expresión matemática de f(x;y) sustituimos "y" por "m.x"

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2.m.x}{1-\cos 3.x} = (0/0) = \lim_{x\to 0} \frac{2.m.\text{sen}\, 2.m.x}{3.\text{sen}\, 3.x} =$$

Aplicamos la regla de L'Hospital: $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = (0/0) = \lim_{x\to a} \frac{p'(x)}{q'(x)}$

$$p(x) = 1-\cos 2.m.x \Rightarrow p'(x) = 2.m.\text{sen}\, 2.m.x$$
$$q(x) = 1-\cos 3.x \Rightarrow q'(x) = 3.\text{sen}\, 3.x$$

$$= \frac{2.m}{3}.\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, 2.m.x}{\text{sen}\, 3.x} = (0/0) = \frac{2.m}{3}.\lim_{x\to 0} \frac{2.m.\cos 2.m.x}{3.\cos 3.x} =$$

Aplicamos la regla de L'Hospital otra vez

$$= \frac{4.m^2}{9}.\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2.m.x}{\cos 3.x} = \frac{4.m^2}{9}.\frac{1}{1} = \frac{4.m^2}{9} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

4) **¡Mal asunto!,** siendo $f(x;y)=(e^{2.y}-1)/(1-e^{3.x})$, la función "f" es peligrosa en el punto (0;0), pues en dicho punto se anula el denominador.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, ya que el numerador y el denominador **tienden** a 0 si $(x;y)\to(0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x)=$$

en la expresión matemática de f(x;y) sustituimos "y" por "m.x"

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2.m.x}-1}{1-e^{3.x}}=(0/0)=\lim_{x\to 0}\frac{2.m.e^{2.m.x}}{-3.e^{3.x}}=-\frac{2.m}{3}\Rightarrow$$

Aplicamos la regla de L'Hospital: $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=(0/0)=\lim_{x\to a}\frac{p'(x)}{q'(x)}$

$$p(x)=e^{2.m.x}-1\Rightarrow p'(x)=2.m.e^{2.m..x}$$
$$q(x)=1-e^{3.x}\Rightarrow q'(x)=-3.e^{3.x}$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

5) **¡Llevamos la negra!,** si $f(x;y)=(\text{Ln}\ (1+3.y))/\text{Ln}\ (1-2.x)$, la función "f" es peligrosa en el punto (0;0), pues en dicho punto se anula el denominador.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, ya que el numerador y el denominador **tienden** a 0 si $(x;y)\to(0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x)=$$

en la expresión matemática de f(x;y) sustituimos "y" por "m.x"

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}\ (1+3.m.x)}{\text{Ln}\ (1-2.x)}=(0/0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3.m}{1+3.m.x}}{\frac{-2}{1-2.x}}=$$

Aplicamos la regla de L'Hospital: $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=(0/0)=\lim_{x\to a}\frac{p'(x)}{q'(x)}$

$$p(x)=\text{Ln}\ (1+3.m.x)\Rightarrow p'(x)=\frac{3.m}{1+3.m.x}$$
$$q(x)=\text{Ln}\ (1-2.x)\Rightarrow q'(x)=\frac{-2}{1-2.x}$$

$$=-\frac{3.m}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{1-2.x}{1+3.m.x}=-\frac{3.m}{2}.\frac{1-0}{1+0}=-\frac{3.m}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

FONEMATO 3.5.5

Estúdiese el límite en el punto $(0;0)$ del campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ tal que:

$$1)\ f(x;y)=\frac{4+x+y}{x^2.y}\ ;\ 2)\ f(x;y)=\frac{x.y^3}{x^3.y+2.x-y}\quad 3)\ f(x;y)=\frac{1-e^{x^7/y}}{\text{arc tg }(x^7/y)}$$

$$4)\ f(x;y)=\frac{1+\text{Ln }(x/y^{19})}{1+\text{tg }(y^{19}/x)}\ ;\ 5)\ f(x;y)=\frac{x.y}{\sqrt{x^4+y^4}}\ ;\ 6)\ f(x;y)=\frac{3.x^4.y^4}{x^4.y^4+x-y}$$

SOLUCIÓN

1) El campo $f(x;y)=(4+x+y)/(x^2.y)$ es peligroso en el punto $(0;0)$, pues el denominador se anula en dicho punto, y "f" carece de límite en $(0;0)$, ya que:

$$*\ \text{si}\ \left\{\begin{matrix} x\to 0\\ y\to 0^+\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x;y)=\frac{4+x+y}{x^2.y}\to\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$*\ \text{si}\ \left\{\begin{matrix} x\to 0\\ y\to 0^-\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x;y)=\frac{4+x+y}{x^2.y}\to\frac{4}{0^-}=-\infty$$

2) El campo $f(x;y)=(x.y^3)/(x^3.y+2.x-y)$ es peligroso en $(0;0)$, pues en dicho punto se anula el denominador.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, pues numerador y denominador **tienden** a 0 si $(x;y)\to(0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x)=$$

en la expresión matemática de $f(x;y)$ sustituimos "y" por "m.x"

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x.(m.x)^3}{x^3.(m.x)+2.x-m.x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{m^3.x^3}{m.x^3+2-m}=\begin{cases}\boxed{\text{si } m\neq 2}=\dfrac{0}{0+2-m}=0\\ \boxed{\text{si } m=2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8.x^3}{2.x^3}=4\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto $(0;0)$

3) A la vista de la "estructura" de $f(x;y)$ **no hay que ser un lince** entrenado por los chiricauas para ver que si $(x;y)$ se aproxima a $(0;0)$ siguiendo la trayectoria $y=m.x^7$, el valor al que se aproxima $f(x;y)$ depende de "m":

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=m.x^7}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x^7)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^7/(m.x^7)}}{\text{arc tg }(x^7/(m.x^7))}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{1/m}}{\text{arc tg }(1/m)}=\frac{1-e^{1/m}}{\text{arc tg }(1/m)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto $(0;0)$

4) A la vista de la "estructura" de $f(x;y)$ **no hace falta trabajar en Scotland Yard** para darse cuenta de que si $(x;y)$ se aproxima a $(0;0)$ siguiendo la trayectoria $x = m.y^{19}$, el valor al que se aproxima $f(x;y)$ depende de "m":

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=m.y^{19}}} f(x;y) = \lim_{y\to 0} f(m.y^{19};y) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1+\text{Ln}\,(m.y^{19}/y^{19})}{1+\text{tg}\,(y^{19}/(m.x^{19}))} = \lim_{y\to 0} \frac{1+\text{Ln}\,m}{1+\text{tg}\,(1/m)} = \frac{1+\text{Ln}\,m}{1+\text{tg}\,(1/m)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

5) El campo $f(x;y) = x.y/\sqrt{x^4+y^4}$ es peligroso en (0;0), pues en dicho punto se anula el denominador.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, pues numerador y denominador **tienden** a 0 si $(x;y)\to(0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

$$\boxed{\text{en la expresión matemática de } f(x;y) \text{ sustituimos "y" por "m.x"}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x.(m.x)}{\sqrt{x^4+(m.x)^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{m.x^2}{\sqrt{x^4+m^4.x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m}{\sqrt{1++m^4}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^4}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

6) El campo $f(x;y) = x^4.y^4/(x^4.y^4+x-y)$ es peligroso en (0;0), pues en dicho punto se anula el denominador.

Al hacer el PL no nos comemos una rosca, pues numerador y denominador **tienden** a 0 si $(x;y)\to(0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

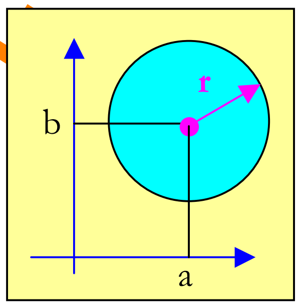
$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3.x^4.(m.x)^4}{x^4.(m.x)^4+x-m.x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3.m^4.x^7}{m^4.x^7+1-m} = \left.\begin{cases} \boxed{\text{si } m\neq 1} = \dfrac{0}{0+1-m} = 0 \\ \boxed{\text{si } m=1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3.x^7}{x^7} = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

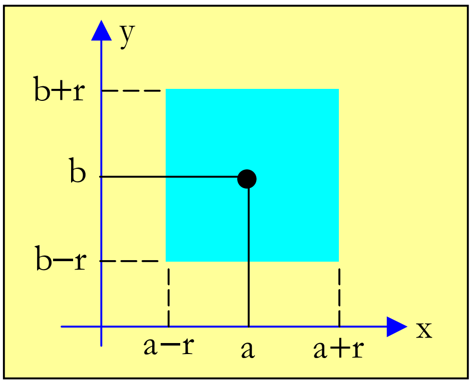
$\Rightarrow$ "f" carece de límite en el punto (0;0)

Entornos cuadrados



En su momento dijimos que si $(a;b)$ es un punto de $\Re^2$, el entorno reducido de centro en $(a;b)$ y radio $r>0$ lo forman los puntos $(x;y)\in\Re^2$ que son interiores a la circunferencia de centro en $(a;b)$ y radio "r", salvo el propio punto $(a;b)$:

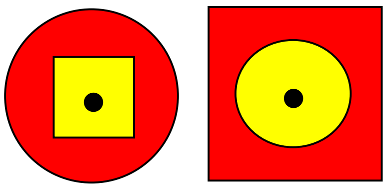
$$B^*((a;b);r)=\left\{(x;y)\in\Re^2 \,/\, 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\right\}$$



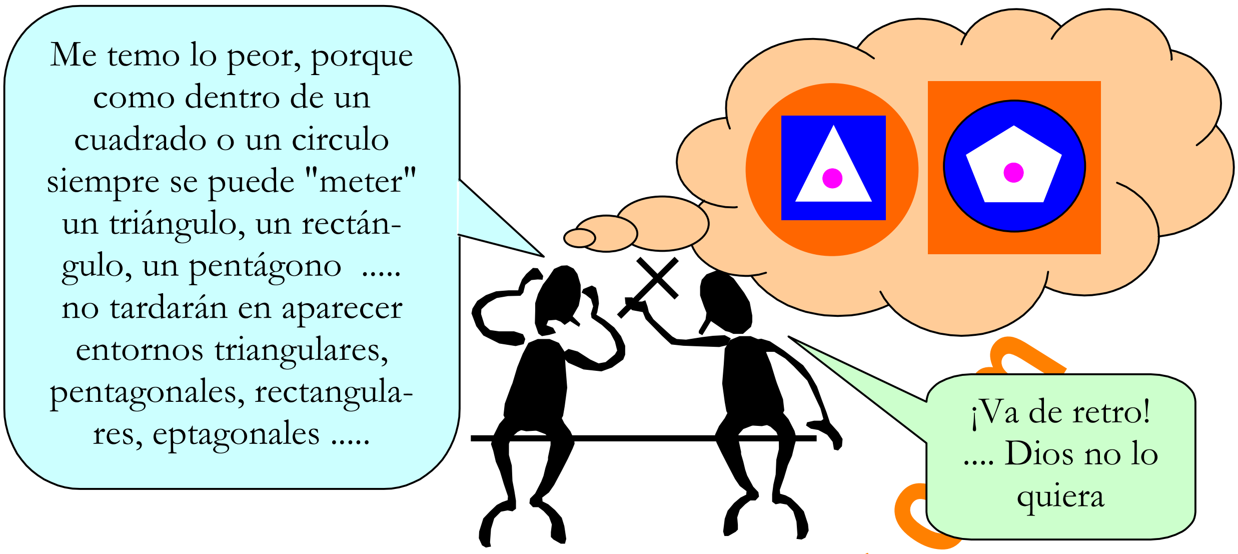
A veces, por comodidad, es preferible trabajar con **entornos cuadrados** en vez de circulares, diciendo que el entorno reducido de centro en $(a;b)$ y radio $r>0$ lo forman los puntos $(x;y)\in\Re^2$ interiores al cuadrado de centro en $(a;b)$ y semilado "r", salvo el propio punto $(a;b)$; es decir, los puntos $(x;y)\neq(a;b)$ tales que:

$$|x-a|<r\;;\;|y-b|<r$$

Obvio: si en todo punto de un entorno reducido circular (cuadrado) del punto $(a;b)$ la función $f:\Re^2\mapsto\Re$ cumple una propiedad (por ejemplo, se cumple que $|f(x;y)-L|<\varepsilon$), siempre es posible encontrar un entorno reducido cuadrado (circular) de $(a;b)$ en el que también se cumple esa propiedad.



Así, para lidiar límites mediante la definición de límite, diremos que el límite de $f:D\subseteq\Re^2\mapsto\Re$ en el punto $(a;b)\in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon>0$ es posible encontrar un $r>0$ tal que $|f(x;y)-L|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(a;b)$ del dominio de definición de "f" tal que $|x-a|<r$ y $|y-b|<r$.



FONEMATO 2.5.6

Demuéstrese que el campo $f:\mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}$ tiene límite 3 en el punto $(0;0)$.

$$1)\ f(x;y) = 3 + x.y\ ;\ 2)\ f(x;y) = 7.x + 6.y + 3\ ;\ 3)\ f(x;y) = 3 + x^2 + y$$
$$4)\ f(x;y) = 3 + x^2.y\ ;\ 5)\ f(x;y) = 3 + 5.x.y^4$$

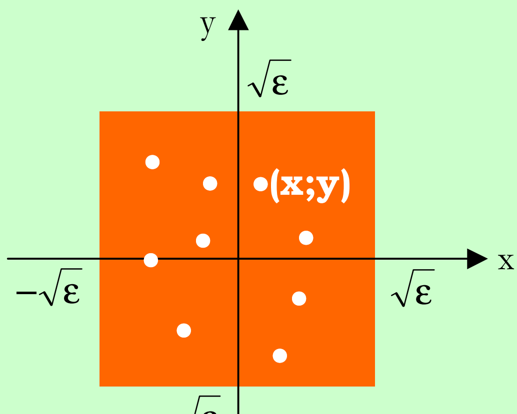
SOLUCIÓN

El límite del campo $f:D \subseteq \mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}$ en el punto $(a;b) \in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (a;b)$ que pertenezca a "D" y sea tal que $|x - a| < r$ y $|y - b| < r$. Por tanto, siendo $D = \mathfrak{R}^2$ en los cinco casos propuestos, el límite de "f" en $(0;0)$ es 3 si $\forall\ \varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 3| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ y tal que $|x - 0| = |x| < r$ y $|y - 0| = |y| < r$.

1) Si $f(x;y) = 3 + x.y$, es $|f(x;y) - 3| = |(3 + x.y) - 3| = |x.y| = |x|.|y|$

Es claro que $|f(x;y) - 3| = |x|.|y| < \varepsilon$ si $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ y $|y| < \sqrt{\varepsilon}$; o sea: $r = \sqrt{\varepsilon}$.

En todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **cuadrado** de la figura sucede que $|f(x;y) - 3| < \varepsilon$. **Observa:** si eliges $\varepsilon = 100$, es $r = \sqrt{\varepsilon} = 10$; si eliges $\varepsilon = 10^{-1000}$, es $r = \sqrt{\varepsilon} = 10^{-500}$; si eliges $\varepsilon = 10^{-7000000}$, es $r = \sqrt{\varepsilon} = 10^{-3500000}$; si eliges ....



2) Si $f(x;y)=7.x+6.y+3$, es:

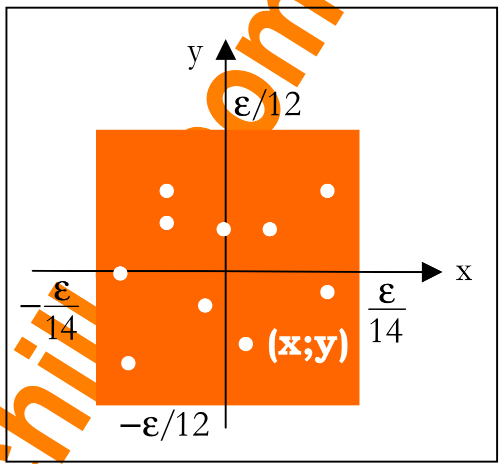
$$\left|f(x;y)-3\right|=\left|(7.x+6.y+3)-3\right|=\left|7.x+6.y\right|\le\left|7.x\right|+\left|6.y\right|=7.\left|x\right|+6.\left|y\right|$$

$$\boxed{\text{pues } \left|\text{Pepe}+\text{Juan}\right|\le\left|\text{Pepe}\right|+\left|\text{Juan}\right|}$$

Obvio: es $\left|f(x;y)-3\right|\le 7.\left|x\right|+6.\left|y\right|<\varepsilon$ si $7.\left|x\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ y $6.\left|y\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$; o sea, si

$$\left|x\right|<\varepsilon/14\ ;\ \left|y\right|<\varepsilon/12$$

Por tanto, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\ne(0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura adjunta. **Observa:**



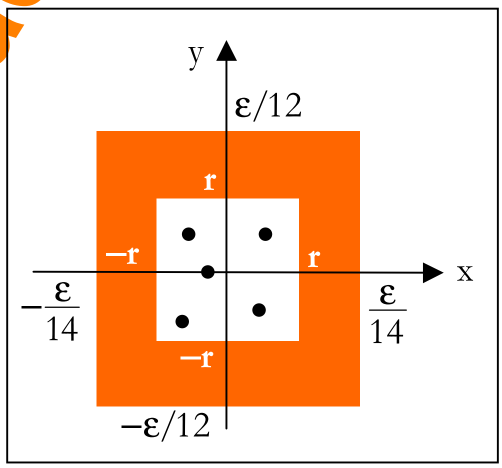
$$*\text{ si } \varepsilon=1680\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon/14=120\\ \varepsilon/12=140\end{cases}$$

$$*\text{ si } \varepsilon=0'1680\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon/14=0'012\\ \varepsilon/12=0'014\end{cases}$$

$$*\text{ si } \varepsilon=10^{-6000}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon/14=10^{-6000}/14\\ \varepsilon/12=10^{-6000}/12\end{cases}$$

::

Si $r<\text{mín.}\{\varepsilon/14;\varepsilon/12\}$, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\ne(0;0)$ tal que $\left|x-0\right|=\left|x\right|<r$ y $\left|y-0\right|=\left|y\right|<r$. O sea, si en todo punto $(x;y)\ne(0;0)$ interior al **rectángulo** indicado es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$, también es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\ne(0;0)$ interior a todo **cuadrado** de centro en $(0;0)$ que esté contenido en dicho rectángulo.



La técnica de la ventana

Aprende a usar "ventanas", pues como facilitan mucho la lectura de lo escrito, el profesor que corrija tu examen te lo agradecerá con su cariño y simpatía.

$$\text{Pedrusco "A"}=\text{Pedrusco "B"}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En esta ventana escribimos la secuencia lógica}\\ \text{(o los cálculos) que permite "pasar" de un lado a otro}\\ \text{del signo de igualdad o de la flecha de implicación}\end{array}}$$

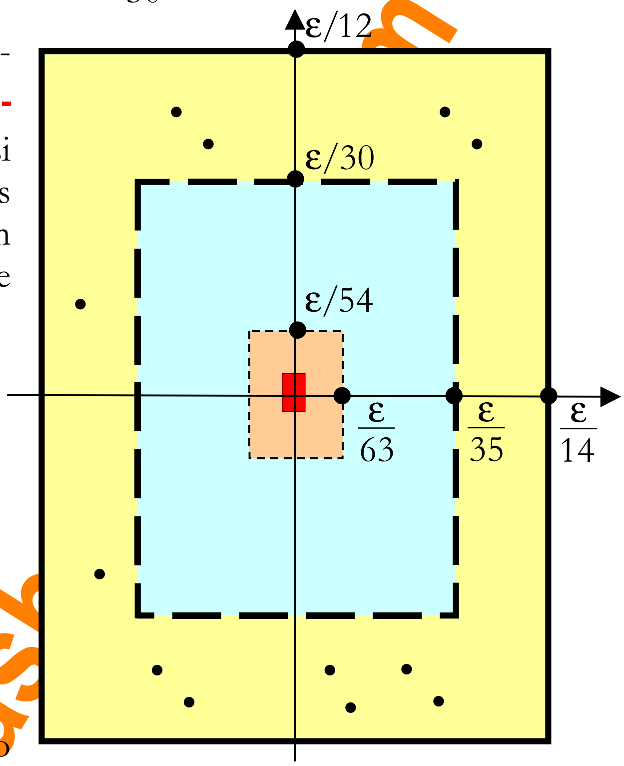
$$\text{Pedrusco "M"}=\text{Pedrusco "N"}\Rightarrow\text{Pedrusco "H"}=\text{Pedrusco "T"}$$

Toma buena nota

Podemos lidiar la acotación $\left|f(x;y)-3\right| \leq 7.\left|x\right|+6.\left|y\right|<\varepsilon$ **de infinidad de formas distintas.**

- **También es** $\left|f(x;y)-3\right| \leq 7.\left|x\right|+6.\left|y\right|<\varepsilon$ si $7.\left|x\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$ y $6.\left|y\right|<\dfrac{\varepsilon}{5}$; o sea:

$$\left|x\right|<\frac{\varepsilon}{35}\ ;\ \left|y\right|<\frac{\varepsilon}{30}$$



Así, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de trazo discontinuo grueso .... y si dentro de ese rectángulo queremos **"meter" un cuadrado** de centro en $(0;0)$, basta elegir su semilado "r" de modo que

$$r<\text{mín.}\{\varepsilon/35;\varepsilon/30\}=\varepsilon/35$$

- **También es**

$$\left|f(x;y)-3\right| \leq 7.\left|x\right|+6.\left|y\right|<\varepsilon$$

si $7.\left|x\right|<\dfrac{\varepsilon}{9}$ y $6.\left|y\right|<\dfrac{\varepsilon}{9}$; o sea, si

$$\left|x\right|<\frac{\varepsilon}{63}\ ;\ \left|y\right|<\frac{\varepsilon}{54}$$

Así, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de trazo discontinuo fino ..... y si dentro de ese rectángulo queremos **"meter" un cuadrado** de centro en $(0;0)$, basta que elegir su semilado "r" de modo que $r<\text{mín.}\{\varepsilon/63;\varepsilon/54\}=\varepsilon/54$.

- **También es** $\left|f(x;y)-3\right| \leq 7.\left|x\right|+6.\left|y\right|<\varepsilon$ si

$$7.\left|x\right|<\frac{\varepsilon}{1000000}\ ;\ 6.\left|y\right|<\frac{\varepsilon}{1000000}$$

O sea, si $\left|x\right|<\varepsilon/7000000$ y $\left|y\right|<\varepsilon/6000000$. Por tanto, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de trazo continuo fino ..... y si dentro de dicho rectángulo queremos **"meter" un cuadrado** de centro en $(0;0)$, basta que elegir su semilado "r" de modo que

$$r<\text{mín.}\{\varepsilon/7000000;\varepsilon/6000000\}=\varepsilon/6000000$$

3) Si $f(x;y)=3+x^2+y$, es:

$$\left|f(x;y)-3\right|=\left|(3+x^2+y)-3\right|=\left|x^2+y\right|\leq\left|x^2\right|+\left|y\right|=\left(\left|x\right|\right)^2+\left|y\right|$$

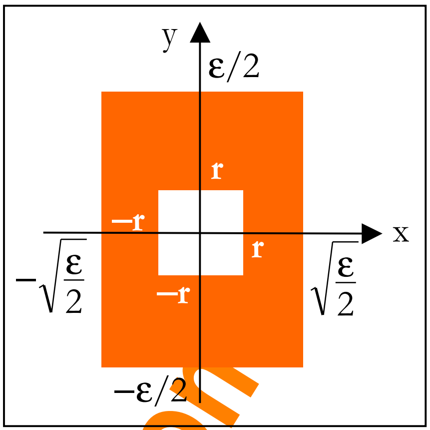
$$\boxed{\text{pues } \left|\text{Pepe}+\text{Juan}\right|\leq\left|\text{Pepe}\right|+\left|\text{Juan}\right|}$$

Obvio: es $|f(x;y)-3| \leq (|x|)^2 + |y| < \varepsilon$ si

$$(|x|)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \; ; \; |y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

o sea, si $|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ y $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia, es $|f(x;y)-3| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura adjunta. ***Por ejemplo,*** si $\varepsilon = 200$, es

$$\sqrt{\varepsilon/2} = 10 \; ; \; \varepsilon/2 = 100$$



Obvio: si $r < \text{mín.}\left\{\sqrt{\varepsilon/2}\,;\varepsilon/2\right\}$, sucederá que $|f(x;y)-3| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ tal que $|x-0| = |x| < r$ y $|y-0| = |y| < r$. O sea, si en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **rectángulo** indicado es $|f(x;y)-3| < \varepsilon$, también es $|f(x;y)-3| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior a todo **cuadrado** de centro en $(0;0)$ que esté contenido en dicho rectángulo.

Toma buena nota

Podemos lidiar la acotación $|f(x;y)-3| \leq (|x|)^2 + |y| < \varepsilon$ **de infinidad de formas distintas.**

- **También es** $|f(x;y)-3| = (|x|)^2 + |y| < \varepsilon$ si $(|x|)^2 < \frac{\varepsilon}{50}$ y $|y| < \frac{\varepsilon}{50}$; o sea:

$$|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{50}} \; ; \; |y| < \frac{\varepsilon}{50}$$

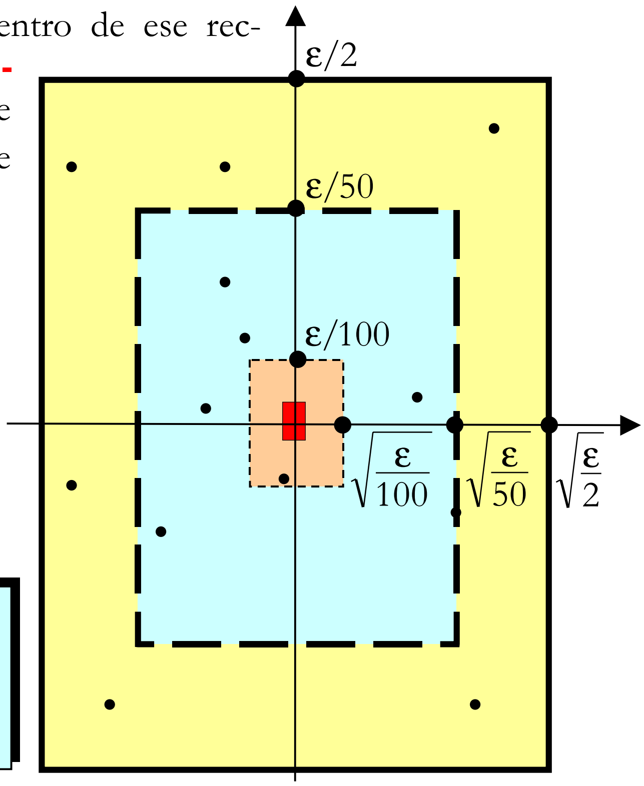
Así, es $|f(x;y)-3| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **rectángulo** de trazo discontinuo grueso ... y si dentro de ese rectángulo queremos **"meter" un cuadrado** con centro en $(0;0)$, basta que elegir su semilado "r" de modo que $r < \text{mín.}\left\{\sqrt{\varepsilon/50}\,;\varepsilon/50\right\}$.

- **También es**

$$|f(x;y)-3| \leq (|x|)^2 + |y| < \varepsilon$$

si $(|x|)^2 < \frac{\varepsilon}{100}$ y $|y| < \frac{\varepsilon}{100}$; o sea,

si $|x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{100}}$ y $|y| < \frac{\varepsilon}{100}$.



Los dibujos grandes y detallados ponen de buen humor a todos los profesores

Por tanto, es $|f(x;y)-3|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de trazo discontinuo fino ..... y si dentro de ese rectángulo queremos **"meter" un cuadrado** con centro en $(0;0)$, basta elegir su semilado "r" de modo que $r<\text{mín.}\left\{\sqrt{\varepsilon/100};\varepsilon/100\right\}$.

- **También es** $|f(x;y)-3|\leq(|x|)^2+|y|<\varepsilon$ si $(|x|)^2<\dfrac{\varepsilon}{1000}$ y $|y|<\dfrac{\varepsilon}{1000}$; o sea, si

$$|x|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{1000}}\ ;\ |y|<\frac{\varepsilon}{1000}$$

Por tanto, es $|f(x;y)-3|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de trazo continuo fino .... y si dentro de ese rectángulo queremos **"meter" un cuadrado** con centro en $(0;0)$, basta elegir su semilado "r" de modo que $r<\text{mín.}\left\{\sqrt{\varepsilon/1000};\varepsilon/1000\right\}$.

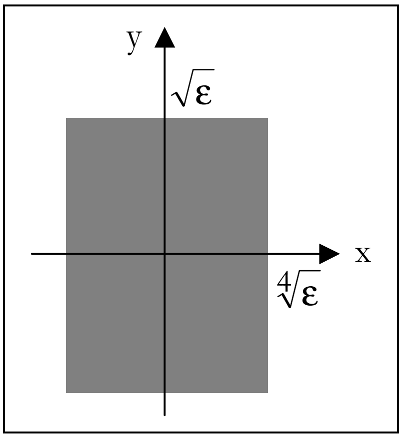
4) Si $f(x;y)=3+x^2.y$, es:

$$|f(x;y)-3|=|(3+x^2.y)-3|=|x^2.y|=|x^2|.|y|=(|x|)^2.|y|$$

Obvio: es $|f(x;y)-3|=(|x|)^2.|y|<\varepsilon$ si $(|x|)^2<\sqrt{\varepsilon}$ y $|y|<\sqrt{\varepsilon}$; o sea, si

$$|x|<\sqrt[4]{\varepsilon}\ ;\ |y|<\sqrt{\varepsilon}$$

Por tanto, es $|f(x;y)-3|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura adjunta, siendo claro que si $r<\text{mín.}\left\{\sqrt[4]{\varepsilon};\sqrt{\varepsilon}\right\}$, es $|f(x;y)-3|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ tal que $|x-0|=|x|<r$ y $|y-0|=|y|<r$. Es decir, si en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior ese rectángulo sucede que $|f(x;y)-3|<\varepsilon$, lo mismo pasa en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior a todo **cuadrado** de centro en $(0;0)$ que esté contenido en el rectángulo.



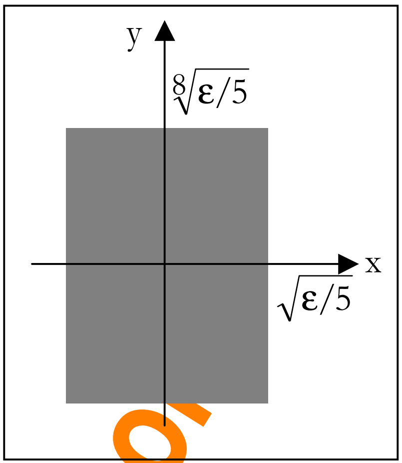
5) Si $f(x;y)=3+5.x.y^4$, es:

$$|f(x;y)-3|=|(3+5.x.y^4)-3|=|5.x.y^4|=5.|x|.|y^4|=5.|x|.(|y|)^4$$

Obvio: es $|f(x;y)-3|=5.|x|.(|y|)^4<\varepsilon$ si $|x|<\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{5}}$ y $(|y|)^4<\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{5}}$; o sea, si

$$|x|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\ ;\ |y|<\sqrt[8]{\frac{\varepsilon}{5}}$$

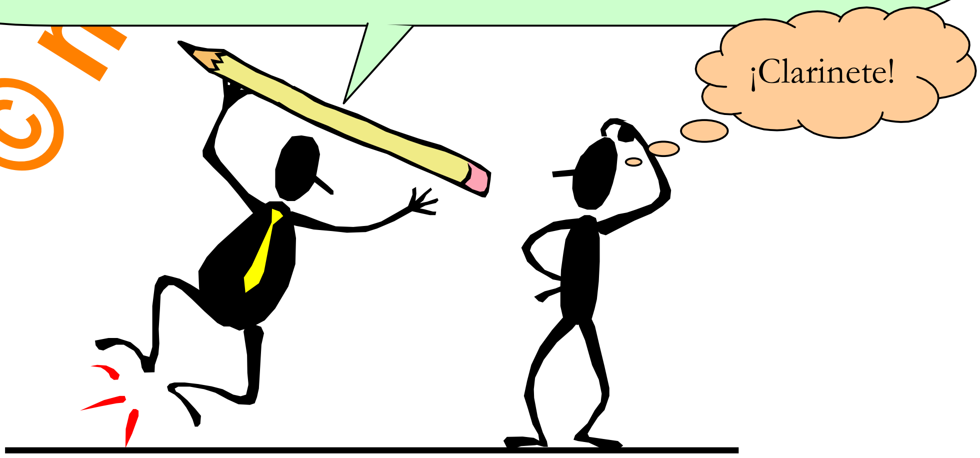
Por tanto, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura, siendo obvio que si $r<\text{mín.}\left\{\sqrt{\varepsilon/5};\sqrt[8]{\varepsilon/5}\right\}$, es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ tal que $\left|x-0\right|=\left|x\right|<r$ y $\left|y-0\right|=\left|y\right|<r$. O sea, si en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interiores al rectángulo indicado es $\left|f(x;y)-3\right|<\varepsilon$, lo mismo pasa en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ interior a todo **cuadrado** de centro en $(0;0)$ que esté contenido en dicho rectángulo.



Observa atentamente: todos los campos escalares del ejercicio son inofensivos en el punto $(0;0)$; por tanto, es un inútil el que tarde más de un nanosegundo en apostar tranquilamente la vida a que el límite de cada campo en $(0;0)$ coincide con el valor del campo en $(0;0)$.

Recuerda 1: al hablar del límite de "f" en el punto $\bar{x}_0$ **importa un pito** si $\bar{x}_0$ tiene imagen según "f" o no ..... y ello es así porque en la definición de límite de "f" en $\bar{x}_0$ no intervienen más que los valores que toma "f" en puntos $\bar{x}\in\Re^n$ próximos a $\bar{x}_0$, y el valor que toma "f" en $\bar{x}_0$ no pinta nada en la historia.
Recuerda 2: en su momento diremos que "f" es "continua" en $\bar{x}_0$ para expresar de modo rápido que "f" tiene límite en el punto $\bar{x}_0$ y que da la casualidad de que dicho límite coincide con $f(\bar{x}_0)$.

Si te piden que **demuestres** que la función "f" tal que $f(x;y)=3+5.x.y^4$ es **continua** en el punto $(0;0)$, la cosa es bien fácil, basta decir que "f" es continua en $(0;0)$ si su limite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0)=3$; después, como acabamos de hacer, demuestras que el límite de "f" en $(0;0)$ es 3 .... y lo mismo siempre.



FONEMATO 2.5.7

Calcúlese el límite del campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(0;0)$, siendo:

$$f(x;y) = 2.x.y^4/(x^4 + y^4)$$

SOLUCIÓN

¡Qué mala pata!: nos piden el límite de "f" en el punto $\overline{u}_0 = (0;0)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que dicha función no está definida, pues $\overline{u}_0 = (0;0)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador del cociente de polinomios dado. Al hacer el PL no nos comemos una rosca, ya que el numerador y el denominador tienden a 0 si $(x;y) \to (0;0)$.

Haremos que el punto (x;y) se aproxime sucesivamente a (0;0) siguiendo trayectorias famosas, y ello con la inconfesable esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos, pues en tal caso "f" carecerá de límite en el punto (0;0).

Recuerda: el límite de $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en un punto $\overline{u}_0 \in Ac.(D)$ es $L \in \Re$ si sea cual sea la trayectoria de aproximación a $\overline{u}_0$ que elija $\overline{u} = (x;y) \in \Re^2$, sucede que $|f(\overline{u}) - L|$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera sin más que elegir $\overline{u} = (x;y) \in D$ bastante próximo a $\overline{u}_0$. Es decir, **cerca** de $\overline{u}_0$ sucede que

$$|f(\overline{u}) - L| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$$

Trayectorias rectilíneas

Nos aproximamos a $\overline{u}_0 = (0;0)$ siguiendo una trayectoria rectilínea genérica, una trayectoria tal que entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella existe la relación $y = 0 + m.(x-0)$, siendo "m" la pendiente de la recta elegida. Mientras hacemos el calculote **rezaremos** para que el límite que resulte dependa del valor de "m", ya que en tal caso "f" carecerá de límite en $\overline{u}_0 = (0;0)$, pues para distintos valores de "m" se obtendrán distintos límites.

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

$$\boxed{\text{en la expresión matemática de } f(x;y) \text{ sustituimos "y" por "m.x"}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2.x.(m.x)^4}{x^4 + (m.x)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2.m.x}{1+m^4} = \frac{0}{1+m^4} = 0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{dividimos numerador y denominador por } x^4 \text{, lo que es lícito,}\\ \text{pues } x^2 \neq 0, \text{ ya que "x" se "aproxima" a 0, pero no llega a ser 0}\end{array}}$$

El que el límite sea 0 para todo valor de "m" significa que sea cual sea la trayectoria rectilínea que $\overline{u}$ elija para aproximarse a $\overline{u}_0$, el número real $f(\overline{u})$, la Dulcinea de $\overline{u}$, se aproxima a 0 cuando $\overline{u}$ se aproxima a $\overline{u}_0$.

Trayectorias parabólicas de eje vertical

Nos aproximamos a $\bar{u}_0 = (0;0)$ siguiendo una parábola genérica de eje vertical que tenga su máximo (mínimo) en dicho punto; es decir, una trayectoria tal que entre la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella existe la relación $y = 0 + m.(x-0)^2$. **Rezamos** para que el límite que resulte sea $\neq 0$ (pues 0 es el límite que hemos obtenido con las trayectorias rectilíneas) o dependa del valor de "m", pues en ambos casos "f" carecerá de límite en $\bar{u}_0 = (0;0)$.

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)^2}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x^2) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2.x.(m.x^2)^4}{x^4+(m.x^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2.m^4.x^5}{1+m^4.x^4} = \frac{0}{1} = 0, \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

El que el límite sea 0 para todo valor de "m" significa que sea cual sea la trayectoria parabólica que $\bar{u}$ elija para aproximarse a $\bar{u}_0$, el número real $f(\bar{u})$, la amada Dulcinea de $\bar{u}$, se aproxima a 0 cuando $\bar{u}$ se aproxima a $\bar{u}_0$.

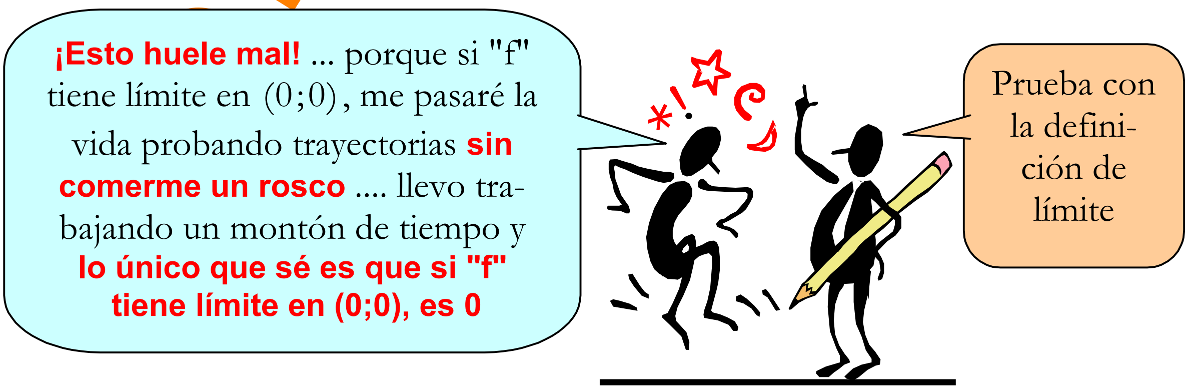
Trayectorias parabólicas de eje horizontal

Nos aproximamos a $\bar{u}_0 = (0;0)$ siguiendo una parábola genérica de eje horizontal que girada 90 grados tenga su máximo/mínimo en dicho punto; es decir, tal que la abcisa "x" y la ordenada "y" de todo punto de ella están relacionadas mediante $x = 0 + m.(y-0)^2$. **Rezamos** para que el límite que resulte sea distinto de 0 (pues 0 es el límite que de modo pertinaz hemos obtenido con todas las trayectorias rectilíneas y las parabólicas de eje vertical) o dependa del valor de "m", pues en ambos casos "f" carecerá de límite en $\bar{u}_0 = (0;0)$.

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=0+m.(y-0)^2}} f(x;y) = \lim_{y\to 0} f(m.y^2;y) = \lim_{y\to 0} \frac{2.(m.y^2).y^4}{(m.y^2)^4+y^4} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2.m.y^2}{m^4.y^4+1} = \frac{0}{1} = 0, \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

El que el límite sea 0 para todo valor de "m" significa que sea cual sea la trayectoria parabólica que $\bar{u} = (x;y)$ elija para aproximarse a $\bar{u}_0 = (0;0)$, sucede que $f(\bar{u})$, el ojito derecho de $\bar{u}$, se aproxima a 0 cuando $\bar{u}$ se aproxima a $\bar{u}_0$.



Recurrimos a la definición de límite

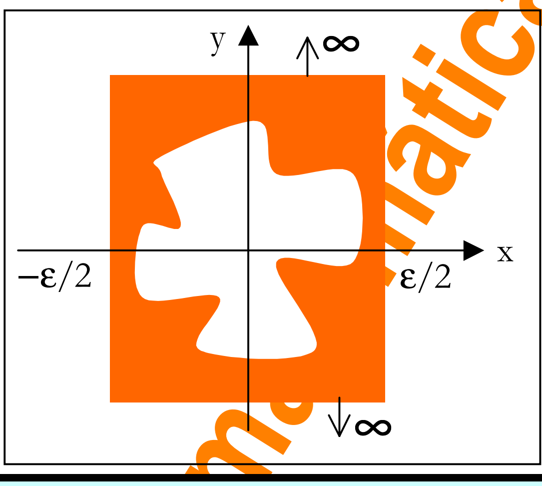
El límite de $f : D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(a;b) \in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (a;b)$ que pertenezca a "D" y sea tal que $|x - a| < r$ y $|y - b| < r$. Por tanto, siendo $D = \Re^2 - \{(0;0)\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\, \varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ y tal que $|x - 0| = |x| < r$ y $|y - 0| = |y| < r$.

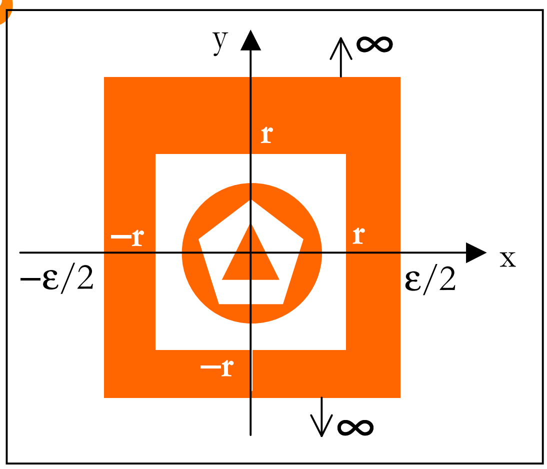
Si $f(x;y) = 2.x.y^4/(x^4 + y^4)$ y "0" es el posible límite en $(0,0)$, se tiene que:

$$|f(x;y) - 0| = \left|\frac{2.x.y^4}{x^4 + y^4} - 0\right| = \left|\frac{2.x.y^4}{x^4 + y^4}\right| = 2.|x|.\left|\frac{y^4}{x^4 + y^4}\right| \leq 2.|x|$$

$$\boxed{\text{pues si } (x;y) \neq (0;0) \text{ es } \left|\frac{y^4}{x^4 + y^4}\right| \leq 1}$$

Es $|f(x;y) - 0| \leq 2.|x| < \varepsilon$ si $|x| < \varepsilon/2$. Así, es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura (uno de sus lados es infinito). Y si $r < \varepsilon/2$, es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ tal que $|x - 0| = |x| < r$ y $|y - 0| = |y| < r$. O sea, si en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al rectángulo es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$, lo mismo pasa si $(x;y) \neq (0;0)$ es interior a todo **cuadrado** de centro en $(0;0)$ que esté contenido en dicho rectángulo.





Si $f(x;y) = 2.x.y^4/(x^4 + y^4)$, el análisis de la **continuidad** de "f" en el punto $(0;0)$ es fácil: como "f" no está definida en $(0;0)$, no es continua en $(0;0)$,

Si $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{2.x.y^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$, es $Dom.f = \Re^2$, y el análisis de la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: basta decir que "f" es continua en $(0;0)$ si su limite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0) = 0$; después demuestras que el límite de "f" en $(0;0)$ es 0, como acabamos de hacer.

FONEMATO 2.5.8

Calcúlese el límite del campo $f:\Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(0;0)$, siendo:

$$f(x;y) = 5.x^3.y^4/(x^2+y^4)$$

SOLUCIÓN

¡Qué faena!: nos piden el límite de "f" en el punto $\bar{u}_0 = (0;0)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que "f" no está definida, pues $\bar{u}_0 = (0;0)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador. Al hacer el PL no nos comemos una rosca, ya que el numerador y el denominador tienden a 0 si $(x;y) \to (0;0)$.

Haremos que el punto (x;y) se aproxime sucesivamente a (0;0) siguiendo trayectorias famosas, y ello con la inconfesable esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos, pues en tal caso "f" carecerá de límite en el punto (0;0).

Recuerda: el límite de $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en un punto $\bar{u}_0 \in Ac.(D)$ es $L \in \Re$ si sea cual sea la trayectoria de aproximación a $\bar{u}_0$ que elija $\bar{u} = (x;y) \in \Re^2$, sucede que $|f(\bar{u}) - L|$ llega a ser tan próximo a 0 como se quiera sin más que elegir $\bar{u} = (x;y) \in D$ lo bastante próximo a $\bar{u}_0$. Es decir, **cerca** de $\bar{u}_0$ sucede que $|f(\bar{u}) - L| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5.x^3.(m.x)^4}{x^2+(m.x)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2.m^4.x^5}{1+m^4.x^2} = \frac{0}{1} = 0, \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Trayectorias parabólicas de eje vertical

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)^2}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x^2) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5.x^3.(m.x^2)^4}{x^2+(m.x^2)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2.m^4.x^9}{1+m^4.x^4} = \frac{0}{1} = 0, \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Trayectorias parabólicas de eje horizontal

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=0+m.(y-0)^2}} f(x;y) = \lim_{y\to 0} f(m.y^2;y) = \lim_{y\to 0} \frac{5.(m.y^2)^3.y^4}{(m.y^2)^4+y^4} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{5.m^3.y^6}{m^4.y^4+1} = \frac{0}{1} = 0, \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Recurrimos a la definición de límite

El límite de $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(a;b) \in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (a;b)$ que pertenezca a "D" y sea tal que $|x-a| < r$ y $|y-b| < r$. Por tanto, siendo $D = \Re^2 - \{(0;0)\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\, \varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ y tal que $|x-0| = |x| < r$ y $|y-0| = |y| < r$.

Si $f(x;y) = 5.x^3.y^4/(x^2+y^4)$ y "0" es el posible límite en $(0;0)$, se tiene que:

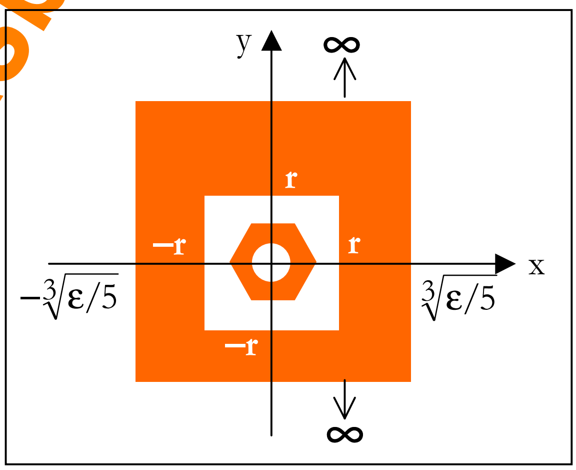
$$|f(x;y) - 0| = \left|\frac{5.x^3.y^4}{x^2+y^4} - 0\right| = \left|\frac{5.x^3.y^4}{x^2+y^4}\right| =$$

$$= 5.|x^3|.\left|\frac{y^4}{x^2+y^4}\right| \leq 5.|x^3| = 5.(|x|)^3$$

$$\boxed{\text{pues si } (x;y) \neq (0;0) \text{ es } \left|\frac{y^4}{x^2+y^4}\right| \leq 1}$$

Obvio: es $|f(x;y) - 0| \leq 5.(|x|)^3 < \varepsilon$ si $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon/5}$. Así, es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura (uno de sus lados es infinito), siendo requeteobvio que si $r < \sqrt[3]{\varepsilon/5}$, es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ tal que

$$|x-0| = |x| < r \;;\; |y-0| = |y| < r$$



Es decir, si en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al rectángulo es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$, igual pasa si el punto $(x;y) \neq (0;0)$ es interior a todo cuadrado, circunferencia, rombo etc. de centro en $(0;0)$ que esté contenido en dicho rectángulo.

Si $f(x;y) = 5.x^3.y^4/(x^2+y^4)$, el análisis de la **continuidad** de "f" en el punto $(0;0)$ es fácil: como "f" no está definida en $(0;0)$, no es continua en $(0;0)$,

Si $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{5.x^3.y^4}{x^2+y^4} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$, es $Dom.f = \Re^2$, y el análisis de la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: basta decir que "f" es continua en $(0;0)$ si su límite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0) = 0$; después demuestras que el límite de "f" en $(0;0)$ es 0, como acabamos de hacer.

FONEMATO 2.5.9

Calcúlese el límite de "f" en $(0;0)$, siendo $f(x;y)=4.x^2.y^5/\sqrt{x^4+y^4}$.

SOLUCIÓN

¡Putada!: piden el límite de la función "f" en el punto $(0;0)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que dicha función no está definida, pues $(0;0)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador "f". Al hacer el PL nada bacalada, ya que numerador y denominador tienden a 0 si $(x;y)\to(0;0)$.

Haremos que el punto (x;y) se aproxime sucesivamente a (0;0) siguiendo trayectorias famosas, y ello con la inconfesable esperanza de encontrar trayectorias que den límites distintos, pues en tal caso "f" carecerá de límite en el punto (0;0).

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4.x^2.(m.x)^5}{\sqrt{x^4+(m.x)^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{4.m^5.x^5}{\sqrt{1+m^4}}=\frac{0}{\sqrt{1+m^4}}=0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Trayectorias parabólicas de eje vertical

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)^2}} f(x;y)=\lim_{x\to 0} f(x;m.x^2)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4.x^2.(m.x^2)^5}{\sqrt{x^4+(m.x^2)^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{4.m^5.x^{10}}{\sqrt{1+m^4.x^4}}=\frac{0}{\sqrt{1+0}}=0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Trayectorias parabólicas de eje horizontal

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=0+m.(y-0)^2}} f(x;y)=\lim_{y\to 0} f(m.y^2;y)=\lim_{y\to 0}\frac{4.(m.y^2)^2.y^5}{\sqrt{(m.y^2)^4+y^4}}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{4.m^2.y^7}{\sqrt{m^4.y^4+1}}=\frac{0}{1}=0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Recurrimos a la definición de límite

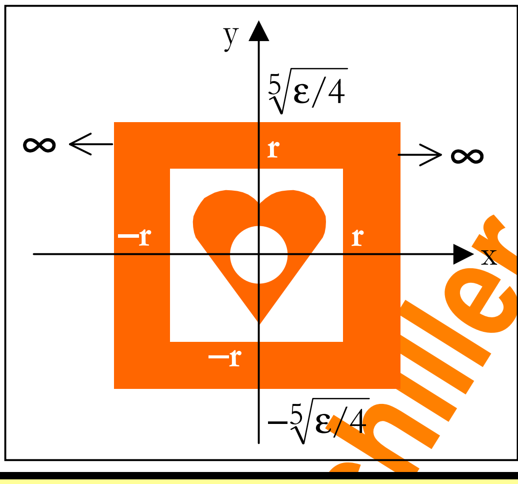
Si $f(x;y)=4.x^2.y^5/\sqrt{x^4+y^4}$ y "0" es el posible límite en $(0,0)$, se tiene que:

$$\left|f(x;y)-0\right|=\left|4.x^2.y^5/\sqrt{x^4+y^4}\right|=$$

$$=4.\left|y^5\right|.\left|x^2/\sqrt{x^4+y^4}\right|\leq 4.\left|y^5\right|=4.(\left|y\right|)^5$$

$$\boxed{\text{si } (x;y)\neq(0;0) \text{ es } \left|x^2/\sqrt{x^4+y^4}\right|=\left|\sqrt{x^4/(x^4+y^4)}\right|\leq 1}$$

Es $\left|f(x;y)-0\right| \leq 4.(\left|y\right|)^5 < \varepsilon$ si $\left|y\right| < \sqrt[5]{\varepsilon/4}$. O sea, es $\left|f(x;y)-0\right| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al **rectángulo** de la figura. Así, si $r < \sqrt[5]{\varepsilon/4}$, es $\left|f(x;y)-0\right| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ tal que $\left|x-0\right| = \left|x\right| < r$ y $\left|y-0\right| = \left|y\right| < r$. O sea, si $\left|f(x;y)-0\right| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ interior al rectángulo, igual pasa si $(x;y) \neq (0;0)$ es interior a todo **cuadrado** de centro en $(0;0)$ que esté contenido en dicho rectángulo.



Si $f(x;y) = 4.x^2.y^5/\sqrt{x^4+y^4}$, el análisis de la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: como "f" no está definida en $(0;0)$, no es continua en $(0;0)$,

Si $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{4.x^2.y^5}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$, es $\text{Dom.}f = \Re^2$, y el análisis de la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: basta decir que "f" es continua en $(0;0)$ si su limite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0) = 0$; después demuestras que el límite de "f" en $(0;0)$ es 0, como acabamos de hacer.

FONEMATO 2.5.10

Calcúlese el límite de "f" en el punto $(0;0)$, siendo $f(x;y) = 7.x^3.y/\sqrt{x^4+y^4}$.

SOLUCIÓN

¡Ruina!: piden el límite de la función "f" en el punto $(0;0)$, que es el único punto de $\Re^2$ en que "f" no está definida, pues $(0;0)$ es el único punto de $\Re^2$ en que se anula el denominador de "f". Al hacer el PL observamos que el numerador y el denominador tienden a 0 si $(x;y) \to (0;0)$.

Trayectorias rectilíneas

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7.x^3.(m.x)}{\sqrt{x^4+(m.x)^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{7.m.x^2}{\sqrt{1+m^4}} = \frac{0}{\sqrt{1+m^4}} = 0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Trayectorias parabólicas de eje vertical

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ y=0+m.(x-0)^2}} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;m.x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{7.x^3.(m.x^2)}{\sqrt{x^4+(m.x^2)^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{7.m.x^3}{\sqrt{1+m^4.x^4}} = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Trayectorias parabólicas de eje horizontal

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=0+m.(y-0)^2}} f(x;y) = \lim_{y\to 0} f(m.y^2;y) = \lim_{y\to 0} \frac{7.(m.y^2)^3.y}{\sqrt{(m.y^2)^4+y^4}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{7.m^3.y^5}{\sqrt{m^4.y^4+1}} = \frac{0}{1} = 0,\ \forall m \Rightarrow \text{¡Yuyu!}$$

Recurrimos a la definición de límite

El límite de $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(a;b) \in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (a;b)$ que pertenezca a "D" y sea tal que $|x-a| < r$ y $|y-b| < r$. Por tanto, siendo $D = \Re^2 - \{(0;0)\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\, \varepsilon > 0$ es posible encontrar $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ y tal que $|x-0| = |x| < r$ y $|y-0| = |y| < r$.

Si $f(x;y) = 7.x^3.y/\sqrt{x^4+y^4}$ y "0" es el posible límite en (0,0), se tiene que:

$$|f(x;y) - 0| = \left|7.x^3.y/\sqrt{x^4+y^4}\right| =$$

$$= 7.|x.y|.\left|x^2/\sqrt{x^4+y^4}\right| \leq 7.|x.y| = 7.|x|.|y|$$

$$\boxed{\text{si } (x;y) \neq (0;0) \text{ es } \left|x^2/\sqrt{x^4+y^4}\right| \leq 1}$$

Es evidente que $|f(x;y) - 0| \leq |x|.|y| < \varepsilon$ si $|x| < \sqrt{\varepsilon/7}$ y $|y| < \sqrt{\varepsilon/7}$ (o sea, es $r = \sqrt{\varepsilon/7}$). Por tanto, "f" tiene límite 0 en $(0;0)$.

Si $f(x;y) = 7.x^3.y/\sqrt{x^4+y^4}$, el análisis de la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: como "f" no está definida en $(0;0)$, no es continua en $(0;0)$,

Si $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{7.x^3.y}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$, es $Dom.f = \Re^2$, y el análisis de la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: basta decir que "f" es continua en $(0;0)$ si su limite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0) = 0$; después demuestras que el límite de "f" en $(0;0)$ es 0, como acabamos de hacer.

FONEMATO 2.5.11

1) Demuéstrese que $f(x;y) = 4.x + 3.y$ tiene límite 10 en el punto $(1;2)$.

2) Demuéstrese que $f(x;y) = x + y^2.\cos\dfrac{x}{x^2+y^2}$ tiene límite 0 en $(0;0)$.

3) Demuéstrese que $f(x;y) = y + x^3.\text{sen}\dfrac{y.e^x}{x^2+y^2}$ tiene límite 0 en $(0;0)$.

SOLUCIÓN

El límite de $f:D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(a;b) \in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \in D$ $((x;y) \neq (a;b))$ y tal que $|x-a| < r$ y $|y-b| < r$.

1) Siendo $D = \Re^2$, el límite de "f" en $(1;2)$ es 10 si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 10| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (1;2)$ tal que $|x-1| < r$ y $|y-2| < r$.

$$|f(x;y) - 10| = |4.x + 3.y - 10| = |4.(x-1) + 3.(y-2)| \leq$$

$$\boxed{\text{pues } |\text{Pepe} + \text{Juan}| \leq |\text{Pepe}| + |\text{Juan}|}$$

$$\leq |4.(x-1)| + |3.(y-2)| = 4.|x-1| + 3.|y-2|$$

Así, es $|f(x;y) - 10| \leq 4.|x-1| + 3.|y-2| < \varepsilon$ si $4.|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $3.|y-2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; o sea, si $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{8}$ y $|y-2| < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Por tanto, si $r < \text{mín.}\{\varepsilon/8; \varepsilon/6\} = \varepsilon/8$, será $|f(x;y) - 10| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (1;2)$ tal que $|x-1| < r$ y $|y-2| < r$.

2) Siendo $D = \Re^2 - \{(0;0)\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ y tal que $|x-0| = |x| < r$ y $|y-0| = |y| < r$. Es:

$$|f(x;y) - 0| = \left|x + y^2.\cos\frac{x}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|x + y^2.\cos\frac{x}{x^2+y^2}\right| \leq$$

$$\boxed{\text{pues } |\text{Pepe} + \text{Juan}| \leq |\text{Pepe}| + |\text{Juan}|}$$

$$\leq |x| + \left|y^2.\cos\frac{x}{x^2+y^2}\right| = |x| + |y^2|.\left|\cos\frac{x}{x^2+y^2}\right| \leq |x| + |y^2|$$

$$\boxed{\text{si } (x;y) \neq (0;0) \text{ es } |\cos(x/(x^2+y^2)| \leq 1}$$

Así, es $|f(x;y) - 0| \leq |x| + (|y|)^2 < \varepsilon$ si $|x| < \varepsilon/2$ y $(|y|)^2 < \varepsilon/2$; o sea, si:

$$|x| < \varepsilon/2 \ ; \ |y| < \sqrt{\varepsilon/2}$$

En consecuencia, si $r < \text{mín.}\left\{\varepsilon/2; \sqrt{\varepsilon/2}\right\}$, es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ tal que $|x-0| = |x| < r$ y $|y-0| = |y| < r$.

1) Si $f(x;y) = x + y^2.\cos\dfrac{x}{x^2+y^2}$, analizar la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: "f" no definida en $(0;0) \Rightarrow$ no es continua en $(0;0)$,

2) Si $f(x;y) = \begin{cases} x + y^2.\cos\dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$, es $\text{Dom}.f = \Re^2$, y analizar la **continuidad** de "f" en $(0;0)$ es fácil: basta decir que "f" es continua en $(0;0)$ si su limite en $(0;0)$ coincide con $f(0;0) = 0$; después demostramos que el límite de "f" en $(0;0)$ es 0, como acabamos de hacer.

3) Siendo $D = \Re^2 - \{(0;0)\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ y tal que $|x - 0| = |x| < r$ y $|y - 0| = |y| < r$.

Es:

$$|f(x;y) - 0| = \left| y + x^3.\text{sen}\,\frac{y.e^x}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| y + x^3.\text{sen}\,\frac{y.e^x}{x^2+y^2} \right| \leq$$

$$\boxed{\text{pues } |\text{Pepe} + \text{Juan}| \leq |\text{Pepe}| + |\text{Juan}|}$$

$$\leq |y| + \left| x^3.\text{sen}\,\frac{y.e^x}{x^2+y^2} \right| = |y| + |x^3| \left| \text{sen}\,\frac{y.e^x}{x^2+y^2} \right| \leq |y| + |x^3|$$

$$\boxed{\text{si } (x;y) \neq (0;0) \text{ es } |\text{sen}\,(y.e^x/(x^2+y^2))| \leq 1}$$

Así, es $|f(x;y) - 0| \leq |y| + |x^3| < \varepsilon$ si $(|x|)^3 < \varepsilon/2$ y $|y| < \varepsilon/2$; o sea, si:

$$|x| < \sqrt[3]{\varepsilon/2}\ ;\ |y| < \varepsilon/2$$

.En consecuencia, si $r < \text{mín.}\left\{\sqrt[3]{\varepsilon/2}\ ; \varepsilon/2\right\}$, es $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (0;0)$ tal que $|x - 0| = |x| < r$ y $|y - 0| = |y| < r$.

FONEMATO 2.5.12

Demuéstrese que las siguientes funciones tienen límite 0 en el punto $(0;0)$.

$$1)\ f(x;y)=2.x.\cos\frac{1}{y}\ ;\ 2)\ f(x;y)=\begin{cases}3.x.\operatorname{sen}\frac{1}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

SOLUCIÓN

El límite de $f:D\subseteq\Re^2\mapsto\Re$ en el punto $(a;b)\in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|f(x;y)-L|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\in D$ $((x;y)\neq(a;b))$ y tal que $|x-a|<r$ y $|y-b|<r$.

1) Siendo $D=\{(x;y)\in\Re^2\ /\ y\neq 0\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\,\varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ en el que "f" está definida y tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

$$|f(x;y)-0|=\left|2.x.\cos\frac{1}{y}\right|=2.|x|.\left|\cos\frac{1}{y}\right|\leq 2.|x|$$

$$\boxed{\text{si } y\neq 0 \text{ es } \left|\cos\frac{1}{y}\right|\leq 1}$$

Así, es $|f(x;y)-0|\leq 2.|x|<\varepsilon$ si $|x|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, si $r<\varepsilon/2$, es $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ en el que "f" está definida y tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

2) Siendo $D=\Re^2$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\,\varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

- La condición $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ se cumple trivialmente si $(x;y)\neq(0;0)$ es tal que $y=0$, pues como $f(x;0)=0$, resulta ser:

$$|f(x;0)-0|=|0-0|=0<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$$

- En los puntos $(x;y)\neq(0;0)$ tales que $y\neq 0$, es $f(x;y)=3.x.\operatorname{sen}\frac{1}{y}$; así:

$$|f(x;y)-0|=\left|3.x.\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|=3.|x|.\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|\leq 3.|x|$$

$$\boxed{\text{si } y\neq 0 \text{ es } \left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|\leq 1}$$

Por tanto, es $|f(x;y)-0|\leq 3.|x|<\varepsilon$ si $|x|<\frac{\varepsilon}{3}$.

En definitiva, si $r<\varepsilon/3$, es $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ y tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

FONEMATO 2.5.13

Demuéstrese que las siguientes funciones tienen límite 0 en el punto $(0;0)$.

$$1)\ f(x;y)=2.y.\cos\frac{1}{x^2-y}\ ;\ 2)\ f(x;y)=\begin{cases}3.x.\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2-y} & \text{si } x^2-y\neq 0\\ 0 & \text{si } x^2-y=0\end{cases}$$

SOLUCIÓN

El límite de $f:D\subseteq\Re^2\mapsto\Re$ en el punto $(a;b)\in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|f(x;y)-L|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\in D$ $((x;y)\neq(a;b))$ y tal que $|x-a|<r$ y $|y-b|<r$.

1) Siendo $D=\{(x;y)\in\Re^2\ /\ x^2-y\neq 0\}$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\ \varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ en el que "f" está definida y tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

$$|f(x;y)-0|=\left|2.y.\cos\frac{1}{x-y}\right|=2.|y|.\left|\cos\frac{1}{x-y}\right|\leq 2.|y|$$

$$\boxed{\text{si } x^2-y\neq 0 \text{ es } \left|\cos\frac{1}{x^2-y}\right|\leq 1}$$

Así, es $|f(x;y)-0|\leq 2.|y|<\varepsilon$ si $|y|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, si $r<\varepsilon/2$, es $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ en el que "f" está definida y tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

2) Siendo $D=\Re^2$, el límite de "f" en $(0;0)$ es 0 si $\forall\ \varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

- La condición $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ se cumple trivialmente si $(x;y)\neq(0;0)$ es tal que $x^2-y=0$ $(\Rightarrow y=x^2)$, pues como $f(x;x^2)=0$, es:

$$|f(x;x^2)-0|=|0-0|=0<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$$

- En puntos $(x;y)\neq(0;0)$ tales que $x^2-y\neq 0$, es $f(x;y)=3.x.\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2-y}$; así:

$$|f(x;y)-0|=\left|3.x.\text{sen}\,\frac{1}{x^2-y}\right|=3.|x|.\left|\text{sen}\,\frac{1}{x^2-y}\right|\leq 3.|x|$$

$$\boxed{\text{si } x^2-y\neq 0 \text{ es } \left|\text{sen}\,\frac{1}{x^2-y}\right|\leq 1}$$

Por tanto, es $|f(x;y)-0|\leq 3.|x|<\varepsilon$ si $|x|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

En definitiva, si $r<\varepsilon/3$, es $|f(x;y)-0|<\varepsilon$ en todo punto $(x;y)\neq(0;0)$ y tal que $|x-0|<r$ y $|y-0|<r$.

FONEMATO 2.5.14

1) Demuéstrese que $f(x;y) = 2.x + 3.y.\text{sen}\,(4 + (1/y))$ tiene límite 2 en $(1;0)$.

2) Demuéstrese que $f(x;y) = \dfrac{x + y - 5}{\sqrt{y-3} - \sqrt{2-x}}$ tiene límite 0 en $(2;3)$.

SOLUCIÓN

El límite de $f: D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ en el punto $(a;b) \in Ac.(D)$ es el número real "L" si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \in D$ $((x;y) \neq (a;b))$ y tal que $|x - a| < r$ y $|y - b| < r$.

1) Siendo $D = \{(x;y) \in \Re^2 \,/\, y \neq 0\}$, el límite de "f" en $(1;0)$ es 2 si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 2| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (1;0)$ en el que "f" está definida y tal que $|x - 1| < r$ y $|y - 0| = |y| < r$. Es:

$$|f(x;y) - 2| = \left|2.x + 3.y.\text{sen}\,(4 + \frac{1}{y}) - 2\right| = \left|2.(x-1) + 3.y.\text{sen}\,(4 + \frac{1}{y})\right| \leq$$

$$\leq |2.(x-1)| + \left|3.y.\text{sen}\,(4 + \frac{1}{y})\right| = 2.|x-1| + 3.|y|.\left|\text{sen}\,(4 + \frac{1}{y})\right| \leq$$

$$\boxed{|\text{sen}\,(4 + (1/y))| \leq 1 \text{ si } y \neq 0}$$

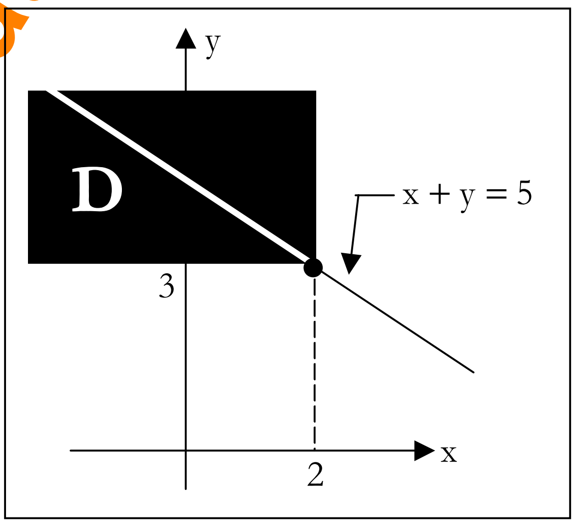
$$\leq 2.|x-1| + 3.|y| < \varepsilon \text{ si } \begin{cases} |x-1| < \varepsilon/4 \\ |y| < \varepsilon/6 \end{cases}$$

Así, si $r < \text{mín.}\{\varepsilon/4; \varepsilon/6\}$, es $|f(x;y) - 2| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (1;0)$ en el que "f" está definida (o sea, $y \neq 0$) y tal que $|x - 1| < r$ y $|y| < r$.

2) El límite de "f" en $(2;3)$ es 0 si $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|f(x;y) - 3| < \varepsilon$ en todo punto $(x;y) \neq (2;3)$ del dominio "D" de definición de "f" y tal que $|x - 2| < r$ y $|y - 3| < r$. El dominio "D" lo forman los puntos $(x;y)$ tales que

$$y - 3 \geq 0 \;;\; 2 - x \geq 0 \;;\; \sqrt{y-3} - \sqrt{2-x} \neq 0$$

O sea, forman "D" los puntos $(x;y)$ tales que $y \geq 3$, $x \leq 2$, $x + y \neq 5$, que son los de la región sombreada en la figura.



Si $(x;y) \in D$, es:

$$|f(x;y) - 0| = \left| \frac{x+y-5}{\sqrt{y-3} - \sqrt{2-x}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x+y-5)\,(\sqrt{y-3} + \sqrt{2-x})}{(\sqrt{y-3} - \sqrt{2-x}).(\sqrt{y-3} + \sqrt{2-x})} \right| = \left| \frac{(x+y-5)\,(\sqrt{y-3} + \sqrt{2-x})}{(y-3)-(2-x)} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x+y-5)\,(\sqrt{y-3} + \sqrt{2-x})}{x+y-5} \right| = \left| \sqrt{y-3} + \sqrt{2-x} \right| =$$

$$= \sqrt{y-3} + \sqrt{2-x}$$

Así, es $|f(x;y) - 0| = \sqrt{y-3} + \sqrt{2-x} < \varepsilon$ si $\sqrt{y-3} < \varepsilon/2$ y $\sqrt{2-x} < \varepsilon/2$; o sea, si $(x;y) \in D$ es tal que

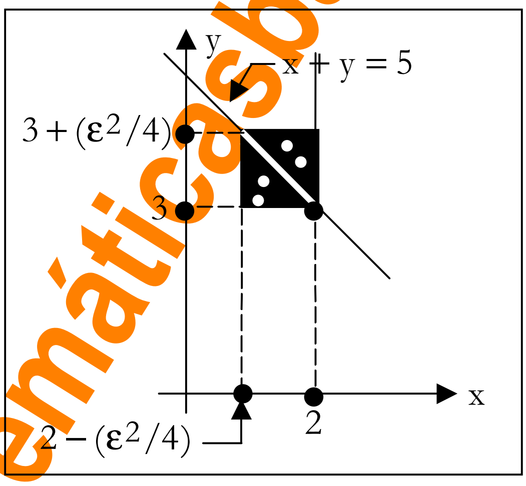
$$y - 3 < \varepsilon^2/4 \;;\; 2 - x < \varepsilon^2/4$$

o lo que es igual:

$$y < 3 + \frac{\varepsilon^2}{4} \;;\; x > 2 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

que son los puntos interiores al cuadradito sombreado en la figura.

Observa que el punto $(2;3)$ no es el centro del cuadrado.



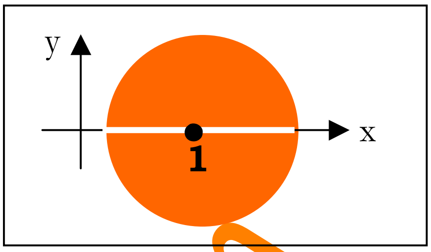
VERY IMPORTANT NOTE

Como **condición de partida,** antes de definir el concepto de límite de un campo escalar $f:\Re^n \mapsto \Re$ en un punto "Juan", hemos exigido que "f" esté definido en un conjunto "D" que tiene a "Juan" como **punto de acumulación** (o sea, en todo entorno reducido de "Juan" hay infinitos puntos de "D"), **admitiendo por tanto que en todo entorno reducido de "Juan" pueda haber infinidad de puntos en que "f" no está definida.**

Acaso tu profe establezca una **condición de partida más severa,** exigiendo que "f" esté definida en **todo punto** de un entono reducido de "Juan" ... y eso es un chollo, como vemos a continuación.

Por ejemplo, considera que $f(x;y) = 2.x + 3.y.\text{sen}\,(4 + (1/y))$ y que en un examen te piden que calcules el límite de "f" en el punto (1;0).

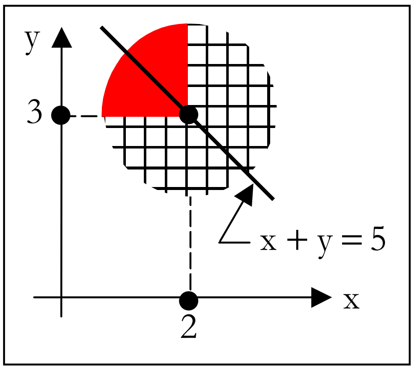
Así las cosas, si se ha establecido la **condición de partida severa**, te pondrán un 10 si explicas que carece de sentido hablar del límite de "f" en (1;0), pues "f" no está definida en todo punto de un entorno reducido de (1;0), ya que no está definida en los puntos del eje de abcisas ... y a otra cosa mariposa, problema resuelto.



Pero si la condición de partida no es tan severa y sólo exige que (1;0) sea punto de acumulación del dominio de definición de "f" (como sucede en este caso, pues en todo entorno reducido de (1;0) hay infinidad de puntos en que "f" está definida), para que te pongan un 10 deberás hacer como en el ejercicio anterior.

Por ejemplo, considera que $f(x;y) = \dfrac{x + y - 5}{\sqrt{y - 3} - \sqrt{2 - x}}$ y que en un examen te piden que calcules el límite de "f" en el punto (2;3).

Así las cosas, si se ha establecido la **condición de partida severa**, te pondrán un 10 si explicas que carece de sentido hablar del límite de "f" en (2;3), pues "f" no está definida en todo punto de un entorno reducido de (2;3), ya que no está definida si $x > 2$, si $y < 3$ o si $x + y = 5$ ... y a otra cosa mariposa, problema resuelto.



Pero si la condición de partida no es tan severa y sólo exige que (2;3) sea punto de acumulación del dominio de definición de "f" (como sucede en este caso, pues en todo entorno reducido de (2;3) hay infinidad de puntos en que "f" está definida), para que te pongan un 10 deberás hacer como en el ejercicio anterior.

2.6 FUNCIONES ACOTADAS

Se dice que la función $f:\Re^n \mapsto \Re$ está **acotada en el conjunto "D"** $(D \subseteq \Re^n)$ si hay una constante positiva "k" tal que $|f(\bar{x})| < k, \forall\, \bar{x} \in D$

Por ejemplo, la función "f" tal que $f(u;v) = e^{u.v}$ no está acotada en el conjunto $\Re^2$, pues $f(u;v) = e^{u.v}$ se hace infinitamente grande sin más que hacer que $u \to +\infty$ ó $v \to +\infty$. Sin embargo "f" está acotada en el conjunto

$$D = \{(u;v) \in \Re^2 \,/\, |u| < 1,\ |v| < 2\}$$

pues en todo punto $(u;v) \in D$ sucede que

$$|f(u;v)| < 9148751938457193085710395713571394571357$$

Por ejemplo, la función "f" tal que $f(z;t) = 1/(z.t)$ no está acotada en el conjunto $\Re^2$, pues $f(z;t) = 1/(z.t)$ se hace infinitamente grande sin más que hacer que $z \to 0$ ó $t \to 0$. Sin embargo "f" está acotada en el conjunto

$$D = \{(z;t) \in \Re^2 \,/\, z > 8,\ t \geq 7\}$$

pues en todo punto $(z;t) \in D$ sucede que

$$|f(z;t)| < 2349148751938457193085710395713571394571357$$

Por ejemplo, la función "f" tal que $f(\xi;\eta) = 7 - \operatorname{sen} \xi.\eta$ está acotada en $\Re^2$, pues en todo punto $(\xi;\eta) \in \Re^2$ sucede que $|f(\xi;\eta)| < 9$. Naturalmente, como "f" está acotada en $\Re^2$, está acotada en cualquier subconjunto de $\Re^2$.

Se dice que la función $f:\Re^n \mapsto \Re$ está **acotada en el punto** $\bar{x}_0 \in \Re^n$ si está acotada **cerca** de $\bar{x}_0$; es decir, si está acotada en un **entorno reducido** de $\bar{x}_0$, ya sea circular, cuadrado, pentagonal o lemniscato

Por ejemplo, la función "f" tal que $f(u;v) = \operatorname{sen}\,(1/(u^2 + v^2))$ está acotada en el punto $(0;0)$, pues en todo punto $(u;v)$ de un entorno reducido de $(0;0)$ sucede que $|f(u;v)| < 914875193845719394571357$.

Maldición de Murphy

Sólo se hace bien lo que se ha practicado suficientemente

Very Important: si la función $f:\Re^n \mapsto \Re$ tiene límite 0 en el punto $\bar{x}_0 \in \Re^n$ y la función $g:\Re^n \mapsto \Re$ está acotada en dicho punto, el producto de ambas funciones tiene límite 0 en $\bar{x}_0$. Para demostrarlo deberemos demostrar que **cerca** de $\bar{x}_0$ sucede que $|f(\bar{x}).g(\bar{x}) - 0| < \varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0$.

En efecto: si "g" está acotada en $\bar{x}_0$, existe $k > 0$ tal que **cerca** de $\bar{x}_0$ es $|g(\bar{x})| < k$; y si "f" tiene límite 0 en $\bar{x}_0$, **cerca** de dicho punto sucede que $|f(\bar{x}) - 0| = |f(\bar{x})| < \varepsilon/k, \forall\, \varepsilon > 0$. Así, es:

$$|f(\bar{x}).g(\bar{x}) - 0| = |f(\bar{x}).g(\bar{x})| = |f(\bar{x})|.|.g(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{k}.k = \varepsilon$$

$\boxed{\text{pues "cerca" de } \bar{x}_0 \text{ es } |f(\bar{x})| < \varepsilon/k \text{ y } |g(\bar{x})| < k}$

Esta propiedad nos permitirá calcular algunos límites a la velocidad de la luz

Por ejemplo, siendo $g(u;v) = \cos\,(1/(u^2 + v^2))$, la función "g" carece de límite en (0;0), pues el cociente $1/(u^2 + v^2)$ tiende a $+\infty$ si $(u;v) \to (0;0)$, y su coseno no tiende a ningún número concreto. No obstante, "g" está acotada en (0;0), pues en todo punto (u;v) de un entorno reducido del punto (0;0) sucede que $|g(u;v)| = |\cos\,(1/(u^2 + v^2))| \le 1$. Así, siendo

$$f_1:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_1(u;v) = u.v^2$$
$$f_2:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_2(u;v) = \text{sen}\,(u + v)$$
$$f_3:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_3(u;v) = u.e^v$$
$$f_4:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_4(u;v) = \text{Ln}\,(1 + u^3.v^2)$$
$$f_5:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_5(u;v) = 1 - e^{u+2.v}$$
$$f_6:\Re^2 \mapsto \Re \;/\; f_6(u;v) = \text{tg}\,(u^3 + v^2)$$

como estas seis funciones tienen límite 0 en (0;0), es:

$$\lim_{(u;v)\to(0;0)} f_1(u;v).g(u;v) = 0 \;;\quad \lim_{(u;v)\to(0;0)} f_2(u;v).g(u;v) = 0$$
$$\lim_{(u;v)\to(0;0)} f_3(u;v).g(u;v) = 0 \;;\quad \lim_{(u;v)\to(0;0)} f_4(u;v).g(u;v) = 0$$
$$\lim_{(u;v)\to(0;0)} f_5(u;v).g(u;v) = 0 \;;\quad \lim_{(u;v)\to(0;0)} f_6(u;v).g(u;v) = 0$$

Más ejemplos:

- $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} x^2.y^4.\text{sen}\,\frac{x}{y} = 0$$

$\boxed{\text{Si } (x;y)\to(0;0)\text{, el factor } x^2.y^4 \text{ tiende a 0, y el factor sen } (x/y) \text{ está acotado (aunque carece de límite en (0;0))}}$

- $$\lim_{(x;y)\to(1;2)} x.(y-2)^6.\cos\frac{y}{x-1} = 0$$

Si $(x;y)\to(1;2)$, el factor $x.(y-2)^6$ tiende a 0, y el factor $\cos\,(y/(x-1))$ está acotado (aunque carece de límite en (1;2))

- $$\lim_{(z;t)\to(2;5)} 166 + t.(z-2)^5.(4-\cos\frac{z^2}{t-5}) = 166 + 0 = 166$$

Si $(z;t)\to(2;5)$, el factor $t.(z-2)^5$ tiende a 0, y el factor $(4-\cos\frac{z^2}{t-5})$ está acotado (aunque carece de límite en (2;5))

- $$\lim_{(\lambda;\theta)\to(2;5)} \lambda^9.\theta^7 + \lambda.(\theta-5)^8.e^{1/(\cos\,(\lambda-2))} = 2^9.5^7$$

Si $(\lambda;\theta)\to(2;5)$, el factor $\lambda.(\theta-5)^8$ tiende a 0, y el factor $e^{1/(\cos\,(\lambda-2))}$ está acotado (aunque carece de límite en (2;5))

- $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} y^3.\mathrm{Ln}\,(3+\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}) = 0$$

Si $(x;y)\to(0;0)$, el factor y^3 tiende a 0, y el factor $\mathrm{Ln}\,(3+\mathrm{sen}\,\frac{1}{x})$ está acotado (aunque carece de límite en (0;0))

- $$\lim_{(x;y)\to(2;4)} x^5.\sqrt{y} + (x-2).y.(y+e^x.\mathrm{sen}\,\frac{x}{y-2}) = 2^5.\sqrt{4} + 0 = 2^5.\sqrt{4}$$

Si $(x;y)\to(2;4)$, el factor $(x-2).y$ tiende a 0, y el factor $y+e^x.\mathrm{sen}\,\frac{x}{y-2}$ está acotado (aunque carece de límite en (2;4))

- $$\lim_{(x;y)\to(1;3)} y^5.e^x + (x-1)^3.(y+y^x.\cos^7\frac{e^x}{y-3}) = 3^5.e + 0 = 3^5.e$$

Si $(x;y)\to(1;3)$, el factor $(x-1)^3$ tiende a 0, y el factor $y+y^x.\cos^7\frac{e^x}{y-3}$ está acotado (aunque carece de límite en (1;3))

- $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} y^3.\mathrm{sen}\,\frac{y^3+e^{x-\mathrm{sen}\,x}}{x} = 0$$

Si $(x;y)\to(0;0)$, el factor y^3 tiende a 0, y el factor $\mathrm{sen}\,\frac{y^3+e^{x-\mathrm{sen}\,x}}{x}$ está acotado (aunque carece de límite en (0;0))

- $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} y^2.x^7.\cos\frac{1}{1-e^{(x+y)}} = 0$$

Si $(x;y)\to(0;0)$, el factor $y^2.x^7$ tiende a 0, y el factor $\cos\frac{1}{1-e^{(x+y)}}$ está acotado (aunque carece de límite en (0;0))

- $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x+y^2).3^{\text{sen } 1/(x.y)} = 0$$

Si $(x;y)\to(0;0)$, el factor $x+y^2$ tiende a 0, y el factor $3^{\text{sen } 1/(x.y)}$ está acotado (aunque carece de límite en $(0;0)$)

- $$\lim_{(u;v)\to(0;0)} 3+v^2.\text{sen}\,\frac{1}{u}+u^3.\cos\,\frac{1}{v} = 3+0+0=3$$

Si $(u;v)\to(0;0)$, los factores v^2 y u^3 tienden a 0, y los factores sen $(1/u)$ y cos $(1/u)$ están acotados (aunque carecen de límite en $(0;0)$)

2.7 PROPIEDADES DE LOS CAMPOS CON LÍMITE FINITO EN UN PUNTO

1) **Si el campo escalar "f" tiene límite en el punto $\bar{x}_0$, tiene un solo límite en $\bar{x}_0$.**

Por reducción al absurdo: si "f" tiene dos límites distintos L y L* en $\bar{x}_0$ y tomáramos $0<\varepsilon<|L-L^*|/2$, como L es el límite de "f" en $\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ sería $f(\bar{x})\in(L-\varepsilon;L+\varepsilon)$; y siendo L* el límite de "f" en $\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ sería $f(\bar{x})\in(L^*-\varepsilon;L^*+\varepsilon)$. Así, **cerca** de $\bar{x}_0$ sería $f(\bar{x})\in(L-\varepsilon;L+\varepsilon)$ y $f(\bar{x})\in(L^*-\varepsilon;L^*+\varepsilon)$, lo que es absurdo, pues los intervalos $(L-\varepsilon;L+\varepsilon)$ y $(L^*-\varepsilon;L^*+\varepsilon)$ carecen de puntos comunes si $0<\varepsilon<|L-L^*|/2$.

2) **Si el campo escalar "f" tiene límite finito en el punto $\bar{x}_0$, está acotado cerca de $\bar{x}_0$.**

Si $f(\bar{x})\to L\in\Re$ cuando $\bar{x}\to\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $|f(\bar{x})-L|<\varepsilon, \forall\,\varepsilon>0$; o sea, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $L-\varepsilon<f(\bar{x})<L+\varepsilon$. En consecuencia, si $\varepsilon=1$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $L-1<f(\bar{x})<L+1$; por tanto, **cerca** de $\bar{x}_0$ la función "f" está acotada inferiormente por "$L-1$" y superiormente por "$L+1$".

3) **Si el campo escalar "f" tiene límite finito no nulo en el punto $\bar{x}_0$, el campo 1/f está acotado cerca de $\bar{x}_0$.**

En efecto, si $f(\bar{x})\to L\in\Re-\{0\}$ cuando $\bar{x}\to\bar{x}_0$, entonces, $\forall\,\varepsilon>0$, sucede que $|f(\bar{x})-L|<\varepsilon$ **cerca** de $\bar{x}_0$; y como $\big||f(\bar{x})|-|L|\big|\le|f(\bar{x})-L|$, **cerca** de $\bar{x}_0$ también sucede que $\big||f(\bar{x})|-|L|\big|\le\varepsilon$, o lo que es igual:

$$-\varepsilon<|f(\bar{x})|-|L|<\varepsilon\Rightarrow|L|-\varepsilon<|f(\bar{x})|<|L|+\varepsilon\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{|L|-\varepsilon}>\frac{1}{|f(\bar{x})|}>\frac{1}{|L|+\varepsilon}\Rightarrow\frac{5}{4.|L|}>\frac{1}{|f(\bar{x})|}>\frac{5}{6.|L|}$$

si, por ejemplo, consideramos que $\varepsilon=|L|/5$

lo que significa que el campo escalar $1/f(\bar{x})$ está acotado **cerca** de $\bar{x}_0$.

4) **Cerca del punto $\bar{x}_0$ un campo escalar tiene igual signo que su límite en $\bar{x}_0$.**

Si $L > 0$ es el límite de "f" en $\bar{x}_0$, como **cerca** de $\bar{x}_0$ el valor de $f(\bar{x})$ difiere de "L" en menos que "L", **cerca** de $\bar{x}_0$ es $f(\bar{x}) > 0$.
Análogamente, si $L < 0$ resulta que **cerca** de $\bar{x}_0$ es $f(\bar{x}) < 0$.

5) **Si L es el límite del campo escalar "f" en el punto $\bar{x}_0$ y $L < k$ $(L > k)$, cerca de $\bar{x}_0$ es $f(\bar{x}) < k$ $(f(\bar{x}) > k)$.**

Si $L < k$, tomando $0 < \varepsilon < k - L$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $|f(\bar{x}) - L| < k - L$; o sea: $-(k - L) < f(\bar{x}) - L < k - L \Rightarrow -(k - 2.L) < f(\bar{x}) < k$.

Si $L > k$, tomando $0 < \varepsilon < L - k$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $|f(\bar{x}) - L| < L - k$; o sea: $-(L - k) < f(\bar{x}) - L < L - k \Rightarrow k < f(\bar{x}) < 2.L - k$.

6) **Si los campos escalares "f" y "g" tienen distinto límite en $\bar{x}_0$, el de mayor límite supera al otro cerca de $\bar{x}_0$.**

Si L y L* (L > L*) son los respectivos límites de "f" y "g" en $\bar{x}_0$, siendo "k" un número comprendido entre L* y L (o sea, $L^* < k < L$), **cerca** de $\bar{x}_0$ es $g(\bar{x}) < k$ y $f(\bar{x}) > k$. En consecuencia, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$.

7) **Si cerca de $\bar{x}_0$ es $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$ y los campos escalares "f" y "g" tienen límite en $\bar{x}_0$, es $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) \geq \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x})$.**

Por reducción al absurdo: según la propiedad anterior, si fuera

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) < \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x})$$

cerca de $\bar{x}_0$ sería $f(\bar{x}) < g(\bar{x})$, lo que va contra la hipótesis.
Observa: no se excluye la posibilidad de que los límites sean iguales, a pesar de que **cerca** de $\bar{x}_0$ sea $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$.

8) **Si cerca de $\bar{x}_0$ un campo escalar está comprendido entre dos campos que tienen el mismo límite en $\bar{x}_0$, tiene este mismo límite en $\bar{x}_0$.**

Si los campos escalares "u" y "v" tienen límite L en el punto $\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es:

$$L - \varepsilon < u(\bar{x}) < L + \varepsilon \;;\; L - \varepsilon < v(\bar{x}) < L + \varepsilon$$

Si **cerca** de $\bar{x}_0$ es $u(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \leq v(\bar{x})$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es:

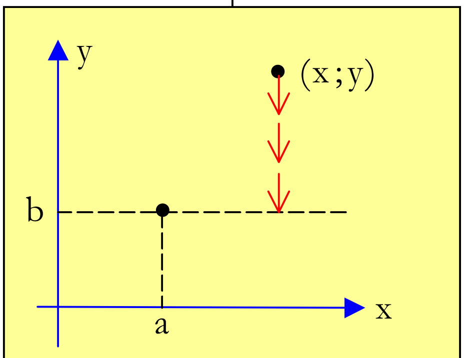
$$L - \varepsilon < u(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \leq v(\bar{x}) < L + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < f(\bar{x}) - L < \varepsilon \Rightarrow |f(\bar{x}) - L| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = L$$

2.8 LÍMITES REITERADOS DE UN CAMPO ESCALAR EN UN PUNTO

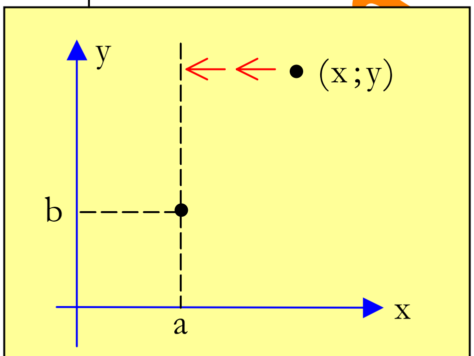
Sea el campo $f : D \subseteq \Re^2 \mapsto \Re$ y $\overline{u}_0 = (a;b) \in \text{Ac.}(D)$.

Sean $f_1 : \Re \mapsto \Re$ y $f_2 : \Re \mapsto \Re$ las funciones de una variable tales que

$$f_1(x) = \lim_{y \to b} f(x,y) \ ; \ f_2(y) = \lim_{x \to a} f(x,y)$$



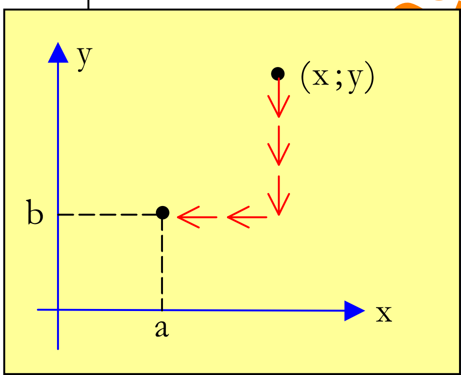
Manteniendo "x" constante, hacemos que $y \to b$

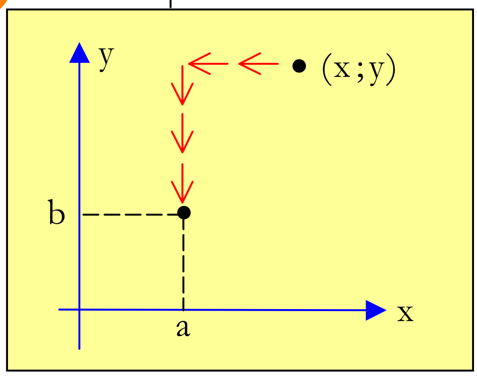


Manteniendo "y" constante, hacemos que $x \to a$

Los **límites reiterados** de "f" en el punto $\overline{u}_0 = (a;b)$ son:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x;y) \right) \ ; \ \lim_{y \to b} f_2(y) = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x;y) \right)$$





Propiedades

1) Si existen las funciones f_1 y f_2 y "f" tiene límite "L" en $\overline{u}_0 = (a;b)$, existen los límites reiterados de "f" y su valor también es "L".

2) Si existen los límites reiterados y son distintos, entonces "f" carece de límite en $\overline{u}_0 = (a;b)$. Tal es el caso de $f(x;y) = (2.x + 3.y)/(7.x + 5.y)$; para ella, en el punto $\overline{u}_0 = (0;0)$, es:

$$f_1(x) = \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{2.x + 3.y}{7.x + 5.y} = \begin{cases} \boxed{\text{si } x \neq 0} = \dfrac{2.x}{7.x} = \dfrac{2}{7} \\ \boxed{\text{si } x = 0} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{3.y}{5.y} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Por tanto: $$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

Es:

$$f_2(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2.x+3.y}{7.x+5.y} = \begin{cases} \boxed{\text{si } y \neq 0} = \dfrac{3.y}{5.y} = \dfrac{3}{5} \\ \boxed{\text{si } y = 0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2.x}{7.x} = \dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{y\to 0} f_2(y) = \lim_{y\to 0} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

3) Pueden existir los límites reiterados y ser iguales sin que "f" tenga límite en $\overline{u}_0 = (a;b)$. Tal es el caso de $f(x;y) = x.y/(x^2+y^2)$; para ella, en el punto $\overline{u}_0 = (0;0)$, es:

$$f_1(x) = \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x.y}{x^2+y^2} = \begin{cases} \boxed{\text{si } x \neq 0} = 0 \\ \boxed{\text{si } x = 0} = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Es:

$$f_2(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x.y}{x^2+y^2} = \begin{cases} \boxed{\text{si } y \neq 0} = 0 \\ \boxed{\text{si } y = 0} = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $$\lim_{y\to 0} f_2(y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Sin embargo "f" carece de límite en $\overline{u}_0 = (0;0)$, pues:

$$\lim_{x\to 0} f(x;m.x) = \lim_{x\to 0} \frac{x.(m.x)}{x^2+(m.x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

4) Puede existir el límite de "f" en $\overline{u}_0 = (a;b)$ sin que existan los límites reiterados en dicho punto. Tal es el caso del campo escalar "f" definido como

$$f(x;y) = \begin{cases} 2.y.\text{sen}\,(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para él, en el punto $\overline{u}_0 = (0;0)$, es:

$$f_2(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 2.y.\text{sen}\,\frac{1}{x} = \begin{cases} \boxed{\text{si } y = 0} = 0 \\ \boxed{\text{si } y \neq 0} = \text{no existe} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{pues sucede que sen } \frac{1}{x} \text{ carece de límite cuando } x \to 0}$$

y no existiendo $f_2(y)$, no existe el límite reiterado $\lim\limits_{y\to b} f_2(y)$.

Sin embargo "f" tiene límite 0 en el punto $\overline{u}_0 = (0;0)$, pues la condición $|f(x;y) - 0| < \varepsilon$ se cumple trivialmente en todo punto $(0;y)$, ya que "f" toma el valor 0 en esos puntos. En los puntos $(x;y)$ en que $x \neq 0$, sucede que:

$$|f(x;y)-0| = \left|2.y.\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| = 2.|y|.\left|\text{sen}\,\frac{1}{x}\right| \leq 2.|y|$$

$$\boxed{\text{pues } |\text{sen}\,(1/x)| \leq 1,\ \forall\ x \neq 0}$$

Así, la condición $|f(x;y)-0| < \varepsilon$ se cumple siempre que $|y| < \varepsilon/2$.

2.9 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

A continuación demostramos propiedades que hemos usado muchas veces.

1) Límite de una constante por una función

Si "c" es una constante y el campo $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ tiene límite "L" en el punto $\bar{x}_0 \in Ac.(D)$, entonces $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} c.f(\bar{x}) = c.L$.

En efecto, si "f" tiene límite "L" en el punto $\bar{x}_0 \in Ac.(D)$, **cerca** de $\bar{x}_0$ sucede que $|f(\bar{x})-L| < \varepsilon/|c|,\ \forall\ \varepsilon > 0$; así, **cerca** de $\bar{x}_0$ sucede que

$$|c.f(\bar{x})-c.L| = |c.(f(\bar{x})-L)| = |c|.|f(\bar{x})-L| < |c|.\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

lo que demuestra que $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} c.f(\bar{x}) = c.L$.

2) Límite de una suma de funciones

Si L_1 es el límite de $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ en el punto $\bar{x}_0 \in Ac.(D)$ y L_2 es el límite de $g: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re$ en $\bar{x}_0$, entonces $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f(\bar{x})+g(\bar{x})) = L_1 + L_2$.

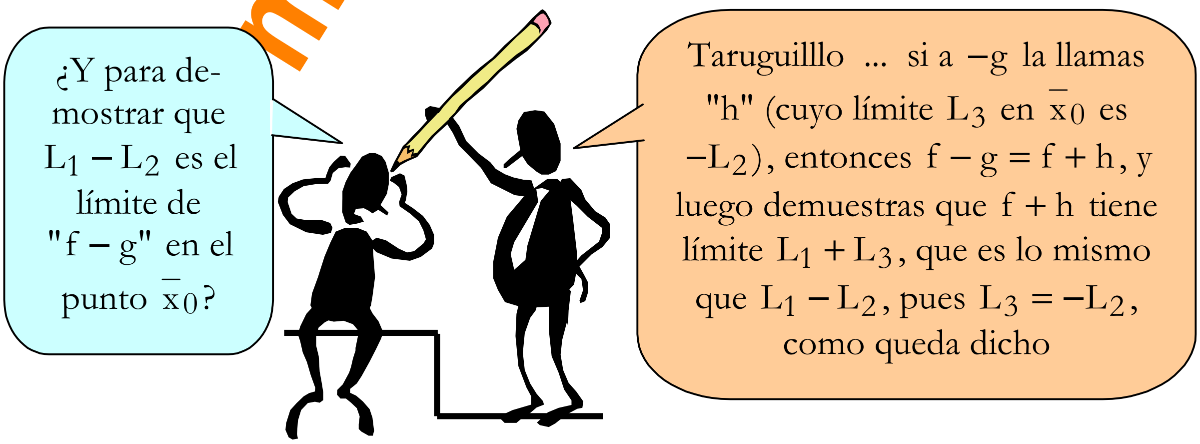
En efecto, siendo L_1 y L_2 los respectivos límites de "f" y "g" en el punto $\bar{x}_0 \in Ac.(D)$, **cerca** de $\bar{x}_0$ sucede que

$$|f(\bar{x})-L_1| < \varepsilon/2,\ \forall\ \varepsilon > 0\ ;\ |g(\bar{x})-L_2| < \varepsilon/2,\ \forall\ \varepsilon > 0$$

Por tanto, **cerca** de $\bar{x}_0$ sucede que

$$|(f(\bar{x})+g(\bar{x}))-(L_1+L_2)| = |(f(\bar{x})-L_1)+(g(\bar{x})-L_2)| \leq$$
$$\leq |f(\bar{x})-L_1| + |g(\bar{x})-L_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que demuestra que $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f(\bar{x})+g(\bar{x})) = L_1 + L_2$



3) Límite de un producto de funciones

Si $f:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$ tiene límite L_1 en el punto $\bar{x}_0\in Ac.(D)$ y $g:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$ tiene límite L_2 en dicho punto, entonces $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}).g(\bar{x})=L_1.L_2$

En efecto, siendo L_1 el límite de "f" en el punto $\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es

$$\left|f(\bar{x})-L_1\right|<\varepsilon/2.\left|L_1\right|,\ \forall\,\varepsilon>0$$

Como "f" tiene límite en $\bar{x}_0$, está acotada en dicho punto; es decir, existe un número positivo "k" tal que **cerca** de $\bar{x}_0$ es $\left|f(\bar{x})\right|<k$. Si L_2 es el límite de "g" en el punto $\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $\left|g(\bar{x})-L_2\right|<\varepsilon/(2.k)$, $\forall\,\varepsilon>0$. Así, **cerca** de $\bar{x}_0$ es:

$$\begin{aligned}\left|f(\bar{x}).g(\bar{x})-L_1.L_2\right|&=\left|f(\bar{x}).g(\bar{x})-L_2.f(\bar{x})+L_2.f(\bar{x})-L_1.L_2\right|=\\&=\left|f(\bar{x}).(g(\bar{x})-L_2)+L_2.(f(\bar{x})-L_1)\right|\le\\&\le\left|f(\bar{x}).(g(\bar{x})-L_2)\right|+\left|L_2.(f(\bar{x})-L_1)\right|=\\&=\left|f(\bar{x})\right|.\left|g(\bar{x})-L_2\right|+\left|L_2\right|.\left|f(\bar{x})-L_1\right|<k.\frac{\varepsilon}{2.k}+\left|L_2\right|.\frac{\varepsilon}{2.\left|L_2\right|}=\varepsilon\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}).g(\bar{x}))=L_1.L_2$

4) Límite de un cociente de funciones

Demostremos primero que si $g:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$ tiene límite $L_2\neq 0$ en el punto $\bar{x}_0\in Ac.(D)$, entonces $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} 1/g(\bar{x})=1/L_2$.

En efecto, si "g" tiene límite no nulo en $\bar{x}_0$, existe un número positivo "k" tal que **cerca** de $\bar{x}_0$ es $\left|g(\bar{x})\right|>k$; además, por ser L_2 el límite de "g" en $\bar{x}_0$, **cerca** de $\bar{x}_0$ es $\left|g(\bar{x})-L_2\right|<\varepsilon.k.\left|L_2\right|$, $\forall\,\varepsilon>0$. Así, **cerca** de $\bar{x}_0$ es:

$$\left|\frac{1}{g(\bar{x})}-\frac{1}{L_2}\right|=\left|\frac{L_2-g(\bar{x})}{L_2.g(\bar{x})}\right|=\left|\frac{g(\bar{x})-L_2}{L_2.g(\bar{x})}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{L_2}\right|.\left|\frac{1}{g(\bar{x})}\right|.\left|g(\bar{x})-L_2\right|<\left|\frac{1}{L_2}\right|.\frac{1}{k}.\varepsilon.k.\left|L_2\right|=\varepsilon$$

$$\boxed{\left|g(\bar{x})\right|>k\Rightarrow\left|1/g(\bar{x})\right|<1/k}$$

Si $f:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$ tiene límite L_1 en el punto $\bar{x}_0\in\Re^n$ y $g:D\subseteq\Re^n\mapsto\Re$ tiene límite $L_2\neq 0$ en dicho punto, entonces $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})/g(\bar{x})=L_1/L_2$.

En efecto, si $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x})=L_2\neq 0$, es $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} 1/g(\bar{x})=1/L_2$, y así:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}=\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}).\frac{1}{g(\bar{x})}=L_1.\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

2.10 LÍMITE DE UN CAMPO VECTORIAL EN UN PUNTO

El **límite** del campo vectorial $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re^m$ en el punto $\overline{x}_0 \in Ac.(D)$ es $\overline{L} \in \Re^m$ si sea cual el número positivo ε que se elija, es posible encontrar otro número $r > 0$ tal que en todo punto $\overline{x} \in D$ del entorno reducido de centro en $\overline{x}_0$ y radio "r" sucede que $\| f(\overline{x}) - \overline{L} \| < \varepsilon$:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, r > 0 \,/\, \underbrace{\| f(\overline{x}) - \overline{L} \|}_{\text{distancia entre los puntos } f(\overline{x}) \text{ y } \overline{L} \text{ de } \Re^m} < \varepsilon \text{ si } 0 < \underbrace{\| \overline{x} - \overline{x}_0 \|}_{\text{distancia entre los puntos } \overline{x} \text{ y } \overline{x}_0 \text{ de } \Re^n} < r,\ \overline{x} \in D$$

O sea, **cerca** de $\overline{x}_0$ sucede que $\| f(\overline{x}) - \overline{L} \| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

El campo $f: D \subseteq \Re^n \mapsto \Re^m$ tiene límite en el punto $\overline{x}_0 \in Ac.(D)$ sólo si tienen límite en dicho punto los "m"" campos escalares que forman "f". ***Por ejemplo,*** el campo $f: \Re^2 \mapsto \Re^4$ tal que $f(\overline{x}) = (x_1.x_2^2 \,;\, x_1 + 5.x_2 \,;\, \text{sen }(x_1 - 2) \,;\, \text{Ln } x_1.x_2)$ tiene límite en el punto (2;3), pues todos los campos escalares que forman "f" tienen límite en (2;3):

$$\lim_{\overline{x} \to (2;3)} f(\overline{x}) = (18 \,;\, 17 \,;\, 0 \,;\, \text{Ln } 6)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\overline{x} \to (2;3)} x_1.x_2^2 = 2.3^2 = 18 \,;\, \lim_{\overline{x} \to (2;3)} x_1 + 2.x_2 = 2 + 5.3 = 17 \\ \displaystyle\lim_{\overline{x} \to (2;3)} \text{sen }(x_1 - 2) = \text{sen } 0 = 0 \,;\, \lim_{\overline{x} \to (2;3)} \text{Ln } x_1.x_2 = \text{Ln } 2.3 = \text{Ln } 6 \end{array}}$$

Por ejemplo, carece de límite en (0;0) el campo vectorial $f: \Re^2 \mapsto \Re^4$ tal que $f(\overline{x}) = (x_1.x_2^2 \,;\, \dfrac{x_1 + 5.x_2}{x_1 + x_2} \,;\, \text{sen }(x_1 - 2) \,;\, \text{Ln } x_1.x_2)$, pues el segundo de los campos escalares que forman "f" carece de límite en (0;0):

$$\lim_{\substack{(x_1;x_2) \to (0;0) \\ x_2 = m.x_1}} f_2(x_1;x_2) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1 + 5.m.x_1}{x_1 + m.x_1} = \frac{1 + 5.m}{1 + m}$$